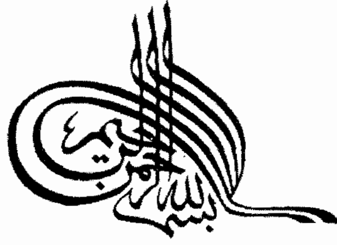
ویرایش هشتم سال ۲۰۰۸

مبانی فیزیک

جلد سوم: شاره ها، موجها، مبانی نور و فیزیک جدید

دیوید هالیدی - رابرت رزنیک - جرل واکر





ویرایش هشتم سال ۲۰۰۸

مبانی فیزیک

جلد سوم: شاره‌ها، موجها، مبانی نور و فیزیک جدید

نویسندگان

دیوید هالیدی – رابرت رزنیک – جرل واکر

مترجمان

محمدرضا جلیلیان نصرتی – محمد عابدینی

پیشگفتار

هدف

هدف اصلی *مبانی فیزیک*، ویرایش هفتم، همان هدفی است که در ۴۰ سال پیش در نخستین ویرایش آن توسط دیوید هالیدی و رابرت رزنیک به این صورت بیان شده بود: برای در اختیار قرار دادن ابزاری که مدرسان بتوانند دانشجویانی را آموزش دهند تا قادر باشند به نحو مؤثری مطالب علمی را بخوانند، مفاهیم اساسی را بشناسند، در مورد پرسشهای علمی استدلال و مسئله‌های کمی را حل کنند.

این فرایند برای دانشجویان یا مدرسان آسان نیست. در واقع درسی که به این کتاب مربوط می‌شود یکی از پر تقاضاترین درسهایی است که دانشجو انتخاب می‌کند. در عین حال این درس یکی از ارزشمندترین درسهاست، چون نظم بنیادین گیتی را آشکار می‌سازد که تمامی کاربردهای علمی و مهندسی از آن سرچشمه می‌گیرند.

چرا ویرایش جدید؟

بعضی می‌پرسند: «چون *مبانی فیزیک* به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته و به خوبی مورد پذیرش قرار گرفته است، چرا ویرایش جدید آن نوشته شده است؟» دو دلیل اصلی برای نوشتن ویرایش هفتم وجود دارد:

۱- بسیاری از استفاده‌کنندگان ویرایش ششم (هم مدرسان و هم دانشجویان) نکته‌ها و پیشنهادهایی جهت اصلاح کتاب ارسال کرده‌اند. این اصلاحها اکنون در متن و مسئله‌ها در سراسر کتاب اعمال شده‌اند. ما (مؤلف جدید جرال واکر و انتشارات جان وایلی و پسران) این کتاب را به عنوان طرحی رو به پیشرفت تلقی می‌کنیم و به مواردی که از سوی استفاده‌کنندگان آن دریافت می‌شود دلگرم می‌شویم. می‌توانید پیشنهادها، تصحیحها، نظرهای مثبت یا منفی خود را به انتشارات جان وایلی

(http:www.wiley.com/college/halliday) یا

جرل واکر (email:physics@wiley.com) ارسال کنید. ممکن است نتوان به همهٔ پیشنهادها پاسخ داد ولی همهٔ آنها را مطالعه و حفظ می‌کنیم.

۲- جرل واکر به هنگام تدریس کتاب *مبانی فیزیک* تجربه‌های دست اولی به دست آورده است. پس از هر درس و آزمون آن او نکته‌هایی را دربارهٔ مفاهیم و روشهای کار شده با دانشجویان و (چیزی که برای تألیف کتاب خیلی مهم است) مواردی را که موجب ابهاماتی در دانشجویان بوده است به دقت یادداشت کرده که اصلاحها مبتنی بر این یادداشتها اکنون در سراسر این کتاب اعمال شده است. هدف او این بوده است که نشان دهد که دانشجویان *می‌توانند* از مفاهیم اصلی فیزیک به طور مستدل به نتیجه گیریهای معتبر برسند.

موارد تغییر یافته مهم

– صدها مسئلهٔ پایان فصل به دلیل کار آمد کردن ارائه و پاسخ دوباره نوشته شده‌اند.

– تمام موارد معما گونهٔ آغاز فصل، مثالهای فیزیک کاربردی که برای ترغیب خواننده طراحی شده‌اند جدید بوده و از مجله‌های پژوهشی در زمینه‌های مختلف گرفته شده‌اند.

– نخستین بخش در هر فصل موضوع فصل را با این پرسش که «فیزیک چیست؟» آغاز می‌کند که پاسخ آن به فیزیک آن فصل بستگی دارد.

– فصلهای ۹ و ۱۰ ویرایش ششم طوری ترکیب شده‌اند که فصل ۹ فعلی بحث کاملی از اندازه حرکت و پایستگی اندازه حرکت را هم برای انفجارها و هم برخوردها می‌پوشاند.

– فصل مربوط به اندازه حرکت زاویه‌ای (فصل ۱۱) اکنون فیزیک ژیروسکوب را نیز شامل می‌شود.

– فصل مربوط به موجها (فصل ۳۲) استخراج معادلهٔ موج را در بر دارد.

– فصل مربوط به مدارهای AC (فصل ۳۱) پیش از معادله‌های ماکسول و مواد مغناطیسی (فصل ۳۲) ارائه شده است.

– فصل ۳۹ (در چاپ گسترش یافتهٔ کتاب) یافتن الگوی بور در اتم هیدروژن را نیز شامل می‌شود.

ویژگیهای فصلها

معما گونه‌های آغازین. هر فصل با معما گونهٔ شگفت انگیزی آغاز و در خلال فصل توضیح داده می‌شود تا دانشجو را برای مطالعهٔ فصل ترغیب کند. این قسمتها که مشخصهٔ *مبانی فیزیک* هستند، مبتنی بر پژوهشهای جاری است که در مجله‌های علمی، مهندسی، پزشکی و حقوقی گزارش شده‌اند.

فیزیک چیست؟ توصیفی از هر فصل است که با این پرسش و با پاسخی مرتبط با موضوع فصل آغاز می‌شود.

یک وقت لوله کشی از جرل واکر پرسید « برای زندگی چه می‌کنید؟» واکر پاسخ داد «فیزیک آموزش می‌دهم.» لوله کش چند دقیقه فکر کرد و سپس پرسید «فیزیک چیست؟» حرفهٔ لوله کش کاملاً مبتنی بر فیزیک است ولی او دربارهٔ فیزیک چیزی نمی‌دانست. بسیاری از دانشجویان در فیزیک مقدماتی نمی‌دانند فیزیک چیست و تصور می‌کنند که به حرفهٔ انتخابی آنها ربطی ندارد.

نکته‌های وارسی[1] نقطه‌های توقفی هستند که به طور اثر گذاری از دانشجو می‌پرسند که «آیا این پرسش را با دلایل مبتنی بر توصیف یا مسئلهٔ نمونه‌ای که خوانده‌ای می‌توانی پاسخ دهی؟ «اگر نه بهتر است دانشجو پیش از اینکه در فصل جلوتر برود به مطالب قبلی بر گردد. برای مثال نکتهٔ وارسی ۲ در فصل ۴ و نکتهٔ بازبینی ۲ در فصل ۱۱ را ببینید. پاسخ تمام نکته‌های وارسی در پایان کتاب داده شده‌اند.

مسئله‌های نمونه جهت کمک به دانشجو انتخاب شده‌اند تا مفاهیم اصلی را ساماندهی کنند و مهارتهای حل مسئله را بالا ببرند. اینها انتخاب شده‌اند تا نشان داده شود که چگونه می‌توان مسئله‌ها را به جای عدد گذاری سریع در معادله و بدون توجه به معانی معادله، به طور استدلالی حل کرد.

نکته‌های کلیدی در مسئله‌های نمونه دانشجو را بر مفاهیم اصلی و ریشه‌ای پاسخ به مسئله‌ای متمرکز می‌کند. در اصل این نکته‌های کلیدی می‌گویند «پاسخ خود را با استفاده از این مفهوم اصلی شروع می‌کنیم، روشی که ما را برای حل بسیاری از مسائل دیگر آماده می‌کند. با روشی که در آن با عدد گذاری

1- check point

سریع در معادله‌ای همراه است شروع نمی‌کنیم، این روشی است که چیزی در پی ندارد.»

تدبیرهای حل مسئله شامل راهکارهای مفیدی جهت راهنمایی دانشجویان مبتدی فیزیک است که چگونگی حل مسئله‌ها و پرهیز از خطاهای متداول را می‌آموزد.

بازنگری و خلاصه خلاصه‌ای از محتوای هر فصل را ترسیم می‌کند که حاوی مفاهیم اساسی است ولی نمی‌تواند جایگزین مطالعهٔ فصل شود.

پرسشها شبیه به نکته‌های وارسی‌اند و به جای محاسبه مستلزم تعقل و درک هستند. **پاسخ پرسشهای فرد در پایان کتاب داده شده است.**

مسئله‌ها در زیر عنوانهای بخش به ترتیب سخت بودن طبقه بندی شده‌اند. **پاسخ مسئله‌های فرد در پایان کتاب آمده است.**

علامتهایی جهت کمک بیشتر. وقتی پاسخهایی به صورت چاپی یا الکترونیکی جهت مسئله‌های فرد به دست داده شد، مطالبی دربارهٔ این مسائل وجود دارد که با این علامتها محل پاسخها به دانشجو و مدرس نشان داده می‌شوند. راهنمای علامت در آغاز هر مجموعه‌ای از مسایل به صورت زیر داده شده است:

SSM: پاسخ در کتاب حل مسئله‌ها داده شده است.

WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

مسئله‌های اضافی

این مسئله‌ها به صورت معینی ترتیب نیافته‌اند به طوری که دانشجو باید مشخص کند کدام بخشها از فصل به آنها مربوط‌اند.

مسئله‌های شبیه سازی وصل-خط[1] تقریباً کلیهٔ فصلها مسئله‌هایی وصل- خط دارند که فیزیک را در آن فصل شبیه سازی می‌کنند. در این فصلها علامتی در انتهای هر مسئله قرار داده شده است.

ویژگیهای اضافی

استدلال به جای عدد گذاری[2] نخستین هدف این کتاب آموزش استدلال همراه با موقعیتهای چالش برانگیز به دانشجویان از طریق اصول بنیادی در یک راه حل است. هر چند که در برخی مسئله های این کتاب عدد گذاری لازم است ولی (هدف اصلی) در اغلب مسئله‌ها بر استدلال تأکید دارد.

فصلها با حجمی منطقی. برای جلوگیری از بیشتر شدن قطر کتاب که می‌تواند باعث توقف گلوله‌ای شود (و همین‌طور دانشجو) حجم فصلها را معقول در نظر گرفته‌ایم. مطالب به اندازه‌ای توضیح داده شده است که دانشجو حرکت را آغاز کند ولی نه به اندازه‌ای که دانشجو نتواند دیدگاهها را تحلیل و به هم پیوند دهد. سخن آخر اینکه دانشجو پس از مطالعهٔ این کتاب و گذراندن درس مربوط به آن نیاز به مهارت تحلیل و پیوند دیدگاهها را پیدا خواهد کرد.

استفاده از ماشین حسابهای با قابلیت برداری. وقتی محاسبه‌های برداری در مسئلهٔ نمونه‌ای به طور مستقیم در نمایشگر ماشین حساب با قابلیت برداری انجام شد، پاسخ مسئلهٔ نمونهٔ آن واقعیت را مشخص می‌کند ولی هنوز جای تحلیل به شیوهٔ سنتی مؤلفه‌ای وجود دارد. هرگاه محاسبه‌های برداری به طور مستقیم روی نمایشگر انجام نگیرند، علت آن از طریق راه حل معلوم می‌شود.

نمودارها به عنوان برانگیزندهٔ اندیشه. اینها مسئله‌هایی هستند که نمودار دارند و در مورد نتیجه‌ای سؤال می‌کنند که مستلزم اطلاعات خیلی بیشتری از مطالعهٔ مربوط به اطلاعات یک نقطه از نمودار است. در اینجا، راه حل مستلزم درکی از وضعیت فیزیکی در مسئله و اصولی است که در پس معادله‌های مربوطه وجود دارند. این مسئله‌ها خیلی شبیه به معماهای شرلوک هلمز[3] هستند چون یک دانشجو حتماً باید تصمیم بگیرد که کدام اطلاعات مهم هستند. به عنوان مثال، مسئلهٔ ۳۸ در فصل ۴، مسئلهٔ ۸ در فصل ۱ و مسئلهٔ ۲۱ در فصل ۹ را ببینید.

مسئله‌های فیزیک کاربردی بر اساس پژوهشهای منتشر شده آورده شده‌اند که در آغاز معماگونهٔ فصل، در یک مسئلهٔ نمونه یا در مسئلهٔ تکلیفی قرار داده شده‌اند. به عنوان مثال آغاز فصل ۹، مسئلهٔ نمونهٔ ۲ تا ۸ در فصل ۲ و مسئلهٔ تکلیفی ۳۰ در فصل ۹ از این نمونه‌ها هستند. در مورد مثالی از مسئله‌ها که داستان ادامه داری را تشکیل می‌دهد به مسئله‌های ۴، ۳۵ و ۵۳ در فصل ۶ نگاه کنید.

مسئله‌های داستانی

مسئله ۵۷ در فصل ۵ که مربوط به تمام شدن سوخت پرواز شمارهٔ ۱۴۳ هواپیمایی کانادا در ارتفاع ۷/۹ km است و بی توجهی خدمه به یکای سوخت را نشان می‌دهد یکی از صدها داستان واقعی از این قبیل است (درس بزرگی برای دانشجویانی که یکاها را در نظر نمی‌گیرند.)

مکملهای دانشجویان

پایگاه اینترنت دانشجویی. این پایگاه عبارت است از http://www.wiley.com/college/halliday که برای مبانی فیزیک ویرایش هفتم طراحی شده و دانشجویان را در مطالعه فیزیک کمک می‌کند.

راهنمای حل مسئله که به وسیله مترجمان تهیه شده و به دانشجو در حل مسئله‌ها کمک می‌کند.

1- on-line simulation
2- reasoning versus plug-and-chug
3- Sherlock Holmes

هماهنگی مطالب کتاب را عهده‌دار بوده است کمال امتنان و قدردانی به عمل می‌آید. از پرسنل حروفچینی معرفت که زحمات زیادی را در حروفچینی و صفحه‌آرایی کتاب متقبل شده‌اند قدردانی می‌شود که بدون این زحمات کتاب به سرانجام نمی‌رسید. از کلیهٔ همکاران و کسانی که بدون دخالت آنان امکان چاپ این کتاب فراهم نمی‌شد تشکر می‌شود.

نظرها و پیشنهادهای خوانندگان گرامی، استادان و دانشجویان و افرادی که به طور مستقیم این کتاب را مورد استفاده قرار می‌دهند، تأثیرگذارترین عامل در بهبود این ترجمه به شمار می‌رود. انعکاس مواردی که در ترجمهٔ متن، شکلها، فرمولها و غیره از نظر دور مانده است می‌تواند موجب اصلاحات در چاپهای بعدی شود. انعکاس این موارد به ناشر این کتاب موجب ارتقای کیفیت ترجمه و انتشار آن در چاپهای بعدی خواهد شد که بدین وسیله پیشاپیش قدردان و سپاسگزار این گرامیان خواهیم بود. نظرهای خود را به آدرس ناشر یا به پست الکترونیکی info@andazehnegasht.com ارسال کنید تا مورد استفاده قرار گیرد.

فهرست

فصل ۳۰

فصل ۳۱

فصل ۳۲

فصل ۳۳

فصل ۳۴

فصل ۳۵

فصل ۳۶

فصل ۳۷

فصل ۳۸

فصل ۳۹

فصل ۴۰

فصل ۴۱

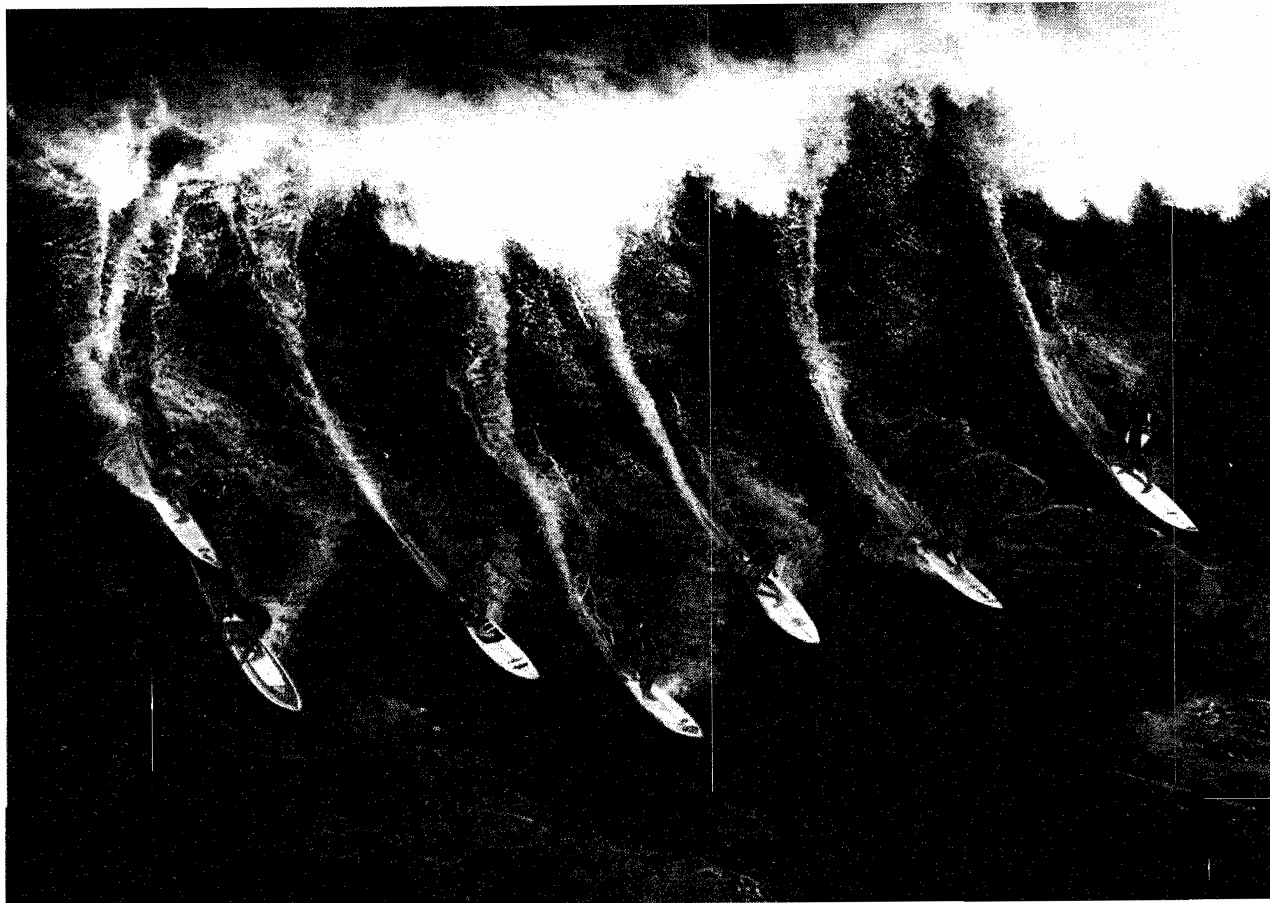
فصل ۴۲

فصل ۴۳

فصل ۴۴

پیوستها

۳۰ شاره‌ها



موج سوار برای رسیدن به موج بزرگ بعدی بـه آرامـی زانـوی خـود را روی تختـهٔ مـوج سواری خم می‌کند. وقتی او در هنگام جلو رفتن موج بلندی را در نظر می‌گیرد، به سـرعت به طرف ساحل حرکت می‌کند به طوری که او تقریباً با همان سرعتی که موج در زیر پـای او در جریان است حرکت می‌کند. سپس او روی تخته می‌ایستد و به آرامی تعـادل خـود را حفظ می‌کند. او چگونه می‌تواند موج سـواری را ادامـه دهـد؟ از طرفـی دیگـر او چگونـه می‌تواند در جلو موج به بالا و پایین حرکت کند؟

خلاصه موج سـوار چگونـه موج سواری می‌کند؟

پاسخ در همین فصل.

۳۰-۱ فیزیک چیست؟

فیزیک شاره‌ها اساس مهندسی هیدرولیک است، شاخه‌ای از مهندسی که در بسیاری از شاخه‌ها کاربرد دارد. مهندس هسته‌ای جریان شاره را در دستگاه هیدرولیکی یک راکتور هسته‌ای مطالعه می‌کند در حالی که مهندس پزشکی جریان خون را در سرخرگ بیمار مطالعه می‌کند. مهندس محیط زیست به چگونگی زهکشی از زمینهای بایر یا آبیاری مزارع علاقه‌مند است. مهندس دریانوردی ممکن است به خطراتی که غواصها در عمق دریا با آنها مواجه‌اند یا به امکان فرار خدمه از زیر دریایی غرق شده علاقه‌مند باشد. مهندس هوانوردی ممکن است دستگاههایی هیدرولیکی را طراحی کند که زبانه‌های بالهای هواپیما را در موقع فرود کنترل کند.

قبل از اینکه بتوانیم چنین کاربردهایی را در فیزیک شاره‌ها مطالعه کنیم، باید ابتدا به این پرسش پاسخ دهیم که «شاره چیست»؟

۳۰-۲ شاره چیست؟

شاره، بر خلاف جامد، ماده‌ای است که می‌تواند جریان یابد. شاره‌ها شکل ظرفی را به خود می‌گیرند که در آنها ریخته می‌شوند. این رفتار به این دلیل است که آنها نمی‌توانند نیرویی را که به طور مماسی بر سطح آنها وارد می‌شود تحمل کنند. (بر اساس مفاهیم بخش ۱۲-۷، شاره ماده‌ای است که چون نمی‌تواند تنش برشی را تحمل کند جریان می‌یابد. ولی می‌تواند نیرویی را در جهت عمود بر سطح خود وارد کند.) برخی مواد، مانند قیر، برای گرفتن شکل ظرف خود به زمان زیادی نیاز دارند، ولی سرانجام به آن وضعیت می‌رسند، بنابراین، آنها را نیز شاره به حساب می‌آوریم.

ممکن است تعجب کنید که چرا مایعها و گازها را با هم در نظر می‌گیریم و آنها را شاره می‌نامیم. غیر از این (ممکن است بگویید) آب به همان اندازه با بخار تفاوت دارد که با یخ متفاوت است. در واقع چنین نیست. اتمهای سازندهٔ یخ مانند سایر جامدهای بلورین، در یک آرایهٔ سه بعدی نسبتاً سخت به نام شبکهٔ بلوری آرایش یافته‌اند. ولی نه در بخار و نه در آب یک چنین آرایش منظم برد بلندی وجود ندارد.

۳۰-۳ چگالی و فشار

هرگاه دربارهٔ اجسام صلب بحث می‌کنیم، منظور تکه‌های خاصی از ماده مانند قطعه‌های چوب، توپ بیسبال یا میله‌های فلزی است. کمیتهای فیزیکی که مفید تشخیص داده می‌شوند و برحسب آنها می‌توان قانونهای نیوتون را بیان کرد عبارت‌اند از *جرم* و *نیرو*. به عنوان مثال می‌گوییم بر قطعه‌ای به جرم $۳/۶\,\mathrm{kg}$ نیروی $۲۵\,\mathrm{N}$ وارد شده است.

در مورد شاره‌ها بیشتر به مادهٔ گسترده و خواصی علاقه‌مندیم که می‌توانند در ماده از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر تغییر کنند. بهتر است که به جای جرم و نیرو، از **چگالی** و **فشار** صحبت کنیم.

چگالی

برای یافتن چگالی ρ شاره در هر نقطه، عنصر حجمی کوچک ΔV را در اطراف آن نقطه در نظر می‌گیریم و جرم Δm شارهٔ موجود در این عنصر را اندازه می‌گیریم. بنابراین، **چگالی** عبارت است از

$$\rho=\frac{\Delta m}{\Delta V} \qquad (۳۰\text{-}۱)$$

به لحاظ نظری، چگالی در هر نقطه از یک شاره عبارت است از حد این نسبت هنگامی که عنصر حجم ΔV در آن نقطه کوچک و کوچکتر شود. در عمل، فرض می‌کنیم که نمونهٔ شاره در مقایسه با ابعاد اتمی بزرگ و بنابراین، نسبت به اتمها به جای «تکه تکه» بودن یکدست «با چگالی یکنواخت» است.

جدول ۳۰-۱ برخی از چگالیها

ماده یا جسم	چگالی $(\mathrm{kg/m^3})$	ماده یا جسم	چگالی $(\mathrm{kg/m^3})$
فضای بین ستاره‌ای	$۱۰^{-۲۰}$	اهن	$۷/۹\times۱۰^{۳}$
بهترین خلاء آزمایشگاهی	$۱۰^{-۱۷}$	جیوه	$۱۳/۶\times۱۰^{۳}$
هوا: $۲۰^{\circ}\mathrm{C}$ و $۱\,\mathrm{atm}$	۱/۲۱	زمین: متوسط	$۵/۵\times۱۰^{۳}$
$۲۰^{\circ}\mathrm{C}$ و $۵\,\mathrm{atm}$	۶۰/۵	هسته	$۹/۵\times۱۰^{۳}$
استایروفوم	۱×۱۰^{۲}	پوسته	$۲/۸\times۱۰^{۳}$
یخ	$۰/۹۱۷\times۱۰^{۳}$	خورشید: متوسط	$۱/۴\times۱۰^{۳}$
آب: $۲۰^{\circ}\mathrm{C}$ و $۱\,\mathrm{atm}$	$۰/۹۹۸\times۱۰^{۳}$	هسته	$۱/۶\times۱۰^{۳}$
$۲۰^{\circ}\mathrm{C}$ و $۵\,\mathrm{atm}$	$۱/۰۰۰\times۱۰^{۳}$	ستارهٔ کوتولهٔ سفید (هسته)	$۱۰^{۱۰}$
آب دریا: $۲۰^{\circ}\mathrm{C}$ و $۱\,\mathrm{atm}$	$۱/۰۲۴\times۱۰^{۳}$	هستهٔ اورانیوم	۳×۱۰^{۱۷}
خون	$۱/۰۶۰\times۱۰^{۳}$	ستارهٔ نوترونی (هسته)	$۱۰^{۱۸}$

این فرض امکان می‌دهد تا معادلهٔ ۳۰-۱ را به صورت زیر بنویسیم

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{(چگالی یکنواخت)} \qquad (۳۰-۲)$$

که در آن m و V جرم و حجم نمونه‌اند.

چگالی یک خاصیت نرده‌ای و یکای SI آن کیلوگرم بر متر مکعب است. جدول ۳۰-۱ چگالیهای برخی از مواد و چگالیهای متوسط چند جسم را نشان می‌دهد. توجه کنید که چگالی گاز (به هوا در جدول نگاه کنید) به طور قابل ملاحظه‌ای با فشار تغییر می کند، ولی چگالی مایع (به آب نگاه کنید) این طور نیست. یعنی گازها به آسانی تراکم پذیرند ولی مایعها این طور نیستند.

فشار

همانند شکل ۳۰-۱ الف یک وسیلهٔ کوچک حس کنندهٔ فشار را در نظر می‌گیریم که داخل یک ظرف پر شده از شاره آویزان است. این حسگر (شکل ۳۰-۱ ب) از پیستونی به مساحت ΔA تشکیل شده که در استوانه‌ای کاملاً چسبیده به آن واقع است و روی فنری قرار دارد. یک وسیلهٔ قرائت، تعیین مقدار تراکم فنر (مدرج شده) توسط شارهٔ اطراف را امکان‌پذیر می‌کند، و بزرگی ΔF نیرویی را که بر پیستون وارد می‌شود نشان می‌دهد. **فشار** وارد از شاره بر پیستون را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A} \qquad (۳۰-۳)$$

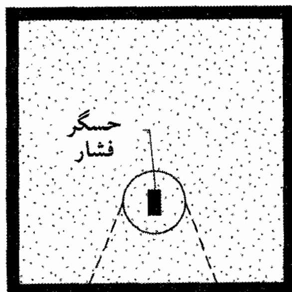
از لحاظ نظری، فشار در هر نقطه از شاره عبارت است از حد این نسبت هنگامی که مساحت ΔA پیستون واقع در آن نقطه کوچک و کوچکتر شود. ولی اگر در سراسر سطح تخت A نیرو یکنواخت باشد، معادلهٔ ۳۰-۳ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$p = \frac{F}{A} \quad \text{(فشار نیروی یکنواخت روی سطح تخت)} \qquad (۳۰-۴)$$

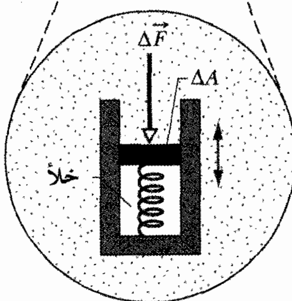
که در آن F بزرگی نیروی عمودی وارد بر سطح A است. (هرگاه دربارهٔ نیروی یکنواخت در یک سطح صحبت می‌کنیم، منظور این است که نیرو در هر نقطه از سطح به طور یکسان توزیع شده است.)

با آزمایش معلوم می‌شود که در هر نقطهٔ معین از شارهٔ ساکن، فشار p تعریف شده با معادلهٔ ۳۰-۴ مقدار یکسانی دارد و سمتگیری حسگر فشار اهمیتی ندارد. فشار یک کمیت نرده‌ای است، که هیچ خاصیت مربوط به جهت ندارد. این درست است که نیروی وارد بر پیستون حسگر فشار یک بردار است، ولی معادلهٔ ۳۰-۴ فقط شامل بزرگی آن نیرو است که یک کمیت نرده‌ای است.

یکای SI فشار نیوتون بر متر مکعب است که **پاسکال** (Pa) نام دارد.



(الف)



(ب)

شکل ۳۰-۱ (الف) ظرف پر از شاره حاوی یک حسگر کوچک فشار که در شکل (ب) نشان داده شده است. فشار به کمک موقعیت نسبی پیستون متحرک در حسگر اندازه‌گیری می‌شود.

در کشورهای متریک، سنجه‌های فشار لاستیک اتومبیل برحسب کیلو پاسکال مدرج شده‌اند. پاسکال به برخی یکاهای فشار معمولی (غیر SI) به صورت زیر مربوط می‌شود

$$۱\,\text{atm} = ۱/۰۱ \times ۱۰^{۵}\ \text{Pa} = ۷۶۰\ \text{torr} = ۱۴/۷\ \text{lb/in}^{۲}$$

اتمسفر (atm)، همانطور که از اسم آن پیدا است، فشار متوسط و تقریبی جو در سطح دریاست. تور (از نام ایوانجلیستا توریچلی[1]، کسی که فشارسنج جیوه‌ای را در سال ۱۶۷۴/۱۰۵۳ اختراع کرد) پیشتر *میلی‌متر جیوه* (mm Hg) نامیده می‌شد. پوند بر اینچ مربع اغلب به اختصار psi نوشته می‌شود. جدول ۳۰-۲ برخی از فشارها را نشان می‌دهد.

1. Evangelista Torricelli

جدول ۳۰-۲ برخی از فشارها

	فشار (Pa)		فشار (Pa)
مرکز خورشید	۲×۱۰^{۱۶}	چرخ اتومبیل[1]	۲×۱۰^{۵}
مرکز زمین	۴×۱۰^{۱۱}	جو در سطح دریا	$۱/۰\times۱۰^{۵}$
بیشترین فشار آزمایشگاهی قابل دوام	$۱/۵\times۱۰^{۱۰}$	فشار خون متعارف[1و2]	$۱/۶\times۱۰^{۴}$
عمیقترین گودال اقیانوس (کف)	$۱/۱\times۱۰^{۸}$	بهترین خلاء آزمایشگاهی	$۱۰^{-۱۲}$
پاشنهٔ کفش خیلی باریک بر کف اتاق	۱×۱۰^{۶}		

۱- فشار بیشتر از فشار جو

۲- معادل ۱۲۰ torr در سنجهٔ فشار پزشکان

مسئلهٔ نمونه ۳۰-۱

ابعاد یک اتاق نشیمن ۳/۵ m و ۴/۲ m و ارتفاع آن ۲/۴ m است.

(الف) وزن هوای درون اتاق وقتی فشار هوا ۱/۰ atm باشد، چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی (۱) وزن هوا برابر mg است که در آن m جرم هواست. (۲) جرم m بنابر معادلهٔ ۳۰-۲ $(\rho = m/V)$ به چگالی هوا ρ و حجم هوا V مربوط است.

محاسبه: با به کار بردن همزمان این دو نکته و در نظر گرفتن چگالی هوا در فشار ۱ atm، از جدول ۳۰-۱ خواهیم داشت

$$mg = (\rho V)g$$
$$= (۱/۲۱\,\text{kg/m}^۳)(۳/۵\,\text{m}\times۴/۲\,\text{m}\times۲/۴\,\text{m})(۹/۸\,\text{m/s}^۲)$$
$$= ۴۱۸\,\text{N} \approx ۴۲۰\,\text{N}$$ (پاسخ)

این تقریباً وزن ۱۱۰ قوطی نوشابه است.

(ب) بزرگی نیروی وارد از جو روی سر یک انسان با مساحت $۰/۰۴۰\,\text{m}^۲$ چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی وقتی فشار شاره p وارد بر سطح به مساحت A یکنواخت باشد، نیروی شاره وارد بر سطح را می‌توان از معادلهٔ ۳۰-۴ $(p = F/A)$ به دست آورد.

محاسبه: اگرچه فشار هوا به طور روزانه تغییر می‌کند، می‌توان به طور تقریبی $p = ۱\text{atm}$ در نظر گرفت بنابراین معادلهٔ ۳۰-۴ به دست می‌دهد:

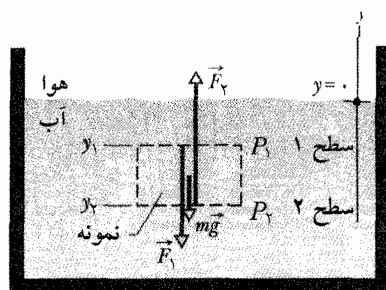
$$F = pA = (۱/۰\,\text{atm})\left(\frac{۱/۰۱\times۱۰^{۵}\,\text{N/m}^۲}{۱/۰\,\text{atm}}\right)(۰/۰۴۰\,\text{m}^۲)$$
$$= ۴/۰\times۱۰^{۳}\,\text{N}$$ (پاسخ)

این نیروی بسیار بزرگ عبارت است از وزن ستونی از هوا که بالای سر انسان را می‌پوشاند و تا بالای جو ادامه دارد.

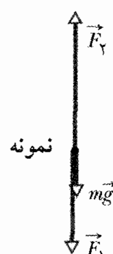
۳۰-۴ شاره‌های ساکن

شکل ۳۰-۲ الف مخزن روبازی از آب- یا مایع دیگری- را نشان می‌دهد. همانطور که هر شناگری می‌داند، فشار با عمق در زیر فصل مشترک هوا- آب *افزایش* می‌یابد. در واقع سنجهٔ عمق‌سنج شناگر شباهت زیادی به حسگر فشاری دارد که نمونهٔ آن در شکل ۳۰-۱ ب نشان داده شده است. همانطور که هر کوهنوردی می‌داند به هنگام بالا رفتن از کوه فشار با ارتفاع *کاهش* می‌یابد. فشاری که شناگر یا کوهنورد با آن مواجه است معمولاً *فشار هیدروستاتیک* نامیده می‌شود، زیرا این فشارها ناشی از شاره‌هایی هستند که در حالت استاتیکی (در حال سکون) قرار دارند. در اینجا می‌خواهیم عبارتی برای فشار هیدروستاتیکی برحسب تابعی از عمق یا ارتفاع به دست آوریم.

نخست افزایش فشار را برحسب عمق در زیر سطح آب در نظر می‌گیریم. محور قائم y در مخزن را رو به بالا مثبت در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم مبداء آن در فصل مشترک هوا- آب باشد. سپس نمونهٔ آبی را اختیار می‌کنیم که در یک استوانهٔ فرضی قائم با مقطع دایره‌ای با مساحت قاعدهٔ افقی A قرار دارد، به طوری که عمق سطح بالایی و سطح پایینی استوانه به ترتیب $y_۱$ و $y_۲$ (که هر دو منفی‌اند) باشند.



(الف)



شکل ۳۰-۲ (الف) یک مخزن آب که در آن نمونه‌ای از آب در یک استوانهٔ فرضی با قاعدهٔ افقی به مساحت A قرار دارد. نیروی $\vec{F}_۱$ بر سطح بالایی استوانه و نیروی $\vec{F}_۲$ بر سطح زیرین استوانه وارد می‌شود. نیروی گرانشی وارد بر آب در استوانه با $m\vec{g}$ نشان داده شده است. (ب) نمودار جسم آزاد آب نمونه.

شکل ۳۰-۲ ب نمودار جسم آزاد را برای آب درون استوانه نشان می‌دهد. آب در حالت *تعادل استاتیکی* قرار دارد؛ یعنی در حال سکون است و نیروهای وارد بر آن موازنه دارند. سه نیرو به طور قائم بر آب وارد می‌شوند: نیروی $\vec{F}_1$ بر سطح بالای استوانه وارد می‌شود و ناشی از آب بالای استوانه است. به همین ترتیب، نیروی $\vec{F}_2$ بر سطح زیرین استوانه وارد می‌شود و ناشی از آب زیر استوانه است. نیروی گرانشی وارد بر آب داخل استوانه با $m\vec{g}$ نشان داده شده است که m جرم آب داخل استوانه است. موازنهٔ این نیروها به صورت زیر نوشته می‌شود

$$F_2 = F_1 + mg \qquad (۳۰\text{-}۵)$$

می‌خواهیم معادلهٔ ۳۰-۵ را به معادله‌ای تبدیل کنیم که شامل فشارها باشد. از معادلهٔ ۳۰-۴ می‌دانیم که

$$F_1 = p_1 A \quad \text{و} \quad F_2 = p_2 A \qquad (۳۰\text{-}۶)$$

از معادلهٔ ۳۰-۲ جرم m آب داخل استوانه برابر $m = \rho V$ است که در آن V حجم استوانه از حاصلضرب مساحت سطح A آن در ارتفاعش $y_1 - y_2$ به دست می‌آید. بنابراین، m برابر $\rho A(y_1 - y_2)$ است. با قرار دادن این و معادلهٔ ۳۰-۶ در معادلهٔ ۳۰-۵ داریم

$$p_2 A = p_1 A + \rho A g(y_1 - y_2)$$

یا

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2) \qquad (۳۰\text{-}۷)$$

این معادله را می‌توان برای یافتن فشار هم در مایع (برحسب تابعی از عمق) و هم فشار در جو (برحسب ارتفاع) به کار برد. برای اولی، فرض کنید می‌خواهیم فشار p را در عمق h زیر سطح مایع به دست آوریم. در این صورت فرض می‌کنیم سطح ۱ در سطح مایع و سطح ۲ در فاصلهٔ h زیر سطح مایع (مانند شکل ۳۰-۳)و p_0 بیانگر فشار جو روی سطح باشد. حال مقدارهای

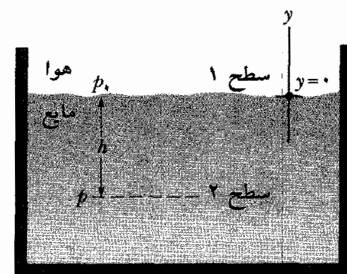
$$y_1 = 0 \;,\; p_1 = p_0 \quad \text{و} \quad y_2 = -h \;,\; p_2 = p$$

را در معادلهٔ ۳۰-۷ قرار می‌دهیم، داریم

$$p = p_0 + \rho g h \qquad (\text{فشار در عمق } h) \qquad (۳۰\text{-}۸)$$

توجه کنید که فشار در یک عمق معین در مایع به آن عمق بستگی دارد نه به ابعاد افقی.

> ☞ فشار در نقطه‌ای داخل یک مایع در حالت تعادل استاتیکی به عمق آن نقطه بستگی دارد و به اندازهٔ افقی یا ظرف آن بستگی ندارد.



شکل ۳۰-۳ فشار p با عمق h زیر سطح مایع بنابر معادلهٔ ۳۰-۸ افزایش می‌یابد.

بنابراین، معادلهٔ ۳۰-۸ بدون توجه به شکل ظرف همواره برقرار است. اگر سطح زیرین ظرف در عمق h باشد، آنگاه معادلهٔ ۳۰-۸ فشار را در آنجا به دست می‌دهد.

در معادلهٔ ۳۰-۸ ، p را فشار کل یا **فشار مطلق** در سطح ۲ می‌گویند. برای اینکه علت را بدانید، توجه کنید که در شکل ۳۰-۳ فشار p در سطح ۲ شامل دو جزء است: (۱) p_0 فشار ناشی از جو که به طرف پایین بر مایع وارد می‌شود و (۲) ρgh ، فشار ناشی از مایع در بالای سطح ۲ که به طرف پایین و بر سطح ۲ وارد می‌شود. به طور کلی، اختلاف بین فشار مطلق و فشار جوی را **فشار پیمانه‌ای** می‌نامند. (انتخاب این نام به خاطر این است که پیمانه برای اندازه‌گیری این اختلاف فشار به کار می‌رود). برای وضعیت شکل ۳۰-۳ ، ρgh فشار پیمانه‌ای است.

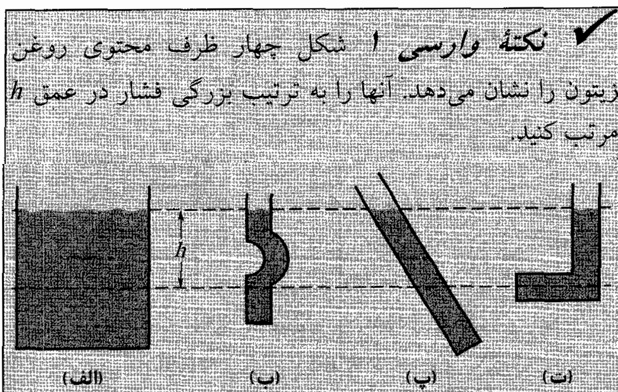
معادلهٔ ۳۰-۷ برای بالای سطح مایع نیز برقرار است: این معادله فشار جوی را در هر فاصلهٔ معین بالاتر از سطح ۱ برحسب فشار جوی p_1 در سطح ۱ به دست می‌دهد (*با فرض اینکه چگالی جو در آن فاصله یکنواخت باشد*). برای مثال، برای به دست آوردن فشار جو در فاصلهٔ d بالای سطح ۱ در شکل ۳۰-۳ قرار می‌دهیم

$$y_1 = 0 \;,\; p_1 = p_0 \quad \text{و} \quad y_2 = d \;,\; p_2 = p$$

و سپس به ازای $\rho = \rho_{\text{هوا}}$ خواهیم داشت

$$p = p_0 - \rho_{\text{هوا}} g d$$

> ✔ ***نکتهٔ وارسی ۱*** شکل چهار ظرف محتوی روغن زیتون را نشان می‌دهد. آنها را به ترتیب بزرگی فشار در عمق h مرتب کنید.



مسئلهٔ نمونه ۳۰-۲

یک غواص تازه کار با ماسک اکسیژن که در استخر تمرین می‌کند قبل از رها کردن کپسول در عمق L با نفس کشیدن هوای کافی را از کپسول به ریه‌های خود منتقل می‌کند و سپس شناکنان به سطح می‌آید. او دستورهای مربوط به شنا را رعایت نمی‌کند و موقع بالا آمدن هوا را بیرون نمی‌دهد. وقتی به سطح می‌رسد، اختلاف بین فشار خارجی روی او و فشار هوا در ریه‌های او برابر ۹/۳ kPa است. او از چه عمقی شروع کرده است؟ او با چه خطر مرگبار بالقوه‌ای رو به رو می‌شود؟

نکتهٔ کلیدی فشار در عمق h در مایعی با چگالی ρ با معادلهٔ ۳۰-۴ $(p = p_0 + \rho gh)$ داده می‌شود، که در آن ρgh به فشار جوی p_0 افزوده شده است.

محاسبه‌ها: در اینجا وقتی غواص در عمق L ریه‌هایش را پر می‌کند، فشار خارجی روی او (و در نتیجه فشار هوای داخل ریه‌هایش) از حالت عادی بیشتر است و با معادلهٔ ۳۰-۸ داده می‌شود

$$P = P_\circ + \rho g L$$

که در آن $p_\circ$ فشار جوی و ρ چگالی آب (۹۹۸ kg/m^3، از جدول ۳۰-۱) است. وقتی او بالا می‌رود، فشار خارجی روی او کم می‌شود تا اینکه در سطح به فشار جوی $p_\circ$ می‌رسد. فشار خون او نیز تا حد عادی کاهش می‌یابد. ولی، چون او عمل بازدم را انجام نمی‌دهد، فشار هوا روی ریه‌هایش همان فشاری که در عمق L داشته است باقی می‌ماند. در سطح، اختلاف فشار بین بیشترین فشار در ریه‌های او و کمترین فشار روی سینهٔ او برابر است با

$$\Delta p = p - p_\circ = \rho g L$$

که از آن خواهیم داشت

$$L = \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{۹۳۰۰\,\text{Pa}}{(۹۹۸\,\text{kg/m}^۳)(۹/۸\,\text{m/s}^۲)} = ۰/۹۵\,\text{m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

این عمق زیادی نیست! ولی این اختلاف فشار ۹/۳kPa (تقریباً ۹٪ فشار جو) برای از هم گسیختن ریه‌های غواص و راندن هوا از آنها به طرف خون با فشار کمتر کافی است که باعث راندن هوا به قلب و مرگ غواص شود. اگر غواص از دستورهای لازم پیروی کند و به هنگام بالا رفتن بتدریج هوا را بیرون دهد، فشار در ریه‌های او با فشار خارجی برابر می‌شود و هیچ خطری او را تهدید نمی‌کند.

مسئلهٔ نمونه ۳۰-۳

لولهٔ U شکل در شکل ۳۰-۴ محتوی دو مایع در حالت تعادل استاتیکی است: آب با چگالی $\rho_w (= ۹۹۸\,kg/m^3)$ در شاخهٔ راست و روغن با چگالی نامعلوم ρ_x در شاخهٔ سمت چپ. با اندازه‌گیری $l = ۱۳۵\,mm$ و $d = ۱۲/۳\,mm$، چگالی روغن چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی (۱) فشار p_{int} در فصل مشترک روغن- آب در شاخهٔ چپ بستگی به چگالی ρ_x و ارتفاع روغن بالای فصل مشترک دارد. (۲) آب در شاخهٔ سمت راست در *همان سطح* باید در فشار یکسان با p_{int} باشد. علت آن این است که چون آب در حالت تعادل استاتیکی است، فشار در نقطه‌های هم سطح داخل آب باید در فشار یکسانی باشند، حتی اگر این نقطه‌ها به طور افقی از هم فاصله داشته باشند.

محاسبه‌ها: در شاخهٔ راست، فصل مشترک به اندازهٔ l زیر سطح آزاد *آب* است، و از معادلهٔ ۳۰-۸ داریم

$$p_{int} = p_\circ + \rho_w g l \qquad \text{(شاخهٔ راست)}$$

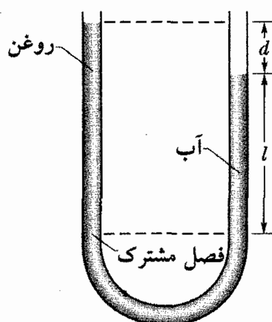
در شاخهٔ چپ، فصل مشترک در فاصلهٔ $l+d$ در زیر سطح آزاد *روغن* است و دوباره از معادلهٔ ۳۰-۸ داریم

$$p_{int} = p_\circ + \rho_x g (l+d) \qquad \text{(شاخهٔ چپ)}$$

با مساوی قرار دادن این دو عبارت و از حل آن برای چگالی نامعلوم خواهیم داشت

$$\rho_x = \rho_w \frac{l}{l+d} = (۹۹۸\,\text{kg/m}^۳)\frac{۱۳۵\,\text{mm}}{۱۳۵\,\text{mm} + ۱۲/۳\,\text{mm}} = ۹۱۵\,\text{kg/m}^۳ \qquad \text{(پاسخ)}$$

توجه کنید که پاسخ به فشار جو $p_\circ$ یا به شتاب سقوط آزاد g بستگی ندارد.



شکل ۳۰-۴ روغن در شاخهٔ چپ بالاتر از آب در شاخهٔ راست قرار دارد چون چگالی روغن از چگالی آب کمتر است. هر دو ستون مایع فشار یکسان p_{int} را در تراز فصل مشترک ایجاد می‌کنند.

۳۰-۵ اندازه‌گیری فشار

جوسنج جیوه‌ای (بارومتر)

شکل ۳۰-۵ الف اساس یک *جوسنج جیوه‌ای* را نشان می‌دهد که برای اندازه‌گیری فشار جو به کار می‌رود. لولهٔ شیشه‌ای بلندی که با جیوه پر شده است، و همانطور که شکل نشان می‌دهد انتهای باز آن به طور وارونه در ظرفی محتوی جیوه قرار داده می‌شود. فضای بالای ستون جیوه فقط دارای بخار جیوه است و فشار آن در دماهای معمولی به اندازه‌ای کوچک است که می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد.

از معادلهٔ ۳۰-۷ می‌توان برای یافتن فشار جوی $p_\circ$ برحسب ارتفاع h ستون جیوه استفاده کرد. سطح ۱ شکل ۳۰-۲ را فصل مشترک هوا- جیوه و سطح ۲ را بالای ستون جیوه به ترتیبی که در شکل ۳۰-۵ الف نشان داده شده است در نظر می‌گیریم. سپس مقدارهای

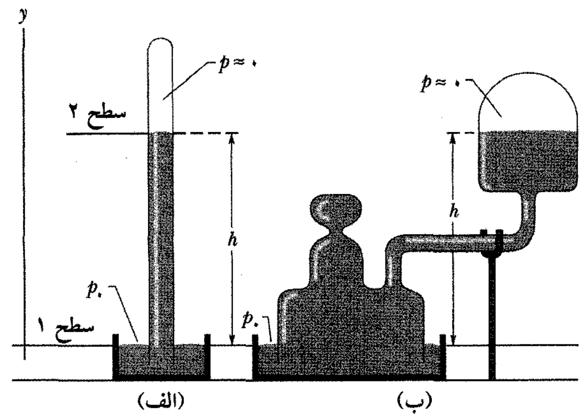
$$y_1 = ۰ \;,\; p_1 = p_\circ \quad \text{و} \quad y_2 = h \;,\; p_2 = ۰$$

را در معادلهٔ ۳۰-۷ قرار می‌دهیم، خواهیم داشت

$$p_\circ = \rho g h \qquad (۳۰\text{-}۹)$$

که در آن ρ چگالی جیوه است.

به ازای یک فشار معین، ارتفاع h ستون جیوه به مساحت مقطع لولهٔ قائم بستگی ندارد. جوسنج جیوه‌ای خیالی شکل ۳۰-۵ ب نیز همان مقدار اندازه‌گیری شدهٔ شکل ۳۰-۵ الف را نشان می‌دهد؛ فاصلهٔ قائم بین سطحهای جیوه در هر دو جوسنج برابر h است.



شکل ۳۰-۵ (الف) جوسنج جیوه‌ای. (ب) جوسنج جیوه‌ای دیگر. فاصلهٔ h در هر دو مورد یکسان است.

به ازای یک فشار معین، معادلهٔ ۳۰-۹ نشان می‌دهد که ارتفاع ستون جیوه به مقدار g در محل جوسنج و چگالی جیوه بستگی دارد که با دما تغییر می‌کند. ارتفاع ستون (برحسب میلی‌متر) به‌طور عددی با فشار (برحسب torr) در *صورتی* برابر است که جوسنج در جایی باشد که در آنجا g دارای مقدار استاندارد پذیرفته شدهٔ $9/80665\,\mathrm{m/s^2}$ بوده و دمای جیوه $0°C$ باشد. اگر این شرایط برقرار نباشد (که به ندرت برقرار است)، پیش از تبدیل ارتفاع ستون جیوه به فشار، تصحیحهای کوچکی باید انجام گیرد.

فشارسنج (مانومتر) با لولهٔ باز

فشارسنج با لولهٔ باز (شکل ۳۰-۶) فشار پیمانه‌ای p_g یک گاز را اندازه می‌گیرد. این دستگاه از یک لولهٔ U شکل تشکیل شده که دارای یک مایع است و یک انتهای آن به ظرفی که فشار پیمانه‌ای آن را می‌خواهیم اندازه‌گیری کنیم متصل است و انتهای دیگر آن به جو راه دارد. از معادلهٔ ۳۰-۷ برای پیدا کردن فشار پیمانه‌ای برحسب ارتفاع h که در شکل ۳۰-۶ نشان داده شده است می‌توان استفاده کرد. فرض کنید سطحهای ۱ و ۲ را به ترتیب شکل ۳۰-۶ در نظر بگیریم. مقدارهای

$$y_1 = 0 \;,\; p_1 = p_0 \text{ و } y_2 = -h \;,\; p_2 = p$$

را در معادلهٔ ۳۰-۷ قرار می‌دهیم، داریم

$$p_g = p - p_0 = \rho g h$$

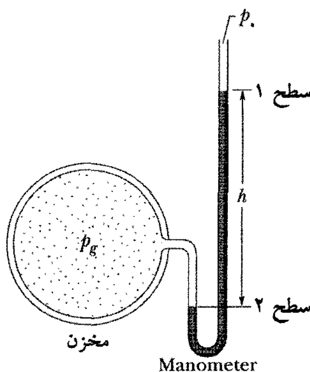
که در آن ρ چگالی مایع در لوله است. فشار پیمانه‌ای p_g با h نسبت مستقیم دارد.

بسته به اینکه $p > p_0$ یا $p < p_0$، فشار پیمانه‌ای می‌تواند مثبت یا منفی باشد. در چرخهای باد شده یا دستگاه گردش خون انسان، فشار (مطلق) از فشار جو بیشتر است، به طوری که فشار پیمانه‌ای یک کمیت مثبت است که گاهی *پرفشار* نامیده می‌شود. اگر برای کشیدن مایعی از نی استفاده کنید، فشار (مطلق) در ریه‌های شما در واقع کمتر از فشار جو است. پس فشار پیمانه‌ای در ریه‌های شما یک کمیت منفی است.

۳۰-۶ اصل پاسکال

وقتی طرف انتهایی لولهٔ خمیر دندان را فشار دهید **اصل پاسکال** را در حین عمل مشاهده می‌کنید. این اصل همچنین اساس تمهیدی به نام هیم‌لیک[1] است که در آن فشار فزایندهٔ تندی که به طور مناسب به شکم وارد شود به گلو منتقل شده و غذای جا گرفته در آن را با شدت خارج می‌کند. این اصل، نخستین بار در سال ۱۶۵۲/۱۰۳۱ به وسیلهٔ بلیز پاسکال[2] (که یکای فشار به نام اوست) به روشنی بیان شده است:

> هر تغییری که در فشار اعمال شده بر یک شارهٔ تراکم ناپذیر محبوس انجام گیرد، بدون کاهش به هر بخش از شاره و به دیواره‌های ظرف انتقال می‌یابد.



شکل ۳۰-۶ فشارسنج با لولهٔ باز به صورتی متصل شده است که فشار پیمانه‌ای گاز در مخزن سمت چپ را اندازه می‌گیرد. شاخهٔ راست لولهٔ U به جو باز می‌شود.

اثبات اصل پاسکال

موردی را در نظر می‌گیریم که در آن مانند شکل ۳۰-۷ شاره یک مایع تراکم ناپذیر است که در استوانهٔ بلندی قرار دارد. روی پیستونی که به این استوانه کاملاً چسبیده است ظرفی پر از گلوله‌های سربی قرار دارد. جو، ظرف و گلوله‌ها فشار p_{ext} را بر پیستون و در نتیجه بر مایع وارد می‌کنند. پس فشار p در هر نقطهٔ P در مایع عبارت است از

$$p = p_{\text{ext}} + \rho g h \qquad (۳۰-۱۱)$$

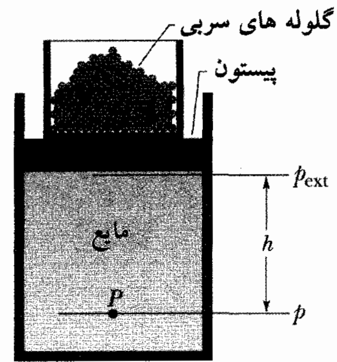
برای افزایش p_{ext} به اندازهٔ Δp_{ext} گلوله‌های بیشتری به ظرف اضافه می‌کنیم. کمیتهای g، ρ و h در معادلهٔ ۳۰-۱۱ بدون تغییرند، پس تغییر فشار در P عبارت است از

$$\Delta p = \Delta p_{\text{ext}} \qquad (۳۰-۱۲)$$

این تغییر فشار مستقل از h است، بنابراین، همانطور که اصل پاسکال بیان می‌کند، باید در مورد تمام نقطه‌های درون مایع برقرار باشد.

---

1. Heimlich
2. Blaise pascal

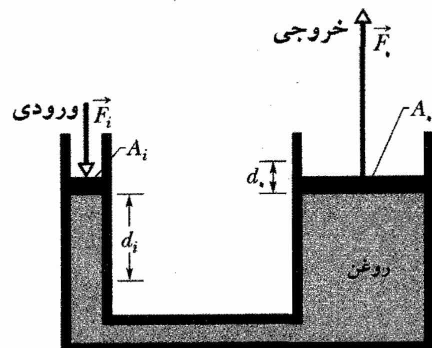


شکل ۳۰-۷ گلوله‌های کوچک سربی که روی پیستون بار شده‌اند در بالای مایع (تراکم ناپذیر) محبوس فشار p_{ext} را ایجاد می‌کنند. اگر با افزودن گلوله‌های سربی بیشتر p_{ext} افزایش یابد، فشار به همان مقدار در کلیهٔ نقطه‌های درون مایع افزایش می‌یابد.

اصل پاسکال و اهرم هیدرولیکی

شکل ۳۰-۸ نشان می‌دهد که اصل پاسکال چگونه اساس اهرم هیدرولیکی را تشکیل می‌دهد. در عمل، بزرگی نیروی خارجی را که به طرف پایین بر سمت چپ پیستون (یا ورودی) وارد می‌شود F_i و مساحت پیستون را A_i در نظر می‌گیریم. در نتیجه مایع تراکم ناپذیر درون این وسیله، نیروی رو به بالایی به بزرگی F_o بر پیستون سمت راست (یا خروجی) که مساحت آن A_o است وارد می‌کند. برای اینکه دستگاه در تعادل باقی بماند، باید از طرف یک بار خارجی (نشان داده نشده است) نیرویی به بزرگی F_o و رو به پایین به پیستون خروجی وارد شود. نیروی $\vec{F}_i$ اعمال شده در سمت چپ و نیروی رو به پایین $\vec{F}_o$ که به وسیلهٔ بار بر سمت راست وارد می‌شود، تغییر Δp را در فشار مایع ایجاد می‌کنند که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\Delta p = \frac{F_i}{A_i} = \frac{F_o}{A_o}$$



شکل ۳۰-۸ آرایشی هیدرولیکی که برای بزرگ کردن نیروی F_i به کار می‌رود. کار انجام شده به وسیلهٔ $\vec{F}_i$ بزرگ نمی‌شود و برای هر دو یکسان است.

پس

$$F_o = F_i \frac{A_o}{A_i} \qquad (۱۳-۳۰)$$

معادلهٔ ۳۰-۱۳ نشان می‌دهد که اگر $A_o > A_i$ باشد، مانند مورد شکل ۳۰-۸ ، نیروی خروجی F_o وارد بر بار باید بزرگتر از نیروی ورودی F_i باشد.

اگر پیستون ورودی به اندازهٔ d_i به طرف پایین حرکت کند، پیستون خروجی به اندازهٔ مسافت d_o به طرف بالا حرکت می‌کند، به طوری که حجم یکسان V از مایع تراکم ناپذیر در هر دو پیستون جابه‌جا می‌شود. پس

$$V = A_i d_i = A_o d_o$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$d_o = d_i \frac{A_i}{A_o} \qquad (۱۴-۳۰)$$

این نشان می‌دهد که اگر (مانند شکل ۳۰-۸) $A_o > A_i$ باشد، پیستون خروجی نسبت به پیستون ورودی فاصلهٔ کمتری حرکت می‌کند.

از معادله‌های ۳۰-۱۳ و ۳۰-۱۴ می‌توان کار خروجی را به صورت زیر نوشت

$$W = F_o d_o = \left(F_i \frac{A_o}{A_i}\right)\left(d_i \frac{A_i}{A_o}\right) = F_i d_i \qquad (۱۵-۳۰)$$

که نشان می‌دهد کار W انجام شده *روی* پیستون ورودی به وسیلهٔ نیروی اعمال شده برابر با کار W انجام شده *به وسیلهٔ* پیستون خروجی به هنگام بلند کردن بار واقع روی آن است.

مزیت اهرم هیدرولیکی در این است که:

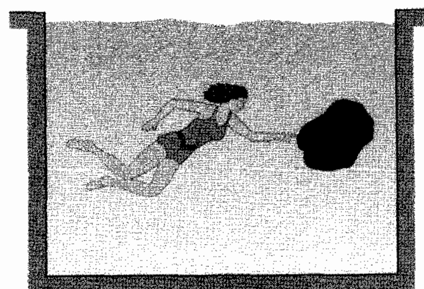
> با اهرم هیدرولیکی، نیروی معینی که در یک فاصلهٔ معین وارد می‌شود می‌تواند به نیروی بزرگتری که در یک فاصلهٔ کمتر عمل می‌کند تبدیل شود.

ضرب نیرو در فاصله بدون تغییر می‌ماند به طوری که کار انجام شده یکسان است. ولی، وارد کردن یک نیروی بزرگتر اغلب امتیاز بسیار بزرگی به حساب می‌آید. برای مثال، بیشتر ما نمی‌توانیم یک اتومبیل را بلند کنیم و در نتیجه برای این کار از یک جک هیدرولیکی استفاده می‌کنیم، اگر چه مجبوریم با دستهٔ آن بیشتر از مقداری که اتومبیل بالا می‌رود تلمبه بزنیم. در این وسیله، جابه‌جایی d_i نه در یک ضربه بلکه طی چند ضربهٔ کوچک انجام می‌شود.

۳۰-۷ اصل ارشمیدس

شکل ۳۰-۹ دانشجویی را نشان می‌دهد که به هنگام شنا در یک استخر، یک کیسهٔ بسیار نازک پلاستیکی (با جرم ناچیز) را که با آب پر شده است با مهارت جابه‌جا می‌کند. او در می‌یابد که کیسه و آب داخل آن در حالت تعادل استاتیکی هستند و تمایلی به بالا یا پایین رفتن ندارند. نیروی گرانشی رو به پایین $\vec{F}_g$

روی آب کیسه باید با نیروی خالص رو به بالایی از طرف آب اطراف آن خنثی شده باشد.

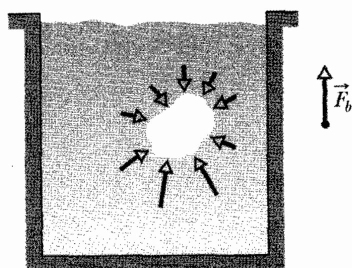


شکل ۳۰-۹ یک کیسهٔ نازک پلاستیکی در آب استخر در حالت تعادل استاتیکی است. نیروی گرانشی روی کیسه باید با نیروی خالص رو به بالای وارد بر کیسه از طرف آب اطراف آن خنثی شود.

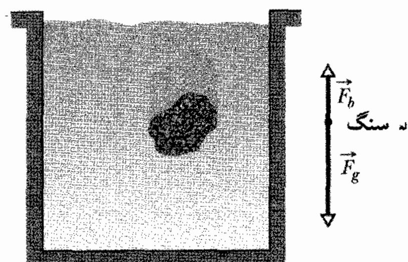
این نیروی خالص رو به بالا **نیروی شناوری** $\vec{F}_b$ است. دلیل وجود این نیرو این است که فشار در آب اطراف با عمق آب زیر سطح افزایش می‌یابد. بنابراین، فشار نزدیک ته کیسه بزرگتر از فشار در نزدیکی بالای آن است و این بدان معنی است که نیروهای روی کیسه به خاطر این فشار از نظر بزرگی نزدیک ته کیسه بزرگتر از نزدیک بالای آن هستند. برخی از نیروها در شکل ۳۰-۱۰ الف نشان داده شده‌اند، و در آن فضای اشغال شده توسط کیسه خالی مانده است. توجه کنید که بردارهای نیروی ترسیم شده نزدیک ته آن فضا (با جهت به سمت بالا) نسبت به بردارهای ترسیم شده نزدیک بالای کیسه طول بزرگتری دارند (با جهت به سمت پایین). اگر نیروهای وارد بر کیسه از طرف آب را جمع برداری کنیم، مؤلفه‌های افقی خنثی شده و مؤلفه‌های عمودی منجر به یک نیروی شناوری به طرف بالای $\vec{F}_b$ روی کیسه می‌شوند. (نیروی $\vec{F}_b$ در شکل ۳۰-۱۰ الف در سمت راست استخر نشان داده شده است.)

چون کیسهٔ آب در حالت تعادل استاتیکی است، بزرگی $\vec{F}_b$ برابر بزرگی $m_f g$ نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ روی کیسهٔ آب است: $F_b = m_f g$. (زیر نویس f برای *شاره* است که در اینجا آب است.) به عبارت دیگر، بزرگی نیروی شناوری برابر وزن آب داخل کیسه است.

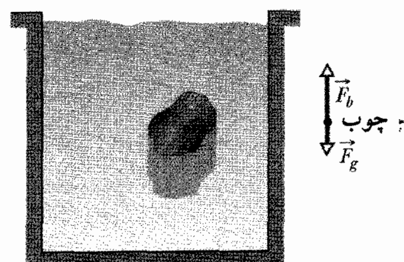
در شکل ۳۰-۱۰ ب، به جای کیسهٔ آب سنگی را که دقیقاً حفره در شکل ۳۰-۱۰ الف را پر می‌کند قرار داده‌ایم، می‌گویند سنگ آب را *جابه‌جا* می‌کند، یعنی اینکه سنگ فضایی را که با آب پر شده بود اشغال می‌کند. هیچ تغییری در شکل حفره نداده‌ایم، لذا نیروهای وارد بر سطح حفره باید با وقتی که کیسهٔ پر از آب را قرار می‌دهیم یکسان باشد؛ بنابراین، همان نیروی شناوری روی به بالایی که بر کیسهٔ پر آب وارد می‌شد اکنون روی سنگ اعمال می‌شود، یعنی بزرگی $\vec{F}_b$ نیروی شناوری برابر با $m_f g$ یعنی وزن آب جابه‌جا شده با سنگ است.



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۳۰-۱۰ (الف) آب اطراف جای خالی در آب یک نیروی خالص شناوری رو به بالا را بر آنچه که آن را پر می‌کند وارد می‌کند. (ب) برای سنگی با همان حجم جای خالی، نیروی گرانشی بزرگتر از نیروی شناوری است. (پ) در مورد یک تکه چوب با همان حجم، نیروی گرانشی کوچکتر از نیروی شناوری است.

برخلاف کیسهٔ پر از آب، سنگ در تعادل استاتیکی نیست. همانطور که در نمودار جسم آزاد در شکل ۳۰-۱۰ ب نشان داده شده است، نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ رو به پایین روی سنگ بزرگتر از بزرگی نیروی شناوری رو به بالاست. بنابراین، سنگ شتاب می‌گیرد و به ته استخر می‌رود.

حال فرض کنید که در جای خالی شکل ۳۰-۱۰ الف دقیقاً یک قطعه چوب سبک وزن مطابق شکل ۳۰-۱۰ پ قرار دهیم باز، هیچ تغییری در مورد نیروهای وارد بر سطح حفره رخ نداده، در نتیجه بزرگی F_b نیروی شناوری باز هم با $m_f g$، وزن آب جابه‌جا شده، برابر است. همانند سنگ، قطعه در تعادل استاتیکی نیست. اما، این بار نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ از نظر بزرگی کوچکتر از نیروی شناوری است. (که در سمت راست استخر نشان داده شده است)، بنابراین، قطعه به سمت بالا شتاب می‌گیرد تا اینکه به سطح آب می‌رسد.

نتیجه‌های ما با کیسه، سنگ و قطعه برای تمام شاره‌ها برقرارند و به عنوان **اصل ارشمیدس** خلاصه می‌شوند:

وقتی جسمی به طور کامل یا جزئی در شاره‌ای غوطه‌ور باشد، یک نیروی شناوری $\vec{F}_b$ از شارهٔ اطراف روی جسم وارد می‌شود. این نیرو به سمت بالا وارد می‌شود و بزرگی آن با وزن $m_f g$ شاره که توسط جسم جابه‌جا شده، برابر است.

نیروی شناوری روی جسم در یک شاره دارای بزرگی زیر است

$$F_b = m_f g \qquad \text{(نیروی شناوری)} \qquad (۱۶-۳۰)$$

که در آن m_f جرم شارهٔ جابه‌جا شده توسط جسم است.

شناوری

وقتی قطعه چوب سبک وزنی را روی سطح آب استخری رها کنیم، قطعه به داخل آب فرو می‌رود چون نیروی گرانشی وارد بر آن قطعه را به سمت پایین می‌کشد. وقتی قطعه، آب بیشتر و بیشتری را جابه‌جا کند، بزرگی F_b نیروی شناوری رو به بالا که بر آن وارد می‌شود افزایش می‌یابد. سرانجام، F_b آنقدر بزرگ می‌شود تا با بزرگی F_g نیروی گرانشی رو به پایین وارد به قطعه مساوی شود، و قطعه به حال سکون در می‌آید. پس از آن قطعه به حالت تعادل استاتیکی در می‌آید و می‌گویند که قطعه در آب *شناور* است. به طور کلی:

وقتی جسمی در شاره شناور است، بزرگی F_b نیروی شناوری روی جسم برابر با بزرگی F_g نیروی گرانشی روی جسم است.

این عبارت را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$F_b = F_g \qquad \text{(شناوری)} \qquad (۱۷-۳۰)$$

از معادلهٔ ۳۰-۱۶، می‌دانیم که $F_b = m_f g$. بنابراین،

وقتی جسمی در شاره شناور است، بزرگی F_g نیروی گرانشی روی جسم برابر با وزن $m_f g$ شاره‌ای است که توسط جسم جابه‌جا شده است.

این عبارت را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$F_g = m_f g \qquad \text{(شناوری)} \qquad (۱۸-۳۰)$$

به عبارت دیگر، جسم شناور هم وزن خودش شاره را جابه‌جا می‌کند.

وزن ظاهری در شاره

اگر سنگی را روی ترازویی که برای اندازه‌گیری وزن کالیبره شده قرار دهیم، آنگاه عددی را که روی ترازو می‌خوانیم، وزن سنگ است. ولی، اگر این عمل را زیر آب انجام دهیم، نیروی شناوری رو به بالای وارد بر سنگ از طرف آب موجب می‌شود که ترازو عدد کوچکتری را نشان دهد. این عدد بیانگر وزن ظاهری است. به طور کلی، **وزن ظاهری** بنابر رابطهٔ زیر به وزن واقعی جسم و نیروی شناوری وارد بر جسم مربوط است.

(بزرگی نیروی شناوری) − (وزن واقعی) = وزن ظاهری

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\text{وزن}_{\text{app}} = \text{وزن} - F_b \qquad \text{(وزن ظاهری)} \qquad (۱۹-۳۰)$$

اگر در یک زورآزمایی، مجبور شوید سنگ سنگینی را بلند کنید، می‌توانید این کار را خیلی راحت‌تر با سنگی در زیر آب انجام دهید. در این صورت نیرویی که به کار می‌برید کافی است که کمی زیادتر از وزن ظاهری سنگ باشد و لازم نیست بزرگتر از وزن واقعی باشد، زیرا نیروی شناوری رو به بالا به بلند کردن سنگ کمک می‌کند.

بزرگی نیروی شناوری روی جسم شناور برابر وزن جسم است. بنابراین، معادلهٔ ۳۰-۱۹ حاکی از آن است که وزن ظاهری جسم شناور صفر است، ترازو عدد صفر را برای جسم نشان می‌دهد. (وقتی فضانوردان آماده می‌شوند که عملیات سخت و پیچیده‌ای در فضا انجام دهند، آنها این عملیات را با شناور شدن در زیر آب انجام می‌دهند، جایی که همانند فضا وزن ظاهری در آنجا صفر است.)

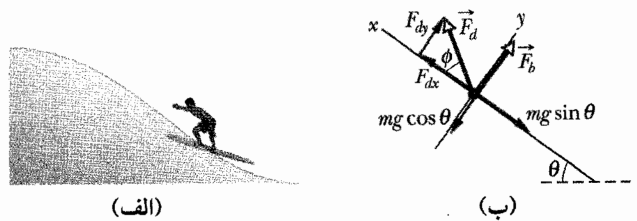
✔ **نکتهٔ وارسی ۲** پنگوئنی نخست در شاره‌ای با چگالی $\rho_\circ$، سپس در شاره‌ای با چگالی $۰/۹۵\rho_\circ$ و بعد از آن در شاره‌ای با چگالی $۱/۱\rho_\circ$ شناور می‌شود. (الف) چگالیها را به ترتیب بزرگی نیروی شناوری وارد بر پنگوئن مرتب کنید. (ب) چگالیها را به ترتیب بزرگی مقدار شارهٔ جابه‌جا شده توسط پنگوئن مرتب کنید.

مسئلهٔ نمونه ۳۰-۴

در شکل ۳۰-۱۱ الف، در نقطه‌ای که مماس بر موج دارای شیب $\theta = ۳۰/۰$ است. موج سواری در قسمت جلو موج حرکت می‌کند. مجموع جرم موج سوار و تختهٔ موج سواری $m = ۸۳/۰\,\text{kg}$ و حجم در آب فرو رفتهٔ تخته $V = ۲/۵۰ \times ۱۰^{-۲}\,\text{m}^۳$ است. وقتی موج با سرعت ثابتی به طرف ساحل حرکت می‌کند، موج سوار موقعیت خود را روی موج حفظ می‌کند. بزرگی و جهت (نسبت به جهت مثبت محور x در شکل ۳۰-۱۱ ب) نیروی کششی وارد بر تخته از طرف آب چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی (۱) بزرگی نیروی شناوری وارد بر موج سوار F_b برابر با وزن آب جابه‌جا شده توسط حجم فرورفتهٔ تخته است. جهت نیرو در محل موج‌سوار بر سطح عمود است. (۲) بنابر قانون دوم نیوتون، چون موج سوار به طرف ساحل با سرعت ثابتی حرکت می‌کند، مجموع (برداری) نیروی شناوری $\vec{F}_b$، نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ و نیروی کششی $\vec{F}_d$ باید صفر باشد.

محاسبه‌ها: نیروها و مؤلفه‌های آنها در نمودار جسم آزاد شکل ۳۰-۱۱ ب نشان داده شده‌اند. نیروی گرانشی F_g به طرف پایین و (همانطور که در فصل ۵ دیدیم) دارای مؤلفهٔ $mg\sin\theta$ رو به پایین شیب و مؤلفهٔ $mg\cos\theta$ عمود بر شیب است.



شکل ۳۰-۱۱ (الف) موج سوار. (ب) نمودار جسم آزاد که نیروهای وارد بر دستگاه موج سوار- تخته را نشان می‌دهد.

نیروی کششی $\vec{F}_d$ از طرف آب بر تخته وارد می‌شود چون آب به طور پیوسته با تداوم حرکت موج به طرف ساحل بـه بـالای موج رانده می‌شود. این نیرو با زاویهٔ θ نسبت محور x به طـرف بالا و به پشت بر تخته وارد می‌شـود. نیـروی شـناوری $\vec{F}_b$ بـر سطح آب عمود است؛ بزرگی آن به جرم m_f آب جابه‌جا شده توسـط تختـه بـستگی دارد، بـه طـوری کـه بـا معادلـهٔ ۳۰-۱۶ $(F_b = m_f g)$ داده شده اسـت. از معادلـهٔ ۳۰-۲ $(\rho = m/V)$، جرم را برحـسب چگـالی آب ρ_w و حجـم فرورفتـهٔ V تختـه می‌تـوان نوشـت: $m_f = \rho_w V$. از جـدول ۳۰-۱، چگـالی آب برابر بـا $1/024\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ اسـت. بنـابراین، بـزرگ نیـروی شناوری عبارت است از

$$F_b = m_f g = \rho_w V g$$
$$= (1/024\times10^3\ \mathrm{kg/m^3})(2/50\times10^{-2}\ \mathrm{m^3})(9/8\mathrm{m/s^2})$$
$$= 2/509\times10^2\ \mathrm{N}$$

پس، قانون دوم نیوتون در راستای محور y

$$F_{dy} + F_b - mg\cos\theta = m(0)$$

خواهد شد

$$F_{dy} + 2/509\times10^2\ \mathrm{N} - (83\mathrm{kg})(9/8\mathrm{m/s^2})\cos 30/0^\circ = 0$$

که به دست می‌دهد

$$F_{dy} = 453/5\ \mathrm{N}$$

همچنین، قانون دوم نیوتون $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$ در راستای محور x ها عبارت است از

$$F_{dx} - mg\sin\theta = m(0)$$

که به دست می‌دهد

$$F_{dx} = 406/7\ \mathrm{N}$$

با ترکیب دو مؤلفهٔ نیروی کششی بزرگی نیرو به دست می‌آید

$$F_d = \sqrt{(406/7\ \mathrm{N})^2 + (453/5\ \mathrm{N})^2}$$
$$= 609\ \mathrm{N} \quad \text{(پاسخ)}$$

و زاویه برابر است با

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{453/5\ \mathrm{N}}{406/7\ N}\right) = 48/1^\circ \quad \text{(پاسخ)}$$

اجتناب از کنده شدن: اگر موج‌سوار اندکی تخته را به جلو کج کند، بزرگی نیروی کشـشی کـاهش مـی‌یابـد و زاویـهٔ ϕ تغییـر می‌کند. نتیجه این می‌شود که نیروی خالص دیگر صفر نمی‌شود و موج‌سوار به پایین سطح موج می‌رود. پایین رفتن تا حـدودی توسط وی تنظیم می‌شود چون وقتی موج‌سـوار پـایین مـی‌رود، زاویهٔ تمایل θ سطح موج کاهش می‌یابد و بنابراین مؤلفهٔ نیروی گرانشی $mg\sin\theta$ موج سوار را به طرف پایین شیب مـی‌رانـد. بنابراین موج سوار می‌تواند تخته را برای برقراری تعادل مجدد تنظیم کند، ولی اکنون به طرف پایین موج. همچنین با کج کردن تخته اندکی به عقب، موج‌سوار نیروی کششی را افزایش می‌دهد و به بالای سطح موج حرکت می‌کند. اگر مـوج‌سـوار هنـوز در قسمت پایین موج باشد، آنگاه هـم θ و هـم $mg\sin\theta$ افـزایش می‌یابد و دوباره موج‌سوار نیروهـا را کنتـرل مـی‌کنـد و تعـادل مجدداً برقرار می‌شود.

مسئلهٔ نمونه ۳۰-۵

از شـکل ۳۰-۱۲ سـطح پـایین قطعـه‌ای بـا چگـالی $\rho_f = 1200\mathrm{kg/m^3}$ در شاره‌ای بـا چگـالی $\rho = 800\mathrm{kg/m^3}$ شناور شده است. بلندی قطعه $H = 6/0\mathrm{cm}$ است.

(الف) تا چه عمق h قطعه در آب فرو می‌رود؟

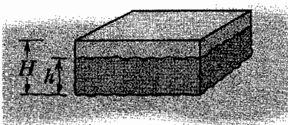
نکتهٔ کلیدی (۱) برای شناوری لازم است که نیـروی شـناوری رو به بالای وارد بر قطعه با نیروی گرانشی رو به پایین وارد بـر آن خنثی شود. (۲) نیروی شناوری برابـر بـا وزن $m_f g$ شـاره جابه‌جا شده توسط قسمت فرورفته در آب است.

محاسبه‌ها: از معادلهٔ ۳۰-۱۶، می‌دانیم که نیروی شـناوری دارای بزرگی $F_b = m_f g$ است که در آن m_f جرم شاره جابه‌جا شده توسط حجم قطعهٔ فرورفته در آب V_f اسـت. از معادلـهٔ ۳۰-۲ $(\rho = m/V)$، مـی‌دانیـم کـه جـرم شـارهٔ جابـه‌جـا شـده $m_f = \rho_f V_f$ است. V_f را نمی‌دانیم، ولی اگر طول وجه قطعه را با L و عرض آن را W بنامیم، از معادلهٔ ۳۰-۱۲ مـی‌بینیـم کـه حجم فرورفته باید $V_f = LWh$ باشد. اگر اکنـون سـه عبـارت خود را ترکیب کنیم، در می‌یابیم که بزرگی نیـروی روبه‌بـالای شناوری عبارت است از

$$F_b = m_f g = \rho_f V_f g = \rho_f LWhg \qquad (۳۰-۲۰)$$

همچنین، بزرگی F_g نیروی گرانشی وارد بر قطعه را می‌تـوانیم بنویسیم، ابتدا برحسب جرم m قطعه سپس برحـسب چگـالی ρ قطعه و حجم (کامـل) V، و سـپس برحـسب ابعـاد L، W و H (ارتفاع کامل):

$$F_g = mg = \rho V g = \rho_f LWHg \qquad (۳۰-۲۱)$$



شکل ۳۰-۱۲ قطعه به ارتفاع H در عمق h در شاره شناور است

قطعهٔ شناور در حالت سکون است. بنـابراین، بـا نوشـتن قـانون دوم نیوتـون در مـورد مؤلفـه‌هـا در راسـتای محـور y $(F_{net,y} = ma_y)$، خواهیم داشت

$$F_b - F_g = m(0)$$

یا از معادله‌های ۳۰-۲۰ و ۳۰-۲۱

$$\rho_f LWhg - \rho LWHg = 0$$

که از آن به دست می‌آید

$$h = \frac{\rho}{\rho_f}H = \frac{800\,\mathrm{kg/m^3}}{1200\,\mathrm{kg/m^3}}(6/0\,\mathrm{cm}) = 4/0\,\mathrm{cm}$$

(پاسخ)

(ب) اگر قطعه به طور کامل فرو برده و سپس آزاد شود، بزرگی شتاب آن چقدر است؟

محاسبه‌ها: نیروی گرانشی وارد بر قطعه همان است ولی اکنون، با قطعهٔ کاملاً فرو برده شده، حجم جابه‌جا شدهٔ آب $V = LWH$ است. (از ارتفاع کامل قطعه استفاده شده است). این بدان معناست که مقدار F_b اکنون بیشتر است و قطعه در حالت سکون نیست و رو به بالا شتاب می‌گیرد، از قانون دوم نیوتون خواهیم داشت

$$F_b - F_g = ma$$

یا

$$\rho_f LWHg - \rho LWHg = \rho LWHa$$

که در اینجا به جای جرم m قطعه مقدار ρLWH را قرار داده‌ایم. از حل آن برحسب a خواهیم داشت

$$a = \left(\frac{\rho_f}{\rho} - 1\right)g = \left(\frac{1200\,\mathrm{kg/m^3}}{800\,\mathrm{kg/m^3}} - 1\right)(9/8\,\mathrm{m/s^2}) = 4/9\,\mathrm{m/s^2}$$

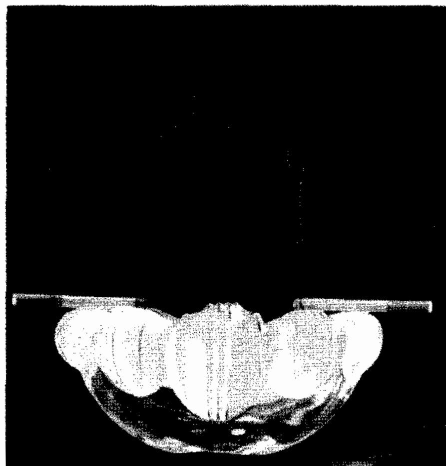
(پاسخ)

۳۰-۸ شاره‌های آرمانی در حال حرکت

حرکت *شاره‌های واقعی* خیلی پیچیده است و هنوز به طور کامل بررسی نشده‌اند. در عوض، دربارهٔ حرکت یک **شارهٔ آرمانی** بحث خواهیم کرد که از نظر ریاضی ساده‌تر است و نتیجه‌های مفیدی را به دست می‌دهد. در اینجا چهار فرض وجود دارند که دربارهٔ شارهٔ آرمانی به کار می‌روند و همهٔ آنها به *شارش* شاره مربوط‌اند.

۱- ***شارش پایا.*** در *شارش پایا* (*یالایه‌ای*) بزرگی و جهت سرعت شارهٔ در حال حرکت در هر نقطهٔ ثابت نسبت به زمان تغییر نمی‌کند. شارش آرام آب در نزدیکی مرکز جریان آهسته پایاست ولی در شرشره این طور نیست. شکل ۳۰-۱۳ انتقال از شارش پایا به *شارش ناپایا* (*غیر لایه‌ای یا آشفته*) را در جریان بالا روندهٔ دود سیگار نشان می‌دهد. سرعت ذره‌های دود با بالارفتن آنها افزایش می‌یابد و در سرعت بحرانی معینی شارش از پایا به ناپایا تغییر می‌کند.

۲- ***شارش تراکم ناپذیر.*** همانطور که در مورد شاره‌های در حال سکون دیدیم، فرض می‌کنیم که شارهٔ آرمانی مورد نظر تراکم‌ناپذیر است، یعنی چگالی آن ثابت است و مقدار یکنواختی دارد.

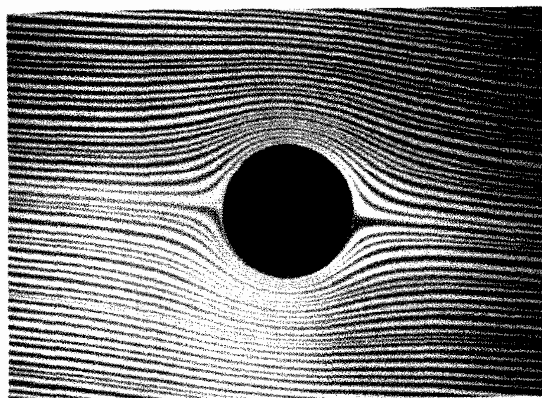


شکل ۳۰-۱۳ در یک نقطهٔ معین شارش بالا روندهٔ دود سیگار و گاز گرم از حالت پایا به حالت آشفته تبدیل می‌شود.

۳- ***شارش ناچسبناک.*** به بیان تقریبی، چسبندگی (گرانروی) یک شاره معیاری از چگونگی مقاومت شاره برای شارش است. برای مثال، عسل برای جاری شدن نسبت به آب خیلی مقاوم است، بنابراین، گفته می‌شود که عسل خیلی چسبناکتر از آب است. چسبندگی شاره‌ها مشابه اصطکاک بین جامدهاست، در هر دو سازوکار انرژی جنبشی جسمهای در حال حرکت به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود. در نبود اصطکاک، یک جسم می‌تواند با تندی ثابت روی یک سطح افقی بلغزد. به همین ترتیب به جسمی که در یک شارهٔ ناچسبناک حرکت می‌کند هیچ *نیروی کششی چسبندگی*- یعنی هیچ نیروی مقاومی ناشی از چسبندگی - وارد نمی‌شود و جسم می‌تواند با تندی ثابت در شاره حرکت کند. دانشمند انگلیسی لُرد ریلی[1] خاطر نشان کرده است که در یک شارهٔ آرمانی پروانهٔ کشتی کار نمی‌کند و یک کشتی وقتی به حرکت افتاده باشد نیازی به پروانه ندارد!

۴- ***شارش بی چرخش.*** اگرچه به بحث فعلی زیاد مربوط نمی‌شود ولی می‌توان فرض کرد که جریان *بی چرخش* است. برای بررسی این خاصیت، فرض کنید دانهٔ خیلی ریزی از غبار با شاره حرکت می‌کند. اگرچه این جسم آزمون ممکن است در مسیری دایره‌ای حرکت کند (یا نکند)، در شارش بی چرخش جسم آزمون نسبت به محوری که از مرکز جرمش می‌گذرد نمی‌چرخد. با تشابه کم می‌توان گفت که حرکت چرخ و فلک چرخشی است ولی حرکت مسافرین آن بی چرخش است.

1. Lord Rayleigh

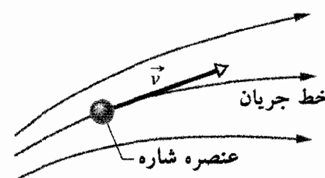


شکل ۳۰-۱۴ شارش پایای یک شاره در اطراف یک استوانه که به وسیلهٔ یک ردیاب رنگی ایجاد شده است.

می‌توانیم با افزودن *ردیاب*، شارش شاره را ببینیم. این کار را می‌توان با تزریق رنگ در نقطه‌های زیادی در سرتاسر شارش مایع انجام داد (شکل ۳۰-۱۴) یا ذره‌های دود را به شارش گاز افزود (شکل ۳۰-۱۳). هر ذرهٔ ردیاب یک *خط جریان* را دنبال می‌کند که همان مسیر طی شدهٔ عنصر کوچکی از شاره در طی شارش آن است. از فصل ۴ یادآوری می‌کنیم که سرعت ذره همواره بر مسیر طی شده توسط ذره مماس است. در اینجا ذره، یک عنصر شاره است و سرعت $\vec{v}$ آن همواره بر خط جریان مماس است (شکل ۳۰-۱۵). به این دلیل، دو خط جریان نمی‌توانند یکدیگر را قطع کنند؛ اگر قطع کنند، آنگاه عنصری که به تقاطع می‌رسد به طور همزمان دارای دو سرعت متفاوت خواهد بود، که نامکن است.

۳۰-۹ معادلهٔ پیوستگی

ممکن است توجه کرده باشید که با بستن قسمتی از شیلنگ آب به وسیله انگشتان می‌توانید موجب افزایش تندی آب خروجی از شیلنگ آب شوید. تندی v آب آشکارا به مساحت A سطح مقطعی که آب از آن می‌گذرد بستگی دارد.



شکل ۳۰-۱۵ یک عنصر شاره به هنگام حرکت یک خط جریان را تشکیل می‌دهد. بردار سرعت عنصر در هر نقطه بر خط جریان مماس است.

در اینجا می‌خواهیم رابطهٔ میان v و A را برای شارش پایای یک شارهٔ آرمانی که مانند شکل ۳۰-۱۶ از میان لوله‌ای با سطح مقطع متغیر می‌گذرد به دست آوریم. شارش به سمت راست است و قطعه لولهٔ نشان داده شده (قسمتی از یک لولهٔ درازتر) دارای طول L است. شاره در انتهای سمت چپ دارای تندی v_1 و در انتهای سمت راست دارای تندی v_2 است. لوله در سمت چپ دارای مساحت مقطع A_1 و در سمت راست دارای مساحت مقطع A_2 است. فرض کنید که در بازهٔ زمانی Δt حجم ΔV از شاره از سمت چپ وارد قطعهٔ لوله شود. در شکل ۳۰-۱۶ این حجم با سایه نشان داده شده است. سپس، چون شاره تراکم‌ناپذیر است، همین حجم ΔV باید از انتهای سمت راست قطعه خارج شود. در شکل ۳۰-۱۶ با سایهٔ کم‌رنگ نشان داده شده است.

از این حجم مشترک ΔV می‌توانیم رابطهٔ میان تندیها و سطحها را به دست آوریم. برای انجام این امر، ابتدا شکل ۳۰-۱۷ را در نظر می‌گیریم که لوله با مساحت مقطع یکنواخت A را از پهلو نشان می‌دهد. در شکل ۳۰-۱۷ الف، عنصر شارهٔ e تقریباً در حال عبور از خط‌چین رسم شده در پهنای لوله است. تندی عنصر برابر v است، بنابراین، در حین بازهٔ زمانی Δt، عنصر در امتداد لوله مسافت $\Delta x = v\Delta t$ را طی می‌کند. حجم ΔV شاره که در بازهٔ زمانی Δt از خط‌چین عبور می‌کند برابر است با

$$\Delta V = A\Delta x = Av\Delta t \qquad (۳۰-۲۲)$$

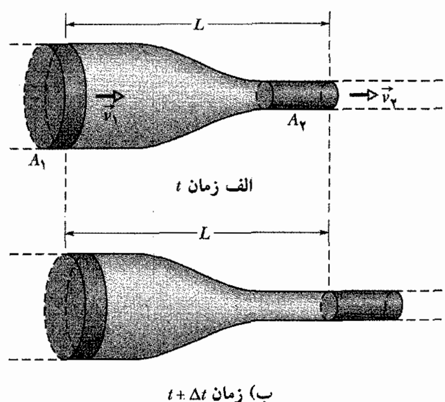
با به کار بردن معادلهٔ ۳۰-۲۲ هم برای انتهای چپ و هم برای انتهای راست قطعهٔ لوله در شکل ۳۰-۱۶، داریم

$$\Delta V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

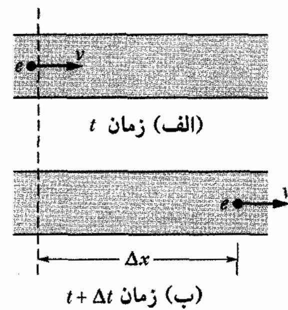
یا

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad \text{(معادلهٔ پیوستگی)} \qquad (۳۰-۲۳)$$

این رابطهٔ بین تندی و مساحت مقطع را **معادلهٔ پیوستگی** برای شارش یک شارهٔ آرمانی می‌گویند. این رابطه حاکی از آن است که وقتی مساحت مقطعی که شاره در آن شارش دارد کاهش یابد، تندی شارش افزایش می‌یابد (همانند وقتی که با انگشت شست شیلنگ آب را به طور جزئی مسدود می‌کنیم).



شکل ۳۰-۱۶ شارش شاره از چپ به راست با آهنگ پایایی در قطعه لوله‌ای به طول L صورت می‌گیرد. تندی شاره در سمت چپ برابر v_1 و در سمت راست برابر v_2 است. مساحت مقطع لوله در سمت چپ برابر A_1 و در سمت راست برابر A_2 است. از زمان t در (الف) تا زمان $t+\Delta t$ در (ب) مقدار شارهٔ ورودی به سمت چپ با مقدار شارهٔ خروجی از سمت راست برابر است.



شکل ۳۰-۱۷ شارش شاره با تندی ثابت v در لوله. (الف) در زمان t، عنصر شارهٔ e نزدیک عبور از خط‌چین است. (ب) در زمان $t+\Delta t$، عنصر شارهٔ e در فاصلهٔ $\Delta t = v\,\Delta t$ از خط‌چین قرار دارد.

معادلهٔ ۳۰-۲۳ نه تنها برای لولهٔ واقعی بلکه برای هر لولهٔ فرضی که مرزهایش شامل خطهای جریان باشد، به نام *لولهٔ شارش*، به کار می‌رود. چنین لوله‌ای همانند لولهٔ واقعی عمل می‌کند چون هیچ عنصر شارشی نمی‌تواند از خط جریان عبور کند؛ بنابراین، تمام شارهٔ داخل لولهٔ شارش باید داخل مرز آن باقی بماند. شکل ۳۰-۱۸ یک لولهٔ شارش را نشان می‌دهد که در آن در امتداد جهت شارش مساحت مقطع از A_1 به A_2 افزایش می‌یابد. از معادلهٔ ۳۰-۲۳ در می‌یابیم که با افزایش مساحت، همانطور که با جدایی بیشتر بین خطهای جریان در سمت راست شکل ۳۰-۱۸ نشان داده شده است، تندی باید کاهش یابد. به همین ترتیب، می‌توانید در شکل ۳۰-۱۴ ملاحظه کنید که تندی شارش درست در بالا و درست در پایین استوانه بیشترین مقدار را دارد.

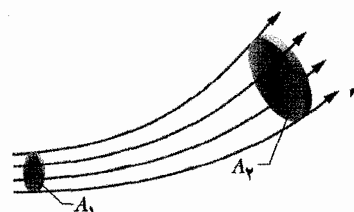
معادلهٔ ۳۰-۲۳ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

(۳۰-۲۴) (آهنگ شارش حجمی، معادلهٔ پیوستگی) $R_V = Av =$ ثابت

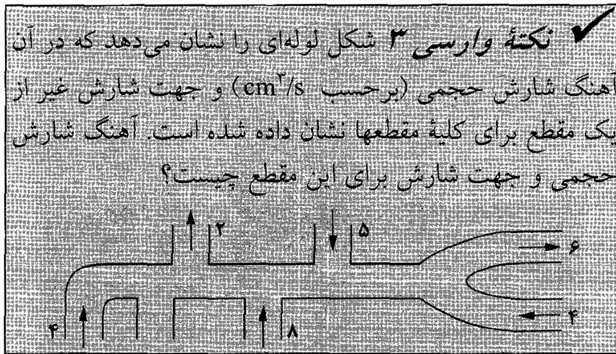
که در آن R_V **آهنگ شارش حجمی** شاره است (حجمی که از نقطهٔ داده شده در یکای زمان عبور می‌کند). یکای SI آن مترمکعب بر ثانیه است (m^3/s). اگر چگالی ρ شاره یکنواخت باشد، می‌توانیم معادلهٔ ۳۰-۲۴ را در این چگالی ضرب کنیم تا **آهنگ شارش جرمی** R_m (جرم بر یکای زمان) را به دست آوریم

(۳۰-۲۵) (آهنگ شارش جرمی) $R_m = \rho R_V = \rho A v =$ ثابت

یکای SI آهنگ شارش جرمی برابر کیلوگرم بر ثانیه (kg/s) است. معادلهٔ ۳۰-۲۵ بیانگر این مطلب است که جرمی که در شکل ۳۰-۱۶ در هر ثانیه به داخل قطعه‌ای از لوله شارش می‌یابد باید مساوی جرمی باشد که در هر ثانیه از آن خارج می‌شود.



شکل ۳۰-۱۸ یک لولهٔ شارش با خط جریانهایی که مرز آن را تشکیل می‌دهند تعریف می‌شود. آهنگ شارش حجمی باید برای کلیهٔ مقطعهای لولهٔ شارش یکسان باشد.



✔ ***نکتهٔ وارسی ۳*** شکل لوله‌ای را نشان می‌دهد که در آن آهنگ شارش حجمی (برحسب cm^3/s) و جهت شارش غیر از یک مقطع برای کلیهٔ مقطعها نشان داده شده است. آهنگ شارش حجمی و جهت شارش برای این مقطع چیست؟

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰-۶

شکل ۳۰-۱۹ نشان می‌دهد که چگونه جریان آب خروجی از یک شیر به هنگام پایین ریختن "باریک" می‌شود. مساحت مقطعهای نشان داده شده، عبارت‌اند از $A_\circ = 1/2\,cm^2$ و $A = 0/35\,cm^2$. دو سطح به فاصلهٔ قائم $h = 45\,mm$ در نظر گرفته شده‌اند. با چه آهنگی آب از شیر جریان می‌یابد؟

نکتهٔ کلیدی آهنگ شارش حجمی از مقطع بالاتر باید با مقطع پایینتر یکسان باشد.

محاسبه‌ها: از معادلهٔ ۳۰-۲۴ داریم

$$A_\circ v_\circ = Av \qquad (۳۰-۲۶)$$

که در آن $v_\circ$ و v تندی آب در سطحهای مربوط به $A_\circ$ و A هستند. همچنین چون آب به طور آزاد سقوط می‌کند از معادلهٔ ۲-۱۶ می‌توان نوشت

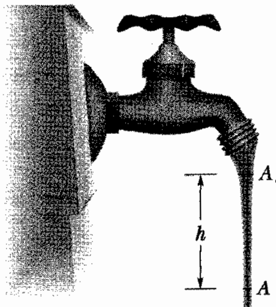
$$v^2 = v_\circ^2 + 2gh \qquad (۳۰-۲۷)$$

با حذف v بین معادله‌های ۳۰-۲۶ و ۳۰-۲۷ و حل آن برای $v_\circ$، داریم

$$v_\circ = \sqrt{\frac{2ghA^2}{A_\circ^2 - A^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(2)(9/8\,m/s^2)(0/045\,m)(0/35\,cm^2)^2}{(1/2\,cm^2)^2 - (0/35\,cm^2)^2}}$$
$$= 0/286\,m/s = 28/6\,cm/s$$

بنابراین، از معادلهٔ ۳۰-۲۴ آهنگ شارش حجمی عبارت است از

$$R = A_\circ v_\circ = (1/2\,cm^2)(28/6\,cm/s)$$
$$= 34\,cm^3/s$$ (پاسخ)



شکل ۳۰-۱۹ وقتی آب از شیر فرو بریزد، تندی آن افزایش می‌یابد. چون آهنگ شارش حجمی باید در کلیهٔ مقطعهای افقی جریان یکسان باشد، جریان باید **باریک شود**.

۳۰-۱۰ معادلهٔ برنولی

شکل ۳۰-۲۰ لوله‌ای را نشان می‌دهد که یک شارهٔ آرمانی با آهنگ پایایی در آن جریان دارد. در بازهٔ زمانی Δt، فرض کنید که حجم ΔV شاره در شکل ۳۰-۲۰ الف از سمت چپ لوله (یا ورودی) وارد و حجم مشابهی در شکل ۳۰-۲۰ ب از سمت راست لوله (یا خروجی) خارج می‌شود. حجم خارج شده باید با حجم وارد شده برابر باشد زیرا شاره تراکم‌ناپذیر است و چگالی ρ آن ثابت فرض می‌شود.

y_1، v_1 و p_1 را ارتفاع، تندی و فشار شارهٔ ورودی در سمت چپ و y_2، v_2 و p_2 را همان کمیتها در شارهٔ خروجی در سمت راست در نظر می‌گیریم. با استفاده از اصل پایستگی انرژی برای شاره، نشان خواهیم داد که این کمیتها با رابطهٔ زیر به هم مربوط‌اند

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \qquad (۳۰-۲۸)$$

به طور کلی، جملهٔ $\frac{1}{2}\rho v^2$ چگالی انرژی جنبشی نامیده می‌شود (انرژی جنبشی در یکان حجم). معادلهٔ ۳۰-۲۸ را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{ثابت} \qquad \text{(معادلهٔ برنولی)} \quad (۳۰-۲۹)$$

معادله‌های ۳۰-۲۸ و ۳۰-۲۹ شکلهای هم ارزی از **معادلهٔ برنولی** هستند. دانیل برنولی[1] کسی است که جریان شاره را در سالهای ۱۷۰۰ مطالعه کرد، و این قانون به نام او نامیده شده است.[2] مانند معادلهٔ پیوستگی (معادلهٔ ۳۰-۲۴)، معادلهٔ برنولی یک اصل جدید نیست بلکه به طور ساده فرمولبندی دوبارهٔ یک اصل در شکلی مناسبتر برای مکانیک شاره‌هاست. برای بررسی، معادلهٔ برنولی را به ازای $v_1 = v_2 = 0$ در معادلهٔ ۳۰-۲۸ در مورد شاره‌های در حال سکون به کار می‌بریم. نتیجه عبارت است از

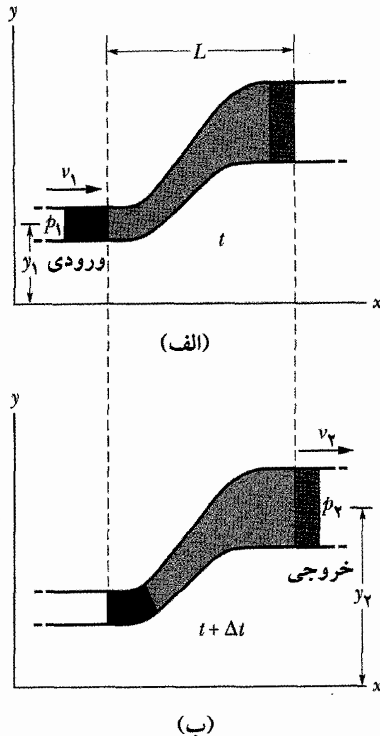
$$p_2 = p_1 + \rho g (y_1 - y_2)$$

که معادلهٔ ۳۰-۷ است.

اگر y را ثابت در نظر بگیریم (مثلاً $y = 0$) به طوری که شاره در ضمن جریان تغییر ارتفاع نداشته باشد، آنگاه معادلهٔ ۳۰-۲۸ به صورت زیر در می‌آید

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad (۳۰-۳۰)$$

که می‌گوید:



شکل ۳۰-۲۰ شاره با آهنگ پایایی از طول L لوله از ابتدای ورودی در سمت چپ وارد و از انتهای خروجی در سمت راست خارج می‌شود. از زمان t در (الف) تا زمان $t+\Delta t$ در (ب) مقدار شارهٔ تیرهٔ نشان داده شده از سمت چپ لوله وارد ابتدای ورودی و همان مقدار به صورت روشن از سمت راست از انتهای خروجی خارج می‌شود.

> اگر تندی یک عنصر شاره به هنگام حرکت در راستای یک خط جریان افقی افزایش یابد، فشار شاره کاهش می‌یابد و برعکس

به بیان دیگر، در جایی که خط جریانها به یکدیگر نزدیک باشند (یعنی جایی که سرعت نسبتاً زیاد باشد) فشار کم است و برعکس.

اگر یک عنصر ذره را در نظر بگیریم، ارتباط بین تغییر در تندی و تغییر در فشار محسوس خواهد شد. وقتی عنصر به ناحیهٔ باریک نزدیک شود، فشار زیادتر پشت سرش آن را شتابدار می‌کند به طوری که پس از آن دارای تندی بیشتری در ناحیهٔ باریک است. وقتی عنصر به ناحیهٔ پهن نزدیک شود، فشار بیشتر جلو شتاب آن را کم می‌کند به طوری که پس از آن تندی آن در ناحیهٔ پهن کمتر می‌شود.

معادلهٔ برنولی به طور مؤکد فقط در مورد شاره‌ای که آرمانی باشد اعتبار دارد. اگر نیروهای چسبندگی وجود داشته باشند، انرژی گرمایی وجود خواهد داشت. این را در اثبات بعدی به حساب نمی‌آوریم.

---

1. Daniel Bernoulli

۲. در مورد شارش بی‌چرخش (که فرض بر این است) ثابت معادلهٔ ۳۰-۲۹ در کلیهٔ نقطه‌های داخل لولهٔ شارش مقدار یکسانی دارد: لازم نیست این نقطه‌ها در امتداد یک خط جریان قرار داشته باشند. همچنین نقطه‌های ۱ و ۲ در معادلهٔ ۳۰-۲۸ می‌توانند در هر جا داخل لولهٔ شارش واقع باشند.

اثبات معادلهٔ برنولی

دستگاه مورد نظر را کل حجم شارهٔ (آرمانی) نشان داده شده در شکل ۳۰-۲۰ اختیار می‌کنیم. اصل پایستگی انرژی را برای این دستگاه وقتی از حالت اولیه (شکل ۳۰-۲۰ الف) به حالت نهایی (شکل ۳۰-۲۰ ب) حرکت می‌کند به کار می‌بریم. شاره در بین دو صفحهٔ قائم به فاصلهٔ L در شکل ۳۰-۲۰ قرار دارد و خواص آن در ضمن این فرایند تغییر نمی‌کند، فقط لازم است تغییرات رخ داده در دو انتهای ورودی و خروجی در نظر گرفته شوند.

ابتدا، قضیهٔ کار- انرژی جنبشی را به کار می‌بریم، یعنی

$$W = \Delta K \qquad (۳۰-۳۱)$$

که بیان می‌کند تغییر در انرژی جنبشی دستگاه باید با کار خالص انجام شده روی دستگاه برابر باشد. تغییر در انرژی جنبشی از تغییر در تندی بین دو طرف لوله حاصل می‌شود و برابر است با

$$\Delta K = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 = \frac{1}{2}\rho \Delta V(v_2^2 - v_1^2) \qquad (۳۰-۳۲)$$

که در آن $\Delta m(=\rho\,\Delta V)$ جرم شاره‌ای است که در بازهٔ زمانی کوچک Δt از ورودی وارد و از خروجی خارج می‌شود.

کار انجام شده روی دستگاه از دو منبع حاصل می‌شود. کار W_g انجام شده به وسیلهٔ نیروی گرانشی $(\Delta m\vec{g})$ روی جرم Δm در ضمن بالا رفتن عمودی این جرم از سطح ورودی تا سطح خروجی عبارت است از

$$W_g = -\Delta m g(y_2 - y_1) = -\rho g \Delta V(y_2 - y_1) \qquad (۳۰-۳۳)$$

این کار منفی است چون جابه‌جایی رو به بالا و نیروی گرانشی رو به پایین در دو جهت مخالف‌اند.

همچنین باید *روی* دستگاه (در طرف ورودی) برای راندن شارهٔ ورودی به داخل لوله و *به وسیلهٔ* دستگاه (در طرف خروجی) برای جلو راندن شارهٔ خروجی کار انجام گیرد. به طور کلی، کار انجام شده به وسیلهٔ نیرویی به بزرگی F، که به نمونهٔ شارهٔ واقع در لوله به مساحت A برای حرکت شاره در مسافت Δx وارد می‌شود عبارت است از

$$F\,\Delta x = (pA)(\Delta x) = p(A\,\Delta x) = p\,\Delta V$$

بنابراین، کار انجام شده روی دستگاه $p_1\Delta V$ و کار انجام شده به وسیلهٔ دستگاه $-p_2\Delta V$ است. مجموع W_p آنها برابر است با

$$W_p = -p_2\Delta V + p_1\Delta V = -(p_2 - p_1)\Delta V \qquad (۳۰-۳۴)$$

اکنون قضیهٔ کار- انرژی جنبشی معادلهٔ ۳۰-۳۱ به صورت زیر در می‌آید

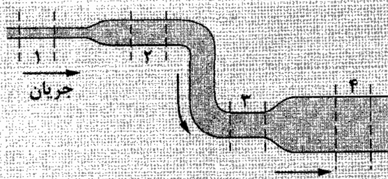
$$W = W_g + W_p = \Delta K$$

با قرار دادن از معادله‌های ۳۰-۳۲ و ۳۰-۳۳ و ۳۰-۳۴ خواهیم داشت

$$-\rho g \Delta V(y_2 - y_1) - \Delta V(p_2 - p_1) = \frac{1}{2}\rho \Delta V(v_2^2 - v_1^2)$$

پس از اندکی جابه‌جایی این همان معادلهٔ ۳۰-۲۸ است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

✔ نکتهٔ وارسی ۴ در شکل نشان داده شده، آب به طور آرام از طریق مجرایی در فرایند رو به پایین جاری می‌شود. مقطعهای شماره‌گذاری شده روی مجرا را به ترتیب بزرگی (الف) آهنگ شارش حجمی R_V که از آنها می‌گذرد، (ب) تندی شارش v که از آنها می‌گذرد و (پ) فشار آب p داخل آنها، مرتب کنید.



مسئلهٔ نمونه ۳۰-۷

اتانول با چگالی $\rho = ۷۹۱\ \text{kg/m}^3$ به طور آرام از طریق مجرایی افقی (مانند شکل ۳۰-۱۶) که مساحت سطح مقطع آن از $A_1 = ۱/۲۰\times ۱۰^{-3}\ \text{m}^2$ به $A_2 = \frac{A_1}{2}$ باریک می‌شود جریان می‌یابد. اختلاف فشار بین مقطعهای پهن و باریک مجرا $۴۱۲۰\ \text{Pa}$ است. آهنگ شارش حجمی R_V اتانول چقدر است؟

نکته‌های کلیدی (۱) چون تمام شاره‌ای که از مقطع پهن می‌گذرد باید از مقطع باریک بگذرد، پس آهنگ شارش حجمی R_V باید در دو مقطع یکسان باشد. بنابراین، از معادلهٔ ۳۰-۲۴ داریم

$$R_V = v_1 A_1 = v_2 A_2 \qquad (۳۰-۳۵)$$

ولی با دو تندی نامعلوم نمی‌توانیم این معادله را برای R_V حل کنیم. (۲) چون شارش آرام است می‌توانیم معادلهٔ برنولی را به کار بریم. از معادلهٔ ۳۰-۲۸ می‌توان نوشت

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y \qquad (۳۰-۳۶)$$

که در آن زیر نویسهای ۱ و ۲ به ترتیب بیانگر مقطع پهن و باریک مجرا هستند و y ارتفاع مشترک آنهاست. به نظر می‌رسد که این معادله به سختی بتواند کمکی باشد چون شامل R_V مورد نیاز نیست بلکه شامل دو تندی نامعلوم v_1 و v_2 است.

محاسبه‌ها: اما راه مدبرانه‌ای وجود دارد که می‌تواند کارساز باشد: ابتدا، می‌توان معادلهٔ ۳۰-۳۵ را به کار برد و همچنین می‌توان از این واقعیت که $A_2 = A_1/2$ استفاده کرد و نوشت

$$v_1 = \frac{R_V}{A_1} \quad \text{و} \quad v_2 = \frac{R_V}{A_2} = \frac{2R_V}{A_1} \qquad (۳۰-۳۷)$$

سپس می‌توان این عبارتها را در معادلهٔ ۳۰-۳۶ قرار داد و تندیهای نامعلوم را حذف کرد و رابطه‌ای برای آهنگ شارش حجمی مورد نیاز به دست آورد. انجام این عمل و حل رابطه برای R_V، به دست می‌دهد

$$R_V = A_1\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{3\rho}} \qquad (۳۰-۳۸)$$

هنوز هم لازم است تصمیمی اتخاذ کنیم: می‌دانیم که اختلاف فشار بین دو بخش برابر با 4120 Pa است، اما آیا این بدان معنی است که $p_1 - p_2$ برابر 4120 Pa است یا 4120 Pa- ؟ باید حدس بزنیم که اولی درست است، در غیر این‌صورت جذر مربع در معادلهٔ ۳۰-۳۸ یک عدد موهومی به دست خواهد داد. ولی به جای حدس زدن سعی می‌کنیم دلیلی ارائه دهیم. از معادلهٔ ۳۰-۳۵ می‌بینیم که تندی v_2 در بخش باریک (A_2 کوچک) باید بیشتر از تندی v_1 در بخش پهن (A_1 بزرگتر) باشد. یادآوری می‌کنیم که وقتی شاره در امتداد مسیر افقی حرکت می‌کند اگر تندی شاره افزایش یابد (مانند اینجا)، فشار شاره باید کاهش یابد. بنابراین، p_1 بزرگتر از p_2 است و داریم $p_1 - p_2 = 4120\text{ Pa}$. قرار دادن این مقدار و داده‌های مسئله در معادلهٔ ۳۰-۳۸، به دست می‌دهد

$$R_V = 1.20\times10^{-3}\text{ m}^2\sqrt{\frac{(2)(4120\text{ Pa})}{(3)(791\text{kg/m}^3)}} = 2.24\times10^{-3}\text{ m}^3/\text{s}$$

(پاسخ)

مسئلهٔ نمونه ۳۰-۸

در غرب قدیم، یک هفت‌تیرکش گلوله‌ای به مخزن آب روبازی (شکل ۳۰-۲۱) شلیک می‌کند که سوراخی در فاصلهٔ h در زیر سطح آب به وجود می‌آید. تندی v آب خروجی از مخزن چقدر است؟

نکته‌های کلیدی (۱) این وضعیت در اساس مانند حرکت (به طرف پایین) آب با تندی v_0 از طریق مجرای گشاد (مخزن) با مقطعی به مساحت A است که پس از آن با تندی v از طریق یک مجرای باریک (سوراخ) با مقطعی به مساحت a (به طور افقی) حرکت می‌کند. (۲) چون آبی که از مجرای گشاد جاری می‌شود باید به طور کامل از مجرای باریک بگذرد، آهنگ شارش حجمی R_V از دو «مجرا» باید یکسان باشد.

محاسبه‌ها: (۳) از طریق معادلهٔ برنولی (معادلهٔ ۳۰-۲۸) v را به v_0 (و به h) می‌توان ارتباط داد. از معادلهٔ ۳۰-۲۴ داریم

$$R_V = av = Av_0$$

و در نتیجه

$$v_0 = \frac{a}{A}v$$

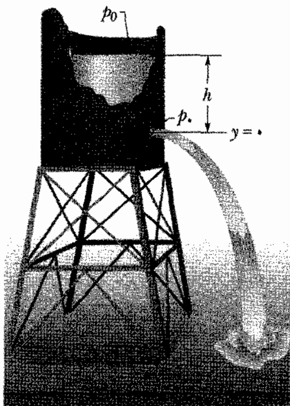
چون $a \ll A$ ، می‌بینیم که $v_0 \ll v$. از طریق معادلهٔ برنولی سطح سوراخ را به عنوان سطح مرجع اندازه‌گیری ارتفاعها (و در نتیجه انرژی پتانسیل گرانشی) در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه فشار در بالای مخزن و در سوراخ گلوله برابر با فشار جوی p_0 است (چون هر دو مکان به جو باز می‌شوند)، می‌توان معادلهٔ ۳۰-۲۸ را به صورت زیر نوشت

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g(0) \qquad (۳۰-۳۹)$$

(در اینجا بالای مخزن با طرف چپ معادله و سوراخ با طرف راست معادله مشخص شده است. صفر در طرف راست نشان می‌دهد که سوراخ سطح مرجع است.) پیش از حل معادلهٔ ۳۰-۳۹ برای v ، برای ساده کردن آن از $v_0 \ll v$ استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که v_0^2 و در نتیجه جملهٔ $\frac{1}{2}\rho v_0^2$ در معادلهٔ ۳۰-۳۹ نسبت به سایر جمله‌ها قابل چشم‌پوشی است و آن را حذف می‌کنیم. حل معادلهٔ به جا مانده برای v به دست می‌دهد

$$v = \sqrt{2gh} \qquad \text{(پاسخ)}$$

این همان تندی است که جسم از حالت سکون از ارتفاع h به طور آزاد سقوط می‌کند.



شکل ۳۰-۲۱ آب از طریق سوراخی در یک مخزن از فاصلهٔ h زیر سطح آب بیرون می‌ریزد. فشار آب در سطح آب و در سوراخ برابر با فشار جو است.

مسئلهٔ نمونه ۳۰-۹ مهارت خود را تقویت کنید

بسیاری از ماشین‌های مسابقه‌ای برای فشرده شدن به سطح مسیر به *بالابری منفی* (یا *نیروی رو به پایین*) وابسته هستند تا بدون لغزش به بیرون از مسیر به سرعت دور بزنند. بخشی از بالابری منفی *نیروی زمینی* و آن نیرویی است که ناشی از جریان هوا در زیر ماشین است. وقتی یک اتومبیل مسابقه با تندی 27.25 m/s به سمت جلو حرکت می‌کند، در شکل ۳۰-۲۲ الف هوا از بالا و پایین اتومبیل با فشار شارش می‌یابد (شکل ۳۰-۲۲ الف). هوایی که به زیر اتومبیل رانده می‌شود با سطح مقطعی عمودی با مساحت $A_0 = 0.0330\text{ m}^2$ در جلوی اتومبیل مواجه می‌شود (شکل ۳۰-۲۲ ب) و سپس هوای شارش یافته به زیر اتومبیل با سطح مقطع عمودیی با مساحت $A_1 = 0.0310\text{ m}^2$ مواجه می‌شود. این شارش را به عنوان شارش پایا از طریق مجرای افقی ساکن در نظر بگیرید که مساحت سطح مقطع آن از A_0 به A_1 کاهش می‌یابد، (شکل ۳۰-۲۲ پ).

(الف) در لحظه‌ای که اتومبیل از A_0 می‌گذرد، هوا در فشار جوی p_0 است. وقتی هوا از A_1 حرکت می‌کند تحت چه فشار p_1 قرار دارد؟

نکته‌های کلیدی (۱) چون شارش پایاست، می‌توانیم معادلهٔ برنولی (معادلهٔ ۳۰-۲۸) را برای شارش به کار بریم. برای هم‌آهنگی با زیرنویسهای داده شده، معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g y = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y \qquad (۳۰-۴۰)$$

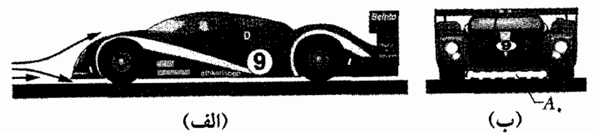
که در آن ρ چگالی هوا و y فاصلهٔ هوای در حال شارش از زمین است. (۲) چون تمام هوایی که به سطح مقطع A_0 وارد می‌شود از سطح مقطع A_1 شارش می‌یابد، آهنگ شارش حجمی R_V از دو سطح باید یکسان باشد.

محاسبه‌ها: از معادلهٔ ۳۰-۲۴ داریم

$$A_0 v_0 = A_1 v_1$$

یا

$$v_1 = v_0 \frac{A_0}{A_1} \qquad (۳۰-۴۱)$$





شکل ۳۰-۲۲ (الف) هوا از بالا و زیر اتومبیل مسابقه شارش می‌یابد. (ب) شارش از زیر اتومبیل از سطح مقطع عمودی A_0 می‌گذرد. (پ) شارش سپس مانند یک لوله محدود شده است که به سطح مقطع عمودی با مساحت A_1 باریک می‌شود.

با قراردادن معادلهٔ ۳۰-۴۱ در معادلهٔ ۳۰-۴۰ و مرتب کردن رابطه، خواهیم داشت

$$p_1 = p_0 - \frac{1}{2}\rho v_0^2\left(\frac{A_0^2}{A_1^2} - 1\right) \qquad (۳۰-۴۲)$$

تندی هوا وقتی وارد A_0 در جلوی اتومبیل می‌شود برابر ۲۷/۲۵ m/s است که تندی اتومبیل در موقع حرکت از میان هوا به سمت جلو است. با قرار دادن این تندی، چگالی هوا $\rho = ۱/۲۱ \text{kg/m}^3$ و مقدارهای مربوط به A_0 و A_1 در معادلهٔ ۳۰-۴۲، خواهیم داشت

$$p_1 = p_0 - \frac{1}{2}(۱/۲۱\ \text{kg/m}^3)(۲۷/۲۵\text{m/s})^2\left(\frac{(۰/۰۳۳۰\ \text{m}^2)^2}{(۰/۰۳۱۰\ \text{m}^2)^2} - 1\right)$$

$$= p_0 - ۵۹/۸۳۸\text{Pa} \approx p_0 - ۵۹/۸\,\text{Pa} \qquad \text{(پاسخ)}$$

بنابراین، فشار هوا در زیر اتومبیل برابر ۵۹/۸Pa و کمتر از فشار جو است.

(ب) اگر مساحت سطح مقطع افقی اتومبیل $A_h = ۴/۸۶\text{m}^2$ باشد، بزرگی نیروی عمودی خالص $F_{net,y}$ روی اتومبیل بر اثر فشار هوا در بالا و در پایین اتومبیل، چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی فشار روی سطح، همانطور که در معادلهٔ ۳۰-۴ داده شده است، برابر با نیرو بر یکای سطح است $(p = F/A)$.

محاسبه‌ها: در اینجا توجه ما به سطح رویی و زیری اتومبیل است، که فرض می‌کنیم هر دو سطح دارای مساحت A_h هستند. بالای اتومبیل فشار در فشار جوی p_0 است که اتومبیل را با مؤلفهٔ عمودی زیر به سمت پایین می‌فشارد

$$F_{y,\text{above}} = -p_0 A_h$$

در زیر اتومبیل، هوا در فشار $p = p_0 - ۵۹/۸۳۸\,\text{Pa}$ است که اتومبیل را با مؤلفهٔ عمودی زیر به سمت بالا می‌فشارد

$$F_{y,\text{below}} = (p_0 - ۵۹/۸۳۸\,\text{Pa})A_h$$

بنابراین، نیروی خالص عمودی برابر است با

$$F_{\text{net},y} = F_{y,\text{below}} + F_{y,\text{above}}$$
$$= (p_0 - ۵۹/۸۳۸\ \text{Pa})A_h - P_0 A_h$$
$$= -(۵۹/۸۳۸\text{Pa})(۴/۸۶\text{m}^2) = -۲۹۱\text{N} \qquad \text{(پاسخ)}$$

خطر هواکشی این نیروی خالص به سمت پایین که به خاطر کاهش فشار هوا در زیر اتومبیل است، اثر زمین است که روی اتومبیل وارد می‌شود. این نیرو تقریباً ٪۳۰ کل نیروی منفی در مقابل بلند کردن اتومبیل است که کمک می‌کند اتومبیل روی مسیر باقی بماند. بدون این نیروی منفی، اتومبیل باید موقع دور زدن تندی‌اش را خیلی کاهش دهد، در غیر این‌صورت به سمت دیوارهٔ مسیر سُر می‌خورد. در مسابقه، راننده می‌تواند مقاومت هوا روی اتومبیل را با حرکت نزدیک در پشت اتومبیل جلویی کاهش دهد، روشی که به *هواکشی* معروف است. با این وجود، ماشین جلویی جریان یکنواخت هوا در زیر اتومبیل عقبی را بر هم زده و موجب حذف اثر زمین روی اتومبیل عقبی می‌شود. اگر رانندهٔ عقبی این حذف کردن را نادیده بگیرد و به تناسب تندی‌اش را کاهش ندهد امکان دارد سر خوردن به سمت دیواره غیر قابل اجتناب باشد.

بازنگری و خلاصهٔ درس

چگالی **چگالی** ρ هر ماده به صورت جرم آن تقسیم بر یکای حجم تعریف می‌شود

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \qquad (۳۰-۱)$$

معمولاً، هرگاه نمونهٔ ماده در مقایسه با ابعاد اتمی خیلی بزرگ باشد، می‌توانیم معادلهٔ ۳۰-۱ را به صورت زیر بنویسیم

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad (۳۰-۲)$$

فشار شاره **شاره** ماده‌ای است که می‌تواند شارش یابد، این ماده با مرزهای ظرف خود مشخص می‌شود چون نمی‌تواند تنش برشی را تحمل کند. ولی، می‌تواند بر سطح خود نیروی عمودی وارد کند. این نیرو برحسب فشار p توصیف می‌شود

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A} \qquad (۳۰-۳)$$

که در آن ΔF نیرویی است که روی عنصر سطح به مساحت ΔA وارد می‌شود. اگر نیرو روی یک سطح صاف یکنواخت باشد، معادلهٔ ۳۰-۳ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$p=\frac{F}{A} \quad (۳۰-۴)$$

نیرویی که از فشار شاره در یک نقطهٔ معین شاره نتیجه می‌شود در کلیهٔ جهتها بزرگی یکسانی دارد. **فشار پیمانه‌ای** عبارت است از اختلاف بین فشار واقعی (یا *فشار مطلق*) در یک نقطه و فشار جو.

تغییر فشار با ارتفاع و عمق فشار در یک شارهٔ ساکن با وضعیت قائم y تغییر می‌کند. اگر y به سمت بالا مثبت باشد

$$p_2=p_1+\rho g(y_1-y_2) \quad (۳۰-۷)$$

برای تمامی نقطه‌هایی که در یک سطح واقع‌اند فشار یکسان است. اگر h *عمق* یک نمونهٔ شاره در زیر یک سطح مرجع باشد که در آن فشار P_0 است، معادلهٔ ۳۰-۷ به صورت زیر در می‌آید

$$p=p_0+\rho gh \quad (۳۰-۸)$$

که در آن p فشار در نمونه است.

اصل پاسکال تغییر در فشار وارد شده به یک شارهٔ محبوس بدون تغییر به هر بخشی از شاره و به دیواره‌های ظرف آن انتقال می‌یابد.

اصل ارشمیدس وقتی جسمی به‌طور کامل یا بخشی از آن در شاره غوطه‌ور باشد نیروی شناوری $\vec{F}_b$ از طرف شارهٔ اطراف به جسم وارد می‌شود. نیرو به سمت بالا و دارای بزرگی زیر است

$$F_b=m_f g \quad (۳۰-۱۶)$$

که در آن m_f جرم شاره‌ای است که به وسیلهٔ جسم جابه‌جا شده است (یعنی، شاره‌ای که به وسیلهٔ جسم به سمت بیرون رانده شده است).

وقتی جسمی در شاره‌ای غوطه‌ور است، بزرگی F_b (به سمت بالا) نیروی شناوری روی جسم با بزرگی F_g (به سمت پایین) نیروی گرانشی روی جسم یکسان است. **وزن ظاهری** جسمی که نیروی شناوری به آن وارد می‌شود با رابطهٔ زیر به وزن واقعی مربوط است

$$\text{وزن}_{\text{app}}=\text{وزن}-F_b \quad (۳۰-۱۹)$$

شارش شاره‌های آرمانی یک **شارهٔ آرمانی** تراکم‌ناپذیر و بدون چسبندگی است و به طور پایا و بی چرخش شارش می‌یابد. *خط جریان* مسیری است که توسط یک ذرهٔ شارهٔ منفرد طی می‌شود. *لولهٔ شارش* دسته‌ای از خط جریانهاست. شارش داخل هر لولهٔ شارش از **معادلهٔ پیوستگی** پیروی می‌کند

$$R_V=Av=\text{ثابت} \quad (۳۰-۲۴)$$

که در آن R_V **آهنگ شارش حجمی**، A سطح مقطع لولهٔ شارش در هر نقطه و v تندی شاره در آن نقطه است. **آهنگ شارش جرمی** R_m برابر است با

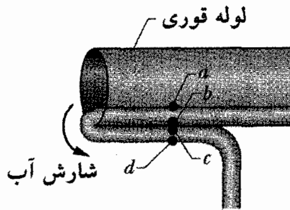
$$R_m=\rho R_V=\rho Av=\text{ثابت} \quad (۳۰-۲۵)$$

معادلهٔ برنولی استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی برای شارش یک شارهٔ آرمانی منجر به **معادلهٔ برنولی** در امتداد هر لولهٔ شارش می‌شود

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gy=\text{ثابت}$$

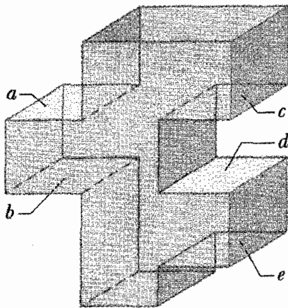
پرسشها

۱- *اثر قوری:* آبی که به آرامی از لولهٔ قوری ریخته می‌شود می‌تواند پیش از جدا شدن و فرو ریختن با فاصلهٔ قابل توجهی به لولهٔ قوری بازگردد. (لایهٔ آب به کمک فشار جو در زیر لولهٔ قوری نگه داشته می‌شود.) در شکل ۳۰-۲۳، در یک لایهٔ آب داخل لولهٔ قوری، نقطهٔ a در بالای لایه و نقطهٔ b در زیر لایه است؛ در لایهٔ آب خارج از لولهٔ قوری، نقطهٔ c در بالای لایه و نقطهٔ d در زیر لایه است. این چهار نقطه را به ترتیب بزرگی فشار پیمانه‌ای در آب آنجا مرتب کنید.



شکل ۳۰-۲۳ پرسش ۱

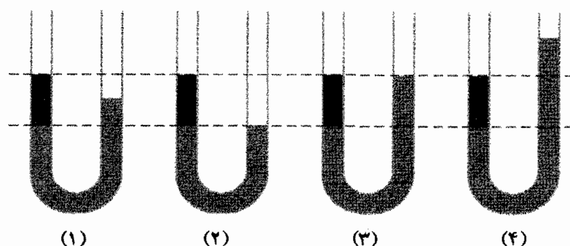
۲- شکل ۳۰-۲۴ مخزن پر از آبی را نشان می‌دهد. پنج کف و سقف افقی مشخص شده‌اند، مساحت همهٔ آنها یکسان است و در فاصله‌های L یا $2L$ یا $3L$ از بالای مخزن قرار دارند. کفها و سقفها را به ترتیب بزرگی نیروی وارد بر آنها از طرف آب مرتب کنید.



شکل ۳۰-۲۴ پرسش ۲

۳- یک جسم ۳ کیلوگرمی نامنظم را به طور کامل در شاره‌ای فرو می‌بریم. شاره‌ای که می‌توانست فضای اشغال شدهٔ فعلی توسط جسم را پر کند دارای جرم 2kg است. (الف) اگر جسم را رها کنیم، آیا به طرف بالا حرکت می‌کند یا پایین یا در جای خود می‌ماند؟ (ب) اگر دوباره این جسم را به طور کامل در شاره‌ای کم چگالتر فرو بریم و رها کنیم، چه می‌شود؟

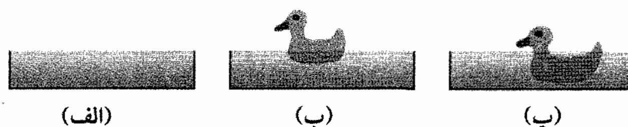
۴- شکل ۳۰-۲۵ چهار وضعیت را نشان می‌دهد که در آن دو نوع مایع تیره رنگ و خاکستری در یک لولهٔ U شکل قرار دارند. در یک وضعیت دو مایع نمی‌توانند در حالت تعادل استاتیکی باشند. (الف) این وضعیت کدام است؟ (ب) در مورد سه وضعیت دیگر فرض کنید تعادل استاتیکی برقرار است. در مورد هر یک، آیا چگالی مایع تیره از چگالی مایع خاکستری بزرگتر است یا کوچکتر یا مساوی با آن است؟



شکل ۳۰-۲۵ پرسش ۴

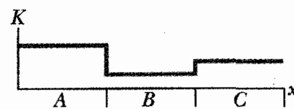
۵- قایقی با یک لنگر در استخر شنایی که قدری از قایق پهنتر است شناور است. اگر لنگر (الف) به درون آب انداخته شود یا (ب) به محیط اطراف انداخته شود، آیا سطح آب استخر بالا می‌رود یا پایین یا بدون تغییر می‌ماند؟ (پ) اگر در عوض، قطعه‌ای چوب پنبه از قایق به آب انداخته شود، آیا سطح آب در استخر رو به بالا حرکت می‌کند یا رو به پایین یا بدون تغییر می‌ماند؟

۶- شکل ۳۰-۲۶ سه ظرف مشابه رو باز را نشان می‌دهد که تا لبه با آب پر شده‌اند و اردکهای اسباب‌بازی روی دوتا از آنها شناورند. ظرفها و محتوای آنها را به ترتیب بزرگی وزن آنها مرتب کنید.



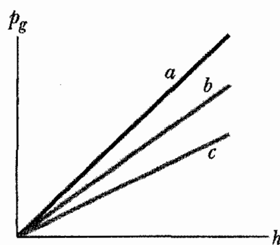
شکل ۳۰-۲۶ پرسش ۶

۷- آب به آرامی در یک لولهٔ افقی جریان می‌یابد. شکل ۳۰-۲۷ انرژی جنبشی K یک عنصر آب را موقع حرکت در امتداد محور x که در راستای لوله است نشان می‌دهد. سه قسمت مشخص شده در لوله را به ترتیب بزرگی شعاع لوله مرتب کنید.



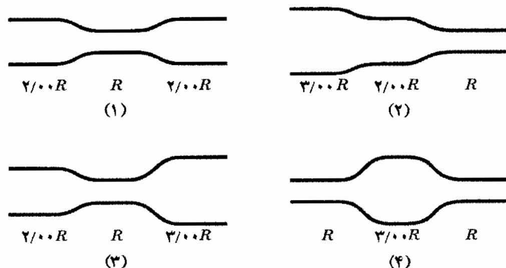
شکل ۳۰-۲۷ پرسش ۷

۸- در شکل ۳۰-۲۸ فشار پیمانه‌ای p_g برحسب عمق h برای سه مایع رسم شده است. برای یک دانهٔ پلاستیکی صلب که کاملاً در هر مایع غوطه‌ور است، نمودارها را برحسب بزرگی نیروی شناوری روی دانه مرتب کنید.



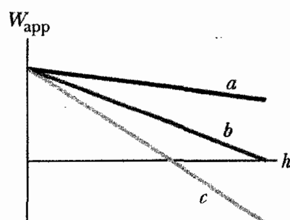
شکل ۳۰-۲۸ پرسش ۸

۹- شکل ۳۰-۲۹ چهار آرایش لوله‌هایی را نشان می‌دهد که آب از داخل آنها به آرامی به سمت راست در شارش است. شعاع قسمتهای مختلف لوله مشخص شده است. در کدام آرایش کار خالص انجام شده بر یکای حجم آبی که از قسمت کاملاً سمت چپ به قسمت کاملاً سمت راست حرکت می‌کند (الف) صفر، (ب) مثبت و (پ) منفی است؟



شکل ۳۰-۲۹ پرسش ۹

۱۰- وجه یک قطعهٔ مستطیل شکل را به نوبت به داخل سه مایع می‌فشاریم. نمودار وزن ظاهری W_{app} قطعه برحسب عمق h در سه مایع در شکل ۳۰-۲۶ رسم شده است. مایعها را به ترتیب بزرگی وزن بر یکای حجم مرتب کنید.



شکل ۳۰-۳۰ پرسش ۱۰

مسئله‌ها

GO مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس).
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
●●● تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

بخش ۳۰-۳ چگالی و فشار

•۱- هنگامی که پرستاری نیروی ۴۲N را بر پیستون دایره‌ای سرنگی به شعاع ۱/۱cm وارد می‌کند، افزایش فشار در شارهٔ آن را پیدا کنید. **SSM**

•۲- سه مایع را که با یکدیگر مخلوط نمی‌شوند به داخل یک ظرف استوانه‌ای می‌ریزیم. حجمها و چگالیهای مایعها عبارت‌اند از ۰/۵۰L، $۲/۶ g/cm^3$؛ ۰/۲۵L، $۱/۰ g/cm^3$ و ۰/۴۰L، $۰/۸۰ g/cm^3$. نیروی وارد بر کف ظرف از طرف این مایعها چقدر است؟ $۱L = ۱۰۰۰ cm^3$ = یک لیتر. (از سهم جو چشم‌پوشی کنید.)

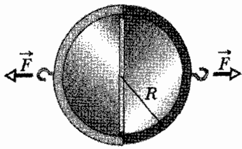
•۳- ابعاد یک پنجره ۳/۴m در ۲/۱m است. بر اثر عبور توفان، فشار هوای بیرون به ۰/۹۶atm کاهش می‌یابد ولی فشار داخل در ۱/۰atm نگهداشته می‌شود. چه نیروی خالصی پنجره را به بیرون می‌فشارد؟ **SSM**

•۴- چرخهای جلو ماشین خود را تا ۲۸psi باد کرده‌اید. سپس فشار خون خود را اندازه می‌گیرید و مثلاً عدد ۱۲۰/۸۰ به دست آمده است که این عددها برحسب mm Hg هستند. در کشورهای متریک (که باید گفت بیشتر کشورهای دنیا) این فشارها معمولاً برحسب کیلوپاسکال (kPa) بیان می‌شوند. برحسب کیلوپاسکال (الف) فشار چرخها و (ب) فشار خون شما چقدر است؟

•۵- ماهی با تنظیم کردن هوای موجود در منفذ استخوان یا کیسهٔ هوا، چگالی میانگین خود را با آب یکسان می‌کند و خود را در عمقی از آب تازه نگه می‌دارد. فرض کنید که با کیسهٔ خالی چگالی ماهی $۱/۰۸ g/cm^3$ باشد. تا چه کسری از حجم بدن منبسط شده، ماهی باید هوا وارد کیسه کند تا چگالی خود را تا چگالی آب کاهش دهد. **ILW**

•۶- یک ظرف هوابندی شده که دارای درپوشی به مساحت $۷۷ m^2$ و جرم قابل چشم‌پوشی است، به طور جزئی تخلیه شده است. اگر نیروی ۴۸۰N برای برداشتن درپوش مورد نیاز باشد و فشار جو $۱/۰ \times ۱۰^5$ Pa در نظر گرفته شود، فشار هوا در ظرف قبل باز کردن آن چقدر است؟

••۷- در سال ۱۶۵۴/۱۰۳۳ اتو فون گوریکه[1] مخترع پمپ هوا، پیش بزرگان امپراطوری رم نمایشی ارایه کرد که در آن دو گروه هشت‌تایی اسب دو نیمکرهٔ برنجی خلأ را نمی‌توانستند از هم جدا کنند. (الف) با فرض اینکه نیمکره‌ها دارای جدارهٔ نازک (قوی) باشند به طوری که R در شکل ۳۰-۳۱ را می‌توان هم شعاع داخلی و هم شعاع خارجی در نظر گرفت، نشان دهید که نیروی $\vec{F}$ مود نیاز برای جدا کردن دو نیمکره دارای بزرگی $F = \pi R^2 \Delta P$ است، که در آن ΔP اختلاف بین فشارهای داخل و خارج کره است. (ب) اگر R برابر با ۳۰cm، فشار داخل ۰/۱۰atm و فشار خارج برابر ۱/۰۰atm باشد، بزرگی نیرویی که دو گروه اسب برای جدا کردن نیمکره‌ها بر یکدیگر وارد می‌کنند چقدر است؟ (پ) توضیح دهید که چرا با یک گروه از اسبها و با بستن نیمکره‌ها به یک دیوار محکم می‌توان نکتهٔ مورد نظر را اثبات کرد؟ **SSM**



شکل ۳۰-۳۱ مسئلهٔ ۷

بخش ۳۰-۴ شاره‌های ساکن

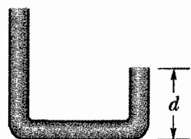
•۸- اختلاف هیدروستاتیکی در فشار خون بین مغز و پای شخصی به ارتفاع ۱/۸۳m را محاسبه کنید. چگالی خون برابر $۱/۰۶ \times ۱۰^3 kg/m^3$ است.

•۹- عمق ۱۰/۹km در اقیانوس آرام، عمیقترین نقطه در هر یک از اقیانوسها است. در سال ۱۹۶۰/۱۳۳۹، دونالد والش[2] و ژاک پیکارد[3] به این عمق با کمک زیر دریایی علمی *تریست* دست یافتند. فرض کنید آب دریا دارای چگالی یکنواخت $۱۰۲۴ kg/m^3$ باشد، فشار هیدروستاتیکی برحسب اتمسفر را که *تریست* باید تحمل کند با تقریب مشخص کنید.

•۱۰- بیشینهٔ عمق d_{max} که یک غواص می‌تواند با لولهٔ تنفس زیر آب برود بستگی به چگالی آب و این واقعیت دارد که ریه‌های انسان می‌تواند بیشینهٔ اختلاف فشار (بین داخل و خارج قفسهٔ سینه) ۰/۰۵۰atm را تحمل کند. اختلاف در d_{max} برای آب شیرین و آب بحر المیت[4] (شورترین آب طبیعی در جهان با چگالی $۱/۵ \times ۱۰^3 kg/m^3$) چقدر است؟

•۱۱- خدمهٔ یک زیر دریایی صدمه دیده می‌خواهند در عمق ۱۰۰m از آن فرار کنند. چه نیرویی را آنها باید بر دریچه‌ای به ابعاد ۱/۲m در ۰/۶m در آن عمق وارد کنند تا باز شود؟ فرض کنید چگالی آب اقیانوس $۱۰۲۴ kg/m^3$ و فشار هوای داخلی ۱/۰۰ atm است. **SSM**

•۱۲- لولهٔ پلاستیکی در شکل ۳۰-۳۲ دارای سطح مقطعی به مساحت $۵/۰۰ cm^2$ است. لوله تا وقتی پر آب می‌شود که بازوی کوتاه (به طول $d = ۰/۸۰۰ m$) پر از آب گردد. سپس لولهٔ کوتاه مسدود و آب بیشتری بتدریج به داخل بازوی بلند ریخته می‌شود. اگر وقتی که نیروی روی سرپوش مسدود کننده از ۹/۸۰N بیشتر شود، سرپوش کنده شود، ارتفاع کلی آب در بازوی بلند چقدر باید باشد تا سرپوش در مرز کنده شدن قرار گیرد؟



شکل ۳۰-۳۲ مسئله‌های ۱۲ و ۷۵

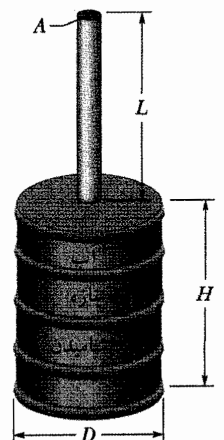
1. Otto von Guericke
2. Donald Walsh
3. Jacques Piccard
4. Dead Sea

•۱۳- یک ماشین مکنده باید چه فشار پیمانه‌ای را اعمال کند تا اینکه گرد و غباری با چگالی $1800 kg/m^3$ را در لوله‌ای تا ارتفاع $1/5 m$ بالا بکشد؟

•۱۴- *اختلال در ضمن پرواز.* به کسی که غواصی می‌کند توصیه می‌شود به مدت ۲۴ ساعت بعد از آن پرواز نکند، چون هوای مخلوط در غواصی می‌تواند به شریان‌های خونی نیتروژن وارد کند. اگر نیتروژن به آرامی از آنها خارج نشود، هر نوع کاهش ناگهانی فشار هوا (مانند حالتی که هواپیما اوج می‌گیرد) می‌تواند در نیتروژن موجب به وجود آمدن حباب‌هایی در خون و اختلال در گردش آن شود، که خیلی دردآور و حتی موجب مرگ می‌شود. نیروهای ویژهٔ عملیات نظامی به خصوص در مرض خطر هستند. چه تغییر فشاری در چنین نیروهای ویژهٔ عملیاتی که در یک روز باید در عمق $20 m$ در آب دریا غواصی کنند و در روز بعد از ارتفاع $7/6 km$ با چتر نجات فرود آیند ایجاد می‌شود؟

•۱۵- *خم‌شدن زرافه برای نوشیدن.* سر زرافه $2/0 m$ بالاتر از قلب آن و قلب آن $2/0 m$ بالاتر از پاهایش است. فشار پیمانه‌ای (هیدروستاتیک) خون در قلب زرافه $250 torr$ است. فرض کنید که زرافه در حالت ایستاده است و چگالی خون $1/06 \times 10^3 kg/m^3$ است. برحسب torr (یا mm Hg)، فشار خون (پیمانه‌ای) (الف) در مغز (فشار برای رساندن خون به مغز کافی است و مانع از افتادن زرافه می‌شود) و (ب) در پاها (فشار با پوست محکمی برخورد می‌کند که مانند یک مخزن فشار عمل می‌کند)،را پیدا کنید. (پ) اگر زرافه برای نوشیدن از برکه‌ای بدون بازکردن پاهای خود و حرکت آهسته سرخود را پایین آورد، فشار خون در مغز چقدر افزایش می‌یابد؟ (چنین عملی ممکن است مرگ‌آور باشد).

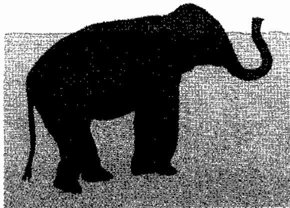
•۱۶- در شکل ۳۰-۳۳ یک لولهٔ سر باز به طول $L = 1/8 m$ و سطح مقطعی به مساحت $A = 4/6 cm^2$ به بالای یک بشکهٔ استوانه‌ای به قطر $D = 1/2 m$ و ارتفاع $H = 1/8 m$ محکم شده است. بشکه و لوله پر از آب (تا بالای لوله) هستند. نسبت نیروی هیدروستاتیکی وارد به ته بشکه به نیروی گرانشی روی آب موجود در بشکه را به دست آورید. چرا این نسبت برابر ۱/۰ نیست؟ (نیازی به در نظر گرفتن فشار جو ندارید.)



شکل ۳۰-۳۳ مسئلهٔ ۱۶

•۱۷- *فشار خون در سوسمارهای غول‌آسا.* (الف) اگر سر این سوسمار گیاه‌خوار غول‌آسا با گردن دراز $21 m$ و قلب او $0/9 m$ بالای زمین باشد، فشار پیمانه‌ای (هیدرو ستاتیکی) لازم در خون قلب باید چقدر باشد تا فشار خون در سر $80 torr$ باشد (فشار لازم برای جاری شدن خون به مغز)؟ فرض کنید که چگالی خون $1/06 \times 10^3 kg/m^3$ است. (ب) فشار خون در پاها (برحسب torr یا mm Hg) چقدر است؟

•۱۸- *تنفس زیرآبی توسط انسان و فیل.* وقتی شخصی در زیر آب تنفس می‌کند، ریه‌ها به طور مستقیم از طریق لولهٔ تنفسی با جو ارتباط پیدا می‌کند و در نتیجه در فشار جوی قرار دارند. اگر طول لولهٔ تنفسی (الف) $20 cm$ (وضعیت استاندارد) و (ب) $4/0 m$ (احتمالاً وضعیت مرگ) باشد، برحسب اتمسفر، اختلاف Δp بین فشار هوای داخلی و فشار آب وارد بر بدن چقدر است؟ در مورد اخیر، اختلاف فشار باعث پاره شدن مویرگ‌ها در دیوارهٔ ریه‌ها و جاری شدن خون در آنها می‌شود. همان‌طور که در شکل ۳۰-۳۴ نشان داده شده است، فیل از طریق خرطوم خود در هنگام شنا کردن با ریه‌هایی در فاصلهٔ $4/0 m$ زیر سطح آب به طور ایمن تنفس می‌کند چون غشای اطراف ریه‌ها دارای بافت‌های متصل به هم هستند که مویرگ‌های خونی را نگه می‌دارند و مانع از پارگی آنها می‌شوند.

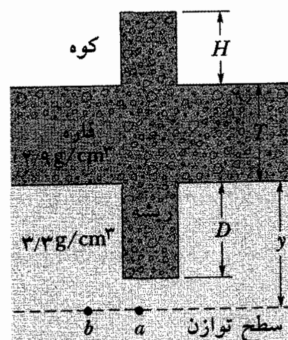


شکل ۳۰-۳۴ مسئلهٔ ۱۸

••۱۹- دو ظرف استوانه‌ای مشابه که قاعده‌های آنها در یک سطح قرار دارند هر یک محتوی مایعی با چگالی $1/30 \times 10^3 kg/m^3$ هستند. مساحت هر قاعده برابر $4/00 cm^2$ است، ولی ارتفاع آب در یکی از ظرفها $0/854 m$ و در دیگری $1/560 m$ است. وقتی دو ظرف به هم متصل شوند کار انجام شده به وسیلهٔ نیروی گرانشی را برای هم سطح کردن آنها پیدا کنید. SSM ILW

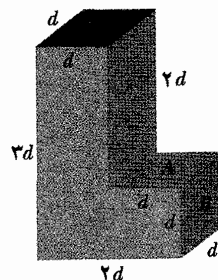
•••۲۰- *سیاهی رفتن چشم در نبرد هوایی.* وقتی خلبانی در سرعت بالا با یک هواپیمای جنگندهٔ مدرن دور می‌زند، فشار خون در سطح مغز کاهش می‌یابد، خون به مغز نمی‌رسد و از خون خالی می‌شود. اگر در هنگامی که خلبان شتاب مرکزگرای افقی 4g قرار دارد، قلب فشار پیمانه‌ای (هیدروستاتیکی) را در شریان‌ها $120 torr$ (یا mm Hg) نگهدارد، فشار خون (برحسب torr) در مغز و در فاصلهٔ شعاعی $30 cm$ از قلب چقدر است؟ رسیدن خون به مغز به اندازه‌ای کم است که چشم سیاه و سفید می‌بیند و دید باریک می‌شود و خلبان هوشیاریش را از دست می‌دهد. چگالی خون $1/06 \times 10^3 kg/m^3$ است.

●●۲۱- در تحلیل بعضی ویژگیهای زمین شناختی، معمولاً فرض می‌شود که فشار در یک *سطح توازن* افقی، در اعماق زمین، در ناحیهٔ بزرگی یکسان و برابر با فشاری است که به وسیلهٔ نیروی گرانشی روی مواد بالای این تراز وارد می‌شود. بنابراین، فشار روی سطح توازن با فرمول‌های فشار شاره داده می‌شود. برای مثال این مدل مستلزم آن است که کوهها دارای *ریشه‌هایی* از صخره‌های قاره‌ای هستند که به نواحی گوشتهٔ چگالتر ادامه یافته‌اند (شکل ۳۰-۳۵). کوهی به ارتفاع $H = ۶/۰\,km$ را در نظر بگیرید که روی قاره‌ای به ضخامت $T = ۳۲\,km$ واقع است. چگالی صخرهٔ قاره‌ای $۲/۹\,g/cm^3$ و زیر این صخره گوشته‌ای با چگالی $۳/۳\,g/cm^3$ قرار دارد. عمق D این ریشه را محاسبه کنید. (*راهنمایی*: فشار نقطه‌های a و b را یکسان در نظر بگیرید؛ عمق y سطح توازن حذف می‌شود.)



شکل ۳۰-۳۵ مسئلهٔ ۲۱

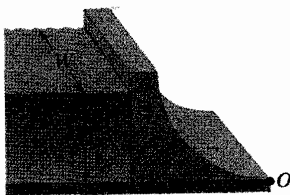
●●۲۲- مخزن L شکل نشان داده شده در شکل ۳۰-۳۶ از آب پر شده و بالای آن باز است. اگر $d = ۵/۰\,m$ باشد، نیروی وارد از آب (الف) بر وجه A و (ب) بر وجه B، چقدر است؟



شکل ۳۰-۳۶ مسئلهٔ ۲۲

●●۲۳- یک آکواریوم بزرگ با ارتفاع $۵/۰۰\,m$ تا عمق $۲/۰۰\,m$ با آب تازه پر شده است. یک دیوارهٔ آکواریم پلاستیکی ضخیم و به پهنای $۸/۰۰\,m$ است. اگر آکواریوم تا عمق $۴/۰۰\,m$ پر از آب شود، نیروی کل روی دیوار چقدر افزایش می‌یابد؟ GO

●●۲۴- در شکل ۳۰-۳۷، آب تا عمق $D = ۳۵/۰\,m$ پشت سطح قائم یک سد با پهنای $W = ۳۱۴\,m$ جمع شده است. (الف) نیروی افقی خالصی را که بر سطح سد از طرف فشار پیمانه‌ای آب وارد می‌شود و (ب) گشتاور نیروی خالص ناشی از فشار پیمانه‌ای حول خطی را که از O موازی با پهنای سد می‌گذرد، پیدا کنید. (پ) بازوی این گشتاور نیرو را پیدا کنید. GO



شکل ۳۰-۳۷ مسئلهٔ ۲۴

بخش ۳۰-۵ اندازه‌گیری فشار

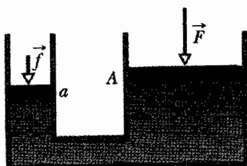
●۲۵- در مشاهده‌ای، ستون جیوه در فشار سنجی (همان‌طور که در شکل ۳۰-۱۵ الف نشان داده شده است) ارتفاع h برابر با $۷۴۰/۳۵\,mm$ را نشان می‌دهد. دما $-۵/۰°c$ است، در این دما چگالی جیوه p برابر با $۱/۳۶۰۸ \times ۱۰^4\,kg/m^3$ است. شتاب سقوط آزاد گرانش g در این محل برابر $۹/۷۸۳۵\,m/s^2$ است. فشار جو در این محل برحسب پاسکال و برحسب torr (که برای قرائت فشارسنج یکای متداولی است) چقدر است؟

●۲۶- برای مکیدن نوشابه‌ای با چگالی $۱۰۰۰\,kg/m^3$ با نی تا ارتفاع بیشینهٔ $۴/۰\,cm$، کمترین فشار پیمانه‌ای (برحسب اتمسفر) که باید به وسیلهٔ ریه‌های خود ایجاد کنیم چقدر است؟

●●۲۷- اگر چگالی هوا (الف) ثابت و (ب) برحسب ارتفاع به طور خطی به صفر برسد، ارتفاع جو چقدر باید باشد؟ فرض کنید که در سطح دریا فشار $۱/۰\,atm$ و چگالی هوا $۱/۳\,kg/m^3$ است. SSM

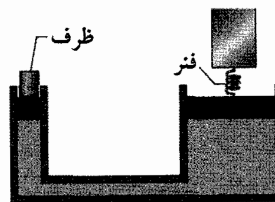
بخش ۳۰-۶ اصل پاسکال

●۲۸- پیستونی با سطح مقطعی به مساحت a در یک منگنهٔ آبی برای اعمال نیروی کوچک به بزرگی f بر شارهٔ محبوسی به کار می‌رود. لولهٔ رابط به یک پیستون بزرگتر با سطح مقطعی به مساحت A وصل است (شکل ۳۰-۳۸). (الف) بزرگی نیروی F که پیستون بزرگتر بدون حرکت کردن تحمل می‌کند چقدر است؟ (ب) اگر قطر پیستونها $۳/۸۰\,cm$ و $۵۳/۰\,cm$ باشند، بزرگی نیروی وارد بر پیستون کوچک که با نیروی $۲۰/۰\,kN$ وارد بر پیستون بزرگ در تعادل باشد چقدر است؟



شکل ۳۰-۳۸ مسئلهٔ ۲۸

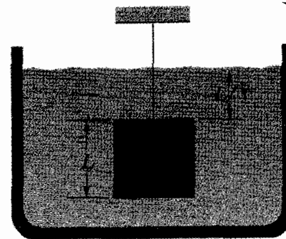
••۲۹- در شکل ۳۰-۳۹ فنری با ثابت فنر $3/00\times10^{4}$ N/m بین یک تیر صلب و پیستون خروجی یک اهرم هیدرولیکی قرار دارد. یک ظرف خالی با جرم ناچیز روی پیستون ورودی قرار داده شده است. پیستون ورودی دارای مساحت A_i و پیستون خروجی دارای مساحت $18/0\,A_i$ است. فنر در آغاز در حال تعادل است. چند کیلوگرم شن باید (به آهستگی) به داخل ظرف ریخت تا فنر را به مقدار ۵/۰۰cm فشرده کند؟



شکل ۳۰-۳۹ مسئلهٔ ۲۹

بخش ۳۰-۷ اصل ارشمیدس

•۳۰- در شکل ۳۰-۴۰، جسمی مکعبی شکل به ضلع $L=0/600$m و جرم ۴۵۰kg با طناب در داخل مخزن روبازی حاوی مایعی با چگالی $1030\,\text{kg/m}^3$ ، آویزان است. (الف) بزرگی نیروی کل رو به پایینی که به وسیلهٔ مایع و جو بر قسمت بالای جسم وارد می‌شود چقدر است؟ فرض کنید فشار جو برابر ۱/۰۰atm است. (ب) بزرگی نیروی کل رو به بالایی که بر قسمت پایین جسم وارد می‌شود چقدر است؟ (پ) کشش طناب را پیدا کنید. (ت) بزرگی نیروی شناوری وارد بر جسم را با استفاده از اصل ارشمیدس محاسبه کنید. چه رابطه‌ای بین تمام این کمیتها وجود دارد؟


شکل ۳۰-۴۰ مسئلهٔ ۳۰

•۳۱- یک لنگر آهنی با چگالی $7870\,\text{kg/m}^3$ در آب ۲۰۰N سبکتر از مقدار آن در هوا به نظر می‌آید. (الف) حجم لنگر چقدر است؟ (ب) وزن آن در هوا چقدر است؟ SSM

•۳۲- یک قایق شناور در آب تازه ۳۵/۶kN آب را جابه‌جا می‌کند. (الف) اگر این قایق در آب شور با چگالی $1/10\times10^{3}\,\text{kg/m}^3$ شناور شود، چه وزنی از آب را جابه‌جا می‌کند؟ (ب) اختلاف حجم آب تازهٔ جابه‌جا شده و حجم آب شور جابه‌جا شده چقدر است؟

•۳۳- سه بچه هر یک به وزن ۳۵۶N از بهم بستن کنده‌های درخت به قطر ۰/۳۰m و طول ۱/۸۰m یک کلک می‌سازند. چند کندهٔ درخت مورد نیاز است تا کلک در آب تازه شناور گردد؟ فرض کنید چگالی کندهٔ درخت $800\,\text{kg/m}^3$ باشد.

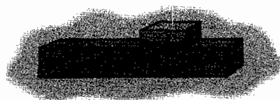
•۳۴- یک جسم ۵/۰۰kg در حالی که کاملاً در مایعی فرو رفته است از حالت سکون رها می‌شود. جرم مایع جابه‌جا شده به وسیلهٔ جسم ۳/۰۰kg است. با فرض اینکه جسم آزادانه حرکت می‌کند و نیروی مقاومت روی جسم از طرف مایع قابل چشم‌پوشی باشد، جسم در مدت ۲/۰۰s چقدر و در چه جهتی حرکت می‌کند؟

•۳۵- دو سوم حجم V یک قطعهٔ چوبی شناور در آب تازه در آن فرو رفته است و در روغن $0/90\,V$ در آن فرو می‌رود. چگالی (الف) چوب و (ب) روغن، را پیدا کنید. SSM

•۳۶- یک وسیلهٔ شناور به شکل استوانهٔ قائم با ارتفاع ۰/۵۰۰m و مساحت قاعدهٔ $4/00\,\text{m}^2$ و چگالی ۰/۴۰۰ برابر چگالی آب تازه است. در ابتدا آن را در آب کاملاً فرو می‌بریم به‌طوری که قاعدهٔ بالای آن هم سطح آب باشد. سپس اجازه می‌دهیم که بتدریج بالا آمده تا وقتی به صورت شناور درآید. نیروی شناوری در حین بالا آمدن این وسیله چقدر کار روی آن انجام می‌دهد؟

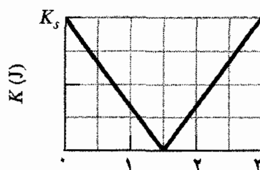
••۳۷- یک کرهٔ توخالی به شعاع داخلی ۸/۰cm و شعاع خارجی ۹/۰cm تا نیمه در مایعی با چگالی $800\,\text{kg/m}^3$ فرو رفته شده است. (الف) جرم کره چقدر است؟ (ب) چگالی ماده‌ای را که کره از آن ساخته شده است محاسبه کنید. SSM WWW

••۳۸- *کمین کردن تمساحها.* تمام تمساحها با شناور کردن خود تا روی سر منتظر صید می‌مانند به طوری که صید نمی‌تواند به آسانی آنها را ببیند. یک روش که تمساح می‌تواند میزان فرو رفتن را تنظیم کند کنترل اندازهٔ ریه خود است. روش دیگر بلعیدن سنگ‌هایی است که در معده جمع می‌شوند. شکل ۳۰-۴۱ مدل خیلی ساده شده‌ای (دهان لوزی) به جرم ۱۳۰kg را نشان می‌دهد که با پیدا بودن جزیی سرخود گردش می‌کند. مساحت بالای سر $0/20\,\text{m}^2$ است. اگر تمساح تمام سنگ‌هایی را که بلعیده است به اندازهٔ ٪۱۰ جرم بدنش باشد (مقدار نوعی)، چقدر فرو می‌رود؟


شکل ۳۰-۴۱ مسئلهٔ ۳۸

••۳۹- چه کسری از حجم کوه یخی (با چگالی $917\,\text{kg/m}^3$) دیده خواهد شد هرگاه کوه یخی (الف) در اقیانوس (آب‌شور با چگالی $1024\,\text{kg/m}^3$) و (ب) در رودخانه (آب شیرین با چگالی $1000\,\text{kg/m}^3$) شناور شود؟ (وقتی آب‌شور یخ می‌زند، نمک جدا می‌شود. بنابراین یک کوه یخی آب شیرین برای جامعه تامین می‌کند.)

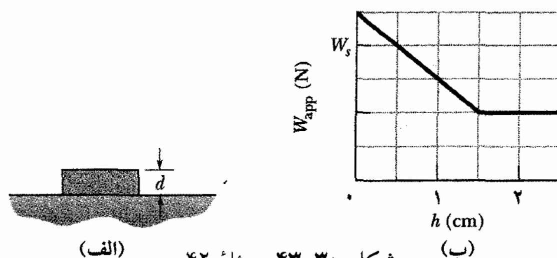
●●۴۰- گلولهٔ صلب کوچکی در حالی‌که کاملاً در مایعی فرو رفته از حالت سکون رها می‌شود و سپس وقتی که گلوله ۴/۰cm حرکت کرد انرژی جنبشی آن اندازه‌گیری می‌شود. شکل ۳۰-۴۲ نتیجه‌ها را پس از به کار بردن چند مایع مختلف به دست می‌دهد. انرژی جنبشی K برحسب چگالی مایع ρ_{liq} رسم شده و $K_s = ۱/۶۰ J$ مقیاس محور عمودی است. (الف) چگالی و (ب) حجم گلوله چقدر است؟



شکل ۳۰-۴۲ مسئلهٔ ۴۰

●●۴۱- یک پوستهٔ کروی توخالی از آهن تقریباً به طور کامل در آب غوطه‌ور است. قطر خارجی آن ۶۰/۰cm و چگالی آهن ۷/۸۷g/cm³ است. قطر داخلی چقدر است؟ ILW

●●۴۲- در شکل ۳۰-۴۳ الف، یک قطعهٔ مکعبی از وجه پایین آن بتدریج به داخل مایعی فشرده می‌شود. قطعه دارای ارتفاع d؛ مساحت وجه پایین و بالا برابر $A = ۵/۶۷ cm^2$ است. شکل ۳۰-۴۳ ب وزن ظاهری W_{app} قطعه را به صورت تابعی از عمق h از وجه پایین، به دست می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $W_s = ۰/۲۰ N$ مشخص شده است. چگالی مایع چقدر است؟

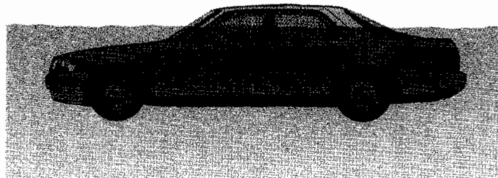


شکل ۳۰-۴۳ مسئلهٔ ۴۲

●●۴۳- چدن که شامل تعدادی حفره است در هوا ۶۰۰۰N و در آب ۴۰۰۰N وزن دارد. کل حجم حفره‌های این چدن چقدر است؟ چگالی آهن (یعنی نمونهٔ بدون حفره) برابر ۷/۸۷g/cm³ است.

●●۴۴- فرض کنید که شما گلولهٔ کوچکی را از حالت سکون از عمق ۶/۰۰m زیر سطح آب استخری رها می‌کنید. اگر چگالی گلوله برابر ۰/۳۰۰ چگالی آب و نیروی مقاومت روی توپ از طرف آب قابل چشم‌پوشی باشد، گلوله پس از خروج از آب تا چه ارتفاعی از سطح آب پرتاب می‌شود؟ (هرگونه انتقال انرژی به خاطر پاشیدن آب و موجهای تولید شده به وسیلهٔ گلوله در حین خروج از آب، قابل چشم‌پوشی است.)

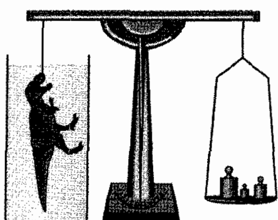
●●۴۵- حجم هوا در قسمت سرنشینان اتومبیلی به جرم ۱۸۰۰kg برابر ۵/۰۰m³ است. حجم موتور و چرخهای جلو ۰/۷۵۰m³ و حجم چرخهای عقب، مخزن بنزین و صندوق عقب برابر ۰/۸۰۰m³ است؛ آب نمی‌تواند به این دو ناحیه نفوذ کند. اتومبیل به داخل دریاچه‌ای می‌افتد. (الف) در آغاز، هیچ آبی به قسمت سرنشینان نفوذ نمی‌کند. چند متر مکعب آن، وقتی اتومبیل غوطه‌ور است، در زیر سطح آب قرار دارد (شکل ۳۰-۴۴)؟ (ب) با ورود آرام آب، اتومبیل غرق می‌شود. وقتی که ماشین در زیر سطح آب ناپدید شود، چند متر مکعب آب در اتومبیل وارد شده است؟ (اتومبیل، با بار سنگین در صندوق عقب، افقی می‌ماند.)



شکل ۳۰-۴۴ مسئلهٔ ۴۵

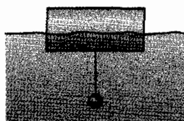
●●۴۶- یک قطعهٔ چوبی دارای جرم ۳/۶۷kg و چگالی ۶۰۰kg/m³ است. می‌خواهیم به آن سرب ($۱/۳۱\times۱۰^۴ kg/m^3$) اضافه کنیم تا اینکه ۰/۹۰ حجم آن در آب فرو رود. (الف) اگر سرب بالای چوب قرار داده شود و (ب) اگر سرب زیر آن بسته شود، جرم سرب چقدر باید باشد؟

●●۴۷- وقتی پژوهشگران فسیل کامل دایناسوری را پیدا کنند، آنها می‌توانند جرم و وزن دایناسور زنده را با مقیاس مدل پلاستیکی آن که بر پایهٔ ابعاد استخوانهای فسیل است، به دست آورند. اندازهٔ مدل ۱/۲۰ است؛ یعنی، طولها ۱/۲۰ طول، مساحتها $(۱/۲۰)^۲$ مساحت و حجمها $(۱/۲۰)^۳$ حجم واقعی‌اند. ابتدا، مدل را از یک بازوی ترازوی عقربه‌ای آویزان می‌کنند و وزنه‌ها را در بازوی دیگر قرار می‌دهند تا تعادل برقرار گردد. سپس مدل را کاملاً در آب فرو می‌برند و بقدر کافی وزنه از بازوی دیگر بر می‌دارند تا دوباره تعادل برقرار شود (شکل ۳۰-۴۵). برای یک مدل مشخص، فسیل *T.rex*، باید ۶۳۷/۷۶g وزنه برداشته شود تا دوباره تعادل برقرار شود. حجم (الف) مدل و (ب) فسیل *T.rex* واقعی چقدر است؟ (پ) اگر چگالی *T.rex* تقریباً برابر چگالی آب باشد، جرم آن چقدر است؟



شکل ۳۰-۴۵ مسئلهٔ ۴۷

●●●۴۸- شکل ۳۰-۴۶ یک گلولهٔ آهنی را نشان می‌دهد که به وسیلهٔ نخی که جرم آن قابل چشم‌پوشی است از استوانه‌ای که به طور عمود قرار دارد و قسمتی از آن در آب فرو رفته، آویزان است. استوانه دارای ارتفاع ۶/۰۰cm و مساحت قاعدهٔ آن در بالا و پایین برابر ۱۲/۰cm² و چگالی آن ۰/۳۰g/cm³ و ۲/۰۰cm از ارتفاع آن بالای سطح آب است. شعاع گلولهٔ آهنی چقدر است؟



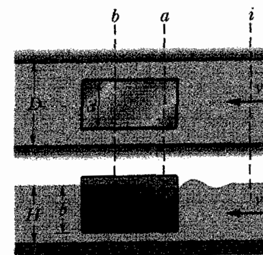
شکل ۳۰-۴۶ مسئلهٔ ۴۸

بخش ۳۰-۹ معادلهٔ پیوستگی

•۴۹- یک شیلنگ باغبانی با قطر داخلی ۱/۹cm به یک آب افشان (در حالت ساکن) با ۲۴ سوراخ، هر یک به قطر ۰/۱۳cm متصل است. اگر تندی آب در شیلنگ ۰/۹۱m/s باشد، با چه تندی آب از سوراخهای آب افشان بیرون می‌آید؟ SSM

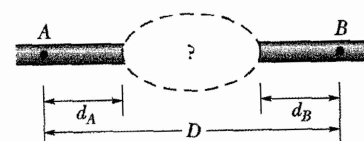
•۵۰- دو نهر آب به هم می‌رسند و تشکیل رودخانه را می‌دهند. یک نهر دارای پهنای ۸/۲m ، عمق ۳/۴m و تندی جریان ۲/۳m/s است. نهر دیگر دارای پهنای ۶/۸m و عمق ۳/۲m و با تندی ۲/۶m/s در جریان است. اگر رودخانه دارای پهنای ۱۰/۵m و تندی ۲/۹m/s باشد، عمق آن چقدر است؟

•۵۱- اثر کانال. شکل ۳۰-۴۷ یک قایق باری را نشان می‌دهد که با عرض $d =$ ۳۰m و در داخل آب به فاصلهٔ $b =$۱۲m لنگر انداخته است. عرض کانال $D =$ ۵۵m و عمق آب $H =$۱۴m و آب با سرعت ثابت ۱/۵m/s جریان دارد. فرض کنید که جریان در اطراف قایق یکنواخت است. موقع عبور آب از سینهٔ قایق سطح آب سراشیبی زیادی پیدا می‌کند که اثر کانال دارد. اگر عمق سراشیبی $h =$ ۰/۸۰m باشد، سرعت آب در کنار قایق که از بخش‌های عمودی در (الف) نقطهٔ a و (ب) نقطهٔ b ، می‌گذرد چقدر است؟ فرسایش ناشی از افزایش سرعت موضوع مهندسی هیدرولیک است.



شکل ۳۰-۴۷ مسئلهٔ ۵۱

•۵۲- شکل ۳۰-۴۸ دو قسمت یک لولهٔ کهنهٔ دستگاهی را نشان می‌دهد که از تپه‌ای با مسافتهای $d_A = d_B =$ ۳۰m و $D =$۱۱۰m می‌گذرند. در هر طرف تپه، شعاع لوله ۲/۰۰cm است. ولی شعاع لوله در داخل تپه معلوم نیست. برای محاسبهٔ آن، مهندسی ابتدا آب را با جریان ۲/۵۰m/s در قسمتهای سمت چپ و راست جاری می‌کند. سپس یک مادهٔ رنگی را در داخل آب در نقطهٔ A رها می‌کند و در می‌یابد که ۸۸/۸s طول می‌کشد تا به نقطهٔ B برسد. شعاع متوسط لوله در داخل تپه چقدر است؟



شکل ۳۰-۴۸ مسئلهٔ ۵۲

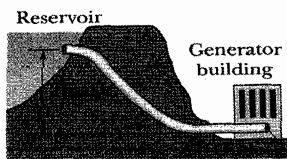
••۵۳- آب به طور پایا از زیر زمین با تندی ۵/۰m/s از طریق شیلنگ یکنواختی به شعاع ۱/۰cm پمپ می‌شود. شیلنگ از پنجره‌ای که ۳/۰m بالاتر از خط آب است می‌گذرد. توان پمپ چقدر است؟ SSM

••۵۴- آبی که در یک لولهٔ ۱/۹cm (قطر داخلی) جریان دارد از طریق سه لولهٔ ۱/۳cm به خارج جاری می‌شود. (الف) اگر آهنگ جریان در سه لولهٔ کوچکتر ۲۶، ۱۹ و ۱۱L/min باشد، آهنگ جریان در لولهٔ ۱/۹cm چقدر است؟ (ب) نسبت تندی آب در لولهٔ ۱/۹cm به تندی آن در لولهٔ حامل ۲۶L/min چقدر است؟

بخش ۳۰-۱۰ معادلهٔ برنولی

•۵۵- آب با تندی ۵/۰m/s در لوله‌ای با مساحت مقطع ۴/۰cm² در جریان است. با زیاد شدن مساحت مقطع تا ۸/۰cm² آب بتدریج ۱۰m پایین می‌آید. (الف) تندی آب در سطح پایینی چقدر است؟ (ب) اگر فشار در سطح بالایی ۱/۵×۱۰⁵ Pa باشد، فشار در سطح پایینی چقدر است؟ SSM

•۵۶- لولهٔ ورودی در شکل ۳۰-۴۹ دارای مساحت مقطع ۰/۷۴cm² است و آب با تندی ۰/۴۰m/s در آن جریان دارد. در خروجی، به فاصلهٔ $D =$۱۸۰m پایین لولهٔ ورودی، مساحت مقطع لولهٔ خروجی کوچکتر از لولهٔ ورودی است و آب با تندی ۹/۵m/s به سمت خارج جریان دارد. اختلاف فشار بین نقطه‌های ورودی و خروجی چقدر است؟



شکل ۳۰-۴۹ مسئلهٔ ۵۶

•۵۷- یک لولهٔ آب که دارای قطر داخلی ۲/۵cm است آب را با تندی ۰/۹۰m/s و فشار ۱۷۰kPa به زیرزمین خانه‌ای می‌برد. اگر این لوله به لوله‌ای با قطر ۱/۲cm متصل شود و به طبقهٔ دوم که ۷/۶m بالاتر از نقطهٔ ورودی است برده شود، (الف) تندی و (ب) فشار آب در طبقهٔ دوم چقدر است؟

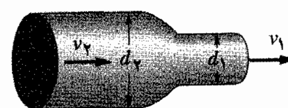
•۵۸- گاهی مدل اژدرافکنها در یک لولهٔ افقی که آب از آن می‌گذرد، مانند یک تونل باد که برای آزمون مدل هواپیما به کار می‌رود، آزمایش می‌شوند. یک لولهٔ دایره‌ای به قطر داخلی ۲۵/۰cm و یک مدل اژدرافکن را که در امتداد محور لوله قرار داده شده است، در نظر می‌گیریم. این مدل ۵/۰۰cm قطر دارد و می‌خواهیم اژدرافکن را در آبی با جریان ۲/۵m/s آزمایش کنیم. (الف) تندی جریان آب در قسمتی از لوله که مجاور اژدرافکن نیست باید چقدر باشد؟ (ب) اختلاف فشار بین قسمت در برگیرندهٔ اژدرافکن و قسمتهای دیگر لوله چقدر است؟

•۵۹- یک مخزن استوانه‌ای با قطر بزرگ تا عمق $D = ۰/۳۰\,m$ با آب پر شده است. از سوراخی با مساحت مقطع $A = ۶/۵\,cm^۲$ در ته مخزن، آب خارج می‌شود. (الف) آهنگ خروج آب برحسب مترمکعب بر ثانیه چقدر است؟ (ب) در چه فاصله‌ای از ته مخزن مساحت مقطع جریان آب برابر با یک دوم مساحت سوراخ است؟ SSM

•۶۰- دو مخزن ۱ و ۲ را که با دهانه‌های بزرگ در بالا محتوی دو مایع متفاوت‌اند در نظر بگیرید. سوراخ کوچکی در بدنهٔ هر مخزن در فاصلهٔ h در زیر سطح مایع ایجاد می‌شود ولی سطح مقطع سوراخ در مخزن ۱ نصف مساحت سوراخ در مخزن ۲ است. (الف) اگر آهنگ شارش جرم برای هر دو سوراخ یکسان باشد، نسبت $\rho_۱/\rho_۲$ چگالیهای این دو مایع چقدر است؟ (ب) نسبت $R_{V۱}/R_{V۲}$ آهنگهای شارش حجمی از دو مخزن چقدر است؟ (پ) برای یک لحظه، مایع در مخزن ۱، $۱۲\,cm$ بالاتر از سوراخ است. اگر مخزنها دارای آهنگهای شارش حجمی یکسان باشند، درست در همان لحظه ارتفاع مایع در مخزن ۲ چقدر بالاتر از سوراخ است؟

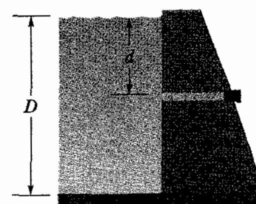
•۶۱- اگر اختلاف فشار در دو انتهای لوله‌ای به قطر داخلی $۱۳\,mm$ برابر با $۱/۰\,atm$ باشد، برای بردن $۱/۴\,m^۳$ آب از این لوله چقدر کار توسط فشار باید انجام شود؟

••۶۲- در شکل ۳۰-۵۰، آب در یک لولهٔ افقی جریان می‌یابد و سپس با تندی $v_۱ = ۱۵\,m/s$ به بیرون می‌ریزد. قطر طرفهای چپ و راست لوله به ترتیب $۵/۰\,cm$ و $۳/۰\,cm$ است. (الف) چه حجمی از آب در $۱۰\,min$ به بیرون می‌ریزد؟ (ب) تندی $v_۲$ و (پ) فشار پیمانه‌ای در طرف چپ لوله چقدر است؟ GO



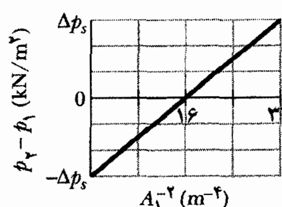
شکل ۳۰-۵۰ مسئلهٔ ۶۲

••۶۳- در شکل ۳۰-۵۱، عمق آب پشت مخزن یک سد $D = ۱۵\,m$ است. یک لولهٔ افقی به قطر $۴/۰\,cm$ در فاصلهٔ $۶/۰\,m$ از زیر سطح آب گذشته است. درپوشی دهانهٔ لوله را بسته است. (الف) بزرگی نیروی اصطکاک بین درپوش و دیوارهٔ لوله را پیدا کنید. (ب) درپوش را بر می‌داریم. در مدت $۳/۰\,h$ چه حجمی از آب از لوله خارج می‌شود؟ ILW



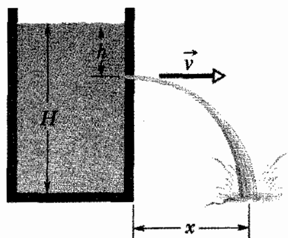
شکل ۳۰-۵۱ مسئلهٔ ۶۳

••۶۴- آب شیرین به طور افقی از بخش ۱ لوله‌ای با مساحت مقطع $A_۱$ به بخش ۲ لوله با مساحت مقطع $A_۲$ جریان دارد. شکل ۳۰-۵۲ نمودار اختلاف فشار $p_۲ - p_۱$ را برحسب عکس مجذور مساحت $A_۱^{-۲}$ نشان می‌دهد که اگر جریان آب در همهٔ شرایط لایه‌ای باشد، می‌توان آن را برای آهنگ شارش حجمی مربوط به یک مقدار معین در نظر گرفت. مقیاس محور عمودی با $\Delta p_s = ۳۰۰\,kN/m^۲$ مشخص شده است. با توجه به شکل، مقدار (الف) $A_۲$ و (ب) آهنگ شارش حجمی آب چقدر است؟



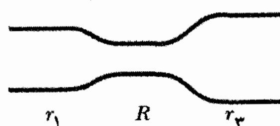
شکل ۳۰-۵۲ مسئلهٔ ۶۴

••۶۵- شکل ۳۰-۵۳ جریان آبی را نشان می‌دهد که از سوراخی در یکی از دیواره‌ها در عمق h مخزنی که تا ارتفاع H از آب پر شده، جریان دارد. (الف) در چه فاصلهٔ x جریان آب به زمین برخورد می‌کند؟ (ب) در چه عمقی باید سوراخ دومی را ایجاد کرد که همین مقدار x را به دست دهد؟ (پ) در چه عمقی باید سوراخی ایجاد کرد تا x بیشینه شود؟



شکل ۳۰-۵۳ مسئلهٔ ۶۵

••۶۶- در شکل ۳۰-۵۴، آب به طور یکنواخت از بخش سمت چپ لوله (با شعاع $r_۱ = ۲/۰۰R$) به داخل بخش میانی (با شعاع R) و سپس به بخش سمت راست (با شعاع $r_۳ = ۳/۰۰R$) جریان دارد. تندی آب در بخش میانی برابر $۰/۵۰۰\,m/s$ است. آب وقتی از سمت چپ به سمت راست حرکت می‌کند چقدر کار خالص روی $۰/۴۰۰\,m^۳$ آب انجام می‌گیرد؟ GO



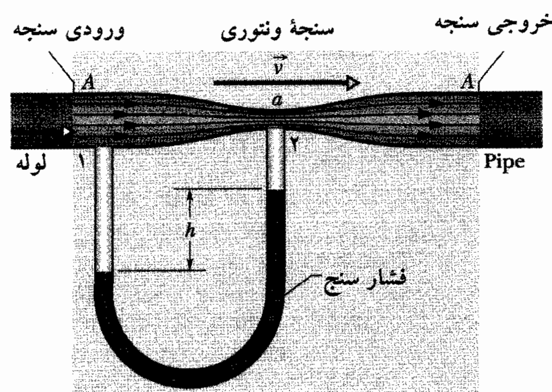
شکل ۳۰-۵۴ مسئلهٔ ۶۶

••۶۷- *سنجهٔ ونتوری* برای اندازه‌گیری تندی جریان شاره‌ای در یک لوله به کار می‌رود. این سنجه بین دو بخش از لوله متصل است (شکل ۳۰-۵۵)؛ مساحت A سطح مقطع ورودی و خروجی سنجه با مساحت مقطع لوله هماهنگ می‌شود. بین ورودی و خروجی، شاره با تندی V در لوله جریان می‌یابد و سپس از «گلوگاه» باریکی به مساحت مقطع a با تندی v

می‌گذرد. فشارسنجی بخش گشاد سنجه را به بخش باریک متصل می‌کند. تغییر در تندی شاره با تغییر Δp در فشار شاره همراه است که موجب ایجاد اختلاف ارتفاع h شاره در دو شاخهٔ فشارسنج می‌شود. (در اینجا Δp به معنی فشار در گلوگاه منهای فشار در لوله است.) (الف) با به کار بردن معادلهٔ برنولی و معادلهٔ پیوستگی در نقطه‌های ۱ و ۲ در شکل ۳۰-۵۵، نشان دهید که

$$V = \sqrt{\frac{2a^2\Delta p}{\rho(a^2 - A^2)}}$$

که در آن ρ چگالی شاره است. (ب) فرض کنید که شاره آب تازه است، و مساحت A سطح مقطعها در لوله برابر $64\,\text{cm}^2$ و در گلوگاه $32\,\text{cm}^2$ و فشار در لوله $55\,\text{kPa}$ و در گلوگاه $41\,\text{kPa}$ است. آهنگ جریان آب برحسب متر مربع بر ثانیه چقدر است؟ SSM WWW



شکل ۳۰-۵۵ مسئله‌های ۶۷ و ۶۸

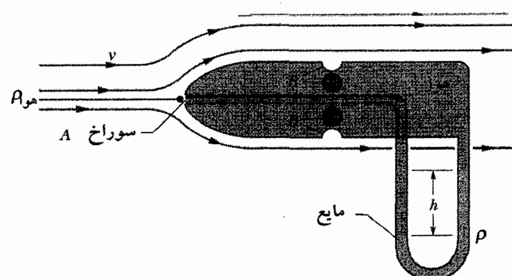
●●۶۸- لولهٔ ونتوری مسئلهٔ ۶۷ و شکل ۳۰-۵۵ را بدون فشارسنج در نظر بگیرید. A را برابر $5a$ اختیار کنید. فرض کنید که فشار p_1 در A برابر با $2/0\,\text{atm}$ باشد. مقدار (الف) تندی V را در A و (ب) تندی v را در a که به ازای آنها فشار p_2 در a صفر می‌شود محاسبه کنید. (پ) اگر در A قطر برابر با $5/0\,\text{cm}$ باشد آهنگ شارش حجمی مربوط را محاسبه کنید. پدیده‌ای که وقتی p_2 در a به نزدیکی صفر افت می‌کند رخ می‌دهد **حفره سازی** نامیده می‌شود. در این شرایط آب به صورت حبابهای کوچکی بخار می‌شود.

●●۶۹- مایعی با چگالی $900\,\text{kg/m}^3$ از یک لولهٔ افقی که مساحت مقطع آن در ناحیهٔ A برابر $1/90\times10^{-2}\,\text{m}^2$ است، جریان دارد و مساحت مقطع در ناحیهٔ B برابر $9/50\times10^{-2}\,\text{m}^2$ است. اختلاف فشار بین دو ناحیه برابر با $7/20\times10^3\,\text{Pa}$ است. (الف) آهنگ شارش حجمی و (ب) آهنگ شارش جرمی چقدر است؟

●●۷۰- *لولهٔ پیتو*[1] (شکل ۳۰-۵۶) برای تعیین تندی جریان هوا در هواپیما به کار می‌رود. این وسیله دارای یک لولهٔ خارجی با تعدادی سوراخ کوچک B است (چهار تا از آنها نشان داده شده است) که هوا را به داخل لوله‌ای که به یک شاخهٔ لولهٔ U شکل متصل است، هدایت می‌کنند. شاخهٔ دیگر U شکل به سوراخ A در جلو وسیله که در جهت حرکت هواپیما قرار دارد متصل می‌شود. در A هوا راکد می‌ماند به طوری که $v_A = 0$ است. ولی در B تندی هوا به احتمال قوی برابر با تندی هوای v در کنار هواپیماست. (الف) با استفاده از معادلهٔ برنولی نشان دهید که

$$v = \sqrt{\frac{2\rho g h}{\rho_{\text{air}}}}$$

که در آن ρ چگالی مایع در لولهٔ U شکل است. (ب) فرض کنید که لوله محتوی الکل بوده و اختلاف سطح h برابر با $26/0\,\text{cm}$ است. تندی هواپیما نسبت به هوا چقدر است؟ چگالی هوا $1/03\,\text{kg/m}^3$ و چگالی الکل $810\,\text{kg/m}^3$ است.



شکل ۳۰-۵۶ مسئله‌های ۷۰ و ۷۱

●●۷۱- یک لولهٔ پیتو (به مسئله ۷۰ نگاه کنید) در یک هواپیما در ارتفاع زیاد اختلاف فشار $180\,\text{Pa}$ را اندازه‌گیری می‌کند. اگر چگالی هوا $0/031\,\text{kg/m}^3$ باشد، تندی هوای مجاور هواپیما چقدر است؟

●●۷۲- یک نمودار ساده از دستگاه ناودان باران برای منزل در شکل ۳۰-۵۷ نشان داده شده است. باران روی بام شیبداری می‌بارد و دور لبه‌های بام جمع می‌شود؛ سپس از میان لوله‌های ناودان به سمت پایین (که فقط یکی از آنها نشان داده شده) به لولهٔ M اصلی ناودان زیر کف می‌ریزد که این لوله آب را به لولهٔ بزرگتری در زیر خیابان جاری می‌سازد. در شکل ۳۰-۵۷، راه آب کف زیر زمین نیز به لولهٔ M ناودان متصل است. مقدارهای زیر را در نظر بگیرید:

۱- لوله‌های ناودانی دارای ارتفاع $h_1 = 11\,\text{m}$ هستند.

۲- ارتفاع راه آب کف برابر $h_2 = 1/2\,\text{m}$ است.

۳- شعاع لولهٔ M برابر $3/0\,\text{cm}$ است.

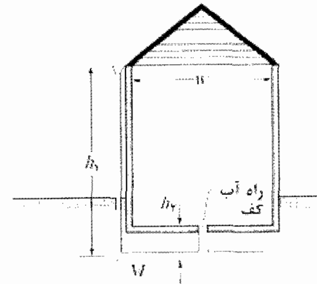
۴- منزل دارای ضلعی به پهنای $W = 30\,\text{m}$ و طول $L = 60\,\text{m}$ است.

۵- تمام آبی که روی سقف می‌ریزد از لولهٔ M می‌گذرد.

۶- تندی اولیهٔ آب در لوله‌های ناودان قابل چشم‌پوشی است.

1. Pitot tube

۷- تندی باد قابل چشم‌پوشی است.
آهنگ ریزش باران برحسب سانتی‌متر بر ساعت باید چقدر باشد تا آب از لولهٔ M راه آب کف بالا آمده و در زیر زمین سیلاب جاری شود؟



شکل ۳۰-۵۷ مسئله ۷۲

مسئله‌های اضافی

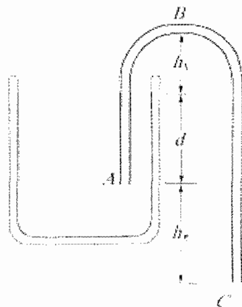
۷۳- یک گلولهٔ شیشه‌ای به شعاع $2/00\,\text{cm}$ در ته ظرفی از شیر با چگالی $1/03\,\text{g/cm}^3$ قرار دارد. بزرگی نیروی عمودی روی گلوله از طرف سطح زیرین ظرف برابر $9/48\times10^{-2}\,\text{N}$ است. جرم گلوله چقدر است؟

۷۴- وقتی سرفه می‌کنید، هوا را با تندی زیاد از میان نای و نایژه‌های بالایی به بیرون می‌دهید به‌طوری که هوا ترشح اضافی خلط را به سمت بیرون می‌راند. شما با این کار هوایی با تندی زیاد ایجاد می‌کنید: شما مقدار زیادی هوا را تنفس کرده و با بستن دهانهٔ نای (دهانهٔ کوچکی در حنجره) هوا را در سینه حبس می‌کنید و سپس هوا را با فشار از نای و نایژه‌های بالایی به سمت مسیر باریکی می‌رانید و با باز شدن ناگهانی حنجره هوا را به سمت خارج می‌رانید. فرض کنید که در حین این عمل آهنگ شارش حجمی هوا $7/0\times10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s}$ باشد. اگر قطر نای (الف) در مقدار معمول خود $14\,\text{mm}$ باقی بماند و (ب) به قطر $15/2\,\text{mm}$ افزایش یابد، تندی هوا در نای چند برابر تندی صوت $v_s(=343\,\text{m/s})$ است؟

۷۵- شکل ۳۰-۳۲ یک لولهٔ اصلاح شدهٔ U شکل را نشان می‌دهد. شاخهٔ سمت راست کوتاهتر از شاخهٔ سمت چپ است. دهانهٔ باز شاخهٔ سمت راست به ارتفاع $d=10/0\,\text{cm}$ بالاتر از میز آزمایشگاه قرار دارد. شعاع لوله در سرتاسر برابر $1/50\,\text{cm}$ است. آب را بتدریج در دهانهٔ باز سمت چپ می‌ریزیم تا وقتی که آب از شاخهٔ سمت راست سرریز کند. سپس مایعی با چگالی $0/80\,\text{g/cm}^3$ را بتدریج به شاخهٔ سمت چپ اضافه می‌کنیم تا وقتی که ارتفاع مایع در آن شاخه به $8/0\,\text{cm}$ برسد (مایع با آب مخلوط نمی‌شود). چقدر آب از شاخهٔ سمت راست بیرون می‌ریزد؟ SSM

۷۶- اسکی‌بازی که در بهمن‌گیر افتاده است کاملاً در برف با چگالی $96\,\text{kg/m}^3$ فرو رفته است. فرض کنید، چگالی متوسط اسکی باز، لباس و وسایل اسکی‌بازی $1020\,\text{kg/m}^3$ باشد. چند درصد نیروی گرانشی وارد بر اسکی‌باز به وسیلهٔ نیروی شناوری از طرف برف خنثی می‌شود؟

۷۷- شکل ۳۰-۵۸ یک *سیفون* را نشان می‌دهد که وسیله‌ای برای خارج کردن مایع از یک ظرف است. لولهٔ ABC باید در ابتدا پر شود ولی وقتی این کار انجام شد، مایع از طریق لوله جریان می‌یابد تا اینکه سطح مایع در ظرف به سطح لوله در قسمت باز A برسد. مایع دارای چگالی $1000\,\text{kg/m}^3$ و چسبندگی آن قابل چشم‌پوشی است. فاصله‌های نشان داده شده عبارت‌اند از $h_1=25\,\text{cm}$ ، $d=12\,\text{cm}$ و $h_2=40\,\text{cm}$. (الف) با چه تندی مایع از لوله در نقطهٔ C خارج می‌شود؟ (ب) اگر فشار جو برابر $1/0\times10^5\,\text{Pa}$ باشد، فشار مایع در بالاترین نقطهٔ B چقدر است؟ (پ) از لحاظ نظری بیشترین h_1 ممکن که سیفون می‌تواند آب را بالا ببرد چقدر است؟



شکل ۳۰-۵۸ مسئله ۷۷

۷۸- فرض کنید چگالی بدن شما یکنواخت و $0/95$ چگالی آب است. (الف) اگر در یک استخر شنا غوطه‌ور شوید، چه کسری از حجم بدن شما بالاتر از سطح آب قرار می‌گیرد؟
ماسهٔ بادی شاره‌ای است که با نفوذ کردن آب در شن ایجاد می‌شود و دانه‌های شن روان از هم جدا می‌شوند. از این رو، بر اثر اصطکاک شنها به هم نمی‌چسبند. دریاچه‌های ماسه بادی وقتی تشکیل می‌شوند که آب از تپه‌ها به دره‌هایی که توده‌های شن در آن قرار دارند نفوذ کند. (ب) اگر به دریاچه‌ای عمیق از ماسهٔ بادی با چگالی ۱/۶ برابر چگالی آب پا بگذارید چه کسری از حجم بدن شما بالای سطح ماسه بادی قرار می‌گیرد. (پ) به ویژه، آیا آنقدر فرو می‌روید تا دیگر قادر به تنفس نباشید؟

۷۹- اگر حباب در آب در حال جوشیدن با آهنگ $0/225\,\text{m/s}^2$ به سمت بالا شتاب گیرد و دارای شعاع $0/500\,\text{mm}$ باشد، جرم آن چقدر است؟ فرض کنید نیروی مقاومت روی حباب قابل چشم‌پوشی است.

۸۰- اگر نسبت چگالی هوای بیرون یک بالون با هوای گرم به چگالی هوای درون آن ۱/۳۹ باشد، شتاب بلند شدن این بالون چقدر است؟ از جرم بالون و سبد چشم‌پوشی کنید.

۸۱- حجم یک قوطی نازک $۱۲۰۰\,cm^3$ و جرم آن $۱۳۰\,g$ است. چند گرم گلولهٔ سربی با چگالی $۱۱/۴\,g/cm^3$ را می‌توان روی آن قرار داد بدون اینکه در آب فرو رود؟

۸۲- یک لولهٔ U شکل باز ساده شامل جیوه است. وقتی $۱۱/۲\,cm$ آب در شاخهٔ سمت راست ریخته شود، جیوه نسبت به سطح اولیه‌اش در سمت چپ چقدر بالا خواهد رفت؟

۸۳- جسمی از یک ترازوی فنری آویزان است. این ترازو در هوا $۳۰\,N$، در آب $۲۰\,N$ و در یک مایع دیگر با چگالی مجهول $۲۴\,N$ را نشان می‌دهد. چگالی مایع دیگر چقدر است؟

۸۴- در آزمایشی، یک قطعهٔ مکعب مستطیل به ارتفاع h را در چهار مایع متفاوت شناور می‌کنیم. در اولین مایع که آب است، قطعه کاملاً غوطه‌ور می‌شود. در مایعهای A، B و C قطعه به ترتیب تا ارتفاع $h/۲$ ، $۲h/۳$ و $h/۴$ بالای سطح مایع شناور می‌شود. *چگالهای نسبی* (نسبت به چگالی آب) (الف) A، (ب) B و (پ) C چقدرند؟

۸۵- تقریباً یک سوم بدن شناگری در بحر المیت بالای سطح آب است. فرض کنید چگالی بدن انسان $۰/۹۸\,g/cm^3$ باشد، چگالی آب در بحرالمیت را پیدا کنید. (چرا خیلی بزرگتر از $۱/۰\,g/cm^3$ است)؟

۳۱ نوسانها



اگر ساختمان بلندی به آرامی براثر برخورد باد به لرزش درآید، ساکنین آن حتی متوجه این حرکت نمی‌شوند، اما اگر این لرزش‌ها درهرثانیه بیش از ۱۰ بار تکرار شود، ناراحت‌کننده است و حتی می‌تواند موجب بیماری شود. یک دلیل آن این است که وقتی شخصی ایستاده است سر او بیش از پاهایش تمایل به این لرزش دارد، که حسگرهای حرکتی را در ناحیهٔ تعادل گوش داخلی در حالت قطع قرار می‌دهد. سازوکارهای متعددی برای کاهش لرزش یک ساختمان درنظر گرفته‌می‌شود. مثلاً، گلوله عظیمی را ($5/4\times10^5$ kg) که در این تصویر دیده می‌شود در طبقه ۹۲ یکی از ساختمانهای بلند دنیا آویزان کرده‌اند.

چگونه این گلوله با لرزش ساختمان مقابله می‌کند؟

پاسخ در همین فصل.

۱-۳۱ فیزیک چیست؟

دنیای ما پر از نوسانهاست ودر آن اجسام به طور مکرر به این طرف و آن طرف حرکت می‌کنند. خیلی از نوسانها صرفاً سرگرم کننده‌اند یا موجب ناراحتی می‌شوند، اما خیلی از نوسانهای دیگر از نظر مالی مهم یا خطرناک‌اند. دراینجا به چند مثال اشاره می‌کنیم؛ وقتی چوب بیسبال به توپ ضربه می‌زند، چوب ممکن است به قدر کافی نوسان کند به طوری که دست بازیکن را به درد آورد یا حتی چوب بشکند. وقتی باد بر خط فشار قوی می‌وزد، خط ممکن است به طوری نوسان کند (در اصطلاح مهندسی برق «ارتعاش شلاقی») که خط پاره شده و برق به مصرف‌کنندگان نرسد. وقتی هواپیما در حال پرواز است، تلاطم هوایی که از کنار بالها می‌گذرد موجب نوسان آنها می‌شود، که ممکن است منجربه فرسودگی فلز یا حتی خرابی آن شود. وقتی قطار درپیچی حرکت می‌کند، چرخها وقتی وادار می‌شوند در جهت جدیدی بچرخند (در اصطلاح مهندسی مکانیک «حرکت متزلزل»)، نوسان می‌کنند. (می‌توانید نوسانها را بشنوید.)

وقتی نزدیک شهری زمین لرزه رخ می دهد، احتمال دارد که ساختمانها آنچنان نوسان کنند که موجب خرابی ساختمان شود. وقتی تیری از کمان رها می‌شود، پرهایی که در انتهای آن قرار دارند به دور تیر پیچ و تاب می‌خورند بدون آنکه به آن برخورد کنند چون تیر نوسان می‌کند. وقتی سکه‌ای به روی فلزی رها شود مانند حلقه‌ای که چنین برخوردی دارد، نوسان می‌کند و سکه را از صدایش می‌توان تشخیص داد. وقتی گاوچرانی روی گاوی سواراست به نوسان درمی‌آید چون گاو، بالا و پایین می‌پرد (حداقل انتظار گاوچران این است که به نوسان درآید).

مطالعه و کنترل نوسانها دو هدف اولیه فیزیکدانان و مهندسان است. در این فصل یک نوع بنیادی نوسان را که **حرکت هماهنگ ساده** نامیده می‌شود بررسی می‌کنیم.

۲-۳۱ حرکت هماهنگ ساده

شکل ۳۱-۱ توالی «عکس‌های فوری» از یک دستگاه نوسانی ساده را نشان می‌دهد که در آن ذره‌ای به طور مکرر نسبت به مبدأ روی محور x به چپ و راست حرکت می‌کند. در این بخش به طور ساده این حرکت را توصیف می‌کنیم. سپس درباره چگونگی رسیدن به چنین حرکتی بحث می‌کنیم.

یک خاصیت مهم حرکت نوسانی **بسامد** آن یا تعداد نوسان‌هایی است که در هر ثانیه انجام می‌گیرد. نماد بسامد f و یکای SI آن **هرتز** (با علامت Hz) است، به طوری که

$$1\ \text{هرتز} = 1\text{Hz} = \text{۱ نوسان در ثانیه} = 1\text{s}^{-1} \qquad (۳۱-۱)$$

دورهٔ تناوب T حرکت به بسامد وابسته است و زمان یک نوسان کامل (یا **چرخه**) است؛ یعنی

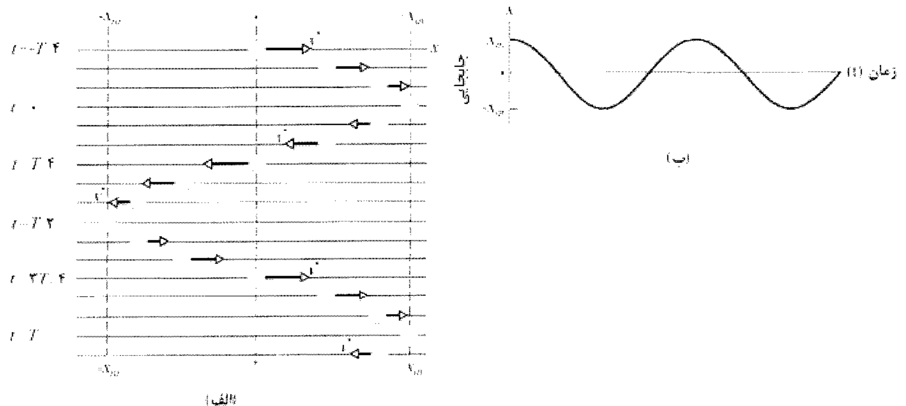
$$T = \frac{1}{f} \qquad (۳۱-۲)$$

هر حرکتی که در بازه‌های منظمی تکرار شود **حرکت تناوبی** یا **حرکت هماهنگ** نامیده می‌شود. در اینجا حرکتی را در نظر می‌گیریم که مانند شکل ۳۱-۱ الف به روش خاصی تکرار می‌شود. برای چنین حرکتی جابه‌جایی x ذره از مبدأ به صورت تابعی از زمان به صورت زیر داده می‌شود.

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(جابه‌جایی)} \qquad (۳۱-۳)$$

که درآن ϕ, ω, x_m ثابت‌اند. این حرکت، **حرکت هماهنگ ساده** (SHM) نامیده می‌شود که به این مفهوم است که حرکت تناوبی تابع سینوسی از زمان است. معادله ۳۱-۳، که درآن تابع سینوسی به صورت تابع کسینوسی است در شکل ۳۱-۱ب رسم شده‌است. (می‌توانید با چرخاندن شکل ۳۱-۱ الف به اندازه °۹۰ به طور پادساعتگرد و سپس با وصل کردن متوالی مکان ذره‌ها با یک منحنی این نمودار را به‌دست آورید.)

کمیتهایی که شکل نمودار را مشخص می‌کنند همراه با نامشان در شکل ۳۱-۲ نشان داده شده‌اند. حال این کمیتها را تعریف می‌کنیم.



شکل ۳۱-۱ (الف) توالی «عکسهای فوری» (در بازه‌های زمانی مساوی گرفته شده‌اند) وضعیت ذره را به هنگام چپ و راست رفتن آن نسبت به مبدأ در راستای محور x بین حدود $+x_m$ و $-x_m$ نشان می‌دهد. بزرگی پیکانهای سرعت، تندی ذره را نشان می‌دهد. تندی در هنگامی که ذره در مبدأ است بیشینه و هنگامی که در $\pm x_m$ قرار دارد، صفر است. اگر هنگامی که ذره در $\pm x_m$ است زمان t صفر گرفته می‌شود، آنگاه در $t=T$ ذره به $\pm x_m$ برمی‌گردد، که در آن T دوره تناوب حرکت است. سپس حرکت تکرار می‌شود. (ب) نمودار x برحسب تابعی از زمان برای حرکت قسمت (الف).

کمیت x_m **دامنه** حرکت نامیده می‌شود و یک ثابت مثبت است که مقدار آن به چگونگی شروع حرکت بستگی دارد. زیرنویس m بیانگر بیشینه است چون دامنه عبارت است از بزرگی جابه‌جایی بیشینه ذره در هریک از دوجهت. تابع کسینوسی در معادله ۳۱-۳ بین حدود ±۱ تغییر می‌کند، پس جابه‌جایی $x(t)$ بین حدود $\pm x_m$، تغییر می‌کند.

جابجایی در زمان t

فاز

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

دامنه — زمان — بسامد زاویه‌ای — ثابت فاز یا زاویه فاز

شکل ۳۱-۲ یک مرجع مفید برای کمیتهای معادله ۳۱-۳ در حرکت هماهنگ ساده.

کمیت متغیر زمانی $(\omega t + \phi)$ در معادله ۳۱-۳ **فاز** حرکت و ثابت ϕ **ثابت فاز** (یا **زاویه فاز**) نامیده می‌شود. مقدار ϕ به جابه‌جایی و سرعت ذره در $t = ۰$ بستگی دارد. در مورد نمودارهای $x(t)$ شکل ۳۱-۳ الف، ثابت فاز ϕ صفر است.

برای تفسیر ω، که **بسامد زاویه‌ای** حرکت نامیده می‌شود، ابتدا باید توجه کنیم که جابه‌جایی $x(t)$ پس از دوره حرکت T باید به مقدار اولیه خود برگردد؛ یعنی، $x(t)$ به ازای همه tها باید برابر با $x(t+T)$ باشد. برای ساده کردن تحلیل خود، در معادله ۳۱-۳، $\phi = ۰$ را قرار می‌دهیم. از این معادله می‌توان نوشت

$$\omega(t+T) = \omega t + ۲\pi \qquad (۳۱-۴)$$

هرگاه شناسه (فاز) تابع کسینوس به اندازه $۲\pi\text{rad}$ تغییر کند، تابع تکرار می‌شود؛ بنابراین،
معادله ۳۱-۴ به‌دست می‌دهد.

$$\omega(t+T) = \omega t + ۲\pi$$

یا

$$\omega T = ۲\pi$$

بنابراین، از معادله ۳۱-۲، بسامد زاویه‌ای برابر است با

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} = ۲\pi f \qquad (۳۱-۵)$$

یکای SI بسامد زاویه‌ای رادیان برثانیه است.(پس، برای هماهنگی، ϕ باید برحسب رادیان باشد.) شکل ۳۱-۳، $x(t)$ را درمورد دو حرکت هماهنگ ساده که در دامنه، دوره تناوب (و درنتیجه بسامد و بسامد زاویه‌ای) یا فاز ثابت با یکدیگر تفاوت دارند مقایسه می‌کند.

> **نکته وارسی ۱** ذره‌ای که در نوسان هماهنگ ساده با تناوب T (مانند شکل ۳۱-۱) است در زمان $t = ۰$ در $-x_m$ قرار دارد. هرگاه (الف) $t = ۲/۰۰T$، (ب) $T = ۳/۵۰T$ و (پ) $t = ۵/۲۵T$ باشد، آیا ذره در $-x_m$، در $+x_m$، در ۰، بین $-x_m$، ۰ و یا بین ۰ و $+x_m$ خواهد بود؟

سرعت در حرکت هماهنگ ساده (SMH)

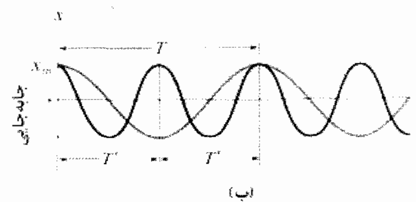
با مشتق‌گیری از معادله ۳۱-۳، می‌توان عبارتی را برای سرعت ذره‌ای که دارای حرکت هماهنگ ساده است پیدا کرد. یعنی

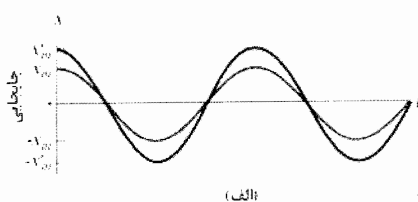
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[x_m \cos(\omega t + \phi)]$$

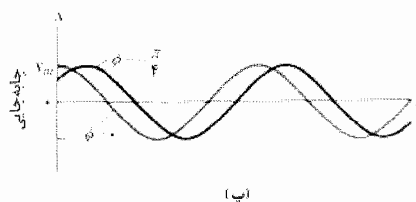
یا

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{سرعت}) \qquad (۳۱-۶)$$

شکل ۳۱-۴ الف نمودار معادله ۳۱-۳ به ازای $\phi = ۰$ است. شکل ۳۱-۴ ب معادله ۳۱-۶ را به ازای $\phi = ۰$ نشان می‌دهد. در مقایسه با دامنه x_m در معادله ۳۱-۳، کمیت مثبت ωx_m در معادله ۳۱-۵ **دامنه سرعت** v_m نامیده می‌شود. همانطور که در شکل ۳۱-۴ ب می‌توان دید سرعت یک ذره در حال نوسان بین حدود $\pm v_m = \pm \omega x_m$ تغییر می‌کند. همچنین توجه کنید که در این شکل منحنی $v(t)$ نسبت به منحنی $x(t)$ به اندازه یک چهارم دوره تناوب *جابه‌جا* شده‌است.(به سمت چپ)؛ هرگاه

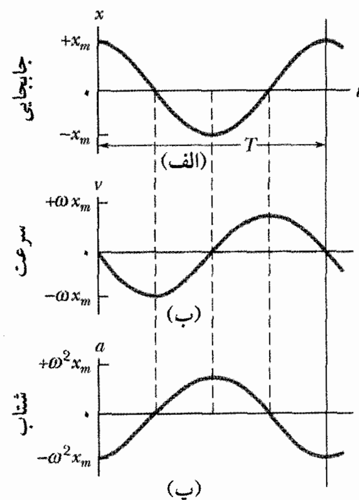






شکل ۳۱-۳ در هر سه مورد منحنی کمرنگ به ازای $\phi = ۰$ از معادله ۳۱-۳ به‌دست می‌آید. (الف) تفاوت منحنی پررنگ با منحنی کمرنگ فقط در این است که دامنه آن، x'_m، بزرگتر است. (حدود جابه‌جایی فرین منحنی پررنگ بالاتر و پایینتر است.) (ب) تفاوت منحنی پررنگ با منحنی کمرنگ فقط در این است که دوره تناوب آن، $T'=T/۲$ است (منحنی پررنگ به طور افقی فشرده شده‌است). (پ) تفاوت منحنی پررنگ با منحنی کمرنگ فقط در این است که برای منحنی پررنگ ϕ به‌جای صفر برابر $-\pi/۴$ است.(مقدار منفی ϕ منحنی **پررنگ را** به سمت راست جابه‌جا کرده‌است.)

بزرگی جابه‌جایی بیشترین مقدار را داشته باشد. (یعنی؛ $x(t)=x_m$)، بزرگی سرعت کمترین مقدار را دارد (یعنی $v(t)=0$). هرگاه بزرگی جابه‌جایی کمترین مقدار را داشته باشد (یعنی؛ صفر)، بزرگی سرعت بیشترین مقدار را دارد (یعنی، $v_m=\omega x_m$).



شکل ۳۱-۴ (الف) جابه‌جایی x(t) ذره‌ای با حرکت هماهنگ ساده که با زاویه فاز ϕ برابر صفر در حال نوسان است. دوره تناوب T نشانه یک نوسان کامل است. (ب) سرعت v(t) ذره.(پ) شتاب a(t)

شتاب SHM

با معلوم بودن سرعت $v(t)$ برای یک حرکت هماهنگ ساده، با یک‌بار دیگر مشتق‌گیری عبارتی برای شتاب ذره در حال نوسان به‌دست می‌آید. بنابراین، از معادله ۳۱-۶، داریم

$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d}{dt}[-\omega x_m\sin(\omega t+\phi)]$$

یا

$$a(t)=-\omega^2 x_m\cos(\omega t+\phi)\quad \text{(شتاب)}\qquad (۳۱-۷)$$

شکل ۳۱-۴پ نمودار معادله ۳۱-۷ به ازای $\phi=0$ است. کمیت مثبت $\omega^2 x_m$ در معادله ۳۱-۷، **دامنه شتاب** a_m نامیده می‌شود؛ یعنی شتاب ذره بین حدود $\pm a_m=\pm\omega^2 x_m$، مطابق شکل ۳۱-۴پ، تغییر می‌کند. توجه کنید که منحنی $a(t)$ نیز نسبت به منحنی $v(t)$ به اندازه یک چهارم دوره تناوب (به چپ) منتقل شده‌است.

از ترکیب معادله ۳۱-۳ و ۳۱-۷ خواهیم داشت

$$a(t)=-\omega^2 x(t)\qquad (۳۱-۸)$$

که نشانه بارز حرکت هماهنگ ساده‌است.

> درحرکت هماهنگ ساده، شتاب متناسب است با جابه‌جایی ولی با علامت مخالف، و این دو کمیت با مربع بسامد زاویه‌ای به هم مربوط‌اند. پس، همانطور که شکل ۳۱-۴ نشان می‌دهد، هرگاه جابه‌جایی دارای بیشترین مقدار مثبت باشد، شتاب دارای بیشترین مقدار منفی است و برعکس. هرگاه جابه‌جایی صفر باشد شتاب نیز صفر است.

تدبیرهای حل مسئله

تدبیر ۱: *زاویه‌های فاز*

به اثر زاویه فاز در نمودار $x(t)$ توجه کنید. هرگاه $\phi=0$ باشد، شکل $x(t)$ یک منحنی کسینوسی نوعی به صورت شکل ۳۱-۴ الف است. با افزایش ϕ منحنی در امتداد محور x به چپ منتقل می‌شود. (می‌توانید این مطلب را با نماد ϕ ↰ به‌خاطر بسپارید که در آن پیکان به سمت بالا بیانگر افزایش ϕ و پیکان به سمت چپ بیانگر انتقال حاصل در منحنی است.) کاهش ϕ مانند شکل ۳۱-۳پ برای $\phi=-\pi/4$ منحنی را به طرف راست انتقال می‌دهد.

گفته می‌شود که دو نمودار حرکت هماهنگ ساده با زاویه‌های فاز مختلف *اختلاف فاز* دارند، یا گفته می‌شود که یکی نسبت به دیگری *انتقال فاز* پیدا کرده‌است، یا نسبت به یکدیگر *ناهمفاز* هستند. برای مثال، منحنیهای شکل ۳۱-۳پ با یکدیگر اختلاف فاز $\pi/4\text{rad}$ دارند.

چون حرکت هماهنگ ساده پس از هر دوره تناوب T و تابع کسینوسی پس از هر $2\pi\text{rad}$ را نمایش می‌دهد. در شکل ۳۱-۴، $x(t)$ نسبت به $v(t)$ به اندازه یک‌چهارم تناوب یا $-\frac{\pi}{2}\text{rad}$ به‌راست انتقال فاز یافته‌است؛ و نسبت به $a(t)$ به اندازه یک‌دوم دوره تناوب یا $-\pi\text{rad}$ به‌راست‌منتقل‌شده‌است. انتقال فاز $2\pi\text{rad}$ باعث می‌شود که منحنی حرکت هماهنگ ساده برخوردش منطبق شود، یعنی بدون تغییر به نظر برسد.

۳۱-۳ قانون نیرو برای حرکت هماهنگ ساده

وقتی معلوم شد که شتاب یک ذره چگونه با زمان تغییر می‌کند، بااستفاده از قانون دوم نیوتون می‌توان فهمید که چه نیرویی باید برآن واردشود تا آن شتاب به‌دست آید. اگر قانون دوم نیوتون و معادله ۳۱-۸ راترکیب‌کنیم،برای‌حرکت هماهنگ ساده خواهیم داشت

$$F=ma=-(m\omega^2)x\qquad (۳۱-۹)$$

این نتیجه که نیروی بازگرداننده متناسب با جابه‌جایی با علامت مخالف است، نتیجه‌ای آشناست. این قانون هوک است

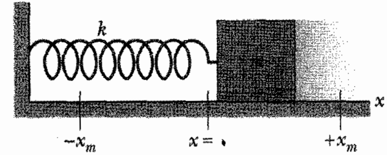
$$F=-kx\qquad (۳۱-۱۰)$$

برای فنر، ثابت فنر در اینجا عبارت است از

$$k=m\omega^2\qquad (۳۱-۱۱)$$

درواقع، معادله ۳۱-۱۰را می‌توان به‌عنوان تعریف دیگر حرکت هماهنگ ساده درنظرگرفت. این می‌گوید:

> حرکت هماهنگ ساده حرکتی است که به وسیله ذره‌ای به جرم m که تحت تأثیر نیرویی متناسب با جابه‌جایی با علامت مخالف قرارگرفته است، انجام می‌گیرد.



شکل ۳۱-۵ یک نوسانگر هماهنگ ساده خطی. سطح بدون اصطکاک است. مانند ذره شکل ۳۱-۱، وقتی قطعه از وضعیت x=o فشرده یا کشیده شده و سپس رهاشود، با حرکت هماهنگ ساده حرکت می‌کنند. آنگاه جابه‌جایی آن با معادله ۳۱-۳ داده می‌شود.

دستگاه قطعه- فنر در شکل ۳۱-۵ یک **نوسانگر هماهنگ ساده خطی** (یا به طور کوتاه، نوسانگر خطی) را تشکیل می‌دهد، که در آن "خطی" بدان معناست که F به جای توانهای دیگر x با x متناسب است. بسامد زاویه‌ای ω حرکت هماهنگ ساده قطعه به‌وسیله معادله ۳۱-۱۱ به ثابت فنر k و جرم m قطعه مربوط است، داریم

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(بسامد زاویه‌ای)} \qquad (۳۱-۱۲)$$

با ترکیب معادله‌های ۳۱-۵ و ۳۱-۱۲ برای دوره **تناوب** نوسانگر خطی شکل ۳۱-۵ می‌توان نوشت

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(دوره تناوب)} \qquad (۳۱-۱۳)$$

معادله‌های ۳۱-۱۲ و ۳۱-۱۳ گویای آن است که بسامد زاویه‌ای بزرگ (و درنتیجه دوره تناوب کوچک) به سختی فنر (k بزرگ) و سبکی قطعه (m کوچک) بستگی دارد.

هردستگاه نوسان کننده، مانند تخته شیرجه یا سیم ویولن دارای عنصری از "فنریت" و عنصری از "لختی" یا جرم است، و بنابراین به یک نوسانگر خطی شباهت دارد. در نوسانگر خطی شکل ۳۱-۵، این عنصرها در بخشهای مختلف دستگاه واقع‌اند: فنریت تماماً در قطعه است که فرض می‌کنیم صلب است. البته در سیم ویولن، به صورتی که در فصل ۳۲ خواهیم دید، این دو عنصر هردو در خود سیم هستند.

> ✔ **نکته وارسی ۲** کدامیک از رابطه‌های بین نیروی F وارد بر یک ذره و مکان x ذره بر نوسان هماهنگ ساده دلالت دارد:
> الف) $F=-۵x$، ب) $F=-۴۰۰x^۲$، پ) $F=۱۰x$، ت) $F=۳x^۲$؟

مسئلهٔ نمونه ۳۱-۱

قطعه‌ای که جرم m آن $۶۸۰g$ است به فنری بسته‌شده که ثابت فنر k آن برابر $۶۵N/m$ است. این قطعه به اندازه $x=۱۱cm$ از وضعیت تعادل خود در $x=۰$ روی سطح بدون اصطکاکی کشیده و در $t=۰$ از حالت سکون رها می‌شود.

الف) بسامد زاویه‌ای، بسامد و دوره تناوب حرکت حاصل چقدراست؟

نکتهٔ کلیدی دستگاه قطعه- فنر یک نوسانگر ساده خطی را تشکیل می‌دهند و قطعه حرکت هماهنگ ساده خواهدداشت.

پس بسامد زاویه‌ای از معادله ۳۱-۱۲ داده می‌شود.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{۶۵\,N/m}{۰/۶۸\,kg}}=۹/۷۸\,rad/s \approx ۹/۸\,rad/s \quad \text{(پاسخ)}$$

بسامد از معادله ۳۱-۵ پیروی می‌کند که به دست می‌دهد

$$f=\frac{\omega}{۲\pi}=\frac{۹/۷۸\,rad/s}{۲\pi\,rad}=۱/۵۶Hz\approx ۱/۶Hz \quad \text{(پاسخ)}$$

دوره تناوب از معادله ۳۱-۲ پیروی می‌کند که به دست می‌دهد

$$T=\frac{۱}{f}=\frac{۱}{۱/۵۶Hz}=۰/۶۴s=۶۴۰\,ms \quad \text{(پاسخ)}$$

(ب) دامنه نوسان چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی در نبود اصطکاک، انرژی مکانیکی دستگاه قطعه- فنر پایسته است.

استدلال: قطعه از حالت سکون و از فاصله ۱۱cm از نقطه تعادل رها می‌شود، انرژی جنبشی آن صفر و انرژی پتانسیل کشسانی دستگاه بیشینه است. بنابراین، هروقت قطعه دوباره در فاصله ۱۱cm از نقطه تعادل باشد انرژی جنبشی آن صفر است، این بدان معنی است که قطعه هرگز فراتر از ۱۱cm از نقطه تعادل نخواهد رفت. بیشترین جابه‌جایی آن ۱۱cm است.

$$x_m=۱۱cm \quad \text{(پاسخ)}$$

(پ) بیشینه تندی قطعه نوسان‌کننده چقدر است و وقتی دارای این تندی است قطعه در کجا قرار دارد؟

نکتهٔ کلیدی بیشینه تندی v_m برابر دامنه سرعت ωx_m در معادله ۳۱-۶ است؛

محاسبه: بنابراین داریم:

$$v_m=\omega x_m=(۹/۷۸\,rad/s)(۰/۱۱m)=۱/۱m/s^۲ \quad \text{(پاسخ)}$$

این بیشینه تندی زمانی به‌دست می‌آید که قطعه نوسان کننده از مبدأ می‌گذرد، شکلهای ۳۱-۴ الف و ۳۱-۴ب را مقایسه و ملاحظه کنید که هروقت $x=۰$ باشد تندی بیشینه است.

(ت) بزرگی a_m بیشینه شتاب قطعه چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی بزرگی a_m بیشینه شتاب برابر دامنه شتاب $\omega^۲x_m$ در معادله ۳۱-۷ است.

محاسبه: پس داریم:

$$a_m=\omega^۲x_m=(۹/۷۸\,rad/s)^۲(۰/۱۱m)=۱۱m/s^۲ \quad \text{(پاسخ)}$$

این بیشینه شتاب وقتی حاصل می‌شود که قطعه در دو انتهای مسیرش باشد. در این نقطه‌ها، نیروی وارد بر قطعه مقدار بیشینه

را دارد، شکلهای ۳۱-۴الف و ۳۱-۴پ را مقایسه و ملاحظه کنید که بزرگیهای جابه‌جایی و شتاب در همین زمانها بیشینه است.

(ث) ثابت فاز ϕ برای حرکت چقدراست؟

محاسبه‌ها: معادله ۳۱-۳ جابه‌جایی قطعه را به صورت تابعی از زمان به‌دست می‌دهد. می‌دانیم که در زمان $t=۰$، قطعه در $x=x_m$ قراردارد. با قراردادن این به اصطلاح **شرایط اولیه** در معادلهٔ ۳۱-۳ و حذف x_m خواهیم داشت

$$۱=\cos\phi \qquad (۳۱-۱۴)$$

پس کسینوس وارون به‌دست می‌دهد

$$\phi=۰\,\text{rad} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(هر زاویه‌ای که مضرب صحیح از ۲π باشد نیزدر معادله ۳۱-۱۴ صدق می‌کند. ما کوچکترین زاویه را انتخاب می‌کنیم.)

(ج) تابع جابه‌جایی $x(t)$ برای دستگاه قطعه-فنر چیست؟

محاسبه: تابع $x(t)$ به صورت کلی در معادله ۳۱-۳ داده شده‌است. قراردادن کمیتهای معلوم در این معادله به‌دست می‌دهد.

$$x(t)=x_m\cos(\omega t+\phi)$$
$$=(۰/۱۱m)\cos[(۹/۸\,\text{rad/s})t+۰] \qquad \text{(پاسخ)}$$
$$=۰/۱۱\cos(۹/۸t)$$

که x برحسب متر و t برحسب ثانیه است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱-۲

درلحظه $t=۰$ جابه‌جایی $x(۰)$ قطعه‌ای در یک نوسانگر خطی مانند شکل ۳۱-۵ برابر با ‎−۸/۵cm است. آنگاه، سرعت قطعه $v(۰)$ برابر با ‎−۰/۹۲۰m/s و شتاب آن $a(۰)$ برابر با $+۴۷/۰\,\text{m/s}^۲$ است.

(الف) بسامد زاویه‌ای ω این دستگاه چقدراست؟

نکتهٔ کلیدی وقتی قطعه دارای حرکت هماهنگ ساده است، معادله‌های ۳۱-۳، ۳۱-۶ و ۳۱-۷ به ترتیب جابه‌جایی، سرعت و شتاب ذره را به دست می‌دهند که هریک شامل ω هستند.

محاسبه‌ها: با قراردادن $t=۰$ در هریک از اینها بررسی می‌کنیم که کدامیک را برای ω می‌توان حل کرد. درمی‌یابیم که

$$x(۰)=x_m\cos\phi \qquad (۳۱-۱۵)$$
$$v(۰)=-\omega x_m\sin\phi \qquad (۳۱-۱۶)$$
$$a(۰)=-\omega^۲x_m\cos\phi \qquad (۳۱-۱۷)$$

در معادله ۳۱-۱۵، ω وجود ندارد. در معادله‌های ۳۱-۱۶و ۳۱-۱۷ مقدارهای سمت چپ معلوم، ولی x_m و ϕ نامعلوم‌اند. ولی اگر معادله ۳۱-۱۷ را بر معادلهٔ ۳۱-۱۵ تقسیم کنیم به سادگی x_m و ϕ حذف می‌شوند و می‌توانیم ω را به‌دست آوریم.

$$\omega=\sqrt{-\frac{a(۰)}{x(۰)}}=\sqrt{-\frac{۴۷/۰\,\text{m/s}^۲}{-۰/۰۸۵۰\,\text{m}}} \qquad \text{(پاسخ)}$$
$$=۲۳/۵\,\text{rad/s}$$

(ب) ثابت فاز ϕ و دامنه x_m چقدرند؟

محاسبه‌ها: در اینجا ω را داریم و می‌خواهیم x_m و ϕ را به دست آوریم. اگر معادله ۳۱-۱۶ را برمعادله ۳۱-۱۵ تقسیم کنیم، داریم:

$$\frac{v(۰)}{x(۰)}=\frac{-\omega x_m\sin\phi}{x_m\cos\phi}=-\omega\tan\phi$$

با حل این برای ϕ، داریم

$$\tan\phi=-\frac{v(۰)}{\omega x(۰)}=-\frac{-۰/۹۲۰\,\text{m/s}}{(۲۳/۵\,\text{rad/s})(-۰/۰۸۵۰\,\text{m})}$$
$$=-۰/۴۶۱$$

این معادله دارای دوجواب است

$$\phi=-۲۵^\circ \quad \text{و} \quad \tan\phi=۱۸۰^\circ+(-۲۵^\circ)=۱۵۵^\circ$$

(معمولاً ماشین حساب دراینجا فقط اولین حل را نشان می‌دهد.) برای انتخاب حل مناسب آنها را برای محاسبه مقدارهای دامنه x_m امتحان می‌کنیم. از معادله ۳۱-۱۵ درمی‌یابیم که اگر $\phi=۱۵۵^\circ$ باشد، $x_m=۰/۹۴$ خواهد بود. چون دامنه حرکت هماهنگ ساده باید ثابتی مثبت باشد، دراینجا ثابت فاز و دامنه دولت عبارت‌اند از

$$x_m=۰/۰۹۴\text{m}=۹/۴\text{cm} \quad , \quad \phi=۱۵۵^\circ \qquad \text{(پاسخ)}$$

تدبیرهای حل مسئله

تدبیر ۲: شناسایی حرکت هماهنگ ساده

در یک حرکت هماهنگ سادهٔ خطی، شتاب a و جابه‌جایی x دستگاه با رابطه زیر به هم مربوط‌اند

$$a=-(\text{یک ثابت مثبت})\,x$$

که برآن دلالت دارد که شتاب با جابه‌جایی از وضعت تعادل متناسب ولی در جهت مخالف آن است. هرگاه چنین عبارتی را برای یک دستگاه نوسانی پیدا کردید، می‌توانید آن را بی‌درنگ با معادله ۳۱-۸ مقایسه، و درنتیجه ثابت مثبت را که برابر با $\omega^۲$ است شناسایی کنید و فوراً عبارتی برای بسامد زاویه‌ای حرکت به دست آورید. سپس از معادله ۳۱-۵ می‌توانید دوره تناوب T و بسامد f را پیداکنید.

در برخی از مسئله‌ها می‌توان عبارتی برای نیروی f برحسب تابعی از جابه‌جایی x به دست آورد. اگر حرکت یک حرکت هماهنگ ساده خطی باشد، نیرو و جابه‌جایی با رابطه زیر به هم مربوط‌اند.

$$F=-(\text{یک ثابت مثبت})x$$

که می‌گوید نیرو با جابه‌جایی متناسب و در جهت مخالف آن است. وقتی چنین عبارتی را پیدا کردید، می‌توانید بی‌درنگ آن را با معادله ۳۱-۱۰ مقایسه کنید و ثابت مثبت k را به دست آورید. اگر جرم به کاررفته معلوم باشد می‌توان بااستفاده از معادله‌های ۳۱-۱۲ و ۳۱-۱۳ و ۳۱-۵ بسامد زاویه‌ای ω، دورهٔ تناوب T و بسامد f را به دست آورد.

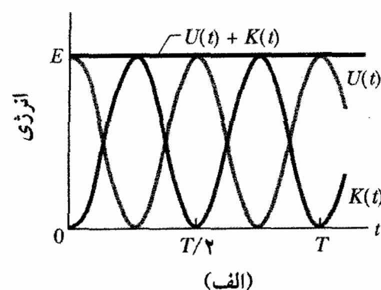
۳۱-۴ انرژی در حرکت هماهنگ ساده

در فصل ۸ (جلداول) دیدیم که انرژی یک نوسانگر خطی بین انرژی جنبشی و پتانسیل در تغییر است، درحالی که مجموع آنها- انرژی مکانیکی E نوسانگر- ثابت می‌ماند. این وضعیت را به طور کمی بررسی می‌کنیم.

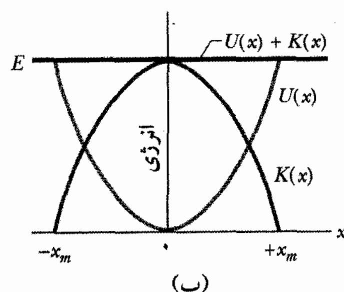
انرژی پتانسیل یک نوسانگر خطی مانند شکل ۳۱-۵ تماماً به فنر وابسته است. مقدار آن به میزان کشیدگی یا تراکم فنر یعنی به $x(t)$ بستگی دارد. از معادله‌های ۸-۱۱(جلد اول) و ۳۱-۳ برای پیداکردن عبارت زیر استفاده می‌کنیم.

$$U(t)=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t+\phi) \qquad (۳۱-۱۸)$$

دقت کنید: تابعی که به شکل $\cos^2 A$ نوشته شده (مثل اینجا) بیانگر $(\cos A)^2$ است ولی مانند $\cos A^2$ یعنی به معنای $\cos(A^2)$ نیست.



(الف)



(ب)

شکل ۳۱-۶(الف) انرژی پتانسیل $U(t)$، انرژی جنبشی $K(t)$ و انرژی مکانیکی E برحسب تابعی از زمان t برای یک نوسانگر هماهنگ خطی. توجه کنید که تمام انرژیها مثبت‌اند و انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی در طی هر دورهٔ تناوب دو قله دارند. (ب) انرژی پتانسیل $U(t)$، انرژی جنبشی $K(x)$ و انرژی مکانیکی E برحسب تابعی از مکان برای یک نوسانگر هماهنگ خطی با دامنه x_m به ازای $x=0$ انرژی تماماً جنبشی و به ازای $x=\pm x_m$ تماماً پتانسیل است.

انرژی جنبشی دستگاه شکل ۳۱-۵ تماماً به قطعه وابسته است. مقدار آن به میزان تند بودن حرکت قطعه، یعنی به $v(t)$ بستگی دارد. معادله ۳۱-۶ به دست می‌دهد.

$$K(t)=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2x_m^2\sin^2(\omega t+\phi) \qquad (۳۱-۱۹)$$

اگر از معادله ۳۱-۱۲ به جای ω^2 مقدار k/m را قراردهیم، می‌توان معادله ۳۱-۱۹ را به صورت زیر نوشت

$$K(t)=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}k\omega^2x_m^2\sin^2(\omega t+\phi) \qquad (۳۱-۲۰)$$

انرژی مکانیکی از معادله‌های ۳۱-۱۸ و ۳۱-۲۰ حاصل می‌شود و عبارت است از

$$\begin{aligned}E&=U+K\\&=\frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t+\phi)+\frac{1}{2}kx_m^2\sin^2(\omega t+\phi)\\&=\frac{1}{2}kx_m^2[\cos^2(\omega t+\phi)+\sin^2(\omega t+\phi)]\end{aligned}$$

به ازای هر زاویه α داریم

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

پس کمیت داخل کروشهٔ بالا یک است و داریم

$$E=U+K=\frac{1}{2}kx_m^2 \qquad (۳۱-۲۱)$$

درواقع انرژی مکانیکی یک نوسانگر خطی ثابت و مستقل از زمان است. انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نوسانگر خطی برحسب تابعی از زمان در شکل ۳۱-۶ الف و برحسب تابعی از جابه‌جایی در شکل ۳۱-۶ب نشان داده شده‌اند.

حال باید متوجه شده‌باشید که چرا یک دستگاه نوسان‌کننده به طور معمول شامل یک عنصر فنریت و یک عنصر لختی است: اولی انرژی پتانسیل و دومی انرژی جنبشی دستگاه را ذخیره می‌کند.

> **نکته وارسی ۳** در شکل ۳۱-۵ وقتی قطعه در $x=\pm 2/0\,cm$ قراردارد، انرژی جنبشی قطعه ۳J و انرژی پتانسیل کشسانی فنر ۲J است. (الف) در $x=0$ انرژی جنبشی قطعه چقدراست؟ انرژی پتانسیل کشسانی در (ب) $x=-0/2\,cm$ و (پ) $x=-x_m$ چقدراست؟

مسئلهٔ نمونه ۳۱-۳

گلولهٔ عظیمی که در تصویر آغاز این فصل دیدیم، موقعی که ساختمان در باد می‌لرزد از طریق چهار کابل آویزان‌شده، مانند یک آونگ نوسان می‌کند. وقتی ساختمان مثلاً به طرف شرق حرکت می‌کند، آونگ سنگین نیز با اندکی تأخیر به طرف شرق حرکت می‌کند، که ساختمان در آن زمان به طرف غرب حرکت می‌کند. بنابراین حرکت آونگ که تمایل دارد با آن مقابله کند، همگام با حرکت ساختمان نیست.

بسیاری از ساختمان‌های دیگر انواع دیگر میراکننده‌های جرمی را دارند که وسایل ضدلرزش نامیده می‌شوند. بعضی مانند

ساختمان جان هانکوگ در بوستون، قطعه نوسان‌کنندهٔ بزرگی در انتهای فنری دارد که در مسیری روغن‌کاری‌شده واقع است. مبانی آن مانند آونگ است: حرکت نوسان‌کننده همگام با حرکت ساختمان نیست.

فرض کنید جرم قطعه $۲/۷۲\times۱۰^۵\ kg$ و برای نوسان با بسامد $f=۱۰/۰\,Hz$ با دامنه $x_m=۲۰/۰\,m$ طراحی شده است.

الف) انرژی مکانیکی کل E دستگاه فنر- قطعه چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی انرژی مکانیکی E (مجموع انرژی جنبشی $k=۱/۲(mv)^۲$ قطعه و انرژی پتانسیل $U=۱/۲(kx)^۲$ فنر) در سراسر حرکت نوسان‌کننده ثابت است. پس، E را در هر نقطه در ضمن حرکت می‌توان محاسبه کرد.

محاسبه‌ها: چون دامنه x_m نوسانها را داریم، E را وقتی قطعه در مکان $x=x_m$ است محاسبه می‌کنیم که سرعت آن $v=۰$ است. پس برای محاسبهٔ v در این نقطه، ابتدا نیاز داریم ثابت فنر را پیدا کنیم. از معادلهٔ ۳۰-۱۲ $(۵=\sqrt{k/m})$ و معادلهٔ ۳۰-۵ $(\omega=۲\pi f)$ داریم:

$$\begin{aligned}k &= m\omega^۲ = m(۲\pi f)\\ &=(۲/۷۲\times۱۰^۵\ kg)(۲\pi)^۲(۱۰/۰\ Hz)^۲\\ &=۱/۰۷۳\times۱۰^۹\ N/m\end{aligned}$$

اکنون E را به صورت زیر می‌توان محاسبه کرد

$$\begin{aligned}E &= K+U=\frac{۱}{۲}mv^۲+\frac{۱}{۲}kx^۲\\ &=۰+\frac{۱}{۲}(۱/۰۷۳\times۱۰^۹\ N/m)(۰/۲۰\,m)^۲\\ &=۲/۱۴۷\times۱۰^۷\ J\approx ۲/۱\times۱۰^۷\ J\end{aligned}$$ (پاسخ)

ب) سرعت قطعه وقتی از نقطه تعادل می‌گذرد چقدراست؟

محاسبه‌ها: سرعت را در $x=۰$ می‌خواهیم که انرژی پتانسیل $U=۱/۲(kx)^۲=۰$ و انرژی مکانیکی تماماً انرژی جنبشی است. پس می‌توان نوشت:

$$E=K+U=\frac{۱}{۲}mv^۲+\frac{۱}{۲}kx^۲$$

$$۲/۱۴۷\times۱۰^۷\ J=\frac{۱}{۲}(۲/۷۲\times۱۰^۵\ kg)v^۲+۰$$

یا

$$v=۱۲/۶\,m/s$$ (پاسخ)

چون E تماماً انرژی جنبشی است، این بیشینه سرعت v_m است.

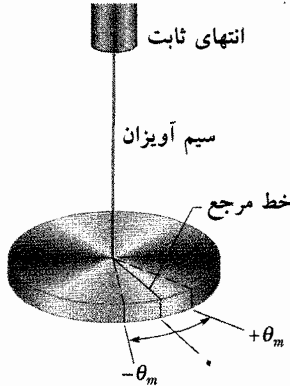
۳۱-۵ نوسانگر هماهنگ سادهٔ زاویه‌ای

شکل ۳۱-۷ صورت زاویه‌ای یک نوسانگر هماهنگ ساده را نشان می‌دهد. عنصر فنریت یا کشسانی به جای کشش و تراکم یک فنر که قبلاً داشتیم به پیچ‌خوردگی یک سیم آویزان مربوط است. این وسیله **آونگ پیچشی** نامیده می‌شود که **پیچش** به پیچ‌خوردگی اشاره دارد.

اگر قرص شکل ۳۱-۷ از وضعیت در حال سکون خود (که در آن خط مرجع در $\theta=۰$ است) به اندازه جابه‌جایی زاویه‌ای θ چرخانده و سپس رهاشود، قرص حول آن وضعیت به صورت **حرکت هماهنگ ساده زاویه‌ای** نوسان می‌کند. با چرخش قرص به اندازه θ در هر جهت یک گشتاور نیروی بازگرداننده‌ای که با رابطه زیر داده می‌شود به وجود می‌آید.

$$\tau=-k\theta \qquad (۳۱-۲۲)$$

دراینجا k (با تلفظ یونانی *کاپا*) ثابت است و **ثابت پیچش** نامیده می‌شود که به طول فنر، قطر و جنس سیم آویز بستگی دارد.



شکل ۳۱-۷ آونگ پیچشی یک نوسانگر هماهنگ سادهٔ زاویه‌ای است. قرص در صفحه‌ای افقی نوسان می‌کند؛ خط مرجع با دامنه زاویه‌ای θ_m نوسان می‌کند. پیچش در سیم آویز مانند فنر انرژی پتانسیل را ذخیره و یک گشتاور نیروی بازگرداننده ایجاد می‌کند.

مقایسه معادله ۳۱-۲۲ با معادله ۳۱-۱۰ نشان می‌دهد که معادله ۳۱-۲۲ شکل زاویه‌ای قانون هوک است و می‌توان معادله ۳۱-۱۳ را که دوره تناوب حرکت هماهنگ ساده خطی را نشان می‌دهد به معادله‌ای برای دوره تناوب حرکت هماهنگ ساده زاویه‌ای تغییر شکل داد. به جای ثابت فنر k در معادله ۳۱-۱۳، معادلش ثابت k را از معادله ۳۱-۲۲ و به جای m در معادله ۳۱-۱۳ معادلش لختی چرخشی I قرص در حال نوسان را قرار می‌دهیم. این جایگزینی‌ها به رابطه زیر می‌انجامد.

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \quad \text{(آونگ پیچشی)} \qquad (۳۱-۲۳)$$

که معادله درستی برای دورهٔ تناوب نوسانگر هماهنگ ساده زاویه‌ای یا آونگ پیچشی است.

تدبیرهای حل مسئله

تدبیر۳: *شناسایی حرکت هماهنگ ساده زاویه‌ای*

وقتی دستگاهی حرکت هماهنگ ساده زاویه‌ای انجام دهد، شتاب زاویه‌ای α و جابه‌جایی زاویه‌ای θ آن با رابطه زیر به هم مربوط‌اند.

$$\alpha=-(\text{یک ثابت مثبت})\theta$$

این معادله معادل زاویه‌ای معادله ۳۱-۸ $(a=-\omega^2 x)$ است. این حاکی از آن است که شتاب زاویه‌ای α با جابه‌جایی زاویه‌ای θ از وضعیت تعادل متناسب و درجهت مخالف آن است. وقتی عبارتی به این شکل داشته‌باشیم، می‌توان ثابت مثبتی مانند، ω^2 را شناسایی و سپس T, f, ω را به دست آورد.

اگر عبارتی برای گشتاور نیروی τ برحسب جابه‌جایی زاویه‌ای داشته‌باشیم می‌توان حرکت هماهنگ ساده زاویه‌ای را نیز شناسایی کرد، چون آن عبارت باید به شکل معادله ۳۱-۲۲ $(\tau=-k\theta)$ یا به صورت زیر باشد.

$$\tau = -(\text{یک ثابت مثبت})\theta$$

این معادله معادل زاویه‌ای معادله ۳۱-۱۰ $(F=-kx)$ است. این رابطه می‌گوید که گشتاور نیروی τ با جابه‌جایی زاویه‌ای θ از وضعیت تعادل متناسب است ولی می‌خواهد دستگاه را در جهت مخالف بچرخاند. وقتی عبارتی به این شکل داشته‌باشیم، می‌توان ثابت مثبتی مانند ثابت پیچش دستگاه k را شناسایی کرد. اگر لختی چرخشی I دستگاه معلوم باشد، در این صورت می‌توان T را به دست آورد.

مسئلهٔ نمونه ۳۱-۴

شکل ۳۱-۸ الف میله نازکی به طول L برابر ۱۲/۴cm و جرم m برابر ۱۳۵g را نشان می‌دهد، که از وسط خود از سیم درازی آویزان است. دوره تناوب T_a حرکت هماهنگ ساده زاویه‌ای ۲/۵۳s اندازه‌گیری شده‌است. سپس جسمی با شکل نامنظم را که آن را X می‌نامیم مانند شکل ۳۱-۸ب از همان سیم آویزان می‌شود و دوره تناوب T_b آن برابر ۴/۷۶s به دست می‌آید. لختی چرخشی جسم X نسبت به محور آویز چقدراست؟

نکتهٔ کلیدی لختی چرخشی میله یا جسم X بـا معادلـه ۳۱-۲۳ به دوره تناوب اندازه‌گیری شده مربوط‌اند.

محاسبه‌ها: در جدول ۱۰-۲ث (جلد اول) لختی چرخشی یک میله نازک نسبت به محوری عمود بر نقطه وسط داده شده و برابر $\frac{1}{12}mL^2$ است. پس، برای میله شکل ۳۱-۸الف، داریم:

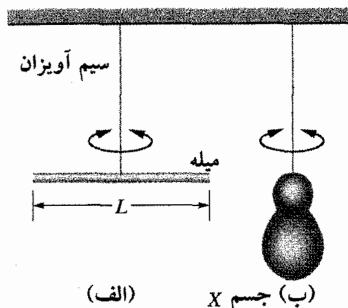
$$I_a = \frac{1}{12}mL^2 = \left(\frac{1}{12}\right)(0/135\text{kg})(0/124\text{m})^2$$

اکنون معادله ۳۱-۲۳ را دوبار، یک‌بار برای میله و باردیگر بـرای جسم X می‌نویسیم.

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{I_a}{k}} \quad , \quad T_b = 2\pi\sqrt{\frac{I_b}{k}}$$

ثابت k که خاصیتی از سیم است، برای هردو یکسان است: فقط دوره‌های تناوب و لختیهای چرخشی با هم متفاوت‌اند.

هریک از این کمیتها را به توان ۲ می‌رسانیم و دومی را بر اولی تقسیم می‌کنیم و معادله حاصل را برای I_b حل می‌کنیم. نتیجه عبارت است از



شکل ۳۱-۸ دو آونگ پیچشی شامل (الف) سیم و میله و (ب) سیم مشابه و جسمی با شکل نامنظم.

$$I_b = I_a\frac{T_b^2}{T_a^2} = (1/73\times10^{-4}\ kg\cdot m^2)\frac{(4/76s)^2}{(2/53s)^2}$$
$$= 6/12\times10^{-4}\ kg\cdot m \qquad \text{(پاسخ)}$$

۳۱-۶ آونگها

حال به دسته‌ای از نوسانگرهای ساده برمی‌گردیم که در آنها فنریت به جای خواص کشسانی یک سیم پیچیده، یا کشیدگی یا فشردگی فنر به نیروی گرانشی وابسته است.

آونگ ساده

اگر سیبی را به انتهای نخ بلندی که یک سر آن در جایی محکم شده‌است آویزان کنیم و در یک فاصله کوچک سیب را به چپ و راست تاب دهیم، به آسانی می‌توان دید که حرکت سیب تناوبی است. درواقع، آیا این حرکت هماهنگ ساده‌است؟ اگر چنین است، دوره تناوب آن چقدراست؟ برای پاسخ دادن، یک **آونگ ساده** را درنظر می‌گیریم که از ذره‌ای به جرم m (به نام آویزه آونگ) که از نخی بدون جرم و کش‌ناپذیر به طول L که در سردیگر ثابت شده، مانند شکل ۳۱-۹ الف آویزان است. آویزه می‌تواند در صفحه کاغذ به طور آزاد به چپ و راست یک خط عمودی که از نقطه آویز نخ می‌گذرد تاب بخورد.

نیروهای مؤثر برآویزه که در شکل ۳۱-۹ب نشان داده شده‌اند عبارت‌اند از نیروی $\vec{T}$ ازطرف نخ و نیروی گرانشی $\vec{F}_g$. نخ با قائم زاویه θ می‌سازد. $\vec{F}_g$ را به مؤلفه مماسی یک گشتاور نیروی بازگرداننده نسبت به نقطه آویزی آونگ ایجاد می‌کند، زیرا این مؤلفه همیشه درجهت مخالف با جابه‌جایی وزنه عمل می‌کند، به طوری که می‌خواهد وزنه را به محل مرکزی آن برگرداند. این محل مکان تعادل $(\theta=0)$ نامیده می‌شود زیرا آونگ درآنجا در حال سکون و بدون تاب خوردن می‌ماند.

از معادله ۱۰-۴۱ $(\tau=r_\perp F)$، این گشتاور نیروی بازگرداننده را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\tau = -L(F_g\sin\theta) \qquad (۳۱-۲۴)$$

که در آن علامت منفی نشان‌دهنده این است که گشتاور نیرو در جهت کاهش θ عمل می‌کند و L بازوی مؤلفه نیروی $F_g \sin\theta$ نسبت به نقطه آویز است. با قراردادن معادله ۳۱-۲۴ در معادله ۱۰-۴۴ $(\tau = I\alpha)$ و سپس قراردادن mg به عنوان بزرگی نیروی F_g، داریم

$$-L(mg\sin\theta) = I\alpha \qquad (۳۱-۲۵)$$

که در آن I لختی چرخشی آونگ نسبت به نقطه آویز و α شتاب زاویه‌ای آن نسبت به این نقطه است.

اگر فرض کنیم θ کوچک است و سپس با تقریب به جای $\sin\theta$، θ را (برحسب رادیان) قرار دهیم (برای مثال، هرگاه، $\theta = ۵/۰۰° = ۰/۰۸۷۳\text{rad}$ باشد، $\sin\theta = ۰/۰۸۷۲$ است که تنها به اندازه ۰/۱% با یکدیگر تفاوت دارند) معادله ۳۱-۲۵ به صورت ساده‌تری درمی‌آید. با این تقریب و کمی بازنویسی، خواهیم داشت

$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta \qquad (۳۱-۲۶)$$

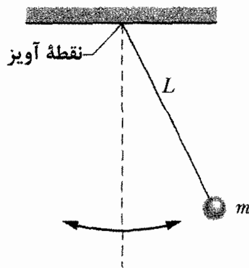
این معادل معادلهٔ ۳۱-۸؛ معادله مشخصهٔ حرکت هماهنگ ساده است. این معادله می‌گوید که شتاب زاویه‌ای α آونگ با جابه‌جایی θ متناسب است ولی با علامت مخالف. بنابراین، وقتی آویزهٔ آونگ مطابق شکل ۳۱-۹الف به سمت راست حرکت می‌کند، شتاب آن *به طرف* چپ افزایش می‌یابد تا اینکه آویزه متوقف شده و به سمت چپ شروع به حرکت کند. سپس، وقتی آویزهٔ آونگ در سمت چپ وضعیت تعادل است، شتاب آن می‌خواهد آویزه را به سمت راست برگرداند به طوری که آویزه با حرکت نوسانی هماهنگ ساده به چپ و راست تاب می‌خورد و این فرایند ادامه می‌یابد. به عبارت دقیقتر، حرکت *آونگ ساده‌ای که فقط با زاویه‌های کوچک تاب می‌خورد* تقریباً حرکت هماهنگ ساده است. این محدودیت کوچک بودن زاویه را می‌توان به روش دیگری بیان کرد: **دامنه زاویه‌ای** θ_m حرکت (زاویهٔ بیشینه تاب خوردن) باید کوچک باشد. با مقایسه معادله‌های ۳۱-۲۶ و ۳۱-۸ می‌بینیم که بسامد زاویه‌ای آونگ برابر $\omega = \sqrt{mgL/I}$ است. حال، اگر این عبارت را به جای ω در معادله ۳۱-۵ $(\omega = ۲\pi/T)$ قراردهیم، می‌بینیم که دورهٔ تناوب آونگ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \qquad (۳۱-۲۷)$$

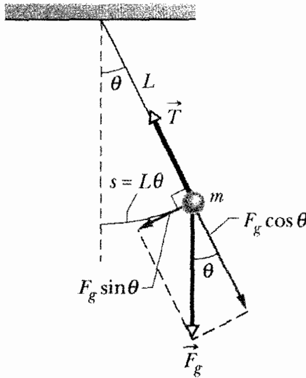
همهٔ جرم آونگ ساده در جرم m آویزهٔ ذره مانند متمرکزشده است که شعاع I فاصله آن از نقطه آویزاست. بنابراین، می‌توان معادله ۱۰-۲۳ $(I = mr^۲)$ را به کاربرد و لختی چرخشی آونگ را به صورت $I = mL^۲$ نوشت. با قراردادن این در معادلهٔ ۳۱-۲۷ و ساده‌سازی رابطه به دست می‌آید

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{(آونگ ساده، دامنه کوچک)} \qquad (۳۱-۲۸)$$

در این فصل زاویه‌های تاب خوردن کوچک فرض می‌شود.



(الف)

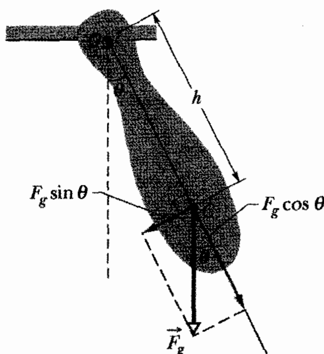


(ب)

شکل ۳۱-۹ (الف) یک آونگ ساده.(ب) نیروهای مؤثر بر آویزه عبارت‌اند از نیروی گرانشی $\vec{F_g}$ و نیروی $\vec{T}$ که کشش نخ است. مؤلفهٔ مماسی $mg\sin\theta$ نیروی گرانشی نیروی بازگرداننده‌ای است که آونگ را به وضعیت مرکزی خود بر می‌گرداند.

آونگ فیزیکی

آونگ واقعی که معمولاً **آونگ فیزیکی** نامیده می‌شود می‌تواند توزیع پیچیده‌ای از جرم داشته‌باشد، که نسبت به آونگ ساده بسیار متفاوت است. آیا آونگ فیزیکی نیز می‌تواند حرکت هماهنگ ساده داشته‌باشد؟



شکل ۳۱-۱۰ یک آونگ فیزیکی.گشتاور نیروی بازگرداننده برابر با $hF_g\sin\theta$ است. هرگاه $\theta = ۰$ باشد، مرکز جرم C به طور مستقیم از زیرنقطه آویز O آویزان است.

اگر چنین است، دوره تناوب آن چقدراست؟

شکل ۳۱-۱۰ یک آونگ فیزیکی دلخواه را نشان می‌دهد که به اندازه زاویه θ به یک سمت جابه‌جا شده‌است. نیروی

گرانشی $\vec{F}_g$ بر مرکز جرم C که آن به فاصله h از نقطه آویز قراردارد وارد می‌شود. مقایسه شکلهای ۳۱-۱۰ و ۳۱-۹ب فقط یک اختلاف مهم بین آونگ فیزیکی و آونگ ساده را نشان می‌دهد. برای آونگ فیزیکی، مؤلفهٔ بازگرداننده $F_g \sin\theta$ نیروی گرانشی به جای نخی به طول L دارای بازوی گشتاوری به فاصله h از نقطه آویز است. در تمام جنبه‌های دیگر، تحلیل آونگ فیزیکی همان تحلیل ما درباره آونگ ساده از معادلهٔ ۳۱-۲۷ خواهد بود. بازهم، (برای θ_m کوچک) درمی‌یابیم که حرکت تقریباً حرکت هماهنگ ساده‌است.

اگر در معادله ۳۱-۲۷، L را با h جایگزین می‌کنیم، می‌توانیم دوره تناوب را به صورت زیر بنویسیم

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad \text{(آونگ فیزیکی، دامنه کوچک)} \qquad (۳۱-۲۹)$$

همانند آونگ ساده، I لختی چرخشی آونگ نسبت به نقطه O است. ولی، دراینجا I به طور ساده mL^2 نیست (بلکه به شکل آونگ فیزیکی بستگی دارد) اما بازهم متناسب با m است.

اگر آونگ فیزیکی را از مرکز جرم آن آویزان کنیم نوسان نخواهد کرد، این همانند قراردادن $h=0$ در معادلهٔ ۳۱-۲۹ است. این معادله پیش‌بینی می‌کند که در این صورت $T \to \infty$ بدان معناست که چنین آونگی هیچ‌وقت یک نوسان را کامل نخواهدکرد.

وابسته به هرآونگ فیزیکی که با دورهٔ تناوب T نسبت به یک نقطه آویز O نوسان می‌کند می‌توان یک آونگ ساده را به طول L_0 با همان دورهٔ تناوب T درنظرگرفت. از معادله۳۱-۲۸ می‌توان L_0 را پیداکرد. نقطه‌ای در راستای آونگ فیزیکی و درفاصله L_0 از نقطه O را مرکز *نوسان* آونگ فیزیکی برای نقطهٔ آویز داده شده می‌نامند.

اندازه‌گیری g

از آونگ فیزیکی می‌توان برای اندازه‌گیری شتاب سقوط آزاد g در هر نقطه معین روی سطح زمین استفاده کرد. (اندازه‌گیریهای بی‌شماری از این قبیل در ضمن کاوشهای ژئوفیزیکی انجام شده‌است.)

برای تحلیل یک مورد ساده، آونگی را درنظرمی‌گیریم که میله‌ای یکنواخت به طول L بوده و از یک طرف آن آویزان است. برای چنین آونگی، h در معادله ۳۱-۲۹ فاصلهٔ بین نقطهٔ آویز و مرکز جرم و برابر با $\frac{1}{2}L_0$ است. از جدول ۱۰-۲ث (جلداول) لختی چرخشی این آونگ حول محوری عمود که از مرکز جرم میله می‌گذرد برابر است با $\frac{1}{12}mL^2$. سپس از قضیهٔ محورهای موازی، معادله ۱۰-۳۶ ($I = I_{com} + Mh^2$)، لختی چرخشی حول محور عمودی که از یک سر میله می‌گذرد برابر است با

$$I = I_{com} + Mh^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2 \qquad (۳۱-۳۰)$$

اگر در معادله ۳۱-۲۹، $h = \frac{1}{2}L$, $I = \frac{1}{3}mL^2$ را قراردهیم، خواهیم داشت:

$$g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2} \qquad (۳۱-۳۱)$$

بنابراین، با اندازه‌گیری L و دوره تناوب T می‌توان مقدار g را در مکان آونگ به دست آورد. (اگر اندازه‌گیریهای دقیق موردتوجه باشد ظریف‌کاریهایی مانند نوسان آونگ در یک اتاق خلأ موردنیاز است.)

✔ نکته وارسی ۴ سه آونگ فیزیکی با جرمهای $m_0, 2m_0, 3m_0$، دارای شکل و اندازهٔ یکسانی هستند و از یک نقطه آویزان شده‌اند. جرمها را به ترتیب بزرگی دورهٔ تناوب آونگها مرتب کنید.

مسئلهٔ نمونه ۳۱-۵

در شکل ۳۱-۱۱ الف خط‌کشی، حول یک سرش در فاصله h از مرکز جرم خط‌کش، تاب می‌خورد.

الف) دورهٔ تناوب T نوسان چقدراست؟

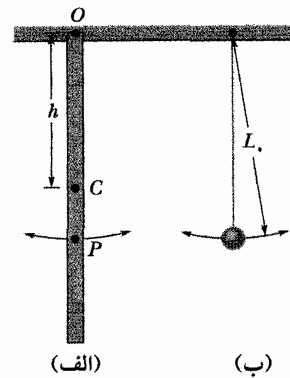
نکتهٔ کلیدی خط‌کش یک آونگ ساده نیست زیرا جرم آن در آویزه‌ای در سردیگر خط‌کش نسبت به نقطه آویز قرار ندارد- در نتیجه خط‌کش یک آونگ فیزیکی است.

محاسبه‌ها: دورهٔ تناوب آونگ فیزیکی با معادله۳۱-۲۹ داده می‌شود که در این صورت لختی چرخشی I خط‌کش نسبت به نقطه آویز موردنیاز است. خط‌کش را می‌توان یک میله یکنواخت به طول L و جرم m فرض کرد. حال معادله ۳۱-۳۰ حاکی از آن است که $I = 1/3\, mL^2$ و فاصله h درمعادله۳۱-۲۹ برابراست با $1/2L$. با قراردادن این کمیتها در معادله ۳۱-۲۹، درمی‌یابیم که

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg\left(\frac{1}{2}mL\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \qquad (۳۱-۳۲)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{(2)(1/00\,\text{m})}{(3)(9/8\,\text{m/s}^2)}} = 1/64\,\text{s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

توجه کنید که نتیجه مستقل از جرم m آونگ است.



شکل ۳۱-۱۱ (الف) خط‌کش آویزان از یک انتها به عنوان یک آونگ فیزیکی. (ب) یک آونگ ساده که طول آن L_o است و طوری انتخاب شده‌است که دورهٔ تناوب دو آونگ برابرند. نقطه P روی آونگ (الف) مرکز نوسان را مشخص می‌کند.

(ب) $L_\circ$ فاصله بین نقطه آویز O خط‌کش و مرکز نوسان خط‌کش چقدراست؟

محاسبه‌ها: $L_\circ$ طول آونگ سادهٔ (درشکل ۳۱-۱۱ب رسم شده‌است) موردنظر ماست که دارای دورهٔ تناوب یکسانی با آونگ فیزیکی (خط‌کش) شکل ۳۱-۱۱ الف است. با مساوی قراردادن معادله ۳۱-۲۸ با ۳۱-۳۲، داریم

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{L_\circ}{g}} = ۲\pi\sqrt{\frac{۲L}{۳g}}$$

با کمی دقت درمی‌یابیم که

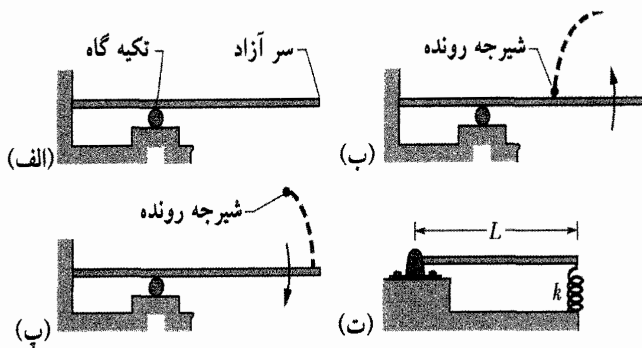
$$L_\circ = \frac{۲}{۳}L = \left(\frac{۲}{۳}\right)(۱۰۰\text{cm}) = ۶۶/۷\text{cm}$$ (پاسخ)

در شکل ۳۱-۱۱ الف نقطه P این فاصله را از نقطه آویز O مشخص می‌کند. بنابراین، نقطه P مرکز نوسان خط‌کش برای نقطه آویز داده شده‌است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱-۶ مهارت خود را تقویت کنید

یک تخته شیرجه مسابقه تقریباً در یک سوم از سرثابتش روی تکیه‌گاهی قرار دارد (شکل ۳۱-۱۲الف). در یک شیرجه با دورخیز شیرجه رونده سه قدم سریع در امتداد تخته برمی‌دارد و موقع عبور از تکیه‌گاه موجب می‌شود که سرآزاد تخته به سمت پایین بچرخد. وقتی تخته نسبت به افق وامی‌جهد، شیرجه رونده به بالا و به سمت جلو، سرآزاد تخته، می‌پرد (شکل ۳۱-۱۲ب). یک شیرجه روندهٔ ماهر به گونه‌ای آموزش می‌بیند که پس از پریدن درست وقتی تخته ۲/۵ نوسان کامل را انجام داد روی سر آزاد تخته فرودآید. با این تنظیم زمان، وقتی سرآزاد تخته را به طور قابل ملاحظه‌ای پایین می‌برد و با واجهیدن شیرجه رونده را به سمت بالا در هوا پرتاب می‌کند.

شکل ۳۱-۱۲ت یک مدل ساده ولی واقع‌گرایانه از یک تخته مسابقه را نشان می‌دهد. قسمت جلویی تخته نسبت به تکیه‌گاه مانند میله‌ای سخت به طول L که می‌تواند حول لولایی در تکیه‌گاه بچرخد رفتار می‌کند و یک فنر (خیالی) واقع در سر آزاد تخته را می‌فشارد. اگر جرم میله $m = ۲۰/۰\text{kg}$ و پرش شیررونده به مدت $t_{fl} = ۰/۶۲۰\text{s}$ طول بکشد، ثابت فنر k موردنیاز برای فرود مناسب، چقدراست؟



شکل ۳۱-۱۲(الف) یک تخته شیرجه.(ب) وقتی تخته نسبت به افق حرکت می‌کند، شیرجه رونده به بالا و به سمت جلو می‌پرد. (پ) شیرجه رونده پس از ۲/۵ نوسان فرود می‌آید.(ت) مدل فنر-نوسانگر از یک تخته در حال نوسان.

نکتهٔ کلیدی اگر میله در حرکت هماهنگ ساده باشد، در این صورت شتاب و جابه‌جایی انتهای درحال نوسان میله باید با عبارتی به شکل معادله ۳۱-۸ $(a = -\omega^۲x)$ به هم ربط داشته‌باشند. اگر چنین باشد، می‌توان ω را به‌دست‌آورد و سپس از رابطهٔ موجود k موردنظر را پیداکرد.

گشتاور و نیرو: چون وقتی سرآزاد میله نوسان می‌کند میله حول لولا می‌چرخد، یک گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ روی میله حول لولا وجود دارد. این گشتاور نیرو ناشی از نیروی $\vec{F}$ است که از فنر به میله وارد می‌شود. چون $\vec{F}$ با زمان تغییر می‌کند، $\vec{\tau}$ نیز باید با زمان تغییر کند. ولی در هرلحظه از زمان می‌توان بزرگی $\vec{F}, \vec{\tau}$ را با معادله ۱۰-۳۹ $(\tau = rF\sin\phi)$ به هم مربوط کرد، دراینجا داریم

$$\tau = LF\sin ۹۰^\circ \qquad (۳۱\text{-}۳۳)$$

که درآن L بازوی گشتاور نیروی $\vec{F}$,°۹۰ زاویهٔ بین بازوی گشتاور و خط اثر نیرو است. با مقایسه معادله ۳۱-۳۳ با معادله ۱۰-۴۴ $(\tau = I\alpha)$ داریم

$$I\alpha = LF \qquad (۳۱\text{-}۳۴)$$

که درآن I لختی چرخشی میله حول لولا و α شتاب زاویه‌ای نسبت به آن نقطه است.از معادله ۳۱-۳۰ لختی چرخشی میله I برابر $\frac{۱}{۳}mL^۲$ است.

اکنون یک محور x قائم را تصورکنید که از انتهای راست میلهٔ درحال نوسان می‌گذرد و جهت بالا را مثبت درنظربگیرید. در این صورت، نیروی وارد از طرف فنر برانتهای راست میله برابر $F = -kx$ است که درآن x جابه‌جایی قائم انتهای راست میله است.

با قراردادن این عبارتها برای F, I در معادله ۳۱-۳۴، داریم

$$\frac{mL^۲\alpha}{۳} = -Lkx \qquad (۳۱\text{-}۳۵)$$

حرکت ترکیبی: اکنون ترکیبی از جابه‌جایی خطی x (به طور قائم) و شتاب چرخشی α(حول لولا) داریم. در معادله ۳۱-۳۵ می‌توان به جای α شتاب a (خطی) درامتداد محورxرا از معادله ۱۰-۲۲ $(a_t=\alpha r)$ به جای شتاب مماسی قراردارد. دراینجا شتاب مماسی برابر a و شعاع چرخش r برابر L است، پس $\alpha = a/L$. با این جایگزینی، معادله ۳۱-۳۵ به صورت زیر درمی‌آید.

$$\frac{mL^2 a}{3L} = -Lkx$$

که به دست می‌دهد

$$a=-\frac{3k}{m} \tag{۳۱-۳۶}$$

در واقع، معادله ۳۱-۳۶به همان شکل معادلهٔ ۳۱-۸ $(a=-\omega^2 x)$ است. بنابراین، میله درواقع دارای حرکت هماهنگ ساده است و مقایسه ۳۱-۳۶ با ۳۱-۸ نشان می‌دهد که

$$\omega^2=\frac{3k}{m}$$

با حل رابطه بالا برای k و جایگزینی ω از معادله ۳۱-۵ $(\omega=2\pi/T)$ خواهیم داشت

$$k=\frac{m}{3}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \tag{۳۱-۳۷}$$

که درآن T دورهٔ تناوب نوسان تخته است. می‌خواهیم زمان پرواز t_{fl} به اندازه ۲/۵ نوسان تخته طول بکشد و درنتیجه میله نیز ۲/۵ نوسان داشته باشد. یعنی می‌خواهیم که $t_{fl}=2.5T$ باشد. با قراردادن این داده‌ها در معادله ۳۱-۳۷ به رابطه زیر می‌رسیم.

$$k=\frac{m}{3}\left(\frac{2\pi}{t_{fl}}2.5\right)^2 \tag{۳۱-۳۸}$$

$$=\frac{(20.0\,kg)}{3}\left(\frac{2\pi}{0.620\,s}2.5\right)^2$$

$$=4.28\times10^3\ N/m$$ (پاسخ)

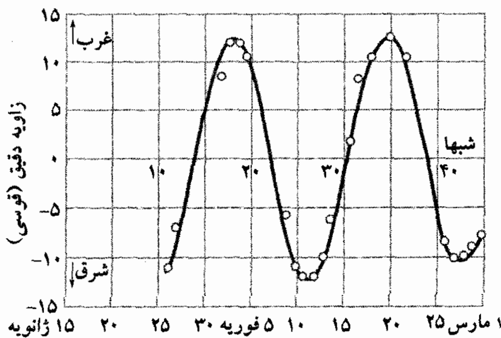
این ثابت فنر مؤثر k برای تختهٔ شیرجه است.

مهارتهای شیرجه رونده: از معادله ۳۱-۳۸، می‌بینیم که شیرجه رونده با زمان پرواز طولانیتر به ثابت فنر k کوچکتری نیازدارد تا درلحظه مناسب در انتهای تخته فرودآید. مقدار k را می‌توان با حرکت دادن تکیه‌گاه به سمت انتهای آزاد افزایش یا با حرکت دادن در جهت مخالف کاهش داد. یک شیرجه روندهٔ ماهر به گونه‌ای آموزش می‌بیند که با زمان پرواز t_{fl} مناسبی جهش کند و می‌داند که محل تکیه‌گاه را چگونه با آن تنظیم کند.

۳۱-۷ حرکت هماهنگ ساده و حرکت دایره‌ای یکنواخت

در سال ۱۶۱۰/۶۴۹ گالیله بااستفاده از تلسکوپ جدید ساخته شده خود، چهار قمر اصلی مشتری را کشف کرد. درطول هفته‌ها رصدکردن، به نظر می‌رسید که هر قمر نسبت به سیاره به صورت آنچه که امروز حرکت هماهنگ ساده می‌نامیم به عقب و جلو حرکت می‌کند، قرص سیاره در وسط حرکت بود. مشاهده‌های ثبت شدهٔ گالیله که با دست خود او نوشته‌شده هنوز قابل دسترس است. فرنچ[1] از MIT داده‌های گالیله را برای تعیین وضعیت قمر گالیستو نسبت به مشتری به‌کاربرد. در نتایج نشان داده‌شده در شکل ۳۱-۱۳ دایره‌ها برپایهٔ مشاهده‌های گالیله است و منحنی با این داده به خوبی همخوانی دارد. این منحنی، معادله ۳۱-۳ یعنی جابه‌جایی برای حرکت هماهنگ ساده را کاملاً تأیید می‌کند. دورهٔ تناوب تقریباً ۱۶/۸ روز را از این نمودار می‌توان اندازه گرفت.

در واقع گالیستو باتندی ثابت، اساساً در یک مدار دایره‌ای به دور مشتری حرکت می‌کند. حرکت واقعی آن، که از هماهنگ ساده به دور است، حرکت دایره‌ای یکنواخت است. آنچه که گالیله دید، و آنچه که می‌توانید با یک دوربین دوچشمی با اندکی شکیبایی ببینید، تصویری از این حرکت دایره‌ای روی خطی در صفحه حرکت است. آنچه که از مشاهده‌های قابل توجه گالیله نتیجه می گیریم این است که حرکت هماهنگ ساده یک حرکت دایره‌ای یکنواخت است که از پهلو دیده‌شود. به بیان دیگر:

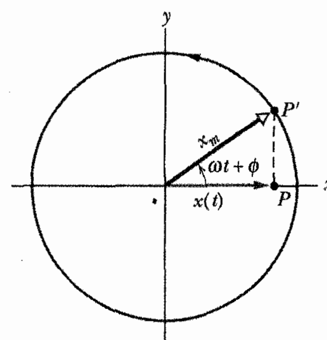


شکل ۳۱-۱۳ زاویهٔ بین مشتری و قمر آن گالیستو به طوری که از زمین دیده می‌شود. دایره‌ها بر اندازه‌گیریهای گالیله در سال ۱۶۱۰/۶۴۹ مبتنی‌اند. منحنی بهترین همخوانی را دارد و حرکت هماهنگ ساده را کاملاً تأیید می‌کند. در فاصله متوسط مشتری از زمین، ۱۰ دقیقه قوسی متناظر با تقریباً 2×10^6km است. (اقتباس از A.P French *Newtonian Mechanics,* W.W. Norton & Cpmpany, New York, 1971, p.288)

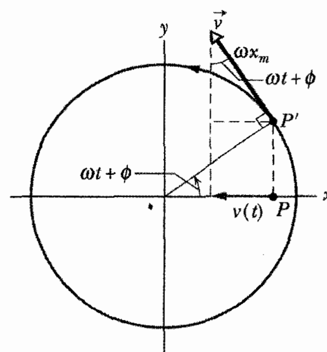
> حرکت هماهنگ ساده عبارت است از تصویر حرکت دایره‌ای یکنواخت روی قطری از دایره که در آن حرکت دایره‌ای انجام می‌شود.

شکل ۳۱-۱۴الف مثالی را نشان می‌دهد. این شکل ذره مرجع p' را نشان می‌دهد که دارای حرکت دایره‌ای یکنواخت با تندی زاویه‌ای (ثابت) ω روی یک *دایره* مرجع است. شعاع x_m دایره بزرگی بردار مکان ذره است. درهرلحظه t مکان زاویه‌ای ذره $\omega t+\phi$ است که در آن ϕ مکان زاویه‌ای در $t=0$است.

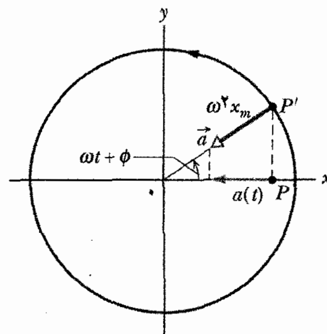
1 A.P.French



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۳۱-۱۴(الف) ذره مرجع P' با حرکت دایره‌ای یکنواخت روی دایره مرجع به شعاع x_m حرکت می‌کند. تصویر آن P روی محور x دارای حرکت هماهنگ ساده‌است. (ب) تصویر سرعت $\vec{v}$ ذره مرجع عبارت است از سرعت حرکت هماهنگ ساده. (پ) تصویر شتاب $\vec{a}$ ذره مرجع شتاب حرکت هماهنگ ساده‌است.

نقطه P تصویر ذره p' روی محور x است که آن را ذره دوم درنظرمی‌گیریم. تصویر بردار مکان ذره p' روی محور x مکان $x(t)$ نقطه P را به دست می‌دهد. بنابراین، داریم

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

که دقیقاً معادلهٔ ۳۱-۳ است. نتیجه‌گیری ما درست است. اگر ذره مرجع p' در حرکت دایره‌ای یکنواخت باشد، تصویر آن روی قطر دایره دارای حرکت هماهنگ ساده خواهد بود.

شکل ۳۱-۱۴ب بردار سرعت $\vec{v}$ ذره مرجع را نشان می‌دهد. از معادله ۱۰-۱۸ $(v=\omega r)$، بزرگی بردار سرعت برابر با ωx_m و تصویر آن روی محور x برابر است با

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

که دقیقاً معادله ۳۱-۶ است. وجود علامت منفی به این دلیل است که جهت مؤلفه سرعت P در شکل ۳۱-۱۴ب به طرف چپ، در جهت منفی x است.

شکل ۳۱-۱۴پ بزرگی بردار شتاب شعاعی $\vec{a}$ذره مرجع را نشان می‌دهد. از معادله ۱۰-۲۳ $(a_r=\omega^2 r)$ بزرگی بردار شتاب شعاعی برابر با $\omega^2 x_m$ و تصویر آن روی محور x برابر است با

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$$

که دقیقاً معادله ۳۱-۷ است. بنابراین، چه جابه‌جایی، سرعت یا شتاب را درنظربگیریم، تصویر حرکت دایره‌ای یکنواخت درواقع یک حرکت هماهنگ ساده‌است.

۳۱-۸ حرکت هماهنگ سادهٔ میرا

آونگ در زیر آب فقط مختصری نوسان می‌کند، زیرا آب یک نیروی کندکننده بر آونگ وارد می‌کند و به سرعت حرکت را از بین می‌برد. آونگ در هوا بهتر نوسان می‌کند، ولی بازهم حرکت از بین می‌رود زیرا هوا نیز یک نیروی کندکننده بر آونگ وارد می‌کند (در نقطه آویز اصطکاک هم اثر می‌کند) که انرژی را از حرکت آونگ می‌گیرد.

وقتی حرکت نوسانگر توسط نیروی خارجی کاهش یابد، گفته می‌شود که نوسانگر و حرکت آن **میرا** می‌شوند. یک مثال آرمانی از یک نوسانگر میرا در شکل ۳۱-۱۵ نشان داده شده‌است که در آن قطعه‌ای به جرم m روی فنری با ثابت فنر k به طور قائم نوسان می‌کند. میله پره‌داری به جرم متصل است (هردو بدون اصطکاک فرض می‌شوند) که در مایعی به طور غوطه‌ور قراردارد. وقتی پره بالا و پایین می‌رود، مایع نیروی بازدارنده‌ای برآن و درنتیجه بر کل دستگاه نوسان‌کننده وارد می‌کند. به مرور انرژی مکانیکی دستگاه قطعه- فنر کاهش می‌یابد و به انرژی گرمایی مایع و پره تبدیل می‌شود.

x
نگهدارنده صلب
ثابت فنر k
جرم
پره
میرایی b

شکل ۳۱-۱۵ یک نوسانگر هماهنگ ساده میرای آرمانی. وقتی قطعه موازی محور x نوسان می‌کند پره غوطه‌ور در مایع نیروی میرایی بر قطعه وارد می‌کند.

فرض می‌کنیم که مایع یک **نیروی میرایی** $\vec{F}_d$ وارد می‌کند که با بزرگی سرعت $\vec{v}$ پره و قطعه متناسب است (اگر پره آهسته حرکت کند فرض درستی است.) بنابراین، برای مؤلفه‌های درامتداد محور x در شکل ۳۱-۱۵، داریم

$$F_d = -bv \qquad (۳۱-۳۹)$$

که در آن b ثابت میرایی است که به مشخصه‌های پره و مایع بستگی دارد و یکای SI آن نیوتون بر متر بر ثانیه است. علامت منفی نشان می‌دهد که $\vec{F}_d$ با حرکت مخالفت می‌کند.

نیرویی که از طرف فنر برقطعه وارد می‌شود برابر با $F_s = -kx$ است. فرض می‌کنیم که نیروی گرانش وارد برقطعه نسبت به F_s, F_d قابل چشم‌پوشی است. حال می‌توانیم قانون دوم نیوتون را برای مؤلفه‌های در امتداد محور x $(F_{net,x} = ma_x)$ به صورت زیر بنویسیم

$$-bv - kx = ma \qquad (۳۱-۴۰)$$

با قراردادن dx/dt به جای v و d^2x/dt^2 به جای a در رابطه و مرتب کردن آن، معادله دیفرانسیل زیر به دست می‌آید

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (۳۱-۴۱)$$

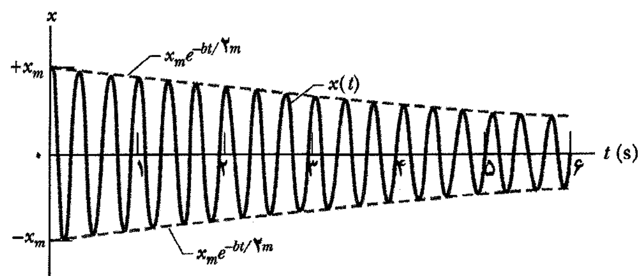
حل این معادله عبارت است از

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi) \qquad (۳۱-۴۲)$$

که در آن x_m دامنه و ω' بسامد زاویه‌ای نوسانگر میراست. این بسامد زاویه‌ای با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \qquad (۳۱-۴۳)$$

اگر $b = 0$ باشد (بدون میرایی)، آنگاه معادله ۳۱-۴۳ به معادله ۳۱-۱۲ $(\omega = \sqrt{k/m})$ در مورد بسامد زاویه‌ای یک نوسانگر نامیرا و معادله ۳۱-۴۲ به معادله ۳۱-۳ در مورد جابه‌جایی یک نوسانگر نامیرا ساده می‌شود. اگر ثابت میرایی کوچک باشد ولی صفر نباشد (به طوری که $b << \sqrt{km}$)، آنگاه $\omega' = \omega$ خواهد بود.



شکل ۳۱-۱۶ تابع جابه‌جایی $x(t)$ برای نوسانگر میرای شکل ۳۱-۱۵، با مقدارهای داده‌شده در مسئله نمونه ۳۱-۷ دامنه که برابر $x_m e^{-bt/2m}$ است، به طورنمایی با زمان کاهش می‌یابد.

معادله ۳۱-۴۲ را می‌توان به صورت یک تابع کسینوسی با دامنه $x_m e^{-bt/2m}$ درنظرگرفت که مطابق شکل ۳۱-۱۶ بتدریج با زمان کاهش می‌یابد. در مورد یک نوسانگر نامیرا، انرژی مکانیکی ثابت است و با معادله ۳۱-۲۱ $(E = \frac{1}{2}kx_m^2)$ داده می‌شود. اگر نوسانگر میرا باشد، انرژی مکانیکی ثابت نیست بلکه با زمان کاهش می‌یابد. اگر میرایی کوچک باشد، می‌توان $E(t)$ را با قراردادن $x_m e^{-bt/2m}$ در معادله ۳۱-۲۱ به جای x_m، دامنه نوسانهای میرا، پیداکرد. با انجام این کار خواهیم داشت

$$E(t) \approx \frac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/2m} \qquad (۳۱-۴۴)$$

که بیانگر این است که مانند دامنه انرژی مکانیکی نیز به طور نمایی با زمان تغییر می‌کند.

> ✔ **نکته وارسی ۵** در اینجا سه مجموعه مقدار برای ثابت فنر، ثابت میرایی و جرم برای نوسانگر میرای شکل ۳۱-۱۵ نوشته شده‌اند. آنها را به ترتیب بزرگی زمان لازم برای کاهش انرژی مکانیکی به یک‌چهارم مقدار اولیه‌اش مرتب کنید.

مجموعه۱	$2k_0$	b_0	m_0
مجموعه۲	k_0	$6b_0$	$4m_0$
مجموعه۳	$3k_0$	$3b_0$	m_0

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱-۷

برای نوسانگر میرای شکل ۳۱-۱۵، $m = 250\,g$ و $b = 70\,g/s$ و $k = 85 N/m$ است.

(الف) دوره تناوب این حرکت چقدراست؟

نکتهٔ کلیدی چون $b << \sqrt{km} = 4/6 kg/s$ است دورهٔ تناوب تقریبا برابر دورهٔ تناوب نوسانگر نامیراست. درنتیجه از معادله ۳۱-۱۳ داریم

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0/25kg}{85\,N/m}} = 0/34s \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) چه مقدار طول می‌کشد تا دامنه نوسانهای میرا به نصف مقدار اولیه‌اش برسد؟

نکتهٔ کلیدی دامنه در لحظه t با معادلهٔ ۱۵-۴۲ به صورت $x_m e^{-bt/2m}$ نشان داده می‌شود.

محاسبه‌ها: مقدار دامنه درلحظه $t = 0$ برابربا x_m است.بنابراین، باید مقدار t را به گونه‌ای پیداکنیم که داشته‌باشیم

$$x_m e^{-bt/2m} = \frac{1}{2}x_m$$

پس از حذف x_m از معادله مانده لگاریتم طبیعی می‌گیریم، در سمت راست $\ln\frac{1}{2}$ و در سمت چپ داریم

$$\ln(e^{-bt/2m}) = -bt/2m$$

بنابراین،

$$t = \frac{-2m\ln\frac{1}{2} - (2)(0/25kg)\left(\ln\frac{1}{2}\right)}{0/070\,kg/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

$$= 5/0\,s$$

با توجه به $T=0/34s$، این تقریباً ۱۵ دورهٔ تناوب نوسان است.

(پ) چقدر طول می‌کشد تا انرژی مکانیکی به نصف مقدار اولیه خود برسد؟

نکتهٔ کلیدی از معادله ۳۱-۴۴ انرژی مکانیکی در لحظه t برابر با $1/2kx_m^2e^{-bt/m}$ است.

محاسبه‌ها: در لحظه $t=0$ مقدارآن $\frac{1}{2}kx_m^2e^{-bt/m}$ است. پس باید مقدار t را به گونه‌ای پیداکنیم که

$$\frac{1}{2}kx_m^2e^{-bt/2m}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}kx_m^2\right)$$

اگر طرفین را بر $\frac{1}{2}kx_m^2$ تقسیم کرده و مانند قبل معادله را برای t حل‌کنیم، خواهیم داشت

$$t=\frac{-m\ln\frac{1}{2}}{b}=\frac{-(0/25\text{kg})\left(\ln\frac{1}{2}\right)}{0/070\text{kg/s}}=2/5\text{s} \quad \text{(پاسخ)}$$

این دقیقاً نصف زمان محاسبه‌شده در قسمت (ب)، یا تقریباً ۷/۵ دورهٔ تناوب نوسان است. شکل ۳۱-۱۶ این مسئله نمونه را نشان می‌دهد.

۳۱-۹ نوسانهای واداشته و تشدید

شخصی که تاب می‌خورد بدون اینکه کسی او را هل دهد مثالی از یک *نوسان آزاد* است. ولی، اگر شخصی تاب را به طور تناوبی هل بدهد، تاب دارای *نوسانهای واداشته* یا *محرکه‌ای* خواهد بود. دستگاهی که با نوسانهای محرکه‌ای حرکت‌کند دارای دو بسامد زاویه‌ای است: (۱) بسامد زاویه‌ای *طبیعی* ω دستگاه، که اگر دستگاه به طور ناگهانی مختل‌شده و سپس به طور آزاد نوسان کند با این بسامد نوسان خواهدکرد و (۲) بسامد زاویه‌ای ω_d نیروی محرک خارجی که موجب نوسانهای محرکه‌ای می‌شود.

می‌توانیم شکل ۳۱-۱۵ را برای نمایش یک نوسان هماهنگ سادهٔ واداشته آرمانی به کار بریم در صورتی که ساختاری که با «نگهدارندهٔ صلب» مشخص‌شده با بسامد زاویه‌ای متغیر ω_d به بالا و پایین حرکت کند.چنین نوسانگر واداشته‌ای با بسامد زاویه‌ای ω_d نیروی محرک نوسان می‌کند و جابه‌جایی $x(t)$ آن با رابطه زیر داده می‌شود

$$x(t)=x_m\cos(\omega_d t+\phi) \quad (۳۱-۴۵)$$

که در آن x_m دامنهٔ نوسانهاست.

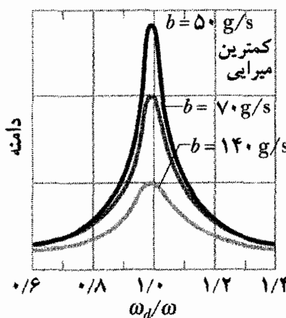
بزرگی دامنهٔ جابه‌جایی x_m به تابع پیچیدهٔ ω_d و ω بستگی دارد. دامنهٔ سرعت v_m نوسانها آسانتر قابل توصیف است: هرگاه رابطهٔ زیر برقرار باشد مقدار آن بیشینه است

$$\omega_d=\omega \quad \text{(تشدید)} \quad (۳۱-۴۶)$$

که شرط **تشدید** نامیده می‌شود. معادله ۳۱-۴۶ همچنین یک شرط **تقریبی** است که در آن دامنه جابه‌جایی x_m نوسانها بیشینه است. بنابراین، اگر تاب را با بسامد طبیعی خود هل دهیم، دامنه‌های جابه‌جایی و سرعت به مقدارهای بزرگتری می‌رسند و این واقعیتی است که بچه‌ها با آزمایش و خطا به سرعت آن را یاد می‌گیرند. اگر تاب را با بسامدهای زاویه‌ای دیگری، بالاتر یا پایینتر، هل دهیم دامنه‌های جابه‌جایی و سرعت کوچکتر خواهندبود.

شکل ۳۱-۱۷ نشان می دهد که دامنه جابه‌جایی یک نوسانگر به ازای سه مقدار ضریب میرایی b چگونه به بسامد زاویه‌ای ω_d نیروی محرک بستگی دارد. توجه کنید که برای هر سه مقدار وقتی شرط $\omega_d/\omega\approx1$(شرط تشدید معادله ۳۱-۴۶) برقرار باشد دامنه تقریباً بیشترین مقدار را دارد. منحنیهای شکل ۳۱-۱۷ نشان می‌دهند که هرچه میرایی کوچکتر باشد *قله تشدید* بلندتر و باریکتر است.

تمام ساختارهای مکانیکی یک یا چند بسامد زاویه‌ای طبیعی دارند و اگر ساختاری تحت‌تأثیر یک نیروی محرک خارجی



شکل ۳۱-۱۷ دامنه جابه‌جایی x_m یک نوسانگر واداشته با بسامد زاویه‌ای ω_d نیروی محرک تغییر می‌کند. منحنیها مربوط به سه مقدار ثابت میرایی b هستند.

قوی قرار گیرد که با یکی از بسامدها جورباشد، نوسانهای حاصل در این ساختار ممکن است آنرا درهم شکنند. به این ترتیب، برای مثال طراحان هواپیما باید مطمئن شوند که هیچ‌یک از بسامدهای زاویه‌ای طبیعی که بال می‌تواند با آن ارتعاش کند با بسامد زاویه‌ای موتور در پرواز جور نباشد. روشن است که تکان‌تکان خوردن شدید بال هواپیما در تندیهای معینی از موتور خطرناک خواهدبود.

به نظرمی‌رسد که یک دلیل برای تخریب ساختمانهای شهر مکزیکو درسال ۱۹۸۵/۱۳۶۴ وقتی زلزله بزرگی (به بزرگی ۸/۱ در مقیاس ریشتر) در ساحل غربی مکزیک رخ داد، تشدید باشد. موجهای حاصل از زمین‌لرزه وقتی به مکزیکو در فاصله ۴۰۰کیلومتری از مرکز زلزله رسیدند به قدری ضعیف بودند که نمی‌توانستند موجب چنین تخریب گسترده‌ای باشند. از طرفی بخش زیادی از مکزیکو روی بستر یک دریاچه قدیمی بناشده، که خاک مخلوط با آب درآنجا نرم است. اگرچه دامنه موجهای

زمین‌لرزه در زمین سخت‌تر مسیر به مکزیکو کوچک بود ولی دامنه آنها در خاک نرم شهر به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش یافتند. دامنه‌های شتاب موج دارای بزرگی ۰/۲۰g و بسامد زاویه‌ای (به طور شگفت‌آوری) حول ۳rad/s متمرکزبود. نه تنها زمین درآنجا به شدت نوسان کرد بلکه ساختمانهای نیمه‌بلند نیز دارای بسامد زاویه‌ای تشدیدی حدود ۳rad/s بودند. اغلب این ساختمانها درحین لرزش تخریب شدند(شکل ۳۱-۱۸) درحالی‌که ساختمانهای کوتاهتر (با بسامدهای زاویه‌ای تشدیدی بالاتر و ساختمانهای بلندتر با بسامدهای زاویه‌ای تشدیدی پایینتر) تخریب نشدند.



شکل ۳۱-۱۸ درسال ۱۹۸۵/۱۳۶۴ ساختمانهای نیمه‌بلند در شهر مکزیکو براثر زمین‌لرزه‌ای که در فاصله دور از شهر رخ داده، تخریب شدند. ساختمانهای بلندتر و کوتاهتر تخریب نشدند.

بازنگری و خلاصهٔ درس

بسامد *بسامد f* یک حرکت تناوبی یا نوسانی برابر است با تعداد نوسانها بر ثانیه. در دستگاه SI بسامد برحسب هرتز اندازه‌گیری می‌شود

$$1\ \text{هرتز} = 1\,\text{Hz} = 1\,\text{s}^{-1} = 1\ \text{نوسان در ثانیه} \qquad (۳۱-۱)$$

دورهٔ تناوب *دورهٔ تناوب T* عبارت است از زمان لازم برای یک نوسان کامل یا **چرخه**. دورهٔ تناوب با رابطهٔ زیر به بسامد مربوط است

$$T = \frac{1}{f} \qquad (۳۱-۲)$$

حرکت هماهنگ ساده در *حرکت هماهنگ ساده* (SHM)، جابه‌جایی $x(t)$ یک ذره از مکان تعادل خود با معادلهٔ زیر توصیف می‌شود

$$x = x_m \cos(\omega t+\phi) \qquad \text{(جابه‌جایی)} \qquad (۳۱-۳)$$

که در آن x_m **دامنهٔ** جابه‌جایی، کمیت $(\omega t+\phi)$ **فاز** حرکت و ϕ **ثابت فاز** است. **بسامد زاویه‌ای** ω با رابطهٔ زیر با دورهٔ تناوب و بسامد حرکت رابطه دارد

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad \text{(بسامد زاویه‌ای)} \qquad (۳۱-۵)$$

با مشتق‌گیری از معادلهٔ ۳۱-۳ معادله‌های سرعت و شتاب ذره در حین حرکت هماهنگ ساده برحسب تابعی از زمان به دست می‌آید

$$v = -\omega x_m \sin(\omega t+\phi) \qquad \text{(سرعت)} \qquad (۳۱-۶)$$

$$a = -\omega^2 x_m \cos(\omega t+\phi) \qquad \text{(شتاب)} \qquad (۳۱-۷)$$

در معادلهٔ ۳۱-۶، کمیت مثبت ωx_m **دامنهٔ سرعت** v_m حرکت است. در معادلهٔ ۳۱-۷، کمیت مثبت $\omega^2 x_m$ **دامنهٔ شتاب** a_m حرکت است.

نوسانگر خطی ذره‌ای به جرم m که تحت تأثیر یک نیروی بازگردانندهٔ قانون هوک $F=-kx$ قرار دارد، حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد که

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(بسامد زاویه‌ای)} \qquad (۳۱-۱۲)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \text{(زمان تناوب)} \qquad (۳۱-۱۳)$$

چنین دستگاهی **نوسانگر هماهنگ سادهٔ خطی** نامیده می‌شود.

انرژی انرژی جنبشی ذره‌ای در حرکت هماهنگ ساده در هر لحظه $K=\frac{1}{2}mv^2$ و انرژی پتانسیل آن $U=\frac{1}{2}kx^2$ است. اگر هیچ اصطکاکی نباشد، انرژی مکانیکی $E=K+U$ حتی اگر K و U تغییر کنند، ثابت می‌ماند.

آونگها مثالهایی از وسایلی که حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهند عبارت‌اند از **آونگ پیچشی** شکل ۳۱-۷، **آونگ سادهٔ** شکل ۳۱-۹ و **آونگ فیزیکی** شکل ۳۱-۱۰ . دورهٔ تناوبهای نوسان آنها به ازای نوسانهای کوچک به ترتیب عبارت‌اند از

$$T = 2\pi\sqrt{I/\kappa} \qquad (۳۱-۲۳)$$

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} \qquad (۳۱-۲۸)$$

$$T = 2\pi\sqrt{I/mgh} \qquad (۳۱-۲۹)$$

حرکت هماهنگ ساده و حرکت دایره‌ای یکنواخت

حرکت هماهنگ ساده عبارت است از تصویر حرکت دایره‌ای یکنواخت بر قطر دایره‌ای که این حرکت روی آن انجام می‌گیرد. شکل ۳۱-۱۴ نشان می‌دهد که همهٔ عوامل حرکت دایره‌ای (مکان، سرعت و شتاب) به صورت مقدارهای متناظر حرکت هماهنگ ساده تصویر می‌شوند.

حرکت هماهنگ میرا به علت نیروهای خارجی مانند نیروی کششی، انرژی مکانیکی E در یک دستگاه واقعی نوسان کننده در ضمن نوسانها کاهش می‌یابد و انرژی مکانیکی به

انرژی گرمایی تبدیل می‌شود. در این صورت یک نوسانگر واقعی داریم و حرکت آن **میرا** گفته می‌شود. اگر **نیروی میرایی** با رابطهٔ $F_d = -bv$ داده شود، که در آن v سرعت نوسانگر و b **ثابت میرایی** است، آنگاه جابه‌جایی نوسانگر از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi) \qquad (۴۲-۳۱)$$

که در آن ω' بسامد زاویه‌ای نوسانگر میراست که با این رابطه داده می‌شود

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \qquad (۴۳-۳۱)$$

اگر ثابت میرایی کوچک باشد $(b \ll \sqrt{km})$ آنگاه $\omega' \approx \omega$ ، که در آن ω بسامد زاویه‌ای نوسانگر نامیراست. به ازای b کوچک، انرژی مکانیکی E نوسانگر عبارت است از

$$E(t) \approx \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m} \qquad (۴۴-۳۱)$$

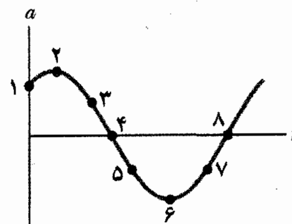
نوسانهای واداشته و تشدید اگر یک نیروی محرک خارجی با بسامد زاویه‌ای ω_d بر یک دستگاه نوسان کننده با بسامد زاویه‌ای **طبیعی** ω اثر کند، این دستگاه با بسامد زاویه‌ای ω_d نوسان می‌کند. دامنهٔ سرعت v_m این دستگاه زمانی بیشترین مقدار را دارد که

$$\omega_d = \omega \qquad (۴۶-۳۱)$$

باشد که شرط **تشدید** نامیده می‌شود. دامنهٔ x_m این دستگاه در شرایط یکسان (تقریباً) بیشترین مقدار را دارد.

پرسشها

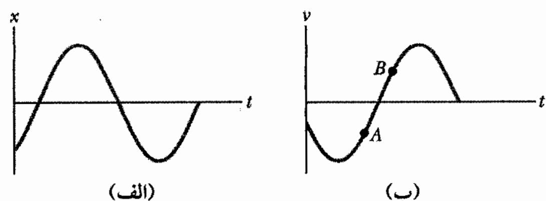
۱- شتاب $a(t)$ ذره‌ای که در حرکت هماهنگ ساده است در شکل ۳۱-۱۹ رسم شده است. (الف) کدام قسمت شماره‌گذاری شده مربوط به بودن ذره در $-x_m$ است؟ (ب) در نقطهٔ ۴، آیا سرعت ذره مثبت، منفی یا صفر است؟ (پ) در نقطهٔ ۵ ، آیا ذره در $-x_m$ ، در $+x_m$ ، در ۰ ، بین $-x_m$ و ۰ یا بین ۰ و $+x_m$ است؟



شکل ۳۱-۱۹ پرسش ۱

۲- کدامیک از رابطه‌های زیر بین شتاب a و جابه‌جایی x یک ذره مربوط به حرکت هماهنگ ساده است؟
(الف) $a = 0/5x$ ، (ب) $a = 400x^2$ ، (پ) $a = -20x$ ، (ت) $a = -3x^2$.

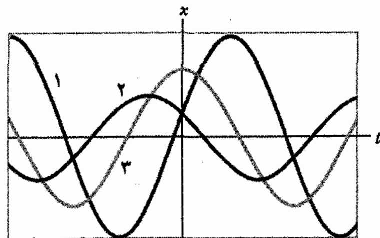
۳- کدامیک از موارد زیر، ϕ را برای حرکت هماهنگ سادهٔ شکل ۳۱-۲۰ الف توصیف می‌کنند؟ (الف) $-\pi < \phi < -\pi/2$ ، (ب) $\pi < \phi < 3\pi/2$ ، (پ) $-3\pi/2 < \phi < -\pi$ ؟



شکل ۳۱-۲۰ پرسش ۳ و ۴

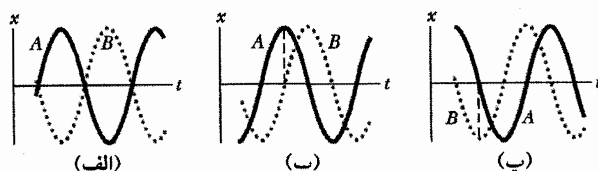
۴- سرعت $v(t)$ ذره‌ای که در حرکت هماهنگ ساده است در شکل ۳۱-۲۰ ب رسم شده است. آیا در (الف) نقطهٔ A و (ب) نقطهٔ B ، در شکل ذره به طور لحظه‌ای ساکن است یا در حرکت به سوی $-x_m$ یا به سوی $+x_m$ است؟ وقتی سرعت ذره در (پ) با نقطهٔ A و (ت) با نقطهٔ B نمایش داده شده، آیا ذره در $-x_m$ ، در $+x_m$ ، در ۰ ، بین $-x_m$ و ۰ یا بین ۰ و $+x_m$ است؟ آیا تندی ذره در (ث) نقطهٔ A و (ج) نقطهٔ B در حال افزایش است یا کاهش؟

۵- شکل ۳۱-۲۱ منحنی $x(t)$ مربوط به دستگاه فنر- جعبهٔ معینی را که در حرکت هماهنگ ساده است پس از انجام سه آزمایش نشان می‌دهد. منحنیها را به ترتیب بزرگی بنابر (الف) بسامد زاویه‌ای دستگاه، (ب) انرژی پتانسیل فنر در $t = 0$ ، (پ) انرژی جنبشی جعبه در $t = 0$ ، (ت) تندی جعبه در $t = 0$ و (ث) انرژی جنبشی بیشینهٔ جعبه، مرتب کنید.



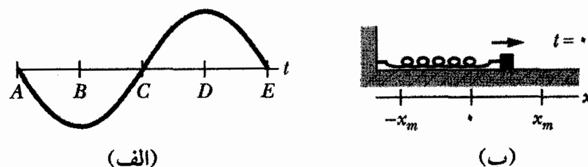
شکل ۳۱-۲۱ پرسش ۵

۶- شکل ۳۱-۲۲ جابه‌جاییهای $x(t)$ یک جفت نوسانگر هماهنگ ساده (A و B) را برای سه وضعیت نشان می‌دهد که به غیر از فاز یکسان هستند. برای هر جفت چقدر تغییر فاز (برحسب رادیان و برحسب درجه) لازم است تا این که منحنی A بر منحنی B منطبق شود؟ از میان تعداد زیادی پاسخ قابل قبول، پاسخی را انتخاب کنید که در آن قدر مطلق بزرگی جابه‌جایی کمترین باشد.



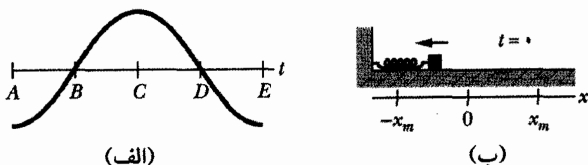
شکل ۳۱-۲۲ پرسش ۶

۷- شکل ۳۱-۲۳ الف را به گونه‌ای کامل کنید که بیانگر نمودار سرعت v برحسب t در لحظهٔ $t=0$ برای نوسانگر فنر- قطعه شکل ۳۱-۲۲ ب باشد. (الف) در شکل ۳۱-۲۳ الف، در کدام نقطهٔ مشخص شده یا در چه ناحیه‌ای بین نقطه‌ها، محور v (قائم) محور t را قطع می‌کند؟ (برای مثال، آیا در نقطهٔ A قطع می‌کند یا ممکن است در ناحیهٔ بین نقطه‌های A و B قطع کند؟) (ب) اگر سرعت قطعه با رابطهٔ $v=-v_m \sin(\omega t+\phi)$ داده شده باشد، مقدار ϕ چقدر است؟ در رابطه علامت مثبت را در نظر بگیرید و اگر نتوانستید مقداری (مانند $+\pi/2$ رادیان) را مشخص کنید آنگاه محدوده‌ای از مقدارها (مانند بین ۰ و $+\pi/2$) را مشخص کنید.



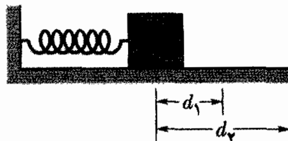
شکل ۳۱-۲۳ پرسش۷

۸- شکل ۳۱-۲۴ الف را به گونه‌ای کامل کنید که بیانگر نمودار شتاب a برحسب t در لحظهٔ $t=0$ برای نوسانگر فنر- قطعهٔ شکل ۳۱-۲۴ ب باشد. (الف) در شکل ۳۱-۲۴ الف در کدام نقطهٔ مشخص شده یا در چه ناحیه‌ای بین نقطه‌ها، محور a (قائم) محور t را قطع می‌کند؟ (برای مثال، آیا در نقطهٔ A قطع می‌کند یا ممکن است در ناحیهٔ بین نقطه‌های A و B آن را قطع کند؟) (ب) اگر شتاب قطعه با رابطهٔ $a=-a_m \cos(\omega t+\phi)$ داده شده باشد، مقدار ϕ چقدر است؟ در رابطه علامت مثبت را در نظر بگیرید و اگر نتوانستید مقداری (مانند $+\pi/2$ رادیان) را مشخص کنید آنگاه محدوده‌ای از مقدارها (مانند بین ۰ و $+\pi/2$) را مشخص کنید.



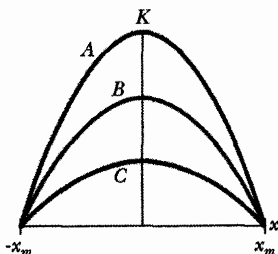
شکل ۳۱-۲۴ پرسش۸

۹- در شکل ۳۱-۲۵ ، یک دستگاه فنر- قطعه در دو آزمایش دارای حرکت هماهنگ ساده‌اند. در آزمایش اول، قطعه از وضعیت تعادلش به مقدار جابه‌جایی d_1 کشیده شده و سپس رها می‌شود. در آزمایش دوم، قطعه از وضعیت تعادلش به مقدار جابه‌جایی بیشتر d_2 کشیده شده و سپس رها می‌شود. آیا (الف) دامنه، (ب) دورهٔ تناوب، (پ) بسامد، (ت) انرژی جنبشی بیشینه، و (ث) انرژی پتانسیل بیشینه، در آزمایش دوم نسبت به همینها در آزمایش اول بیشترند یا کمتر یا یکسان هستند؟



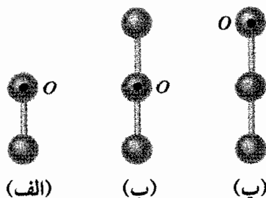
شکل ۳۱-۲۵ پرسش۹

۱۰- شکل ۳۱-۲۶ نمودارهای انرژی جنبشی K را برحسب x برای سه نوسانگر هماهنگ که دارای جرم یکسان هستند، نشان می‌دهد. نمودارها را به ترتیب بزرگی بنابر (الف) ثابت فنر مربوط و (ب) زمان تناوب نوسانگر مربوط، مرتب کنید.



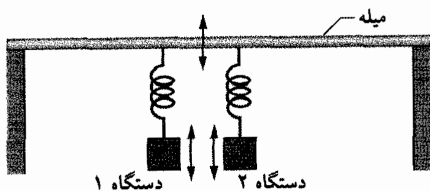
شکل ۳۱-۲۶ پرسش۱۰

۱۱- شکل ۳۱-۲۷ سه آونگ فیزیکی را نشان می‌دهد که از کره‌های مشابه با جرمهای یکسانی تشکیل شده‌اند و محکم به میله‌هایی با جرم‌های قابل چشم‌پوشی متصل‌اند. هر آونگ به طور قائم قرار دارد و می‌تواند حول نقطهٔ آویز O بچرخد. آونگها را به ترتیب بزرگی زمان تناوب نوسان مرتب کنید.



شکل ۳۱-۲۷ پرسش۱۱

۱۲- از شما می‌خواهند یک وسیلهٔ انتقال نوسان مانند وسیلهٔ نشان داده شده در شکل ۳۱-۲۸ بسازید. این وسیله از دو دستگاه فنر- قطعه که از یک میلهٔ قابل انعطاف آویزان‌اند ساخته شده است. وقتی فنر دستگاه ۱ کشیده و رها شود، حرکت هماهنگ سادهٔ حاصل در دستگاه ۱ میله را با بسامد f_1 به نوسان می‌اندازد. پس از آن میله یک نیروی محرک با همان بسامد بر دستگاه ۲ وارد می‌کند. می‌توانید از چهار فنر با ثابتهای فنری k برابر با ۱۶۰۰ ، ۱۵۰۰ ، ۱۴۰۰ و ۱۲۰۰ نیوتون بر متر و چهار قطعه به جرمهای m برابر با ۸۰۰ ، ۵۰۰ ، ۴۰۰ و ۲۰۰ کیلوگرم انتخاب کنید. به طور ذهنی، تعیین کنید که کدام فنر با کدام قطعه در هر یک از دو دستگاه باید به کار برده شود تا دامنهٔ نوسانهای دستگاه ۲ بیشینه باشد؟



شکل ۳۱-۲۸ پرسش۱۲

مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
••• تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

بخش ۳۱-۳ قانون نیرو برای حرکت هماهنگ ساده

•۱- بیشینهٔ شتاب سکویی که با دامنهٔ ۲/۲۰cm و بسامد ۶/۶۰Hz نوسان می‌کند چقدر است؟

•۲- ذره‌ای به جرم $۱/۰۰\times۱۰^{-۲۰}$ kg با حرکت هماهنگ ساده با دورهٔ تناوب $۱/۰۰\times۱۰^{-۵}$ s و تندی بیشینهٔ $۱/۰۰\times۱۰^{-۳}$ m/s نوسان می‌کند. (الف) بسامد زاویه‌ای و (ب) جابه‌جایی بیشینهٔ ذره چقدر است؟

•۳- در ریش تراشهای برقی تیغه‌ها با بسامد ۱۲۰Hz به صورت حرکت هماهنگ ساده با فاصلهٔ ۲/۰mm به عقب و جلو حرکت می‌کنند. مطلوب است (الف) دامنه، (ب) تندی بیشینهٔ تیغه و (پ) بزرگی بیشینهٔ شتاب تیغه. SSM

•۴- یک جسم ۰/۱۲kg دارای حرکت هماهنگ ساده با دامنهٔ ۸/۵cm و زمان تناوب ۰/۲۰s است. (الف) بزرگی بیشینهٔ نیروی وارد بر آن چقدر است؟ (ب) اگر نوسانها با فنری ایجاد شده باشد، ثابت فنر چقدر است؟

•۵- ۰/۲۵s طول می‌کشد تا جسمی با حرکت هماهنگ ساده از نقطه‌ای با سرعت صفر به نقطهٔ مشابه دیگری حرکت کند. فاصلهٔ بین این دو نقطه ۳۶cm است. (الف) دورهٔ تناوب، (ب) بسامد، و (پ) دامنهٔ حرکت را محاسبه کنید.

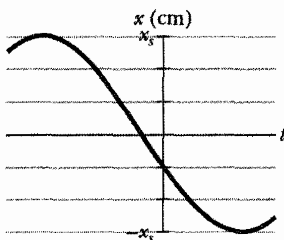
•۶- تا جایی که نوسانهای قائم مورد توجه باشند می‌توان گفت که اتومبیل روی چهار فنر یکسان سوار است. فنرهای یک اتومبیل به صورتی تنظیم شده‌اند که نوسانها دارای بسامد ۳/۰۰Hz هستند. (الف) اگر جرم اتومبیل ۱۴۵۰kg و وزن آن روی فنرها به طور یکسان توزیع شده باشد، ثابت فنری هر فنر چقدر است؟ (ب) اگر پنج مسافر هر یک با جرم میانگین ۷۳/۰kg بر اتومبیل سوار شوند و توزیع وزن آنها یکنواخت باشد، بسامد نوسان چقدر خواهد بود؟

•۷- نوسانگری شامل یک قطعه به جرم ۰/۵۰۰kg است که به فنری متصل است. وقتی این نوسانگر با دامنهٔ ۳۵/۰cm نوسان کند، دیده می‌شود که حرکت خود را در هر ۰/۵۰۰s تکرار می‌کند. مطلوب است، (الف) دورهٔ تناوب، (ب) بسامد، (پ) بسامد زاویه‌ای، (ت) ثابت فنر، (ث) تندی بیشینه و (ج) مقدار بیشینهٔ نیروی وارد بر قطعه. SSM

•۸- ۰/۷۵s طول می‌کشد تا یک دستگاه قطعه- فنر در حال نوسان حرکت خود را تکرار کند. مطلوب است (الف) دورهٔ تناوب، (ب) بسامد برحسب هرتز و (پ) بسامد زاویه‌ای برحسب رادیان بر ثانیه.

•۹- بلندگویی با نوسان میان‌بندی که دامنهٔ آن محدود به ۱/۰۰μm است، موزیکی را ایجاد می‌کند. (الف) در چه بسامدی دامنهٔ شتاب a میان‌بند برابر با g است؟ (ب) برای بسامدهای بزرگتر، آیا a بزرگتر از g است یا کوچکتر؟ SSM

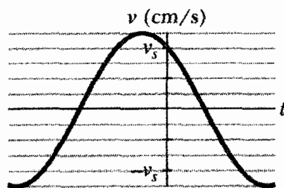
•۱۰- برای یک نوسانگر هماهنگ با تابع مکان $x(t)$ داده شده در شکل ۳۱-۲۹ اگر تابع مکان به شکل $x = x_m \cos(\omega t+\phi)$ باشد، ثابت فاز چقدر است؟ مقیاس محور عمودی با $x_s = ۶/۰$ cm مشخص شده‌است.



شکل ۳۱-۲۹ مسئله ۱۰

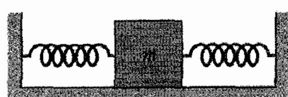
•۱۱- جسمی با حرکت هماهنگ ساده بنابر این معادله نوسان می‌کند $x = (۶/۰\,\text{m})\cos[(۳\pi\,\text{rad/s})t + \pi/۳\,\text{rad}]$. در لحظهٔ $t = ۲/۰$ s، (الف) جابه‌جایی، (ب) سرعت، (پ) شتاب و (ت) فاز حرکت، چقدر است؟ همچنین (ث) بسامد و (ج) دورهٔ تناوب حرکت چقدر است؟

•۱۲- برای یک نوسانگر هماهنگ با تابع سرعت $v(t)$ که در شکل ۳۱-۳۰ داده شده، اگر تابع مکان به صورت $x = x_m \cos(\omega t+\phi)$ باشد، ثابت فاز نوسانگر چقدر است؟ مقیاس محور عمودی با $v_s = ۴/۰$ m/s مشخص شده‌است.



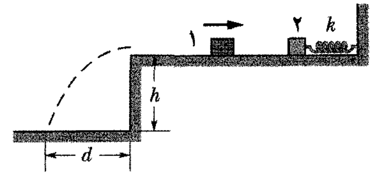
شکل ۳۱-۳۰ مسئله ۱۲

•۱۳- در شکل ۳۱-۳۱، دو فنر یکسان با ثابت فنری ۷۵۸۰N/m به قطعه‌ای به جرم ۰/۲۴۵kg متصل‌اند. قطعه روی یک کف بدون اصطکاک نوسان می‌کند. بسامد نوسان چقدر است؟



شکل ۳۱-۳۱ مسئله‌های ۱۳ و ۲۳

•••۱۴- شکل ۳۱-۳۲ قطعهٔ ۱ به جرم ۰/۲۰۰kg را نشان می‌دهد که روی سطح بلند بدون اصطکاکی با تندی ۸/۰۰m/s به سمت راست سُر می‌خورد. این قطعه با قطعهٔ ۲ که ساکن و به فنری با ثابت فنری ۱۲۰۸/۵N/m متصل است، برخورد کشسان می‌کند. (فرض کنید که فنر تأثیری در برخورد ندارد.) پس از برخورد، قطعهٔ ۲ با دورهٔ تناوب ۰/۱۴۰s حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد و قطعهٔ ۱ در جهت مخالف پس زده شده و از سطح بلند و به فاصلهٔ d از پای این سطح و پس از سقوط به ارتفاع $h=$ ۴/۹۰m روی سطح زیرین فرود می‌آید. مقدار d چقدر است؟



شکل ۳۱-۳۲ مسئلهٔ ۱۴

••۱۵- نوسانگری شامل قطعه‌ای است که به فنری ($k=$ ۴۰۰N/m) متصل است. در لحظهٔ t، مکان (که از محل تعادل دستگاه اندازه‌گیری می‌شود)، سرعت و شتاب قطعه برابرند با $x=$ ۰/۱۰۰m , $v=-$۱۳/۶m/s , $a=-$۱۲۳m/s². مطلوب است (الف) بسامد نوسان، (ب) جرم قطعه، و (پ) دامنهٔ حرکت. **ILW**

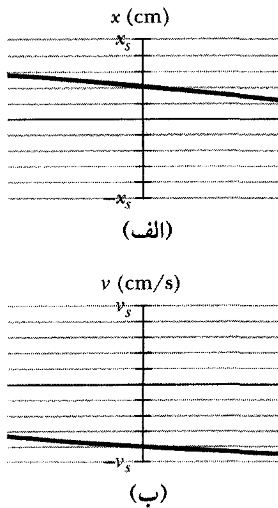
••۱۶- در یک بندر جزر و مد باعث بالا آمدن و پایین رفتن سطح اقیانوس به فاصلهٔ d (از بالاترین تا پایینترین ارتفاع) با یک حرکت هماهنگ ساده می‌شود، که دورهٔ تناوب آن ۱۲/۵h است. چه مدت طول می‌کشد تا آب فاصلهٔ ۰/۲۵۰d از بالاترین ارتفاع آن پایین بیاید؟

••۱۷- قطعه‌ای روی یک سطح افقی (میز لرزان) قرار دارد که به طور افقی و با حرکت هماهنگ ساده با بسامد ۲/۰Hz حرکت می‌کند. ضریب اصطکاک استاتیکی بین قطعه و سطح ۰/۵۰ است. اگر قطعه روی سطح نلغزد، دامنهٔ حرکت هماهنگ ساده چقدر است؟ **SSM WWW**

••۱۸- دو ذره با دامنه و بسامد یکسان در طول خطهایی موازی و نزدیک به هم حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهند. آنها هربار که جابه‌جایی آنها نصف دامنه باشد، در جهتهای مخالف از کنار یکدیگر می‌گذرند. اختلاف فاز آنها چقدر است؟

••۱۹- دو ذره در راستای یک قطعه خط مستقیم مشترک به طول A به طور هماهنگ ساده نوسان می‌کنند. دورهٔ تناوب هر ذره ۱/۵s ولی اختلاف فاز آنها $\pi/$۶rad است. (الف) پس از ۰/۵۰s وقتی ذرهٔ عقبتر انتهای مسیر را ترک کرد دو ذره چقدر از هم فاصله دارند؟ (ب) آیا اینها در این موقع در یک جهت حرکت می‌کنند، به سمت هم حرکت می‌کنند یا از هم دور می‌شوند؟ **SSM ILW**

••۲۰- شکل ۳۱-۳۳ الف بخشی از نمودار تابع مکان $x(t)$ برای یک نوسانگر هماهنگ ساده با بسامد زاویه‌ای ۱/۲۰rad/s است؛ شکل ۳۱-۳۳ ب بخشی از نمودار مربوط به تابع سرعت $v(t)$ آن است. مقیاس محور عمودی با $x_s=$ ۵/۰cm و $v_s=$ ۵/۰m/s مشخص شده است. اگر تابع مکان $x(t)$ به صورت $x=x_m\cos(\omega t+\phi)$ داده شده باشد، ثابت فاز حرکت هماهنگ ساده چقدر است؟



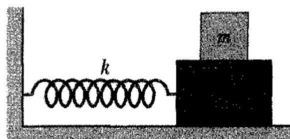
شکل ۳۱-۳۳ مسئله ۲۰

••۲۱- قطعه‌ای روی پیستونی که به طور عمودی و با حرکت هماهنگ ساده حرکت می‌کند قرار دارد. (الف) اگر دورهٔ تناوب حرکت هماهنگ ساده ۱/۰s باشد، در چه دامنه‌ای از حرکت، قطعه و پیستون از هم جدا می‌شوند؟ (ب) اگر پیستون دارای دامنهٔ ۵/۰cm باشد، بیشینهٔ بسامدی که قطعه و پیستون پیوسته در تماس خواهند بود چقدر است؟

••۲۲- یک نوسانگر هماهنگ ساده شامل قطعه‌ای به جرم ۲/۰۰kg است که به یک فنر با ثابت فنری ۱۰۰N/m متصل است. وقتی $t=$ ۱/۰۰s است مکان و سرعت این قطعه عبارت‌اند از $x=$ ۰/۱۲۹m و $v=$ ۳/۴۱۵m/s. (الف) دامنه نوسانها چقدر است؟ (ب) مکان، و (پ) سرعت قطعه در $t=$ ۰ چقدر است؟

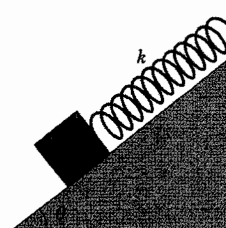
••۲۳- در شکل ۳۱-۳۱، دو فنر به قطعه‌ای که می‌تواند روی یک کف بدون اصطکاک نوسان کند، متصل‌اند. اگر فنر سمت چپ برداشته شود قطعه با بسامد ۳۰Hz نوسان می‌کند. اگر به جای آن فنر سمت راست برداشته شود، قطعه با بسامد ۴۵Hz نوسان می‌کند. وقتی دو فنر وصل هستند قطعه با چه بسامدی نوسان می‌کند؟ **ILW**

•••۲۴- در شکل ۳۱-۳۴ دو قطعه ($M=$ ۱۰kg , $m=$ ۱/۰kg) و یک فنر ($k=$ ۲۰۰N/m) روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارند. ضریب اصطکاک ایستایی بین دو قطعه ۰/۴۰ است. در چه دامنه‌ای در یک حرکت هماهنگ سادهٔ دستگاه فنر- قطعه، قطعهٔ کوچکتر در آستانهٔ سر خوردن روی قطعهٔ بزرگتر قرار می‌گیرد؟



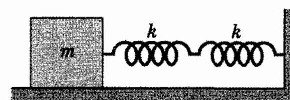
شکل ۳۱-۳۴ مسئلهٔ ۲۴

●●●۲۵- در شکل ۳۱-۳۵، قطعه‌ای به وزن $14/0\,N$ که می‌تواند بدون اصطکاک روی سطح شیبدار $\theta = 40/0°$ بلغزد، به وسیلهٔ فنر بدون جرمی که طول بدون کشیدگی آن $0/450\,m$ و ثابت فنری آن $120\,N/m$ است به بالای سطح شیبدار وصل است. (الف) نقطهٔ تعادل این قطعه در چه فاصله‌ای از بالای سطح شیبدار واقع است؟ (ب) اگر قطعه اندکی به پایین کشیده و سپس رها شود، دورهٔ تناوب نوسانهای حاصل چقدر است؟



شکل ۳۱-۳۵ مسئلهٔ ۲۵

●●●۲۶- در شکل ۳۱-۳۶ دو فنر متصل به هم به قطعه‌ای با جرم $0/245$ که روی کف بدون اصطکاکی نوسان می‌کند، وصل‌اند. فنرها دارای ثابت فنری $k = 6430\,N/m$ هستند. بسامد نوسان چقدر است؟



شکل ۳۱-۳۶ مسئلهٔ ۲۶

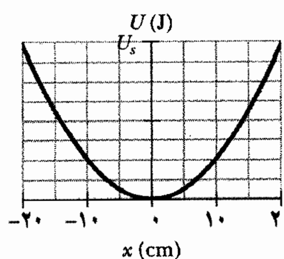
بخش ۳۱-۴ انرژی در حرکت هماهنگ ساده

●۲۷- انرژی مکانیکی یک دستگاه قطعه- فنر را که دارای ثابت فنر $1/3\,N/cm$ و دامنهٔ نوسان $2/4\,cm$ است به دست آورید. SSM

●۲۸- یک دستگاه قطعه- فنر در حال نوسان دارای انرژی مکانیکی $1/00\,J$، دامنهٔ $10/0\,cm$، و بیشینهٔ تندی $1/20\,m/s$ است. مطلوب است (الف) ثابت فنر، (ب) جرم قطعه، و (پ) بسامد نوسان.

●۲۹- وقتی جابه‌جایی در یک حرکت هماهنگ ساده نصف دامنهٔ x_{cm} است، چه کسری از انرژی کل (الف) انرژی جنبشی، و (ب) انرژی پتانسیل است؟ (پ) در چه جابه‌جایی، برحسب دامنه، انرژی دستگاه نصف انرژی جنبشی و نصف انرژی پتانسیل است؟ SSM

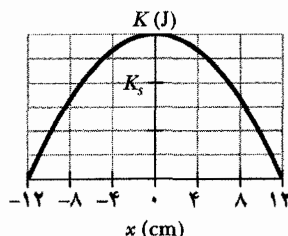
●۳۰- شکل ۳۱-۳۷ چاه انرژی پتانسیل یک بعدی را برای یک ذرهٔ $2/0\,kg$ نشان می‌دهد (تابع $U(x)$ به صورت bx^2 و مقیاس محور عمودی با $U_s = 2/0\,J$ مشخص شده است). (الف) اگر ذره از مکان تعادل با سرعت $85\,cm/s$ بگذرد، آیا قبل از رسیدن به $x = 15\,cm$ بر می‌گردد؟ (ب) اگر پاسخ مثبت است، در چه مکانی، و اگر پاسخ منفی است، تندی ذره در $x = 15\,cm$ چقدر است؟



شکل ۳۱-۳۷ مسئلهٔ ۳۰

●۳۱- جسمی به جرم $5/00\,kg$ روی سطح افقی بدون اصطکاکی به فنری با ثابت فنری $1000\,N/m$ متصل است. جسم از وضعیت تعادل به طور افقی $50/0\,cm$ جابه‌جا می‌شود و به آن سرعت اولیهٔ $10/0\,m/s$ به طرف وضعیت تعادل داده می شود. (الف) بسامد حرکت، (ب) انرژی پتانسیل اولیهٔ دستگاه قطعه- فنر، (پ) انرژی جنبشی اولیه، و (ت) دامنهٔ حرکت چقدرند؟

●۳۲- شکل ۳۱-۳۸ انرژی جنبشی K یک نوسانگر هماهنگ ساده را برحسب مکان x آن، نشان می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $k_s = 4/0\,J$ مشخص شده‌است. ثابت فنر چقدر است؟

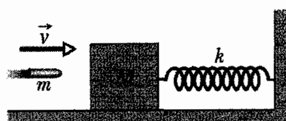


شکل ۳۱-۳۸ مسئلهٔ ۳۲

●●۳۳- ذره‌ای به جرم $10\,g$ دارای حرکت هماهنگ ساده با دامنهٔ $2/0\,mm$، بیشینهٔ شتاب به بزرگی $8/0 \times 10^3\,m/s^2$، و ثابت فاز ϕ نامعلوم است. (الف) دورهٔ تناوب حرکت، (ب) بیشینهٔ تندی ذره، و (پ) انرژی مکانیکی کل نوسانگر چقدرند؟ وقتی ذره در (ت) بیشینهٔ جابه‌جایی و (ث) نصف بیشینهٔ جابه‌جایی قرار دارد، مقدار نیروی وارد بر آن چقدر است؟

●●۳۴- اگر زاویهٔ فاز برای یک دستگاه قطعه- فنر در حرکت هماهنگ ساده برابر $\pi/6\,rad$ و مکان قطعه با رابطهٔ $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ داده شده باشد، در لحظهٔ $t = 0$، نسبت انرژی جنبشی به انرژی پتانسیل چقدر است؟

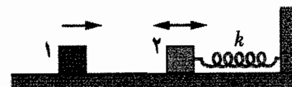
●●۳۵- قطعه‌ای به جرم $M = 5/4\,kg$ به حالت سکون روی یک میز افقی بدون اصطکاک با فنری با ثابت $k = 6000\,N/m$ به طور محکم به نقطه‌ای بسته شده است. گلوله‌ای به جرم $m = 9/5\,g$ و سرعت $\vec{v}$ به بزرگی $630\,m/s$ به قطعه برخورد می‌کند و در قطعه فرو می‌رود (شکل ۳۱-۳۵). با فرض اینکه موقع فرو رفتن گلوله فشردگی فنر ناچیز است، مطلوب است (الف) تندی قطعه درست پس از برخورد و (ب) دامنهٔ حرکت هماهنگ سادهٔ ایجاد شده.



شکل ۳۱-۳۹ مسئلهٔ ۳۵

●●۳۶- در شکل ۳۱-۴۰، قطعهٔ ۲ با جرم $2/0\,kg$ در انتهای فنر با حرکت هماهنگ ساده با دورهٔ تناوب $20\,ms$ نوسان می‌کند. مکان قطعه با رابطهٔ $x = (1/0\,cm)\cos(\omega t + \pi/2)$ داده شده است. قطعهٔ ۱ با جرم $4/0\,kg$ با سرعتی به بزرگی

$6/0\,m/s$ در امتداد طول فنر، به سمت قطعه ۲ سُر می‌خورد. در لحظهٔ $t = 5/0\,ms$ دو قطعه به طور کاملاً ناکشسان برخورد می‌کنند. (مدت برخورد خیلی کمتر از دورهٔ تناوب حرکت است.) پس از برخورد، دامنهٔ حرکت هماهنگ ساده چقدر است؟



شکل ۳۱-۴۰ مسئلهٔ ۳۶

••۳۷- فنر بدون جرمی که جسم کوچکی به انتهای پایین آن وصل است از سقفی آویزان است. این جسم در آغاز در مکان y_i ساکن است به طوری که فنر طول سکون خود را دارد. سپس جسم رها می‌شود و به بالا و پایین تا $10\,cm$ زیر y_i که پایینترین نقطه است نوسان می‌کند. (الف) بسامد نوسان چقدر است؟ (ب) وقتی جسم $8/0\,cm$ زیر مکان اولیهٔ خود قرار دارد تندی آن چقدر است؟ (پ) جسمی به جرم $300\,g$ به جسم اول وصل می‌شود و پس از آن دستگاه با نصف بسامد اولیه نوسان می‌کند. جرم جسم اول چقدر است؟ (ت) نسبت به y_i مکان تعادل جدید (سکون) در حالتی که هر دو جسم به فنر وصل باشند، کجاست؟

بخش ۳۱-۵ نوسانگر هماهنگ سادهٔ زاویه‌ای

•۳۸- کرهٔ توپری به جرم $95\,kg$ و شعاع $15\,cm$ از سیم قائمی آویزان است. گشتاور نیروی $0/20\,N\cdot m$ مورد نیاز است تا کره را به اندازهٔ زاویهٔ $0/85\,rad$ بچرخاند و آن را در همان جهت نگه دارد. هرگاه کره از این حالت رها شود دورهٔ تناوب نوسان چقدر است؟

••۳۹- رقاصک ساعتی با دامنهٔ زاویه‌ای $\pi\,rad$ و دورهٔ تناوب $0/500\,s$ نوسان می‌کند. مطلوب است (الف) تندی زاویه‌ای بیشینهٔ رقاصک، (ب) تندی زاویه‌ای رقاصک در جابه‌جایی $\frac{\pi}{2}\,rad$ ، و (پ) بزرگ شتاب زاویه‌ای در جابه‌جایی $\frac{\pi}{4}\,rad$. **WWW SSM**

بخش ۳۱-۶ آونگها

•۴۰- فرض کنید که آونگی از یک گلولهٔ کوچک $60/0$ گرمی که به انتهای نخی با جرم ناچیز متصل است تشکیل شده است. اگر زاویهٔ θ بین نخ و قائم با رابطهٔ زیر داده شده باشد

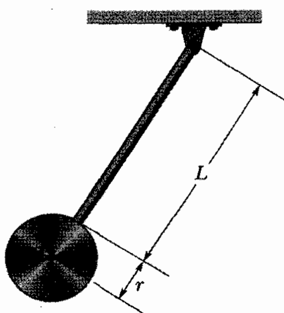
$$\theta = (0/0800\,rad)\cos[(4/43\,rad/s)t + \phi]$$

مطلوب است (الف) طول آونگ و (ب) بیشینهٔ انرژی جنبشی آن.

•۴۱- (الف) اگر آونگ فیزیکی مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱-۵ وارونه و از نقطهٔ P آویزان شود، دورهٔ تناوب نوسان آن چقدر است؟ (ب) آیا اکنون دورهٔ تناوب بیشتر از مقدار قبلی است یا کمتر، یا یکسان است؟

•۴۲- در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱-۵ دیدیم که مرکز نوسان یک آونگ فیزیکی در فاصلهٔ $2L/3$ از نقطهٔ آویز آن قرار دارد. نشان دهید که فاصلهٔ بین نقطه‌های آویز و مرکز نوسان برای یک آونگ فیزیکی با هر شکلی برابر I/mh است که در آن I و h همان مفاهیم معادلهٔ ۳۱-۲۹ را دارند و m جرم آونگ است.

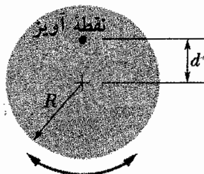
•۴۳- در شکل ۳۱-۴۱، آونگی شامل قرص دایره‌ای یکنواختی با شعاع $r = 10/0\,cm$ و جرم $500\,g$ است که به میلهٔ یکنواختی به طول $500\,mm$ و جرم $270\,g$ متصل شده است. (الف) لختی چرخشی آونگ را نسبت به نقطهٔ آویز محاسبه کنید. (ب) فاصلهٔ بین نقطهٔ آویز و مرکز جرم آونگ چقدر است؟ (پ) دورهٔ تناوب نوسان را محاسبه کنید. **SSM**



شکل ۳۱-۴۱ مسئلهٔ ۴۳

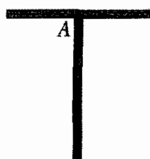
•۴۴- یک آونگ فیزیکی شامل یک خط‌کش است که از سوراخ ایجاد شده در آن به فاصلهٔ d از نشانهٔ $50\,cm$ آویزان است. دورهٔ تناوب نوسان $2/5\,s$ است. فاصلهٔ d را پیدا کنید. **ILW**

•۴۵- در شکل ۳۱-۴۲، یک آونگ فیزیکی از قرص توپر یکنواختی (به شعاع $R = 2/35\,cm$) تشکیل شده است که در صفحهٔ قائم از نقطه‌ای به فاصلهٔ $d = 1/75\,cm$ از مرکز قرص آویزان است. قرص به اندازهٔ زاویهٔ کوچکی جابه‌جا و رها می‌شود. دورهٔ تناوب حرکت هماهنگ سادهٔ حاصل چقدر است؟



شکل ۳۱-۴۲ مسئلهٔ ۴۵

•۴۶- یک آونگ فیزیکی از دو خط‌کش دراز تشکیل شده است که مانند شکل ۳۱-۴۳ به هم متصل‌اند. دورهٔ تناوب نوسان آونگ حول نقطهٔ آویز A که مرکز خط کش افقی است، چقدر است؟

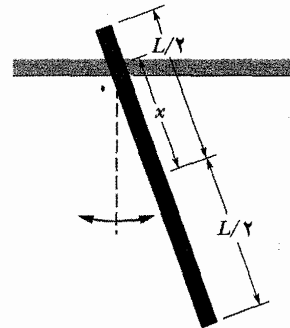


شکل ۳۱-۴۳ مسئلهٔ ۴۶

●۴۷- بندبازی که روی تاب بند بازی نشسته است با دورهٔ تناوب $8/85\,s$ به عقب و جلو تاب می‌خورد. اگر او بایستد در این صورت مرکز جرم دستگاه *تاب + بندباز* به اندازهٔ $35/0\,cm$ بالا می‌رود. دورهٔ تناوب جدید چقدر خواهد بود؟ *تاب + بندباز* را به عنوان یک آونگ ساده در نظر بگیرید.

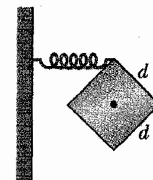
●●۴۸- یک میلهٔ یکنواخت باریک $(m = 0/50\,kg)$ حول محوری که از یک انتها می‌گذرد و عمود بر صفحهٔ نوسان است، تاب می‌خورد. میله با دورهٔ تناوب $1/5\,s$ و دامنهٔ زاویه‌ای $10°$ تاب می‌خورد. (الف) طول میله چقدر است؟ (ب) وقتی میله تاب می‌خورد، بیشینهٔ انرژی جنبشی آن چقدر است؟

●●۴۹- در شکل ۳۱-۴۴ خط‌کشی به طول $L = 1/85\,m$ مانند یک آونگ فیزیکی نوسان می‌کند. (الف) به ازای کدام مقدار از فاصلهٔ x، بین مرکز جرم خط‌کش و نقطهٔ آویز O، کمترین مقدار دورهٔ تناوب حاصل می‌شود؟ (ب) این کمترین دورهٔ تناوب چقدر است؟



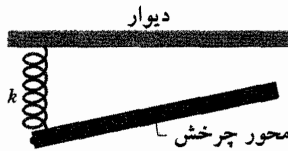
شکل ۳۱-۴۴ مسئلهٔ ۴۹

●●۵۰- مکعب $3/00$ کیلوگرمی در شکل ۳۱-۴۵ به ضلع $d = 6/00\,cm$ روی محوری که از مرکز آن گذشته سوار شده است. فنری $(k = 1200\,N/m)$ گوشهٔ بالای مکعب را به دیواری وصل می‌کند. در ابتدا، فنر در طول ساکن خود است. اگر مکعب $3°$ چرخانده و سپس رها شود، دورهٔ تناوب حرکت هماهنگ سادهٔ حاصل چقدر است؟



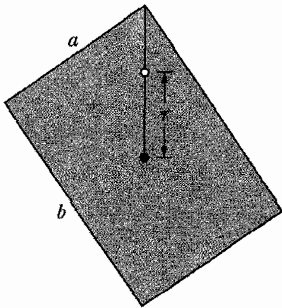
شکل ۳۱-۴۵ مسئلهٔ ۵۰

●●۵۱- در دید از بالای شکل ۳۱- ۴۶، میلهٔ یکنواخت درازی به جرم $0/600\,kg$ در یک صفحهٔ افقی نسبت به محور قائمی که از مرکزش می‌گذرد می‌تواند آزادانه بچرخد. فنری با ثابت نیروی $k = 1850\,N/m$ به طور افقی بین یک انتهای میله و دیوار ثابت وصل شده است. وقتی میله در حالت تعادل باشد، موازی با دیوار قرار می‌گیرد. وقتی میله کمی چرخیده و سپس رها شود، دورهٔ تناوب نوسانهای کوچک چقدر است؟ **ILW SSM**



شکل ۳۱-۴۶ مسئلهٔ ۵۱

●●۵۲- یک قطعهٔ مستطیلی شکل با ضلعهای $a = 35\,cm$ و $b = 45\,cm$ از یک میلهٔ نازک افقی که از سوراخی در قطعه عبور می‌کند، آویزان است. سپس قطعه مانند یک آونگ حول میله با زاویهٔ کوچکی به نوسان در می‌آید به طوری که حرکت آن هماهنگ ساده است. شکل ۳۱-۴۷ یک وضعیت ممکن از سوراخ را نشان می‌دهد که به فاصلهٔ r از مرکز قطعه و در امتداد خطی که مرکز قطعه را به گوشهٔ آن وصل می‌کند، واقع است. (الف) دورهٔ تناوب آونگ را برحسب r در امتداد این خط به گونه‌ای رسم کنید که کمینهٔ منحنی در آن مشخص باشد. (ب) برای چه مقدار r، کمینه رخ می‌دهد؟ در واقع خطی از نقطه‌ها دور مرکز قطعه وجود دارد که برای آن دورهٔ تناوب تاب خوردن دارای مقدار کمینهٔ یکسانی است. (پ) این خط چه شکلی را می‌سازد؟

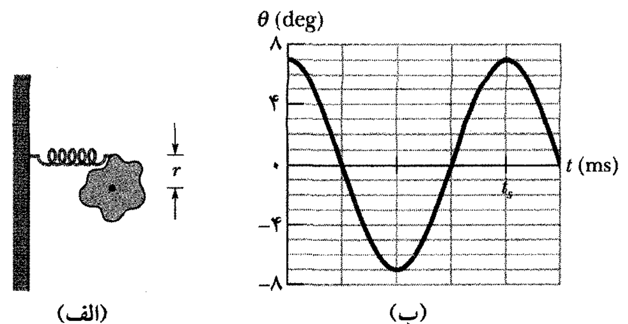


شکل ۳۱-۴۷ مسئلهٔ ۵۲

●●۵۳- زاویهٔ آونگ شکل ۳۱-۹ ب با رابطهٔ $\theta = \theta_m \cos[(4/44\,rad/s)t + \phi]$ داده شده است. اگر در $t = 0$، $\theta = 0/040\,rad$ و $d\theta/dt = -0/200\,rad/s$ باشند، مطلوب است (الف) ثابت فاز ϕ و (ب) بیشینهٔ زاویهٔ θ_m. (*راهنمایی:* آهنگ $d\theta/dt$ را که با آن θ تغییر می‌کند با ω در حرکت هماهنگ ساده اشتباه نکنید.)

●●۵۴- در شکل ۳۱-۴۸ الف یک صفحهٔ فلزی روی محوری که از مرکز جرم آن می‌گذرد قرار دارد. فنری با $k = 2000\,N/m$، نقطه‌ای روی لبهٔ صفحه به فاصلهٔ $r = 2/5\,cm$ از مرکز جرم را به دیوار وصل کرده است. در ابتدا، طول فنر در طول ساکن خود است. اگر صفحه $7°$ چرخانده و سپس رها شود، صفحه حول محور می‌چرخد و حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد که مکان زاویه‌ای آن با شکل ۳۱- ۴۸ ب داده شده است. مقیاس محور افقی با

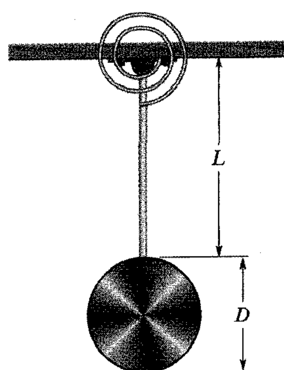
$t_s = ۲۰\,\text{ms}$ مشخص شده‌است. لختی چرخشی صفحه حول مرکز جرم آن چقدر است؟



شکل ۳۱-۴۸ مسئلهٔ ۵۴

●●●۵۵- آونگی از یک میلهٔ باریک دراز که حول نقطهٔ آویزی روی میله حرکت می‌کند تشکیل شده است. در آزمایشهای متعددی دورهٔ تناوب برحسب تابعی از فاصلهٔ d بین نقطهٔ آویز و مرکز میله اندازه‌گیری می‌شود. (الف) اگر طول میله $L = ۲/۲۰\,\text{m}$ و جرم آن $m = ۲۲/۱\text{g}$ باشد، کمینهٔ دورهٔ تناوب چقدر است؟ (ب) اگر d طوری انتخاب شود که دورهٔ تناوب کمینه شود و سپس L افزایش یابد، آیا دورهٔ تناوب افزایش می‌یابد یا کاهش، یا یکسان باقی می‌ماند؟ (پ) اگر، در عوض، بدون افزایش L، m افزایش یابد، آیا دورهٔ تناوب افزایش می‌یابد یا کاهش، یا یکسان باقی می‌ماند؟

●●●۵۶- در شکل ۳۱-۴۹، قرصی به جرم $۲/۵۰\,\text{kg}$ و قطر $D = ۴۲/۰\,\text{cm}$ توسط میله‌ای به طول $L = ۷۶/۰\,\text{cm}$ با جرم ناچیز از یک انتهای آن آویزان است. (الف) فنر پیچشی بدون جرم در آغاز متصل نشده است، دورهٔ تناوب نوسان چقدر است؟ (ب) حال فنر پیچشی را متصل می‌کنیم به طوری که در حالت تعادل میله به طور قائم آویزان باشد. اگر دورهٔ تناوب نوسان $۰/۵۰۰\,\text{s}$ کاهش یافته باشد، ثابت پیچشی فنر چقدر است؟



شکل ۳۱-۴۹ مسئلهٔ ۵۶

بخش ۳۱-۸ حرکت هماهنگ سادهٔ میرا

●۵۷- در شکل ۳۱-۱۵، قطعه دارای جرم $۱/۵\,\text{kg}$ و ثابت فنر برابر $۸/۰۰\,\text{N/m}$ است. نیروی میرایی با $-b(dx/dt)$ داده می‌شود که $b = ۲۳۰\,\text{g/s}$ است. قطعه را $۱۲/۰\,\text{cm}$ پایین می‌کشیم و رها می‌کنیم. (الف) زمان لازم برای اینکه دامنه به یک سوم مقدار اولیه برسد چقدر است؟ (ب) در این مدت قطعه چند نوسان انجام می‌دهد؟ SSM WWW

●۵۸- در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱-۷، در انتهای ۲۰ نوسان، نسبت دامنهٔ نوسانهای میرا به دامنهٔ اولیه چقدر است؟

●۵۹- دامنهٔ نوسانگری با میرایی کم در هر چرخهٔ ۳/۰٪ کم می‌شود. در هر چرخه چه کسری از انرژی مکانیکی نوسانگر از بین می‌رود؟

●●۶۰- وقتی تنهٔ یک اتومبیل به جرم $۲۰۰۰\,\text{kg}$ روی دستگاه نگهدارنده قرار گیرد، دستگاه $۱۰\,\text{cm}$ «شکم می‌دهد». همچنین دامنهٔ نوسان در هر نوسان کامل ۵۰٪ کاهش می‌یابد. مطلوب است برآورد مقدارهای (الف) ثابت فنر k و (ب) ثابت میرایی b برای فنر و کمک فنر هر چرخ، با این فرض که هر چرخ $۵۰۰\,\text{kg}$ را تحمل می‌کند.

بخش ۳۱-۹ نوسانهای واداشته و تشدید

●۶۱- در معادلهٔ ۳۱-۴۵، فرض کنید که دامنهٔ x_m با رابطهٔ زیر داده شده باشد

$$x_m = \frac{F_m}{[m^۲(\omega_d^۲ - \omega^۲)^۲ + b^۲\omega_d^۲]^{\frac{۱}{۲}}}$$

که در آن F_m دامنهٔ (ثابت) نیروی نوسان کنندهٔ خارجی است که به وسیلهٔ نگهدارندهٔ صلب شکل ۳۱-۱۵ بر فنر وارد می‌شود. در تشدید (الف) دامنه و (ب) دامنهٔ سرعت جسم نوسان کننده چقدر است؟

●۶۲- نه آونگ ساده که از یک تیر افقی آویزان هستند طولهای: (الف) ۰/۱۰، (ب) ۰/۳۰، (پ) ۰/۴۰، (ت) ۰/۸۰، (ث) ۱/۲، (ج) ۲/۸، (چ) ۳/۵، (ح) ۵/۰، و (خ) $۶/۲\,\text{m}$ دارند. فرض کنید که تیر نوسانهای افقی با بسامدهای زاویه‌ای در ناحیهٔ از $۲/۰۰\,\text{rad/s}$ تا $۴/۰۰\,\text{rad/s}$ دارد. کدام آونگ (به شدت) به حرکت می‌افتد؟

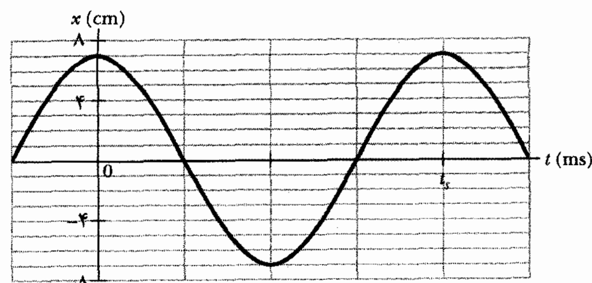
●●۶۳- اتومبیلی به جرم $۱۰۰۰\,\text{kg}$ با چهار سرنشین هر یک به جرم $۸۲\,\text{kg}$ از روی دو قسمت ناصاف موجدار به فاصلهٔ $۴\,\text{m}$ از یکدیگر می‌گذرد. وقتی که تندی ماشین $۱۶\,\text{km/h}$ است دامنهٔ پرشی ماشین بیشینه است. وقتی اتومبیل می‌ایستد و سرنشینها پیاده می‌شوند، بدنهٔ اتومبیل روی فنر بندی چقدر بالا می‌آید؟

مسئله‌های اضافی

۶۴- قطعه‌ای متصل به انتهای یک فنر حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد و معادلهٔ مکان با $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ داده شده است. اگر $\phi = \pi/۵$ باشد، آنگاه در $t = ۰$، انرژی پتانسیل چند درصد انرژی مکانیکی کل است؟

۶۵- شکل ۳۱-۵۰ مکان یک قطعهٔ ۲۰ گرمی را نشان می‌دهد که به انتهای یک فنر وصل است و حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. مطلوب است مقیاس محور افقی با $t_s = ۴۰/۰\,\text{ms}$ مشخص شده‌است. مطلوب است (الف) بیشینهٔ انرژی جنبشی قطعه و (ب) تعداد دفعه‌ها بر ثانیه که بیشینه حاصل می‌شود؟

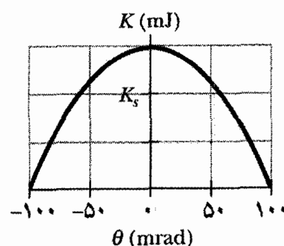
(*راهنمایی*: احتمالاً اندازه‌گیری شیب خیلی دقیق نیست. آیا می‌توانید به روش دیگری بیندیشید؟)



شکل ۳۱-۵۰ مسئله‌های ۶۵ و ۶۶

۶۶- شکل ۳۱-۵۰ مکان $x(t)$ قطعه‌ای را که به انتهای فنری وصل و در حرکت هماهنگ ساده است نشان می‌دهد. مطلوب است (الف) تندی و (ب) بزرگی شتاب شعاعی ذره‌ای که در حرکت دایره‌ای یکنواخت مربوطه است.

۶۷- شکل ۳۱-۵۱ انرژی جنبشی K یک آونگ ساده را برحسب زاویهٔ θ نسبت به قائم، نشان می‌دهد. گلولهٔ آونگ دارای جرم ۰/۲۰۰kg است. طول آونگ چقدر است؟



شکل ۳۱-۵۱ مسئلهٔ ۶۷

۶۸- هر چند کالیفرنیا به خاطر زلزله‌هایش شهرت دارد، اما دارای نواحی بزرگی است که در آنها سنگهای در حال تعادل نامطمئنی قرار دارند که حتی بر اثر زمین لرزهٔ خفیف فرو می‌افتند. شواهد نشان می‌دهد که این سنگها هزاران سال است که به همین شکل ایستاده‌اند و این بر آن دلالت دارد که دراین مدت زمین لرزه بزرگی در این نواحی رخ نداده است. اگر زمین لرزه چنین سنگی را به نوسان سینوسی (موازی سطح زمین) با بسامد ۲/۲Hz و دامنهٔ نوسان ۱/۰cm درآورد، باعث می‌شود که سنگ فرو افتد. بزرگی بیشینهٔ شتاب نوسان برحسب g در این حالت چقدر است؟

۶۹- قطعه‌ای به جرم ۴/۰kg از فنری با $k = ۵۰۰ \text{N/m}$ آویزان است. یک گلولهٔ ۵۰ گرمی به طور مستقیم از زیر با تندی ۱۵۰m/s به قطعه شلیک می‌شود و در آن فرو می‌رود. (الف) دامنهٔ حرکت هماهنگ سادهٔ حاصل را پیدا کنید. (ب) چه درصدی از انرژی جنبشی اولیهٔ گلوله به انرژی مکانیکی نوسانگر منتقل می‌شود؟

۷۰- قطعه‌ای به جرم ۵۵/۰g به انتهای فنری با ثابت $k = ۱۵۰۰ \text{N/m}$ وصل است و با رابطهٔ $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. چقدر طول می‌کشد تا قطعه از مکان $+۰/۸۰۰x_m$ به (الف) مکان $۰/۶۰۰x_m$ و (ب) مکان $-۰/۸۰۰x_m$ ، حرکت کند؟

۷۱- میان بند بلندگویی با حرکت هماهنگ ساده با بسامد ۴۴۰Hz و جابه‌جایی بیشینهٔ ۰/۷۵mm نوسان می‌کند. مطلوب است (الف) بسامد زاویه‌ای، (ب) تندی بیشینه، و (پ) بزرگی شتاب بیشینه.

۷۲- دامنهٔ انتهای یکی از شاخه‌های دیاپازونی که حرکت هماهنگ ساده با بسامد ۱۰۰۰Hz انجام می‌دهد ۰/۴۰mm است. برای این دیاپازون مطلوب است بزرگی (الف) شتاب بیشینه، (ب) تندی بیشینه، (پ) شتاب، و (ت) تندی انتهای شاخه هرگاه جابه‌جایی آن ۰/۲۰mm باشد.

۷۳- یک قرص دایره‌ای یکنواخت تخت دارای جرم ۳/۰۰kg و شعاع ۷۰/۰cm است. این قرص در یک صفحهٔ افقی به کمک یک سیم قائم متصل به مرکز آن آویزان است. اگر این قرص ۲/۵۰rad حول سیم بچرخد، گشتاور نیروی ۰/۰۶۰۰N·m برای نگهداشتن قرص در این وضعیت لازم است. مطلوب است (الف) لختی چرخشی قرص حول سیم، (ب) ثابت پیچش و (پ) بسامد زاویه‌ای این آونگ پیچشی هرگاه به نوسان درآید.

۷۴- قرص دایره‌ای یکنواختی که شعاع R آن ۱۲/۵cm است به صورت یک آونگ فیزیکی از نقطه‌ای روی پیرامونش آویزان شده است. (الف) دورهٔ تناوب آن چقدر است؟ (ب) در چه فاصلهٔ شعاعی $r < R$ ، نقطهٔ آویزی وجود دارد که همین دورهٔ تناوب را به دست دهد؟

۷۵- بسامد آونگ ساده‌ای به طول ۲/۰m (الف) داخل اتاق، (ب) داخل آسانسوری که با آهنگ ۲/۰ m/s^2 شتاب رو به بالا دارد، و (پ) در سقوط آزاد، چقدر است؟ SSM

۷۶- ذره‌ای با بسامد ۰/۲۵Hz حول نقطهٔ $x = ۰$ دارای حرکت هماهنگ سادهٔ خطی است. ذره در $t = ۰$ ، دارای جابه‌جایی ۰/۳۷cm و سرعت صفر است. برای این حرکت، مطلوب است (الف) دورهٔ تناوب، (ب) بسامد زاویه‌ای، (پ) دامنه، (ت) جابه‌جایی $x(t)$ ، (ث) سرعت $v(t)$ ، (ج) تندی بیشینه، (چ) بزرگی شتاب بیشینه، (ح) جابه‌جایی در $t = ۳/۰ \text{ s}$ ، و (خ) تندی در $t = ۳/۰ \text{ s}$.

۷۷- سنگی به جرم ۵۰/۰g به انتهای یک فنر قائم متصل است و به ارتعاش در می‌آید. اگر تندی بیشینهٔ سنگ ۱۵/۰cm/s و دورهٔ تناوب آن ۰/۵۰۰s باشد، مطلوب است (الف) ثابت فنری فنر، (ب) دامنهٔ حرکت، و (پ) بسامد نوسان.

۷۸- قطعه‌ایی به جرم ۲/۰۰kg از فنری آویزان است. یک جسم ۳۰۰ گرمی از زیر قطعه آویزان شده و باعث کشیدگی بیشتر فنر به اندازهٔ ۲/۰۰cm می‌شود. (الف) ثابت فنر چقدر است؟ (ب) اگر جسم ۳۰۰ گرمی برداشته شود و قطعه به نوسان درآید، دورهٔ تناوب حرکت را به دست آورید.

۷۹- هرگاه قطعه‌ای به جرم m به انتهای فنری وصل شود، با دورهٔ تناوب ۲/۰s نوسان می‌کند. وقتی این جرم به ۲/۰kg افزایش یابد، دورهٔ تناوب ۳/۰s می‌شود. جرم m را به دست آورید.

۸۰- قطعه‌ای به جرم ۰/۱۰kg روی سطح افقی بدون اصطکاکی در راستای یک خط مستقیم نوسان می‌کند. جابه‌جایی آن از مبدأ عبارت است از

$$x = (10\,\text{cm})\cos[(10\,\text{rad/s})t + \pi/2\,\text{rad}].$$

(الف) بسامد نوسان چقدر است؟ (ب) بیشینه تندی که قطعه به دست می‌آورد چقدر است؟ (پ) به ازای چه مقداری از x این تندی رخ می‌دهد؟ (ت) بزرگی شتاب بیشینهٔ قطعه چقدر است؟ (ث) به ازای چه مقداری از x این شتاب رخ می‌دهد؟ (ج) چه نیرویی به وسیلهٔ فنر بر این قطعه باید وارد شود تا این نوسان حاصل شود.

۸۱- ذره‌ای به جرم ۳/۰kg دارای حرکت هماهنگ سادهٔ یک بعدی است و بنابر رابطهٔ زیر حرکت می‌کند

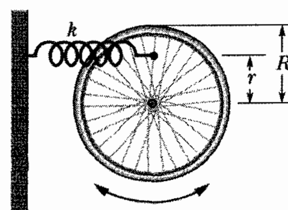
$$x = (5/0\,\text{m})\cos[(\pi/3\,\text{rad/s})t - \pi/4\,\text{rad}]$$

که در آن t در رابطه برحسب ثانیه است. (الف) به ازای چه مقدار از x انرژی پتانسیل ذره برابر با نصف انرژی کل آن است؟ (ب) چه مدت طول می‌کشد تا ذره از مکان تعادل خود به مکان x حرکت کند؟

۸۲- یک فنر بدون جرم با ثابت فنر ۱۹N/m به طور قائم آویزان است. جسمی به جرم ۰/۲۰kg به انتهای آزاد وصل شده و سپس رها می‌شود. فرض کنید قبل از اینکه قطعه رها شود فنر کشیدگی ندارد. مطلوب است (الف) فاصله‌ای که جسم نسبت به مکان اولیهٔ خود پایین می‌رود و (ب) بسامد و (پ) دامنهٔ حرکت هماهنگ سادهٔ حاصل.

۸۳- طول ضربهٔ پیستون (دو برابر دامنه) در سیلندر لوکوموتیوی ۰/۷۶m است. اگر پیستون با حرکت هماهنگ ساده با بسامد زاویه‌ای ۱۸۰ rev/min حرکت کند، تندی بیشینهٔ آن چقدر است؟

۸۴- چرخی می‌تواند به طور آزاد حول محور ثابت آن بچرخد. مانند شکل ۳۱-۵۲ فنری در فاصلهٔ r از محور به یکی از پره‌های آن وصل شده است. (الف) با فرض اینکه چرخ حلقه‌ای به جرم m و شعاع R است، بسامد زاویه‌ای ω نوسانهای کوچک این دستگاه برحسب m، R، r و ثابت فنر k چقدر است؟ اگر (ب) $r = R$ و $r = 0$ باشد، ω چقدر است؟

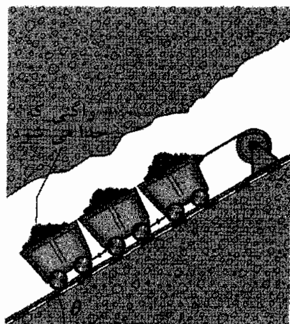


شکل ۳۱-۵۲ مسئلهٔ ۸۴

۸۵- درجه‌بندی یک ترازوی فنری که از ۰ تا ۱۵/۰kg را نشان می‌دهد ۱۲/۰cm طول دارد. مشاهده می‌شود که بسته‌ای که از این ترازو آویزان است با بسامد ۲/۰۰Hz به طور قائم نوسان می‌کند. (الف) ثابت فنر چقدر است؟ (ب) وزن بسته چقدر است؟

۸۶- یک فنر یکنواخت با $k = 8600\,\text{N/m}$ به دو قسمت ۱ و ۲ به طولهای کشیده نشدهٔ $L_1 = 7/0\,\text{cm}$ و $L_2 = 10\,\text{cm}$ بریده می‌شود. (الف) k_1 و (ب) k_2 چقدرند؟ قطعه‌ای که مطابق شکل ۳۱-۵ به فنر اولیه متصل است با بسامد ۲۰۰Hz نوسان می‌کند. بسامد نوسان قطعه وقتی به (پ) قسمت ۱ و (ت) قسمت ۲ متصل باشد چقدر است؟

۸۷- در شکل ۳۱-۵۳، سه واگن با سنگ معدن هر یک به جرم ۱۰۰۰۰kg روی یک سطح شیبدار ۳۰° در خط آهن معدن با استفاده از کابلی که موازی با سطح است به حالت سکون قرار دارند. درست پیش از اینکه اتصال بین دو واگن پایینی قطع و پایینترین واگن جدا شود مشاهده می‌کنیم که کابل ۱۵cm کشیده شده است. با فرض اینکه کابل از قانون هوک پیروی می‌کند، مطلوب است (الف) بسامد و (ب) دامنهٔ نوسانهای حاصل در دو واگن باقیمانده.



شکل ۳۱-۵۳ مسئله ۸۷

۸۸- آونگ ساده‌ای به طول ۲۰cm و جرم ۵/۰g داخل یک اتومبیل مسابقه آویزان شده است، اتومبیل با تندی ثابت ۷۰m/s دور دایره‌ای به شعاع ۵۰m حرکت می‌کند. اگر آونگ در جهت شعاعی حول وضعیت تعادلش نوسانهای کوچکی داشته باشد، بسامد نوسان آن چقدر است؟ SSM

۸۹- وقتی به انتهای یک فنر قائم یک قطعهٔ ۱/۳kg آویزان کنیم فنر ۹/۶cm کش می‌آید. (الف) ثابت فنر را محاسبه کنید. سپس این قطعه را ۵/۰cm بیشتر پایین می‌آوریم و از حال سکون رها می‌کنیم. مطلوب است (ب) دوره، (پ) بسامد، (ت) دامنه و (ث) بیشینهٔ تندی SHM حاصل.

۹۰- قطعه‌ای به وزن ۲۰N در یک انتهای فنر قائمی با $k = 100\,\text{N/m}$ قرار دارد؛ انتهای دیگر فنر به سقف متصل است. در لحظهٔ معینی فنر به اندازهٔ ۰/۳۰m بیش از طول در حال استراحت (طول فنر وقتی جسمی به آن متصل نیست) کشیده شده و سرعت قطعه صفر است. (الف) در این لحظه نیروی

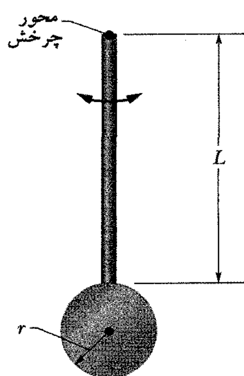
خالص وارد بر قطعه چقدر است؟(ب) دامنه و (پ) دورهٔ تناوب حرکت هماهنگ سادهٔ حاصل چقدرند؟ (ت) وقتی قطعه نوسان می‌کند انرژی جنبشی بیشینهٔ آن چقدر است؟

۹۱- قطعه‌ای به جرم ۱/۲kg را که به فنری افقی با $k = ۴۸۰\,N/m$ متصل است روی یک سطح بدون اصطکاک افقی سر می‌خورد. فرض کنید x جابه‌جایی قطعه از مکانی باشد که فنر کشیدگی ندارد. در $t = ۰$ قطعه با تندی ۵/۲m/s از $x = ۰$ در جهت مثبت x می‌گذرد. (الف) بسامد و (ب) دامنهٔ حرکت قطعه چقدرند؟ (پ) رابطه‌ای برای x به صورت تابعی از زمان به دست آورید. **SSM**

۹۲- یک نوسانگر هماهنگ ساده از قطعه‌ای به جرم ۰/۸۰ که به یک فنر $(k = ۲۰۰\,N/m)$ متصل است، تشکیل شده است. قطعه روی یک سطح بدون اصطکاک افقی با انرژی مکانیکی کل ۴/۰J حول نقطهٔ تعادل $x = ۰$ ، سر می‌خورد. (الف) دامنهٔ نوسان چقدر است؟ (ب) در ۱۰s قطعه چند نوسان کامل انجام می‌دهد؟ (پ) انرژی جنبشی بیشینه‌ای که قطعه به دست می‌آورد چقدر است؟ (ت) تندی قطعه در $x = ۰/۱۵\,m$ چقدر است؟

۹۳- مهندسی جسمی نامنظم در اختیار دارد که جرم آن ۱۰ kg است و می‌خواهد لختی چرخشی آن را حول محوری که از مرکز جرم آن می‌گذرد پیدا کند. جسم با سیمی در امتداد محور مورد نظر آویزان می‌شود. ثابت پیچشی سیم $\kappa = ۰/۵۰\,N\cdot m$ است. اگر این آونگ پیچشی در ۵۰s تعداد ۲۰ دور کامل نوسان کند، لختی چرخشی جسم چقدر است؟

۹۴- یک ساعت قدیمی دارای آونگی است که شامل یک قرص برنجی نازک به شعاع ۱۵/۰۰cm و جرم ۱/۰۰۰kg است که به یک میلهٔ باریک با جرم ناچیز متصل است.آونگ آزادانه حول محوری عمود بر میله که از انتهای دیگر آن می‌گذرد، مانند شکل ۳۱-۵۴، نوسان می‌کند. اگر در محلی که $g = ۹/۸۰۰\,m/s^2$ است آونگ برای نوسانهای کوچک دارای دورهٔ تناوب ۲/۰۰۰s باشد، طول L میله تا نزدیکترین دهم میلی‌متر چقدر است؟



شکل ۳۱-۵۴ مسئله ۹۴

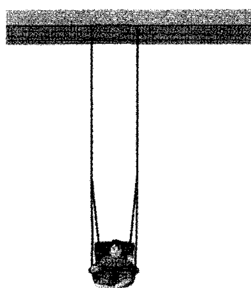
۹۵- قطعه‌ای به یک فنر افقی با ثابت فنر ۶۰۰N/m متصل است و روی یک سطح افقی بدون اصطکاک، سر می‌خورد. قطعه حول مکان تعادلش با دورهٔ تناوب ۰/۴۰s و دامنهٔ ۰/۲۰m دارای حرکت هماهنگ ساده است. وقتی قطعه از مکان تعادلش سر می‌خورد یک تکه خمیر به جرم ۰/۵۰kg به طور قائم روی قطعه می‌افتد. اگر خمیر به قطعه بچسبد، مطلوب است (الف) دورهٔ تناوب و (ب) دامنهٔ جدید حرکت.

۹۶- وقتی یک قوطی به وزن ۲۰N از انتهای فنر قائمی آویزان شود موجب می‌شود که فنر ۲۰cm کشیده شود. (الف) ثابت فنر چقدر است؟ (ب) حال این فنر را به طور افقی روی یک میز بدون اصطکاک قرار می‌دهیم. یک انتهای آن را ثابت نگه می‌داریم، و یک قوطی به وزن ۵/۰N به انتهای دیگر فنر وصل می‌کنیم. سپس قوطی را حرکت می‌دهیم (با کشیدن فنر) و پس از آن از حالت سکون رها می‌کنیم. دورهٔ تناوب نوسان حاصل چقدر است؟

۹۷- یک قطعهٔ ۴/۰۰ کیلوگرمی که از فنری آویزان است، نسبت به مکان کشیده شده‌اش ۱۶/۰cm کشیده می‌شود. (الف) ثابت فنر چقدر است؟ (ب) قطعه از فنر جدا شده و یک جسم ۰/۵۰۰ کیلوگرمی به آن آویزان می‌شود. حال اگر فنر کشیده شده و پس از آن رها شود، دورهٔ تناوب نوسان آن چقدر است؟

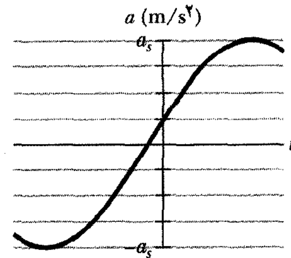
۹۸- یک نوسانگر هماهنگ میرا شامل یک قطعه (۲/۰۰kg) ، یک فنر $(k = ۱۰/۰\,N/m)$ و یک نیروی میرایی $(F = -bv)$ است. در ابتدا، قطعه با دامنهٔ ۲۵/۰cm نوسان می‌کند و به دلیل میرایی، پس از چهار نوسان کامل دامنه تا سه چهارم مقدار اولیه‌اش کم می‌شود. (الف) مقدار b چقدر است؟ (ب) در طی این چهار نوسان چقدر انرژی «تلف» شده است؟

۹۹- یک وسیلهٔ تفریحی معمول برای کودک تاب است که می‌توان آن را با آویزان کردن از چارچوب با طنابهای کشسان برقرار کرد، (شکل ۳۱-۵۵). به رغم ترتیب واقعی نشان داده شده در شکل فرض کنید هر طرف تاب فقط یک طناب دارد. وقتی بچه‌ای روی تاب نشسته است، دو طناب به اندازهٔ مسافت d_s پایین می‌آیند (آنها را مانند فنر در نظر بگیرید.) سپس تاب به اندازهٔ مسافت d_m دیگر به پایین کشیده شده و رها می‌شود، در نتیجه کودک به طور قائم مانند قطعه‌ای که به انتهای فنری متصل است، نوسان می‌کند. فرض کنید از نظر ایمنی شما سازندهٔ این تاب هستید. برای جلوگیری از صدمه خوردن به گردن کودک، نمی‌خواهید که بزرگی شتاب بیشتر از ۰/۲g شود. اگر $d_m = ۱۰\,cm$ باشد، مقدار d_s مربوط به این بزرگی شتاب چقدر است؟



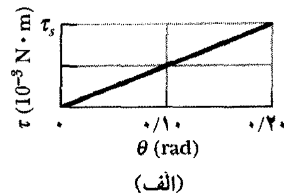
شکل ۳۱-۵۵ مسئله ۹۹

۱۰۰- اگر تابع مکان یک نوسانگر هماهنگ به صورت $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ و $a_s = ۴/۰ \text{m/s}^۲$ باشد، با توجه به تابع شتاب $a(t)$ آن که در شکل ۳۱-۵۶ داده شده ثابت فاز چقدر است؟

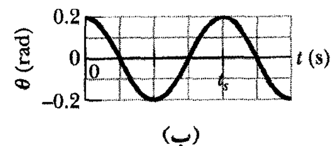


شکل ۳۱-۵۶ مسئلهٔ ۱۰۰

۱۰۱- یک آونگ پیچشی شامل یک قرص فلزی با سیمی است که از مرکز قرص می‌گذرد و در آنجا لحیم شده است. سیم به صورت قائم با گیره گرفته و کشیده شده است. شکل ۳۱-۵۷ الف بزرگی τ مورد نیاز برای چرخاندن قرص حول مرکزش (و در نتیجه پیچش سیم) را برحسب زاویهٔ چرخش θ نشان می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $\tau_s = ۴/۰ \times ۱۰^{-۳}$ N·m مشخص شده‌است. قرص به مقدار $\theta = ۰/۲۰۰$ rad چرخانده و سپس رها می‌شود. شکل ۳۱-۵۷ ب نوسان حاصل برحسب مکان زاویه‌ای را نسبت به زمان t نشان می‌دهد. مقیاس محور افقی با $t_s = ۰/۴۰$s مشخص شده‌است. (الف) لختی چرخشی قرص حول مرکزش چقدر است؟ (ب) بیشینهٔ تندی زاویه‌ای $d\theta/dt$ قرص چقدر است؟ (توجه: بسامد زاویه‌ای (ثابت) حرکت هماهنگ ساده را با تندی زاویه‌ای (متغیر) قرص در حال چرخش اشتباه نکنید، هر چند که آنها معمولاً دارای نماد یکسان ω هستند. *راهنمایی*: انرژی پتانسیل U آونگ پیچشی برابر با $\frac{۱}{۲}\kappa\theta^۲$، متناظر با $\frac{۱}{۲}kx^۲$ برای فنر است.)



(الف)



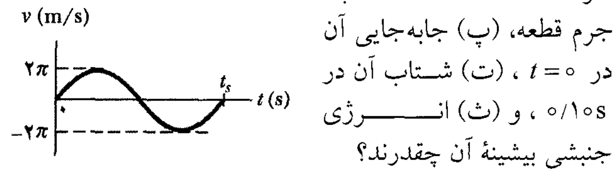
(ب)

شکل ۳۱-۵۷ مسئله ۱۰۱

۱۰۲- هرگاه مگسی در تار عنکبوتی گرفتار شده‌باشد، به علت حرکت مگس تارها نوسان می‌کنند و عنکبوت به دام افتادن مگس را تشخیص می‌دهد. عنکبوت حتی بزرگی مگس را با بسامد نوسان می‌تواند تعیین کند. فرض کنید که مگس گرفتار در تار مانند قطعه‌ای متصل به فنر نوسان کند. نسبت بسامد نوسان برای مگسی به جرم m به بسامد نوسان مگسی به جرم ۲/۵m چقدراست؟

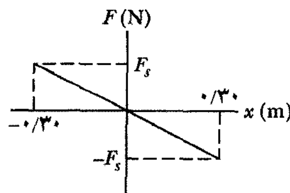
۱۰۳- برای یک آونگ ساده، دامنهٔ زاویه‌ای θ_m را که در آن گشتاور نیروی بازگردانندهٔ لازم برای اینکه حرکت هماهنگ ساده به اندازهٔ ۱/۰% از گشتاور نیروی واقعی انحراف داشته‌باشد را به دست آورید. (بسط‌های مثلثاتی در پیوست ث را ببینید.)

۱۰۴- یک نوسانگر هماهنگ ساده از قطعه‌ای که به فنری با $k = ۲۰۰$N/m متصل است تشکیل شده است. قطعه از حالت تعادل در $x = ۰$ و دامنهٔ ۰/۲۰m روی سطح بدون اصطکاکی سُر می‌خورد. نمودار سرعت v قطعه برحسب تابعی از زمان t در شکل ۳۱-۵۸ نشان داده شده است. (الف) دورهٔ تناوب حرکت هماهنگ ساده، (ب) جرم قطعه، (پ) جابه‌جایی آن در $t = ۰$، (ت) شتاب آن در ۰/۱۰s، و (ث) انرژی جنبشی بیشینهٔ آن چقدرند؟



شکل ۳۱-۵۸ مسئلهٔ ۱۰۴

۱۰۵- یک نوسانگر هماهنگ ساده از قطعه‌ای به جرم ۰/۵۰kg که به فنری متصل است، تشکیل شده است. قطعه نسبت به نقطهٔ تعادل $x = ۰$ روی سطح بدون اصطکاکی در امتداد خط مستقیمی به جلو و عقب حرکت می‌کند. در $t = ۰$، قطعه در $x = ۰$ است و در جهت مثبت x حرکت می‌کند. نمودار بزرگی نیروی خالص $\vec{F}$ وارد بر قطعه برحسب تابعی از مکان آن در شکل ۳۱-۵۹ نشان داده شده است. مقیاس عمودی با $F_s = ۷۵/۰$N مشخص شده‌است. (الف) دامنه، (ب) دورهٔ تناوب حرکت، (پ) بزرگی شتاب بیشینه، و (ت) بیشینهٔ انرژی جنبشی، چقدرند؟

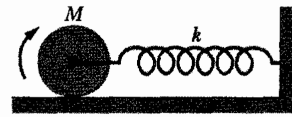


شکل ۳۱-۵۹ مسئلهٔ ۱۰۵

۱۰۶- در شکل ۳۱-۶۰، یک استوانهٔ توپر که به یک فنر بدون جرم افقی ($k = ۳/۰۰$N/m) متصل شده است می‌تواند بدون لغزش در یک سطح افقی بغلتد. اگر این دستگاه از حالت سکون و در وضعیتی که فنر ۰/۲۵m کشیده شده است رها شود، مطلوب است (الف) انرژی جنبشی انتقالی و (ب) انرژی جنبشی دورانی استوانه به هنگام عبور از وضعیت تعادل. (پ) نشان دهید که در این شرایط مرکز جرم استوانه حرکت هماهنگ ساده با دورهٔ تناوب زیر انجام می‌دهد

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{۳M}{۲k}}$$

که در آن M جرم استوانه است. (*راهنمایی*: مشتق زمانی انرژی مکانیکی کل را پیدا کنید.)



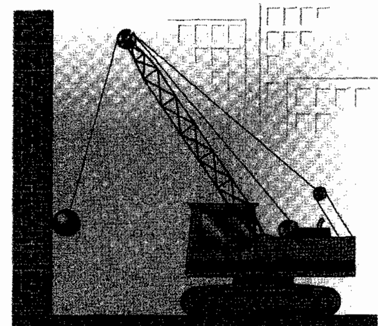
شکل ۳۱-۶۰ مسئلهٔ ۱۰۶

۱۰۷- قطعه‌ای به وزن $10/0\ N$ به انتهای پایین یک فنر قائم $(k=2/00/0\ N/m)$ که انتهای دیگر آن به سقف متصل است، وصل شده‌است. قطعه به طور عمودی نوسان می‌کند و وقتی از نقطه‌ای که فنر کشیده نشده‌است می‌گذرد، انرژی جنبشی آن $2/00\ J$ است. (الف) دورهٔ تناوب نوسان چقدراست؟ (ب) با استفاده از قانون پایستگی انرژی بیشینهٔ فاصله‌ای را تعیین کنید که قطعه دربالا و در پایین نقطه‌ای که فنر کشیده نشده‌است حرکت می‌کند. (اینها لزوماً یکی نیستند) (پ) دامنهٔ نوسان چقدراست؟ (ت) بیشینهٔ انرژی جنبشی قطعه موقع نوسان چقدراست؟

۱۰۸- یک قطعهٔ $2/0\ kg$ در حالی‌که به یک فنر افقی با ثابت فنر $200\ N/m$ متصل است، دارای حرکت هماهنگ ساده است. وقتی قطعه روی یک سطح بدون اصطکاک افقی سُر می‌خورد، تندی بیشینهٔ آن $3/0\ m/s$ است. (الف) دامنهٔ حرکت قطعه، (ب) بزرگی شتاب بیشینهٔ آن، و (پ) بزرگی شتاب کمینهٔ آن چقدرند؟ (ت) چه مدت طول می‌کشد تا قطعه $7/0$ دور کامل را طی کند؟

۱۰۹- بسامدهای ارتعاش اتمها در جامدها در دمای معمولی از مرتبهٔ $10^{13}\ Hz$ هستند. تصور کنید، اتمها به وسیله فنرهایی به یکدیگر متصل‌اند. فرض کنید یک اتم نقرهٔ منفرد در جسم جامدی با این بسامد ارتعاش می‌کند و سایر اتمها ساکن هستند. ثابت فنر مؤثر را محاسبه کنید. یک مول از نقره ($6/02\times10^{23}$ اتم) دارای جرم $108\ g$ است.

۱۱۰- در شکل ۳۱-۶۱، یک توپ تخریب به جرم $2500\ kg$ به وسیلهٔ یک جرثقیل تاب می خورد. قسمت تاب خورندهٔ کابل $17\ m$ است. (الف) دورهٔ تناوب را با فرض اینکه دستگاه یک آونگ ساده باشد پیدا کنید. (ب) آیا دورهٔ تناوب به جرم توپ بستگی دارد؟



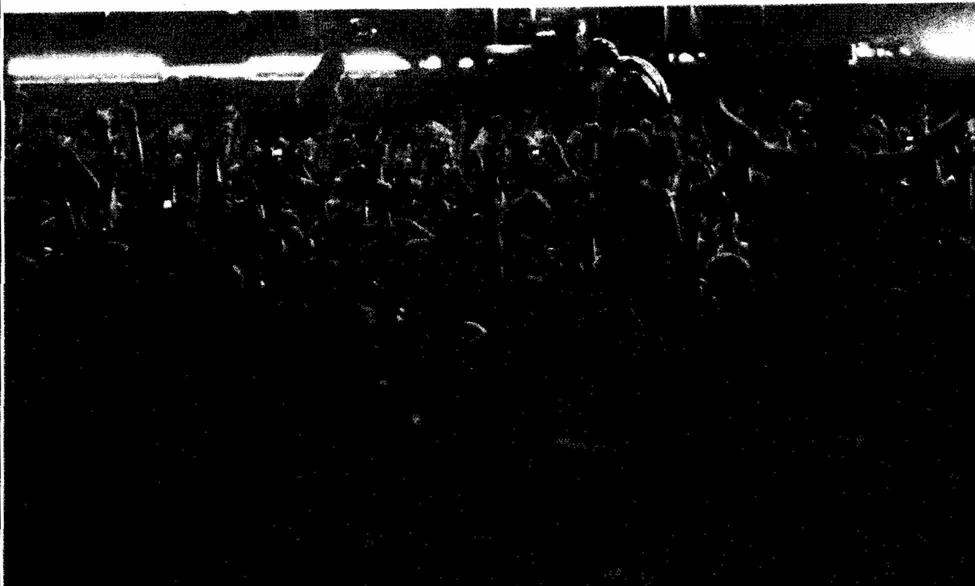
شکل ۳۱-۶۱ مسئلهٔ ۱۱۰

۱۱۱- مرکز نوسان یک آونگ فیزیکی این خاصیت جالب را دارد: اگر ضربه‌ایی (فرض کنید به طور افقی و واقع در صفحهٔ نوسان) بر مرکز نوسان اثر کند، هیچ نوسانهایی در نقطهٔ آویز احساس نمی‌شود. بازیکنان بیسبال (و بسیاری از ورزشکاران رشته‌های دیگر) می‌دانند که اگر توپ به غیر از این نقطه (که ورزشکاران آن را «نقطهٔ خوشایند» می‌نامند) به هر جای دیگر چوب برخورد کند نوسانهای ناشی از برخورد، دستهای آنها را به درد می‌آورد. برای اثبات این خاصیت، خط‌کش شکل ۳۱-۱۱ الف را به عنوان چوب بیسبال در نظر بگیرید. فرض کنید که یک نیروی افقی $\vec{F}$ (ناشی از برخورد با توپ) در نقطهٔ P، مرکز نوسان، به طرف راست اثر کند. فرض می‌شود که بازیکن از نقطهٔ O، نقطهٔ آویز خط‌کش آن را گرفته باشد. (الف) در نتیجهٔ نیروی $\vec{F}$ نقطهٔ O چه شتابی پیدا می‌کند؟ (ب) شتاب زاویه‌ای ایجاد شده به وسیلهٔ نیروی $\vec{F}$ حول مرکز جرم خط‌کش چقدر است؟ (پ) در نتیجهٔ شتاب زاویه‌ای قسمت (ب) شتاب خطی نقطهٔ O چقدر است؟ (ت) با در نظر گرفتن بزرگیها و جهت شتابها در (الف) و (پ) خود را متقاعد کنید که نقطهٔ P به راستی یک «نقطهٔ خوشایند» است.

۱۱۲- قطعه‌ای به جرم $2/0\ kg$ به انتهای فنری با ثابت فنری $350\ N/m$ متصل است و با اعمال نیروی $F=(15\ N)\sin(\omega_d t)$ به نوسان در می‌آید، که در آن $\omega_d=35\ rad/s$ است. ثابت میرایی $b=15\ kg/s$ است. در لحظه $t=0$، قطعه در حالت سکون و فنر در حالت بدون کشیدگی است. (الف) از انتگرالگیری عددی استفاده کنید و جابه‌جایی قطعه را در $1/0\ s$ اول حرکت آن رسم کنید. از حرکت در نزدیکی انتهای بازهٔ $1/0\ s$ استفاده کنید و دامنه، دورهٔ تناوب و بسامد زاویه‌ای را محاسبه کنید. محاسبه را برای (ب) $\omega_d=\sqrt{\frac{k}{m}}$ و (پ) $\omega_d=20\ rad/s$ تکرار کنید.

۳۲ موجها- I





در سال ۲۰۰۱، پل زیبای عابر پیاده‌روی رودخانهٔ تایمز در لندن افتتاح شد تا گالری هنر مدرن را به اطراف کلیسای جامع سن‌پل به عنوان نشانه‌ای از هزارهٔ جدید وصل کند. ولی پس از آنکه اولین موج عابران پیاده شروع به راه رفتن روی آن کردند، پل هزاره که به این نام خوانده می‌شود، چنان شروع به نوسان کرد که بسیاری از عابرین در حفظ تعادل خود با اشکال مواجه شدند. همین نوسانها می‌تواند در محل اجرای موسیقی با کف چوبی، بخصوص وقتی که حضار پایکوبی کنند اتفاق بیفتد.

چه چیزی موجب چنین نوسان‌هایی می‌شود که کابوسی برای مهندسان ساختمان است؟

پاسخ در همین فصل

۳۲-۱ فیزیک چیست؟

یکی از موضوعهای اولیهٔ فیزیک موجهاست. برای درک اهمیت موجها در دنیای امروز کافی است فقط صنعت موسیقی را در نظر بگیرید. هر قطعهٔ موسیقی که می‌شنوید چه مربوط به گروه پانکها در فضای باز باشد یا مربوط به یک کنسرت، بستگی به نوازندگانی دارد که موجهایی را ایجاد می‌کنند و شما آن موجها را دریافت می‌کنید. در بین تولید و دریافت، اطلاعات توسط موجهایی حمل می‌شوند که لازم است انتقال بیابند (مانند اجرای یک کنسرت زنده) یا ضبط و سپس باز تولید شوند (مانند *CD* یا *DVD* یا سایر وسایلی که امروزه در آزمایشگاههای مهندسی در سراسر دنیا توسعه یافته‌اند). اهمیت اقتصادی کنترل موجهای موسیقی مبهوت‌کننده است و پاداش مهندسهایی که روشهای جدیدی جهت کنترل آن ابداع کنند بیرون از اندازه است.

در این فصل تأکید روی موجهایی است که در طول یک سیم کشیده شده نظیر سیم روی گیتار حرکت می‌کنند. در فصل بعد تکیه روی موجهای صوتی، مانند آنهایی است که توسط سیم گیتار در حال نواختن تولید می‌شوند. قبل از بحث در مورد اینها، اولین کار ما این است که همهٔ این موجهای بی‌شمار در دنیای هر روزه را به انواع اصلی تقسیم‌بندی کنیم.

۳۲-۲ انواع موجها

موجها از سه نوع عمده‌اند:

۱- **موجهای مکانیکی.** این موجها آشناترین نوع هستند چون تقریباً همیشه با آنها سروکار داریم، موجهای آب، موجهای صوتی و موجهای زلزله نمونه‌های متداول آن هستند. تمام این موجها دو ویژگی اصلی دارند: آنها از قانونهای نیوتون پیروی می‌کنند و فقط می‌توانند در محیط مادی، مانند آب، هوا و سنگ وجود داشته باشند.

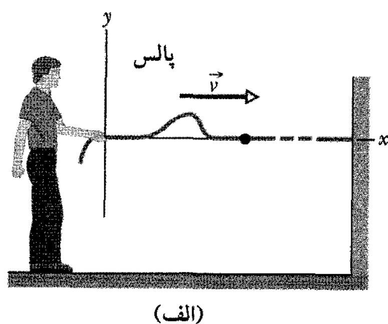
۲- **موجهای الکترومغناطیسی.** این موجها کمتر آشنا هستند ولی همواره از آنها استفاده می‌کنیم: نور مرئی و فرابنفش، موجهای رادیویی و تلویزیونی و میکروموجها، پرتوهای x و موجهای رادار از این قبیل‌اند. وجود این موجها به محیط مادی نیاز ندارد. برای مثال موجهای نوری ستارگان در فضای خلأ حرکت می‌کنند و به ما می‌رسند. همهٔ موجهای الکترومغناطیسی با تندی یکسان $c = ۲۹۹/۷۹۲/۴۵۸\,\mathrm{m/s}$ در خلأ حرکت می‌کنند.

۳- **موجهای ماده.** اگرچه این موجها معمولاً در فناوری نوین به‌کار می‌روند، ولی احتمالاً این موجها خیلی آشنا نیستند. این موجها به الکترونها، پروتونها و سایر ذره‌های بنیادی و حتی به اتمها و مولکولها وابسته‌اند. چون اغلب این ذره‌ها را به صورت اجزای تشکیل دهندهٔ ماده می‌شناسیم، این موجها را موجهای ماده می‌گویند.

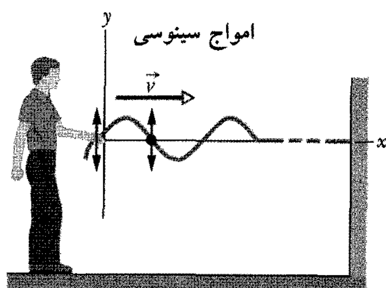
بیشتر آنچه که دربارهٔ آنها در این فصل بحث می‌کنیم در مورد همهٔ انواع موج به‌کار می‌رود. ولی در مورد مثالهای خاص موجهای مکانیکی را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۳۲-۳ موجهای عرضی و طولی

موجی که در راستای یک ریسمان کشیده شدهٔ سفت فرستاده می‌شود، ساده‌ترین موج مکانیکی است. اگر یک تکان بالا و پایین در یک انتهای ریسمانی کشیده شده ایجادکنیم، مانند شکل ۳۲-۱الف موجی به شکل تپ در راستای آن حرکت می‌کند.



(الف)



(ب)

شکل ۳۲-۱ (الف) ارسال یک تپ در راستای یک ریسمان کشیده. یک عنصر نوعی ریسمان (که با نقطه نمایش داده شده) در موقع عبور تپ از آن به بالا و سپس به پایین حرکت می‌کند. حرکت عنصر بر جهتی که موج حرکت می‌کند عمود است، بنابراین، تپ یک موج عرضی است. (ب) ارسال یک موج سینوسی در امتداد ریسمان، یک عنصر نوعی ریسمان در موقع عبور موج به طور مداوم به بالا و پایین حرکت می‌کند. این نیز یک موج عرضی است.

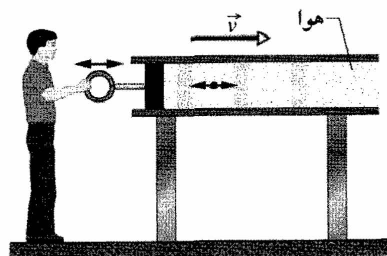
این تپ و حرکت آن به علت اینکه ریسمان تحت کشش است ایجاد می‌شود. وقتی بخش انتهایی ریسمان را به سمت بالا حرکت می‌دهید بخش مجاور در ریسمان نیز به دلیل کشش بین دو بخش به سمت بالا کشیده می‌شود. وقتی بخش مجاور به سمت بالا حرکت می‌کند این بخش، بخش بعدی را بالا می‌کشد و این ادامه می‌یابد. در ضمن وقتی انتهای ریسمان را به سمت پایین بکشید هر بخشی توسط بخشهایی که قبلاً به پایین رفته‌اند به طرف پایین کشیده می‌شود. نتیجه نهایی این است که تغییر شکلی در ریسمان (تپ) با سرعت $\vec{v}$ در راستای ریسمان حرکت می‌کند.

اگر دست خود را به صورت حرکت هماهنگ سادهٔ مداوم به بالا و پایین حرکت دهید، یک موج پیوسته با سرعت $\vec{v}$ در راستای ریسمان حرکت می‌کند. چون حرکت دست یک تابع سینوسی از زمان است، همانطور که در شکل ۳۲-۱ب نشان داده شده است، این موج در هر لحظه یک شکل سینوسی دارد. یعنی شکل موج یک منحنی سینوسی یا یک منحنی کسینوسی است.

در اینجا فقط یک ریسمان «آرمانی» را در نظر گرفتیم که در آن هیچ نیروی اصطکاکی که باعث میراشدن موج در راستای ریسمان شود وجود ندارد. افزون بر این، فرض می‌کنیم که ریسمان به قدری دراز است که نیازی به در نظر گرفتن برگشت موج از انتهای دیگر آن نداریم.

یک راه برای مطالعهٔ موجهای شکل ۳۲-۱ عبارت است از در نظر گرفتن **شکلهای موج** وقتی که به سمت راست حرکت می‌کنند. راه دیگر این است که می‌توانیم حرکت عنصری از ریسمان را در وقتی که عنصر موقع عبور موج از آن به بالا و پایین *نوسان* می‌کند در نظر بگیریم. همانطور که در شکل ۳۲-۱ ب نشان داده شده است درمی‌یابیم که جابه‌جایی هر چنین عنصر نوسان‌کننده‌ای از ریسمان بر جهت حرکت موج عمود است. به این حرکت عرضی گفته می‌شود و موج آن را یک **موج عرضی** می‌نامند.

شکل ۳۲-۲ نشان می‌دهد که چگونه به وسیلهٔ پیستونی در یک لولهٔ دراز محتوی هوا می‌توان یک موج صوتی ایجاد کرد. اگر به طور ناگهانی پیستون را به طرف راست و سپس به طرف چپ حرکت دهیم، می‌توان یک تپ صوتی را در طول لوله ارسال کرد. حرکت به سمت راست پیستون عنصرهای هوای مجاور را به طرف راست حرکت می‌دهد و این باعث تغییر فشار هوا در آنجا می‌شود. سپس فشار هوای افزایش یافته عنصرهای هوا را در طول لوله به مقدار بیشتری به سمت راست می‌راند. حرکت پیستون به سمت چپ فشار هوای مجاور آن را



شکل ۳۲-۲ با حرکت پیستونی به عقب و جلو در یک لولهٔ پر شده از هوا یک موج صوتی ایجاد می‌شود. چون نوسانهای یک عنصر از هوا (که با نقطهٔ سیاه نشان داده شده است) با جهتی که موج حرکت می‌کند موازی‌اند، موج را موج طولی می‌نامند.

کاهش می‌دهد. در نتیجه، ابتدا عنصرهای نزدیک پیستون و سپس عنصرهای دورتر به سمت چپ حرکت می‌کنند. بنابراین، حرکت هوا و تغییر در فشار هوا در طول لوله به صورت یک تپ به سمت راست حرکت می‌کند.

اگر مطابق شکل ۳۲-۲، پیستون را با حرکت هماهنگ ساده به جلو و عقب بکشیم یک موج سینوسی در طول لوله حرکت می‌کند. چون حرکت عنصرهای هوا با جهت حرکت موج موازی است، این حرکت را طولی و موج را موج طولی می‌نامند. در این فصل موجهای عرضی به ویژه موجهای ریسمان را در نظر می‌گیریم، در فصل ۳۳ موجهای طولی و به ویژه موجهای صوتی را بررسی می‌کنیم.

هر دو موج عرضی و طولی را موجهای پیشرونده می‌گویند چون این موجها از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر، مثلاً از یک سر ریسمان به سر دیگر ریسمان در شکل ۳۲-۱ و در شکل ۳۲-۲ از یک سر لوله به سر دیگر لوله، حرکت می‌کنند. توجه کنید که این موج است که بین دو نقطه حرکت می‌کند نه ماده‌ای (ریسمان یا هوا) که موج در آن حرکت می‌کند.

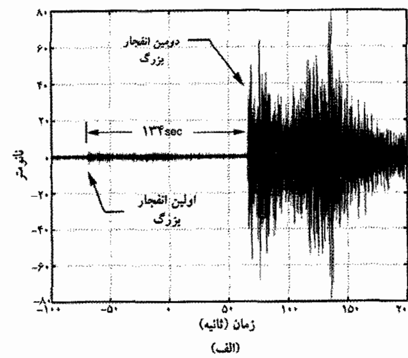
مسئله نمونه ۳۲-۱

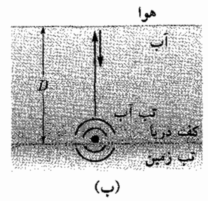
موجهای زلزله موجهایی هستند که یا در داخل زمین یا در سطح آن حرکت می‌کنند. ایستگاههای زلزله‌نگاری اساساً برای ثبت موجهای تولید شده توسط زلزله برپا شده‌اند، اما آنها موجهای ایجاد شده بر اثر آزاد شدن انرژی زیاد مانند یک انفجار در نزدیکی سطح زمین را نیز ثبت می‌کنند. وقتی موجهای زلزله از ایستگاه می‌گذرند، آنها قلم دستگاه ثبات را به نوسان درمی‌آورند و قلم نموداری را رسم می‌کند. شکل ۳۲-۳ الف یکی از نمودارهای مربوط به موجهای زلزلهٔ حاصل از غرق اسرارآمیز زیردریایی روسی *کورسک* در آگوست سال ۲۰۰۰ است. اولین نوسانهای قلم با پیکان نمایش داده شده‌اند و دامنهٔ کوچکی دارند. نوسانهای خیلی بزرگتر تقریباً از ۱۳۴s به بعد شروع شده‌اند.

با این اطلاعات، تحلیل‌گران نتیجه گرفتند که اولین موجهای زلزله مربوط به انفجاری در زیردریایی بوده است، احتمالاً یک اژدر که در موقع شلیک عمل نکرده است. این انفجار از قرار معلوم به بدنهٔ زیردریایی صدمه زده و با شروع آتش‌سوزی زیردریایی غرق شده است. بعداً، پس از غرق زیردریایی احتمالاً آتش باعث شده است تا چند موشک قوی به طور همزمان در زیردریایی منفجر شوند و موجهای زلزلهٔ بسیار قویتری پدید آیند. این موجهای قویتر به صورت تپهایی با بازهٔ زمانی Δt تقریباً برابر ۰/۱۱s به ایستگاه زلزله‌نگاری رسیده‌اند. زیردریایی در چه عمق D غرق شده است؟

نکته کلیدی سرعت صوت برابر است با فاصله طی شده تقسیم بر زمان حرکت.

محاسبه‌ها: فرض کنید پس از اینکه *کورسک* روی کف اقیانوس (بستر دریا) قرار گرفت، انفجار قویتر رخ داده باشد. این انفجار یک تپ به داخل بستر دریا و یک تپ به سمت بالا از میان آب





شکل ۳۲-۳ (ب) نمودار رسم شده به وسیله دستگاه ثبات، وقتی که موجهای زلزلهٔ حاصل از کورسک از دستگاه گذشته است. دامنه به طور قائم رسم شده و زمان به طرف راست افزایش می‌یابد. اولین انفجار کورسک موجهایی با دامنهٔ کوچک ایجاد کرده که با پیکان نمایش داده شده است. انفجار بعدی کورسک موجهایی با دامنهٔ بزرگتر ایجاد کرده است. (ب) وقتی زیردریایی در عمق D روی کف دریا قرار گرفته، انفجار بزرگ تپهایی را هم به داخل زمین و هم در بالا از میان آب ارسال کرده است.

ارسال کرده است. (شکل ۳۲-۳ب). تپی که در میان آب حرکت می‌کند چندین بار بین سطح آب و بستر دریا رفت و برگشت می‌کند. هر بار که تپ به بستر دریا می‌خورد، تپ دیگری را به داخل زمین می‌فرستد و ایستگاههای زلزله‌نگاری این تپهای زمینی را که یکی پس از دیگری به ایستگاه می‌رسند ثبت می‌کنند. بنابراین، زمان Δt بین هر دو تپ زمینی ثبت شده برابر زمان رفت و برگشت تپ درون آب است که به سطح آب رفته و سپس به بستر دریا برگشته است. از معادلهٔ ۲-۲ $(v_{avg}=\Delta x/\Delta t)$ می‌توانیم تندی v تپ درون آب را با رابطهٔ زیر به مسافت رفت و برگشت $۲D$ و زمان رفت و برگشت Δt، مربوط کنیم.

$$v=\frac{۲D}{\Delta t}$$

یا

$$D=\frac{v\Delta t}{۲} \qquad (۳۲\text{-}۱)$$

موجها تقریباً با تندی ۱۵۰۰m/s در آب حرکت می‌کنند. با قرار دادن این مقدار و $\Delta t=۰/۱۱\text{s}$ در معادله ۳۲-۱ درمی‌یابیم که داده‌های زلزله‌نگاری پیش‌بینی کردند که کورسک تقریباً در عمق زیر غرق شده است.

$$D=\frac{(۱۵۰۰\text{m/s})(۰/۱۱\text{s})}{۲}$$
$$=۸۲/۵\text{m}\approx ۸۳\text{m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

درواقع، زیردریایی شکسته تقریباً در عمق ۱۱۵ متری به‌دست آمد.

۳۲-۴ طول موج و بسامد

برای توصیف کامل موج در یک ریسمان (و حرکت هر عنصر در طول آن) به تابعی نیاز داریم که شکل موج را به‌دست دهد.

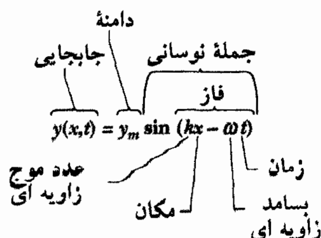
این بدان معناست که به رابطه‌ای به شکل $y=h(x,t)$ نیاز داریم که در آن y جابه‌جایی عرضی هر عنصر ریسمان به صورت تابع h از زمان t و مکان x این عنصر در طول ریسمان است. در حالت کلی، یک شکل سینوسی مانند موج شکل۳۲-۱ب را می‌توان با h توصیف کرد که ممکن است سینوسی یا کسینوسی باشد؛ هر دو تابع شکل یکسانی برای موج به‌دست می‌دهند. در این فصل از تابع سینوسی استفاده می‌کنیم.

تصور کنید که یک موج سینوسی مانند شکل ۳۲-۱ب در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. وقتی موج از میان عنصرهای پی‌درپی (یعنی، قسمتهای خیلی کوچک) ریسمان عبور می‌کند، عنصرها موازی با محور y نوسان می‌کنند. در زمان t، جابه‌جایی y عنصر واقع در مکان x را رابطهٔ زیر داده می‌شود.

$$y(x,t)=y_m\sin(kx-\omega t) \qquad (۳۲\text{-}۲)$$

چون این رابطه برحسب مکان x نوشته شده، می‌توان آن را برای به‌دست آوردن جابه‌جایی همهٔ عنصرهای ریسمان برحسب تابعی از زمان به‌کار برد. بنابراین، رابطه می‌تواند شکل موج را در هر لحظهٔ داده شده به‌دست دهد و چگونگی تغییر شکل آن را در حین حرکت در امتداد ریسمان، مشخص کند.

نام کمیتهای معادلهٔ ۳۲-۲ روی شکل ۳۲-۴ نوشته شده‌اند و در زیر تعریف آنها خواهد آمد. ولی، پیش از بحث دربارهٔ آنها، شکل ۳۲-۵ که پنج «عکس فوری» از یک موج سینوسی را که در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند نشان می‌دهد، مورد بررسی قرار می‌دهیم. حرکت موج به وسیلهٔ پیکان کوچکی که به طرف راست پیشروی می‌کند و متوجه نقطهٔ بالایی موج است مشخص شده است. از هر عکس فوری تا عکس فوری دیگر، پیکان کوچک با شکل موج به سمت راست حرکت می‌کند، اما ریسمان *فقط* موازی با محور y حرکت می‌کند. برای مشاهدهٔ این، حرکت یک عنصر تیره رنگ روی ریسمان را در $x=۰$ در نظر می‌گیریم. در اولین عکس فوری (شکل ۳۲-۵ الف)، این عنصر در جابه‌جایی $y=۰$ است. در عکس فوری بعدی، این عنصر در بیشترین جابه‌جایی به سمت پایین خود قرار دارد چون *درهٔ* موج (یا پایینترین نقطه) از آن می‌گذرد. سپس عنصر به سمت بالا و به $y=۰$ برمی‌گردد. در چهارمین عکس فوری، عنصر در بیشترین جابه‌جایی به سمت بالای خود قرار دارد چون *قله* موج (یا بالاترین نقطه) از آن می‌گذرد. در پنجمین عکس فوری، عنصر دوباره در $y=۰$ قرار دارد و یک نوسان کامل را انجام داده است.

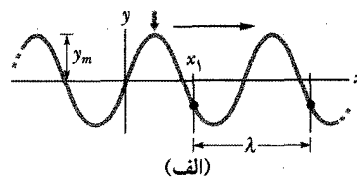


شکل ۳۲-۴ نام کمیتهای معادلهٔ ۳۲-۲ برای یک موج سینوسی عرضی

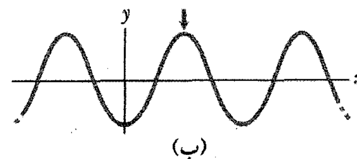
دامنه و فاز

دامنهٔ y_m یک موج، همانند آنچه در شکل ۳۲-۵ نشان داده شده است، بزرگی بیشینهٔ جابه‌جایی عنصرها از وضعیت تعادلشان در هنگامی است که موج از آنها می‌گذرد. (زیرنویس m برای مشخص کردن بیشینه به کار رفته است.) چون y_m بزرگی را نشان می‌دهد، همیشه یک کمیت مثبت است، حتی اگر به جای به سمت بالا مانند شکل ۳۲-۵ الف به سمت پایین اندازه‌گیری شود.

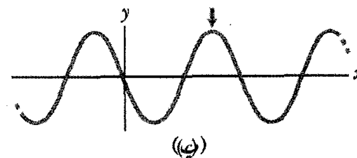
فاز یک موج عبارت است از *شناسهٔ* $kx-\omega t$ سینوس در معادلهٔ ۳۲-۲. وقتی موج از عنصر ریسمان در مکان معین x می‌گذرد،



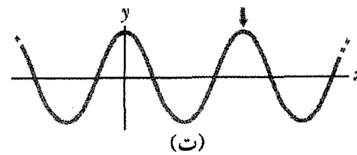
(الف)



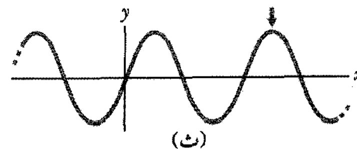
(ب)



(پ)



(ت)



(ث)

شکل ۳۲-۵ پنج "عکس فوری" از یک موج در ریسمان که در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. دامنهٔ y_m نشان داده شده است. یک طول موج نوعی λ از مکان اختیاری x_1 نیز نشان داده شده است.

فاز به طور خطی با زمان t تغییر می‌کند. این بدان معنا است که **سینوس نیز تغییر کرده و بین ۱+ و ۱- نوسان می‌کند. مقدار** مثبت حدی آن (۱+) مربوط به قلهٔ موجی است که از عنصر **می‌گذرد؛ در این لحظه مقدار y در مکان x برابر y_m است.** مقدار منفی حدی آن (۱-) مربوط به درهٔ موجی است که از عنصر می‌گذرد؛ در این لحظه مقدار y در مکان x برابر $-y_m$ است. بنابراین، تابع سینوسی و فاز وابسته به زمان موج مربوط به نوسان یک عنصر ریسمان، و دامنهٔ موج، جابه‌جاییهای حدی **عنصرها** را **معین** می‌کند.

طول موج و عدد موج زاویه‌ای

طول موج λ یک موج عبارت است از فاصلهٔ (موازی راستای حرکت موج) بین تکرارهای شکل موج. یک طول موج نوعی در شکل ۳۲-۵ الف که عکس فوری موج در زمان $t=0$ است، نشان داده شده است. در آن لحظه، معادلهٔ ۳۲-۲ شکل موج را چنین به دست می‌دهد.

$$y(x,0)=y_m\sin kx \qquad (۳۲-۳)$$

بنابر تعریف، جابه‌جایی y در دو انتهای این طول موج، یعنی در $x=x_1$ و $x=x_1+\lambda$، یکسان است. بنابراین، از معادلهٔ ۳۲-۳ داریم

$$y_m\sin kx_1=y_m\sin k(x_1+\lambda) \qquad (۳۲-۴)$$
$$=y_m\sin(kx_1+k\lambda)$$

تابع سینوسی وقتی زاویه‌اش (یا شناسه‌اش) به مقدار $2\pi\text{rad}$ افزایش یابد، خودش را تکرار می‌کند. بنابراین، در معادلهٔ ۳۲-۴ باید داشته باشیم $k\lambda=2\pi$ یا

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{(عدد موج زاویه‌ای)} \qquad (۳۲-۵)$$

K را **عدد موج زاویه‌ای** موج می‌نامیم؛ یکای SI آن رادیان بر متر یا عکس متر است. (توجه کنید که نماد k در اینجا مانند قبل ثابت فنر را نشان *نمی‌دهد*.)

توجه کنید که موج در شکل ۳۲-۵ به اندازهٔ $\frac{1}{4}\lambda$ از یک عکس فوری به عکس فوری بعدی به سمت راست حرکت می‌کند. بنابراین، تا پنجمین عکس فوری، موج به اندازهٔ 1λ به سمت راس حرکت کرده است.

دورهٔ تناوب، بسامد زاویه‌ای و بسامد

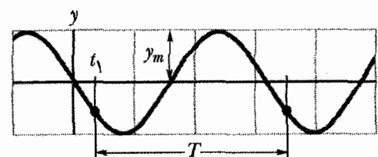
شکل ۳۲-۶ نمودار جابه‌جایی y در معادلهٔ ۳۲-۲ را برحسب زمان t در مکان معین $x=0$، نشان می‌دهد. اگر ریسمان را مشاهده کنیم، می‌بینیم که یک عنصر ریسمان در این نقطه با حرکت هماهنگ سادهٔ داده شده با معادلهٔ ۳۲-۲ به ازای $x=0$ بالا و پایین می‌رود.

$$y(0,t)=y_m\sin(-\omega t) \qquad (۳۲-۶)$$
$$=-y_m\sin\omega t \qquad (x=0)$$

در اینجا از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که برای هر زاویهٔ α داریم $\sin(-\alpha)=\sin\alpha$. شکل ۳۲-۶ نمودار این معادله است ولی شکل موج را *نشان نمی‌دهد*.

دوره تناوب نوسان T یک موج عبارت از زمانی است که طول می‌کشد تا یک عنصر ریسمان یک نوسان کامل حرکت کند. یک دورهٔ تناوب نوعی در نمودار شکل ۳۲-۶ نشان داده شده است. با استفاده از معادلهٔ ۳۲-۶ برای دو انتهای این بازهٔ زمانی و برابر قرار دادن نتایج داریم

$$-y_m\sin\omega t_1=-y_m\sin\omega(t_1+T) \qquad (۳۲-۷)$$
$$=-y_m\sin(\omega t_1+\omega T)$$



شکل ۳۲-۶ نموداری که جابه‌جایی یک عنصر ریسمان را در $x=0$ برحسب تابعی از زمان به هنگام عبور موج سینوسی شکل ۳۲-۵ از آن عنصر نشان می‌دهد. دامنه y_m نشان داده شده است. یک تناوب نوعی T که از زمان اختیاری t_1 اندازه‌گیری شده نیز نشان داده شده است.

این فقط در صورتی درست است که $\omega T = 2\pi$ یا اگر

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{(بسامد زاویه‌ای)} \qquad (۳۲-۸)$$

ω **بسامد زاویه‌ای** موج نامیده می‌شود؛ یکای SI آن رادیان بر ثانیه است.

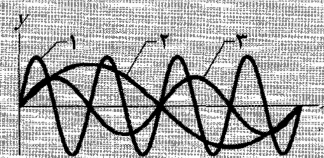
دوباره به پنج عکس فوری موج پیشرونده در شکل ۳۲-۵ نگاه کنید. فاصلهٔ زمانی بین دو عکس فوری برابر $\frac{1}{4}T$ است. بنابراین، با پنجمین عکس فوری، هر عنصر ریسمان یک نوسان کامل انجام داده است.

بسامد f موج به صورت $\frac{1}{T}$ تعریف می‌شود و با رابطهٔ زیر به بسامد زاویه‌ای ω مربوط است.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{(بسامد)} \qquad (۳۲-۹)$$

مانند بسامد حرکت هماهنگ سادهٔ فصل ۳۱، این بسامد f عبارت است از تعداد نوسانها در یکای زمان، که در اینجا تعداد نوسانهای یک عنصر ریسمان به هنگام حرکت موج از آن است. نظیر فصل ۳۱، f معمولاً برحسب هرتز یا مضربی از آن، نظیر کیلوهرتز، اندازه‌گیری می‌شود.

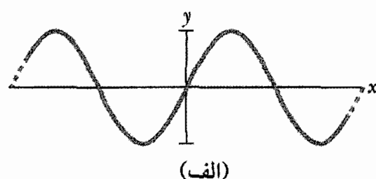
✓ نکته وارسی ۱ شکل ترکیبی از سه عکس فوری است، هر موج در طول ریسمان مشخصی حرکت می‌کند. فازهای این موجها به صورت (الف) $2x-4t$، (ب) $4x-8t$ و (پ) $16t-8x$ داده شده‌اند. در شکل کدام فاز مربوط به کدام موج است؟

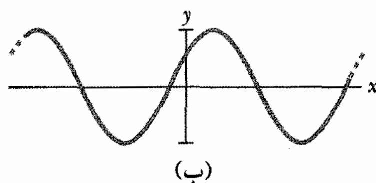


ثابت فاز

هنگامی که یک موج سینوسی پیشرونده با تابع موج معادلهٔ ۳۲-۲ داده شده باشد، موج نزدیک $x=0$، در $t=0$، مشابه شکل ۳۲-۷ الف به نظر می‌رسد. توجه کنید که در $x=0$، جابه‌جایی $y=0$ و شیب دارای بیشینهٔ مقدار مثبت خود است. با قرار دادن **ثابت فاز** ϕ در تابع موج می‌توان معادلهٔ ۳۷-۲ را در حالت کلی زیر نوشت.

$$y = y_m \sin(kx - \omega t + \phi) \qquad (۳۲-۱۰)$$





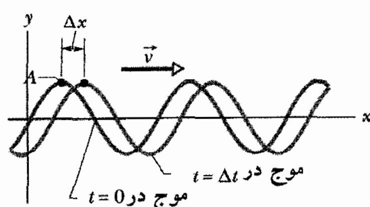
شکل ۳۲-۷ (یک موج سینوسی پیشرونده در $t=0$ با ثابت فاز ϕ (الف) و (ب) $\pi/5\text{rad}$

مقدار ϕ را می‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که تابع در $x=0$ وقتی $t=0$ است مقدارهای دیگری برای جابه‌جایی و شیب به دست دهد. برای مثال، با انتخاب $\phi = +\pi/5\text{rad}$ وقتی که $t=0$ است، جابه‌جایی و شیب نشان داده شده در شکل ۳۲-۷ ب به دست می‌آید. موج همچنان سینوسی با مقدارهای یکسان ω, k, y_m است ولی اکنون نسبت به چیزی که در شکل ۳۲-۷ الف (که در آن $\phi = 0$) دیدید جابه‌جا شده است.

۳۲-۵ تندی موج پیشرونده

شکل ۳۲-۸ دو عکس فوری از موجی با معادلهٔ ۳۲-۲ را نشان می‌دهد که در یک بازهٔ زمانی کوچک Δt گرفته شده‌اند. موج در جهت مثبت x (به سمت راست در شکل ۳۲-۸) حرکت می‌کند، تمام نقش موج در بازهٔ زمانی Δt در این جهت مسافت Δx را طی می‌کند. نسبت $\Delta x/\Delta t$ (یا در حد دیفرانسیلی، dx/dt) **تندی موج** v نامیده می‌شود. مقدار آن را چگونه می‌توان پیدا کرد؟

وقتی موج در شکل ۳۲-۸ حرکت می‌کند، هر نقطه از شکل موج پیشرونده، مانند نقطه A که روی قله نشان داده شده است، مقدار جابه‌جایی y خود را حفظ می‌کند. (نقطه‌های روی ریسمان جابه‌جایی خود را حفظ نمی‌کنند، ولی نقطه‌های واقع بر *شکل* موج آن را حفظ می‌کنند.) اگر نقطهٔ A در هنگام حرکت جابه‌جایی خود را حفظ کند، فاز معادلهٔ ۳۲-۲ که آن جابه‌جایی را به دست می‌دهد باید ثابت بماند.



شکل ۳۲-۸ دو عکس فوری از موج شکل ۳۲-۵ در زمان $t=0$ و سپس در زمان $t=\Delta t$. وقتی موج با سرعت $\vec{v}$ به سمت راست حرکت می‌کند، تمام منحنی در طی Δt به مسافت Δx انتقال می‌یابد. نقطهٔ A "سوار" بر شکل موج حرکت می‌کند، اما عنصرهای ریسمان فقط به بالا و پایین حرکت می‌کنند.

$$kx - \omega t = \text{ثابت} \qquad (۳۲\text{-}۱۱)$$

توجه کنید که اگرچه این شناسه ثابت است، ولی هم x و هم t تغییر می‌کنند. در واقع، وقتی t افزایش می‌یابد، x نیز باید زیاد شود تا شناسه ثابت بماند. این مؤید آن است که نقش موج در جهت مثبت x حرکت می‌کند.

برای پیدا کردن تندی v موج، از معادلهٔ ۳۲-۱۱ مشتق می‌گیریم، داریم

$$k\frac{dx}{dt} - \omega = ۰$$

یا

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k} \qquad (۳۲\text{-}۱۲)$$

با استفاده از معادلهٔ ۳۲-۵ $(k = ۲\pi/\lambda)$ و معادلهٔ ۳۲-۸ $(\omega = ۲\pi/T)$، می‌توان تندی موج را به صورت زیر نوشت

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (\text{تندی موج}) \qquad (۳۲\text{-}۱۳)$$

از معادلهٔ $v = \lambda/T$ معلوم است که تندی موج عبارت است از یک طول موج بر دورهٔ تناوب؛ موج مسافت یک طول موج را در یک دورهٔ تناوب نوسان طی می‌کند.

معادلهٔ ۳۲-۲ موجی را توصیف می‌کند که در جهت مثبت محور x در حرکت است. می‌توان با قرار دادن $-t$ به جای t در معادلهٔ ۳۲-۲ معادلهٔ موجی را به دست آورد که در جهت مخالف حرکت می‌کند. این متناظر با شرط زیر است

$$kx + \omega t = \text{ثابت} \qquad (۳۲\text{-}۱۴)$$

که (با ۳۲-۱۱ مقایسه کنید) مستلزم آن است که x با زمان *کاهش یابد*. بنابراین، موجی که در جهت منفی x حرکت می‌کند با معادلهٔ زیر توصیف می‌شود.

$$y(x,t) = y_m \sin(kx + \omega t) \qquad (۳۲\text{-}۱۵)$$

اگر همانطور که برای موجی با معادلهٔ ۳۲-۲ انجام دادیم، موج معادلهٔ ۳۲-۱۵ را تحلیل کنید، سرعت آن به صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{k} \qquad (۳۲\text{-}۱۶)$$

علامت منفی (با معادلهٔ ۳۲-۱۲ مقایسه کنید) حاکی از آن است که موج در واقع در جهت منفی x در حرکت است و تغییر علامت متغیر زمان را توجیه می‌کند.

اکنون موجی را با شکلی اختیاری که با رابطهٔ زیر داده می‌شود در نظر می‌گیریم.

$$y = (x,t) = h(kx \pm \omega t) \qquad (۳۲\text{-}۱۷)$$

که در آن h بیانگر هر *تابعی* است که تابع سینوسی یکی از آنهاست. تحلیل قبلی ما نشان می‌دهد که تمام موجهایی که در آنها متغیرهای x , t به صورت ترکیب $kx \pm \omega t$ وجود دارند موجهای پیشرونده هستند. افزون بر این، تمام موجهای در حال حرکت باید به شکل معادلهٔ ۳۲-۱۷ باشند. بنابراین، $y(x,t) = \sqrt{ax + bt}$ یک موج پیشروندهٔ احتمالی را (که ممکن است از نظر فیزیکی اندکی عجیب باشد) نشان می‌دهد. ولی از طرف دیگر، تابع به صورت $y = (x,t) = \sin(ax^۲ - bt)$ یک موج پیشرونده را نشان *نمی‌دهد*.

✓ نکته وارسی ۲ در اینجا معادلهٔ سه موج داده شده‌اند:

(۱) $y(x,t) = ۲\sin(۴x - ۲t)$

(۲) $y(x,t) = \sin(۳x - ۴t)$

(۳) $y(x,t) = ۲\sin(۳x - ۳t)$

این موجها را به ترتیب بزرگی (الف) تندی موج و (ب) بیشینهٔ تندی عرضی موج مرتب کنید.

مسئلهٔ نمونه ۳۲-۲

یک موج که در طول ریسمانی حرکت می‌کند با رابطهٔ زیر داده شده است.

$$y(x,t) = ۰/۰۰۳۲۷\sin(۷۲/۱x - ۲/۷۲t) \qquad (۳۲\text{-}۱۸)$$

که در آن ثابتها‌ی عددی برحسب یکاهای SI $(۰/۰۰۳۲۷\text{m}, ۷۲/۱\text{rad/m}, ۲/۷۲\text{rad/s})$ هستند.

(الف) دامنهٔ این موج چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی معادلهٔ ۳۲-۱۸ همان شکل معادلهٔ ۳۲-۲ را دارد.

$$y = y_m \sin(kx - \omega t) \qquad (۳۲\text{-}۱۹)$$

پس یک موج سینوسی داریم. با مقایسهٔ دو معادله، می‌توانیم دامنه را پیدا کنیم.

محاسبه: می‌بینیم که

$$y_m = ۰/۰۰۳۲۷\text{m} = ۳/۲۷\text{mm} \qquad (\text{پاسخ})$$

(ب) طول موج، دورهٔ تناوب و بسامد این موج چقدر است؟

محاسبه‌ها: با مقایسهٔ معادله‌های ۳۲-۱۸ و ۳۲-۱۹ می‌بینیم که عدد موج زاویه‌ای و بسامد زاویه‌ای عبارت‌اند از

$$k = ۷۲/۱\text{rad/m} \quad \text{و} \quad \omega = ۲/۷۲\text{rad/s}$$

حال طول موج λ با معادلهٔ ۳۲-۵ به k مربوط است.

$$\lambda = \frac{۲\pi}{k} = \frac{۲\pi\text{rad}}{۷۲/۱\text{rad/m}} = ۰/۰۸۷۱\text{m} = ۸/۷۱\text{cm} \qquad (\text{پاسخ})$$

T با معادلهٔ ۳۲-۸ به ω مربوط است.

$$T = \frac{۲\pi}{\omega} = \frac{۲\pi\text{rad}}{۲/۷۲\text{rad/s}} = ۲/۳۱\text{s} \qquad (\text{پاسخ})$$

و از معادلهٔ ۳۲-۹ داریم

$$f = \frac{۱}{T} = \frac{۱}{۲/۳۱\text{s}} = ۰/۴۳۳\text{Hz} \qquad (\text{پاسخ})$$

(پ) سرعت این موج چقدر است؟

محاسبه: تندی موج با رابطهٔ ۳۲-۱۳ داده شده است.

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{۲/۷۲\text{rad/s}}{۷۲/۱\text{rad/m}} = ۰/۰۳۷۷\text{m/s} = ۳/۷۷\text{cm/s} \qquad (\text{پاسخ})$$

چون فاز در معادلهٔ ۳۲-۱۸ شامل متغیر مکان x است، موج در راستای محور x حرکت می‌کند. همچنین، چون معادلهٔ موج به

شکل معادلهٔ ۳۲-۲ نوشته شده است، علامت منفی جلوی ωt بیانگر این است که موج در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. (توجه کنید که کمیتهای محاسبه شده در (ب) و (پ) مستقل از دامنهٔ موج هستند.)

(ت) جابه‌جایی y در $x = ۲۲/۵\text{cm}$ و $t = ۱۸/۹$ چقدر است؟

محاسبه: معادلهٔ ۳۲-۱۸ جابه‌جایی را برحسب تابعی از مکان x و زمان t به دست می‌دهد. با قرار دادن مقدارهای داده شده در معادله، داریم

(پاسخ)
$$y = ۰/۰۰۳۲۷\sin(۷۲/۱\times۰/۲۲۵ - ۲/۷۲\times۱۸/۹)$$
$$= (۰/۰۰۳۲۷\text{m})\sin(-۳۵/۱۸۵\text{rad})$$
$$= (۰/۰۰۳۲۷\text{m})(۰/۵۸۸)$$
$$= ۰/۰۰۱۹۲\text{m} = ۱/۹۲\text{mm}$$

بنابراین، جابه‌جایی مثبت است. (مطمئن باشید که قبل از محاسبهٔ سینوس، ماشین حساب خود را در حالت رادیان قرار دهید.)

مسئلهٔ نمونه ۳۲-۳

در مسئله نمونهٔ ۳۲-۲ ت نشان دادیم که جابه‌جایی عرضی y یک عنصر از ریسمان برای موجی به معادلهٔ ۳۲-۱۸ در $x = ۰/۲۲۵\text{m}$ و $t = ۱۸/۹\text{s}$ برابر $۱/۹۲\text{mm}$ است.

(الف) u سرعت عرضی این عنصر از ریسمان در آن مکان و در آن زمان چقدر است؟ (این سرعت که به نوسان عرضی یک عنصر ریسمان مربوط است، در جهت y قرار دارد. این را با v، تندی ثابتی که با آن شکل موج در راستای محور x حرکت می‌کند اشتباه نکنید.)

نکتهٔ کلیدی سرعت عرضی u عبارت است از آهنگی که با آن جابه‌جایی y عنصر تغییر می‌کند. به طور کلی، این جابه‌جایی با رابطهٔ زیر داده می‌شود.

$$y(x,t) = y_m\sin(kx - \omega t) \qquad (۳۲-۲۰)$$

برای یک عنصر در مکان معین x آهنگ تغییر y را با مشتق‌گیری از معادلهٔ ۳۲-۲۰ نسبت به t در حالی که x ثابت است، به دست می‌آوریم. مشتق‌گیری در حالتی که یک (یا چند) متغیر ثابت فرض شود را مشتق جزئی می‌نامند و با نماد $\partial/\partial x$ به جای d/dx نشان می‌دهند.

محاسبه‌ها: در اینجا داریم

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m\cos(kx - \omega t) \qquad (۳۲-۲۱)$$

حال، با قرار دادن مقدارهای عددی از مسئله نمونه ۳۲-۲، داریم

(پاسخ)
$$u = -(۲/۷۲\,\text{rad/s})(۳/۲۷\text{mm})\cos(-۳۵/۱۸۵۵\text{rad})$$
$$= ۷/۲۰\,\text{mm/s}$$

پس در $t = ۱/۸۹\text{s}$، عنصر ریسمان در $x = ۲۲/۵\text{cm}$ با تندی $۷/۲۰\,\text{mm/s}$ در جهت مثبت y حرکت می‌کند.

(ب) شتاب عرضی a_y همین عنصر در این زمان چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی شتاب عرضی a_y عبارت است از آهنگی که با آن سرعت عرضی عنصر تغییر می‌کند.

محاسبه‌ها: معادله ۳۲-۲۱ را در نظر می‌گیریم، دوباره x را ثابت و t را متغیر در نظر می‌گیریم، داریم

$$a_y = \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega^۲ y_m \sin(kx - \omega t)$$

از مقایسه با معادلهٔ ۳۲-۲۰ مشاهده می‌شود که می‌توان این رابطه را به صورت زیر نوشت

$$a_y = -\omega^۲ y$$

می‌توان دید که شتاب عرضی یک عنصر نوسان‌کنندهٔ ریسمان با جابه‌جایی آن متناسب ولی با علامت مخالف است. این با عمل خود عنصر کاملاً سازگاری دارد- یعنی، با حرکت هماهنگ ساده به طور عرضی در حرکت است. با قرار دادن مقدارهای عددی خواهیم داشت

(پاسخ)
$$a_y = -(۲/۷۲\,\text{ras/s})^۲(۱/۹۲\text{mm})$$
$$= -۱۴/۲\,\text{mm/s}^۲$$

پس در $t = ۱۸/۹\text{s}$، عنصر ریسمان در $x = ۲۲/۵\text{cm}$ به مقدار $۱/۹۲\text{mm}$ نسبت به وضعیت تعادلش در جهت مثبت محور y جابه‌جا شده و دارای شتابی به بزرگی $۱۴/۲\,\text{mm/s}^۲$ در جهت منفی y است.

تدبیرهای حل مسئله

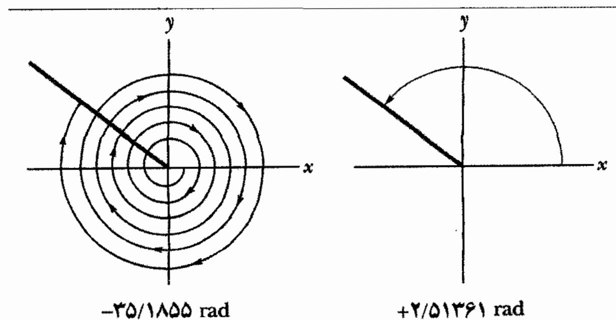
تدبیر ۱: محاسبهٔ فازهای بزرگ

گاهی، مانند مسئله نمونه ۳۲-۲ ت و ۳۲-۳ زاویه‌ای خیلی بزرگتر از $۲\pi\text{rad}$ (یا ۳۶۰°) ظاهر می‌شود که می‌خواهیم سینوس یا کسینوس آن را حساب کنیم. جمع یا کم کردن مضرب صحیحی از $۲\pi\text{rad}$ به این زاویه مقدار هیچ یک از تابعهای مثلثاتی آن را تغییر نمی‌دهد. مثلاً در مسئله نمونه ۳۲-۲ ت زاویه $-۳۵/۱۸۵۵\text{rad}$ است. با افزودن $(۶)(۲\pi\text{rad})$ به این زاویه خواهیم داشت

$$(-۳۵/۱۸۵۵)\text{rad} + (۶)(۲\pi\text{rad}) = ۲/۵۱۳۶۱\text{rad}$$

که زاویه‌ای کوچکتر از $۲\pi\text{rad}$ است و همان تابعهای مثلثاتی مانند $-۳۵/۱۸۵۵\text{rad}$ را دارد (شکل ۳۲-۹). به عنوان مثال، سینوس $۲/۵۱۳۶\text{rad}$ برابر با سینوس $-۳۵/۱۸۵۵\text{rad}$ و برابر با $۰/۵۸۸$ است.

ماشین حساب چنین زاویه‌های بزرگی را به طور خودکار کاهش می‌دهد. *توجه:* اگر سینوس یا کسینوس زاویه‌های بزرگ را می‌خواهید حساب کنید آنها را گرد نکنید. در محاسبهٔ سینوس زاویهٔ خیلی بزرگ، قسمتی از آن زاویه را کنار می‌گذاریم و سینوس آنچه را که مانده است حساب می‌کنیم. مثلاً اگر $-۳۵/۱۸۵۵\text{rad}$ را به -۳۵rad گرد کنید (تغییری به اندازهٔ $۰/۵\%$ که معقول است)، سینوس آن زاویه به اندازهٔ ۲۷%



شکل ۳۲-۹ این دو زاویه متفاوت‌اند ولی تمام تابعهای مثلثاتی آنها یکسان است.

تغییر می‌کند. همچنین، اگر یک زاویهٔ بزرگ را از درجه به رادیان تغییر دهیم، باید مطمئن شویم که از ضریب تبدیل دقیق (مانند $\pi \text{rad} \approx 180°$) به جای ضریب تبدیل تقریبی (مانند $1\text{rad} \approx 57/3°$) استفاده کرده‌ایم.

۳۲-۶ تندی موج در یک ریسمان کشیده شده

تندی موج با معادلهٔ ۳۲-۱۳ به طول موج و بسامد مربوط است، *ولی این تندی توسط ویژگیهای محیط به وجود آمده است.* اگر موج در محیطی مانند آب، هوا، فولاد یا یک ریسمان کشیده حرکت کند، باید باعث شود که ذره‌های محیط موقع گذشتن موج نوسان کنند. برای اینکه این امر روی دهد، محیط باید هم دارای جرم باشد (به طوری که انرژی جنبشی بتواند وجود داشته باشد) و هم کشسانی داشته باشد (به طوری که انرژی پتانسیل بتواند وجود داشته باشد). بنابراین، ویژگیهای جرم و کشسانی محیط مشخص می‌کنند که یک موج با چه سرعتی می‌تواند در محیط حرکت کند. برعکس، باید این امکان وجود داشته باشد که تندی موج را در محیط برحسب این ویژگیها حساب کنیم. این کار را برای یک ریسمان کشیده شده به دو روش انجام می‌دهیم.

تحلیل ابعادی

در تحلیل ابعادی به دقت ابعاد تمام کمیتهای فیزیکی را که به وضع داده شده مربوط‌اند بررسی می‌کنیم تا کمیتهایی را که آنها به دست می‌دهند معین شوند. در این مورد، جرم و کشسانی را برای یافتن تندی v که دارای بعد طول تقسیم بر زمان یا LT^{-1}، است در نظر می‌گیریم.

برای جرم، از جرم عنصر ریسمان که بیانگر جرم m ریسمان تقسیم بر طول l ریسمان است، استفاده می‌کنیم. این نسبت را چگالی خطی μ ریسمان می‌نامیم. پس بعد $\mu = m/l$، جرم تقسیم بر طول، ML^{-1}، است.

نمی‌توانید موجی را در طول ریسمان بفرستید مگر آنکه ریسمان تحت کشش باشد، این بدان معناست که باید ریسمان را کشیده و در دو انتها با نیروهایی محکم ببندیم. کشش τ در ریسمان با بزرگی این دو نیرو برابر است. وقتی موج در طول ریسمان حرکت کند، عنصرهای ریسمان را، به دلیل کشیدگی اضافی که بخشهای مجاور ریسمان به خاطر کشش به یکدیگر وارد می‌کنند، جابه‌جا می‌کند. پس می‌توانیم کشش در ریسمان را به کشیدگی (کشسانی) ریسمان مربوط کنیم. کشش و نیروهای کشیدگی ایجاد شده دارای بعد نیرو هستند- یعنی، MLT^{-2} (از $F=ma$).

هدف در اینجا این است که μ (با بعد ML^{-1}) و τ (با بعد MLT^{-2}) را طوری ترکیب کنیم که v (با بعد LT^{-1}) حاصل شود. کمی دستکاری در ترکیبهای مختلف به دست می‌دهد.

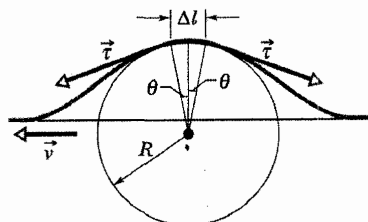
$$V = C\sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \qquad (۳۲-۲۲)$$

که در آن C ثابتی بدون بعد است که با تحلیل ابعادی نمی‌توان آن را به دست آورد. در رهیافت دوم برای تعیین تندی موج، خواهید دید که معادلهٔ ۳۲-۲۲ در واقع درست و $C=1$ است.

یافتن V از قانون دوم نیوتون

به جای موج سینوسی شکل ۳۲-۱ ب، یک تپ متقارن تنها را مانند شکل ۳۲-۱۰ در نظر می‌گیریم که در طول ریسمان از راست به چپ با تندی v حرکت می‌کند. برای سادگی، چارچوب مرجعی را در نظر می‌گیریم که در آن تپ ساکن بماند؛ یعنی، با تپ حرکت می‌کنیم به طوری که ثابت به نظر برسد. در این چارچوب، دیده می‌شود که ریسمان شکل ۳۲-۱۰ با تندی v از راست به چپ از ما می‌گذرد.

یک عنصر کوچک ریسمان به طول Δl از تپ را در نظر بگیرید، عنصری که قوسی از دایره‌ای به شعاع R و دارای زاویهٔ 2θ در مرکز دایره را تشکیل می‌دهد. نیروی $\vec{\tau}$ با بزرگی برابر با کشش در ریسمان به طور مماسی دو انتهای عنصر را می‌کشد. مؤلفه افقی این نیروها با یکدیگر را خنثی می‌کنند، اما مؤلفه‌های



شکل ۳۲-۱۰ یک تپ متقارن، از دید یک چارچوب مرجع که در آن تپ ساکن است و به نظر می‌رسد که ریسمان با تندی v از راست به چپ حرکت می‌کند. با استفاده از قانون دوم نیوتن برای یک عنصر ریسمان به طول Δl واقع در بالای تپ، تندی v را پیدا کنیم.

قائم با هم جمع می‌شوند و نیروی بازگرداننده شعاعی $\vec{F}$ را تشکیل می‌دهند. بزرگی F برابر است با

$$F = ۲(\tau \sin\theta) \approx \tau(۲\theta) = \tau\frac{\Delta l}{R} \quad \text{(نیرو)} \qquad (۳۲\text{-}۲۳)$$

که در آن برای زاویه‌های کوچک θ در شکل ۳۲-۱۰ تقریب θ به جای $\sin\theta$ را به کار برده‌ایم. در این شکل همچنین از $۲\theta = \Delta l/R$ استفاده شده است. جرم قطعه با رابطهٔ زیر داده می‌شود.

$$\Delta m = \mu\Delta l \quad \text{(جرم)} \qquad (۳۲\text{-}۲۴)$$

که در آن μ چگالی خطی ریسمان است.

در لحظهٔ نشان داده شده در شکل ۳۲-۱۰، عنصر ریسمان Δl در قوسی از یک دایره حرکت می‌کند. پس شتاب رو به مرکز این دایره با رابطهٔ زیر داده می‌شود.

$$a = \frac{V^۲}{R} \quad \text{(شتاب)} \qquad (۳۲\text{-}۲۵)$$

معادله‌های ۳۲-۲۳، ۳۲-۲۴ و ۳۲-۲۵ شامل اجزای قانون دوم نیوتن هستند. با ترکیب آنها به شکل

شتاب× جرم= نیرو

خواهیم داشت

$$\frac{\tau\Delta l}{R} = (\mu\Delta l)\frac{V^۲}{R}$$

حل این معادله برای تندی v به دست می‌دهد.

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad \text{(تندی)} \qquad (۳۲\text{-}۲۶)$$

که هرگاه C در آن معادله یک در نظر گرفته شود، دقیقاً با معادلهٔ ۳۲-۲۲ سازگار است. معادلهٔ ۳۲-۲۶ تندی تپ را در شکل ۳۲-۱۰ و تندی هر موج دیگر در همان ریسمان و با همان کشش را نشان می‌دهد.

معادله ۳۲-۲۶ حاکی از آن است که:

> تندی موج در طول یک ریسمان آرمانی کشیده شده فقط به کشش و چگالی خطی ریسمان بستگی دارد و به بسامد موج بستگی ندارد.

بسامد موج کاملاً به چیزی که موج را تولید می‌کند مربوط است (برای مثال، شخص در شکل ۳۲-۱ ب). پس، *طول موج* یک موج بنابر معادلهٔ ۳۲-۱۳ به صورت $\lambda = v/f$ است.

> ✔ **نکته وارسی ۳** با به نوسان درآوردن انتهای یک ریسمان، یک موج پیشرونده را در طول آن می‌فرستید. اگر بسامد نوسان را افزایش دهید، آیا (الف) تندی موج و (ب) طول موج افزایش می‌یابد یا کاهش یا یکسان باقی می‌ماند؟ اگر در عوض، کشش را در ریسمان افزایش دهید آیا (پ) تندی موج و (ت) طول موج افزایش می‌یابد یا کاهش یا یکسان باقی می‌ماند؟

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۲-۴

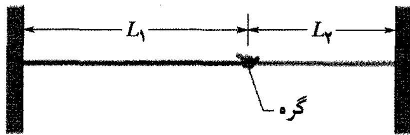
در شکل ۳۲-۱۱، دو ریسمان به هم گره زده شده و سپس به طور کشیده از دو طرف به تکیه‌گاههای ثابتی بسته شده‌اند. ریسمانها دارای چگالی خطی $\mu_۱ = ۱/۴\times۱۰^{-۴}\,\text{kg/m}$ و $\mu_۲ = ۲/۸\times۱۰^{-۴}\,\text{kg/m}$ هستند. طول آنها برابر $L_۱ = ۳/۰\,\text{m}$ و $L_۲ = ۲/۰\,\text{m}$ و ریسمان ۱ تحت کشش ۴۰۰N قرار دارد. به طور همزمان، روی هر ریسمان تپی از تکیه‌گاه به سمت گره ارسال می‌شود. ابتدا کدام تپ به گره می‌رسد؟

نکته‌های کلیدی

۱. زمان t طی شده به وسیلهٔ تپ برای طی کردن طول L برابر است با $t = L/v$، که در آن v تندی ثابت تپ است.

۲. تندی تپ در ریسمان کشیده شده به کشش ریسمان τ و چگالی خطی μ بستگی دارد و با معادلهٔ ۳۲-۲۶ $(v = \sqrt{\tau/\mu})$ داده می‌شود.

۳. چون دو ریسمان به هم وصل‌اند، هر دوی آنها باید تحت یک کشش $\tau(=۴۰۰\text{N})$ واقع باشند.



شکل ۳۲-۱۱ دو ریسمان، به طولهای $L_۱$ و $L_۲$ به یکدیگر گره زده شده و بین دو تکیه‌گاه به صورت کشیده، بسته شده‌اند.

محاسبه‌ها: با در نظر گرفتن این سه نکته با هم، مدت زمانی که طول می‌کشد تا تپ در ریسمان ۱ به گره برسد به دست می‌آید،

$$t_۱ = \frac{L_۱}{V_۱} = L_۱\sqrt{\frac{\mu_۱}{\tau}} = (۳/۰\,\text{m})\sqrt{\frac{۱/۴\times۱۰^{-۴}\,\text{kg/m}}{۴۰۰\text{N}}}$$
$$= ۱/۷۷\times۱۰^{-۳}\,\text{s}$$

به همین ترتیب، داده‌ها برای تپ در ریسمان ۲ به دست می‌دهد.

$$t_۲ = L_۲\sqrt{\frac{\mu_۲}{\tau}} = ۱/۶۷\times۱۰^{-۳}\,\text{s}$$

بنابراین، ابتدا تپ روی ریسمان ۲ به گره می‌رسد.

حال به نکتهٔ کلیدی ۲ برمی‌گردیم. چگالی خطی ریسمان ۲ بیشتر از ریسمان ۱ است، در نتیجه تپ روی ریسمان ۲ باید آهسته‌تر از تپ روی ریسمان ۱ باشد. آیا می‌توانیم جواب را فقط از این واقعیت حدس بزنیم؟ خیر، چون از اولین نکتهٔ کلیدی می‌بینیم که فاصلهٔ طی شده به وسیلهٔ یک تپ نیز حائز اهمیت است.

۳۲-۷ انرژی و توان موج پیشرونده در طول ریسمان

وقتی در یک ریسمان کشیده شده موجی را به وجود می‌آوریم، باید برای حرکت ریسمان انرژی مصرف کنیم. هنگامی که موج از ما دور می‌شود، موج هم انرژی جنبشی و هم انرژی پتانسیل کشسانی را با خود انتقال می‌دهد، هر یک را به ترتیب در نظر می‌گیریم.

انرژی جنبشی

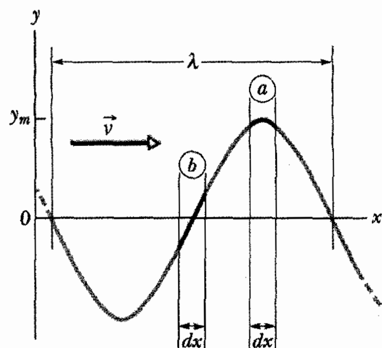
عنصری از ریسمان به جرم dm که به هنگام عبور موج از آن به طور عرضی با حرکت هماهنگ ساده نوسان می‌کند، دارای انرژی جنبشی است که به سرعت عرضی $\vec{u}$ آن بستگی دارد. هنگامی که این عنصر از نقطهٔ $y=0$ می‌گذرد (عنصر b در شکل ۳۲-۱۲)، سرعت عرضی- و در نتیجه انرژی جنبشی آن بیشینه است. هنگامی که این عنصر از نقطهٔ $y=0$ می‌گذرد (عنصر b در شکل ۳۲-۱۲)، سرعت عرضی- و در نتیجه انرژی جنبشی آن بیشینه است. هنگامی که این عنصر از نقطهٔ حدی $y=y_m$ (مثل عنصر a) می‌گذرد، سرعت عرضی- و در نتیجه انرژی جنبشی آن — صفر است.

انرژی پتانسیل کشسانی

برای فرستادن یک موج سینوسی در طول ریسمان مستقیم قبلی، موج باید الزاماً ریسمان را بکشد. وقتی عنصری از ریسمان به طول dx به طور عرضی نوسان می‌کند، اگر این عنصر بخواهد موجی به شکل سینوسی داشته باشد طول آن باید به طور دوره‌ای افزایش یا کاهش یابد. درست نظیر یک فنر، به این تغییرات طول یک انرژی پتانسیل کشسانی وابسته است.
وقتی عنصری از ریسمان در مکان $y=y_m$ قرار دارد (عنصر a در شکل ۳۲-۱۲)، طول آن دارای مقدار آشفته نشدهٔ معمولی dx و بنابراین، انرژی پتانسیل کشسانی آن صفر است. ولی، وقتی این عنصر از مکان $y=0$ بگذرد، بیشینهٔ کشیدگی را دارد و در نتیجه انرژی پتانسیل کشسانی آن بیشنه است.

انتقال انرژی

عنصر نوسان‌کنندهٔ ریسمان در $y=0$ هم دارای انرژی جنبشی بیشینه و هم دارای انرژی پتانسیل کشسانی بیشینه است. در عکس فوری شکل ۳۲-۱۲ ناحیه‌هایی از ریسمان که دارای جابه‌جایی بیشینه‌اند هیچ انرژی ندارند، و ناحیه‌هایی که دارای جابه‌جایی صفرند انرژی بیشینه دارند. وقتی موج در طول ریسمان حرکت می‌کند، نیروهای ناشی از کشش ریسمان به طور پیوسته برای انتقال انرژی از ناحیه‌های با انرژی به ناحیه‌های بدون انرژی کار انجام می‌دهند.
فرض کنید موجی را در ریسمان کشیده شده در راستای محور افقی x برقرار کنیم به طوری که معادلهٔ ۳۲-۲ جابه‌جایی آن را بیان می‌کند. با به نوسان درآوردن پیوستهٔ یک انتهای ریسمان امکان دارد همانند شکل ۳۲-۱ ب موجی را در طول ریسمان ارسال کنیم. با انجام این کار باید به طور پیوسته برای حرکت و کشیدن ریسمان انرژی مصرف کنیم- هنگامی که قسمتهای ریسمان عمود بر محور x نوسان می‌کنند، آنها دارای انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل کشسان هستند. وقتی موج به این قسمتها که قبلاً ساکن بوده‌اند می‌رسد انرژی به این قسمتهای جدید انتقال می‌یابد. بنابراین، می‌گوییم که موج انرژی را در طول ریسمان *منتقل* می‌کند.



شکل ۳۲-۱۲ یک عکس فوری از موج پیشرونده در ریسمان در لحظهٔ $t=0$ عنصر a ریسمان دارای جابه‌جایی $y=y_m$ و عنصر b ریسمان دارای جابه‌جایی $y=0$ است. انرژی جنبشی عنصر ریسمان در هر نقطه به سرعت عرضی آن عنصر بستگی دارد. انرژی پتانسیل به میزان کشیدگی عنصر ریسمان به هنگام عبور از آن بستگی دارد.

آهنگ انتقال انرژی

انرژی جنبشی K مربوط به یک عنصر ریسمان به جرم dm با رابطهٔ زیر داده می‌شود.

$$dK = \frac{1}{2} dm u^2 \qquad (۳۲-۲۷)$$

که در آن u تندی عرضی عنصر نوسان‌کنندهٔ ریسمان است. برای یافتن u، از معادلهٔ ۳۲-۲ در حالی که x را ثابت در نظر می‌گیریم نسبت به زمان مشتق می‌گیریم.

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx-\omega t) \qquad (۳۲-۲۸)$$

با استفاده از این رابطه و با قرار دادن $dm=\mu dx$، معادلهٔ ۳۲-۲۷ را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$dK = \frac{1}{2}(\mu dx)(-\omega y_m)^2 \cos^2(kx-\omega t) \qquad (۳۲-۲۹)$$

با تقسیم کردن معادلهٔ ۳۲-۲۹ بر dt، آهنگی که با آن انرژی جنبشی از یک عنصر ریسمان می‌گذرد و در نتیجه آهنگی که با آن انرژی جنبشی به وسیلهٔ موج در طول ریسمان حمل می‌شود به دست می‌آید. نسبت dx/dt که در سمت راست معادلهٔ ۳۲-۲۹ ظاهر می‌شود، تندی موج v است. پس داریم

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2 \cos^2(kx-\omega t) \qquad (۳۲-۳۰)$$

آهنگ متوسط انتقال انرژی جنبشی عبارت است از

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_{avg} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2 [\cos^2(kx-\omega t)]_{avg} = \frac{1}{4}\mu v \omega^2 y_m^2 \qquad (۳۲-۳۱)$$

در اینجا متوسط روی تعداد درستی از طول موجها گرفته شده و از این واقعیت استفاده شده است که مقدار متوسط مجذور یک تابع کسینوسی روی تعداد درستی از دوره‌های تناوب برابر $\frac{1}{2}$ است.

انرژی پتانسیل کشسانی نیز با موج حمل می‌شود و همان آهنگ متوسط معادلهٔ ۳۲-۳۱ را دارد. اگرچه نمی‌خواهیم این مطلب را ثابت کنیم ولی باید به خاطر داشته باشید که در یک دستگاه نوسان‌کننده مانند آونگ یا دستگاه فنر- قطعه، انرژی جنبشی متوسط و انرژی پتانسیل متوسط یکسان هستند.

توان متوسط که آهنگ متوسطی است که با آن هر دو نوع انرژی به وسیلهٔ موج انتقال می‌یابند عبارت است از

$$p_{avg} = ۲\left(\frac{dK}{dt}\right)avg \qquad (۳۲-۳۲)$$

یا، از معادلهٔ ۳۲-۳۱

$$p_{avg} = \frac{۱}{۲}\mu v\omega^۲ y_m^۲ \quad \text{(توان متوسط)} \qquad (۳۲-۳۳)$$

کمیتهای μ, v در این معادله به جنس ریسمان و کشش آن بستگی دارند. کمیتهای ω, y_m به فرایند تولید موج بستگی دارند. وابستگی توان متوسط یک موج به مجذور دامنهٔ آن و نیز مجذور بسامد زاویه‌ای یک نتیجهٔ کلی و در مورد تمام انواع موج درست است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۲-۵

یک ریسمان کشیده شده دارای چگالی خطی $\mu = ۵۲۵\,\text{g/m}$ است و تحت کشش $\tau = ۴۵\text{N}$ قرار دارد. یک موج سینوسی با بسامد $f = ۱۲۰\,\text{Hz}$ و دامنهٔ $y_m = ۸/۵\text{mm}$ را در طول ریسمان ارسال می‌کنیم. موج با چه آهنگ متوسطی انرژی را منتقل می‌کند؟

نکتهٔ کلیدی بنابر معادلهٔ ۳۲-۳۳ آهنگ متوسط انتقال انرژی برابر است با توان متوسط p_{avg}.

محاسبه‌ها: برای استفاده از این معادله ابتدا باید بسامد زاویه‌ای ω و تندی موج v را حساب کنیم. از معادلهٔ ۳۲-۹ داریم

$$\omega = ۲\pi f = (۲\pi)(۱۲۰\,\text{Hz}) = ۷۵۴\,\text{rad/s}$$

از معادلهٔ ۳۲-۲۶ داریم

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{۴۵\text{N}}{۰/۵۲۵\,\text{kg/m}}} = ۹/۲۶\,\text{m/s}$$

معادلهٔ ۳۲-۳۳ به دست می‌دهد.

$$p_{avg} = \frac{۱}{۲}\mu v\omega^۲ y_m^۲ \qquad \text{(پاسخ)}$$

$$= \left(\frac{۱}{۲}\right)(۰/۵۲۵\,\text{kg/m})(۹/۲۶\,\text{m/s})(۷۵۴\,\text{rad/s})^۲(۰/۰۰۸۵\text{m})^۲$$

$$\approx ۱۰۰\text{W}$$

۳۲-۸ معادلهٔ موج

هنگامی که موجی از هر عنصر روی ریسمان کشیده شده می‌گذرد، عنصر به طور عمود نسبت به جهت پیشروی موج، حرکت می‌کند. با استفاده از قانون دوم نیوتون برای حرکت عنصر، می‌توانیم یک معادلهٔ دیفرانسیلی عمومی به دست آوریم که آن را *معادلهٔ موج* می‌نامند که بر حرکت هر نوع موج حاکم است.

شکل ۳۲-۱۳ الف یک عکس فوری از عنصری به جرم dm و طول l مربوط به یک ریسمان در وقتی را نشان می‌دهد که موج در طول ریسمان با چگالی خطی μ که در امتداد محور افقی x کشیده شده است حرکت می‌کند. فرض کنید که دامنهٔ موج کوچک است به طوری که عنصر وقتی موج از آن می‌گذرد فقط می‌تواند کمی نسبت به محور x متمایل شود. بزرگی نیروی $\vec{F}_۲$ روی انتهای سمت راست عنصر برابر با کشش τ در ریسمان است و کمی به سمت بالا قرار دارد. بزرگی نیروی $\vec{F}_۱$ روی انتهای سمت چپ عنصر نیز برابر با کشش τ ولی کمی به سمت پایین است. به خاطر خمیدگی کم عنصر، این دو نیرو نیروی خالصی را ایجاد می‌کنند که موجب شتاب رو به بالای a_y عنصر می‌شود. با نوشتن قانون دوم نیوتون برای مؤلفهٔ y ($F_{net,y} = ma_y$)، داریم.

$$F_{۲y} - F_{۱y} = dm\,a_y \qquad (۳۲-۳۴)$$

حال کمیتهای مختلف در این معادله را تحلیل می‌کنیم.

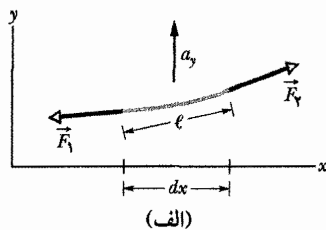
جرم. عنصر جرم dm را می‌توان برحسب چگالی خطی ریسمان μ و طول عنصر ℓ به صورت $dm = \mu\ell$ نوشت. چون عنصر فقط کمی متمایل شده است پس $\ell \approx dx$ (شکل ۳۲-۱۳ الف) و تقریب زیر را داریم

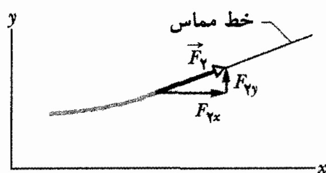
$$dm = \mu dx \qquad (۳۲-۳۵)$$

شتاب. شتاب a_y در معادلهٔ ۳۲-۳۴ مشتق دوم جابه‌جایی y نسبت به زمان است، در نتیجه

$$a_y = \frac{d^۲y}{dt^۲} \qquad (۳۲-۳۶)$$

نیروها. شکل ۳۲-۱۳ ب نشان می‌دهد که $\vec{F}_۲$ در انتهای سمت راست عنصر بر ریسمان مماس است. بنابراین، می‌توانیم مؤلفه‌های نیرو را با رابطهٔ زیر به شیب ریسمان $S_۲$ در انتهای سمت راست مربوط کنیم.





شکل ۳۲-۱۳ (الف) یک عنصر ریسمان وقتی یک موج عرضی سینوسی روی ریسمان کشیده شده حرکت می‌کند. نیروهای $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ در دو انتهای سمت چپ و راست اثر می‌کنند و شتاب $\vec{a}$ را با مؤلفهٔ قائم a_y ایجاد می‌کنند. (ب) نیرو در انتهای سمت راست عنصر در امتداد مماس بر سمت راست عنصر است.

$$\frac{F_{2y}}{F_{2x}} = S_2 \qquad (۳۲-۳۷)$$

همچنین می‌توانیم بزرگی $F_2(=\tau)$ را به صورت زیر به مؤلفه‌ها مربوط کنیم.

$$F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2}$$

یا

$$\tau = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} \qquad (۳۲-۳۸)$$

ولی چون فرض کردیم که عنصر فقط یک کمی متمایل شده است پس $F_{2y} << F_{2x}$، بنابراین معادلهٔ ۳۲-۳۸ را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$\tau = F_{2x} \qquad (۳۲-۳۹)$$

با قرار دادن این در معادلهٔ ۳۲-۳۷ و حل آن برای F_{2y} داریم

$$F_{2y} = \tau S_2 \qquad (۳۲-۴۰)$$

تحلیل مشابهی برای انتهای سمت چپ عنصر ریسمان منجر به رابطهٔ زیر می‌شود.

$$F_{1y} = \tau S_1 \qquad (۳۲-۴۱)$$

حال می‌توانیم معادله‌های ۳۲-۳۵، ۳۲-۳۶، ۳۲-۴۰ و ۳۲-۴۱ را در معادلهٔ ۳۲-۳۴ قرار دهیم و بنویسیم

$$\tau S_2 - \tau S_1 = (\mu dx)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

یا

$$\frac{S_2 - S_1}{dx} = \frac{\mu}{\tau}\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (۳۲-۴۲)$$

چون عنصر ریسمان کوتاه است، شیبهای S_1, S_2 فقط به اندازهٔ مقدار دیفرانسیلی dS تفاوت دارند، که در آن S شیب در هر نقطه و برابر است با

$$S = \frac{dy}{dx} \qquad (۳۲-۴۳)$$

ابتدا در معادلهٔ ۳۲-۴۲، به جای $S_2 - S_1$ مقدار dS را قرار می‌دهیم و سپس با استفاده از معادلهٔ ۳۲-۴۳، dy/dx را به جای S قرار می‌دهیم، در نتیجه داریم

$$\frac{dS}{dx} = \frac{\mu}{\tau}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{d(dy/dx)}{dx} = \frac{\mu}{\tau}\frac{d^2y}{dt^2}$$

و

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\tau}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (۳۲-۴۴)$$

در آخرین مرحله، از نماد مشتقهای جزئی استفاده کرده‌ایم چون در سمت چپ مشتق فقط نسبت به x و در سمت راست مشتق فقط نسبت به t است. سرانجام، با قرار دادن از معادلهٔ ۳۲-۲۶ $(v = \sqrt{\tau/\mu})$ داریم

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{(معادلهٔ موج)} \qquad (۳۲-۴۵)$$

این رابطه معادله دیفرانسیلی عمومی است که بر حرکت هر نوع موج حاکم است.

۳۲-۹ اصل برهم‌نهی برای موجها

گاهی پیش می‌آید که دو یا تعداد بیشتری موج به طور همزمان از یک ناحیه می‌گذرند. برای مثال، وقتی به کنسرتی گوش می‌کنیم موجهای صوتی از سازهای مختلف به طور همزمان به پردهٔ گوش ما می‌رسند. الکترونها در آنتنهای گیرنده‌های رادیو و تلویزیون به علت اثر خالص موجهای الکترومغناطیسی زیادی از مرکزهای فرستندهٔ مختلف به حرکت می‌افتند. آب یک دریاچه یا بندرگاه ممکن است بر اثر موجهای ناشی از تعدادی قایق به شدت تکان بخورد.

فرض کنید که دو موج به طور همزمان در طول یک ریسمان کشیده شده حرکت می‌کنند. فرض کنیم $y_1(x,t)$ و $y_2(x,t)$ جابه‌جاییهای ریسمان ناشی از هر یک از موجها به تنهایی باشد. جابه‌جایی ریسمان وقتی که هر دو موج همپوشانی کنند برابر جمع جبری آنهاست.

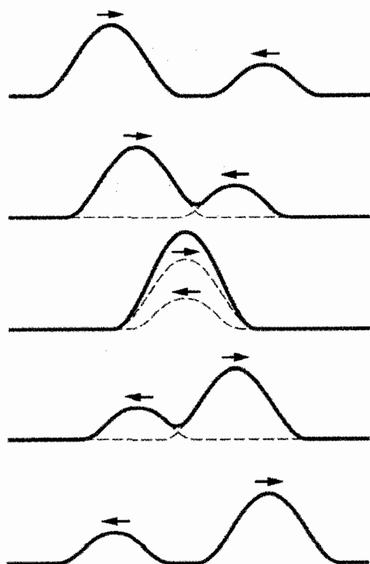
$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \qquad (۳۲-۴۶)$$

این جمع کردن جابه‌جاییها در طول ریسمان بدان معناست که

> جمع جبری موجهای همپوشان یک **موج برایند** (یا موج خالص) ایجاد می‌کند.

این مثال دیگری از اصل برهم‌نهی است که می‌گوید هرگاه چندین اثر به طور همزمان روی دهند، اثر خالص آنها عبارت است از مجموع اثرهای تک تک آنها.

شکل ۳۲-۱۴ تعدادی از عکسهای فوری پی‌درپی از دو تپ را نشان می‌دهد که در جهتهای مخالف در یک ریسمان کشیده شده حرکت می‌کنند. وقتی این تپها همپوشانی کنند، تپ برایند عبارت است از مجموع آنها. افزون بر این تپ به گونه‌ای از



شکل ۳۲-۱۴ دسته‌ای از عکسهای فوری که دو تپ متحرک را در جهتهای مخالف در طول یک ریسمان کشیده شده نشان می‌دهند. اصل برهم‌نهی هنگامی که تپها به یکدیگر می‌رسند به کار می‌رود.

میان دیگران می‌گذرد که گویی دیگران حضور ندارند:

> موجهای همپوشانی کرده به هیچ وجه حرکت سایر موجها را تغییر نمی‌دهند.

۳۲-۱۰ تداخل موجها

فرض کنید دو موج سینوسی با طول موج و دامنهٔ یکسان را در یک جهت در طول ریسمان کشیده‌ای بفرستیم. اصل برهم‌نهی برقرار است. این اصل چه موج برایندی را برای ریسمان پیش‌بینی می‌کند؟

موج برایند به میزانی که موجها نسبت به یکدیگر *همفازند* (همگام‌اند) بستگی دارد، یعنی، به چه میزان یک شکل موج نسبت به شکل موج دیگر انتقال یافته است. اگر موجها دقیقاً همفاز باشند (به طوری که قله‌ها و دره‌های یکی دقیقاً بر قله‌ها و دره‌های دیگری منطبق باشد)، آنها ترکیب می‌شوند و جابه‌جایی هر موج وقتی به تنهایی اثر کند را دو برابر می‌کنند. اگر آنها دقیقاً ناهمفاز باشند (قله‌های یکی درست بر دره‌های دیگری منطبق باشد)، ترکیب آنها در هر جا یکدیگر را خنثی می‌کنند و ریسمان مستقیم می‌ماند. این پدیدهٔ ترکیب موجها را **تداخل** می‌نامیم، و می‌گوییم که موجها **تداخل کرده‌اند**. (این اصطلاحها فقط به جابه‌جاییهای موج اشاره دارند، حرکت موجها بی‌تأثیر می‌ماند.)

فرض کنید موج پیشرونده‌ای در طول ریسمان کشیده شده با رابطهٔ زیر داده شده باشد.

$$y_1(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t) \qquad (۳۲\text{-}۴۷)$$

و موج دیگری که نسبت به اولی انتقال یافته است با رابطهٔ زیر داده شده باشد.

$$y_2(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi) \qquad (۳۲\text{-}۴۸)$$

بسامد زاویه‌ای ω این موجها (و در نتیجه بسامد f آنها)، عدد موج زاویه‌ای k (و در نتیجه طول موج λ) و دامنهٔ y_m آنها یکسان است. هر دو موج در جهت مثبت محور x با تندی v که با معادلهٔ ۳۲-۲۶ داده شده است، حرکت می‌کنند. این موجها فقط در زاویهٔ ثابت ϕ یعنی *ثابت فاز* تفاوت دارند. گفته می‌شود که این موجها به اندازهٔ ϕ *ناهمفازند* یا به اندازهٔ ϕ *اختلاف فاز* دارند، یا یکی به اندازهٔ ϕ نسبت به دیگری *تغییر فاز* دارد.

از اصل برهم‌نهی (معادلهٔ ۳۲-۴۶)، موج برایند جمع جبری دو موج تداخل‌کننده است و جابه‌جایی آن برابر است با

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \qquad (۳۲\text{-}۴۹)$$

$$= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$

در پیوست ث می‌بینیم که می‌توانیم مجموع سینوسهای دو زاویهٔ β, α را به صورت زیر بنویسیم.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \qquad (۳۲\text{-}۵۰)$$

با استفاده از این رابطه در معادلهٔ ۳۲-۴۹ خواهیم داشت

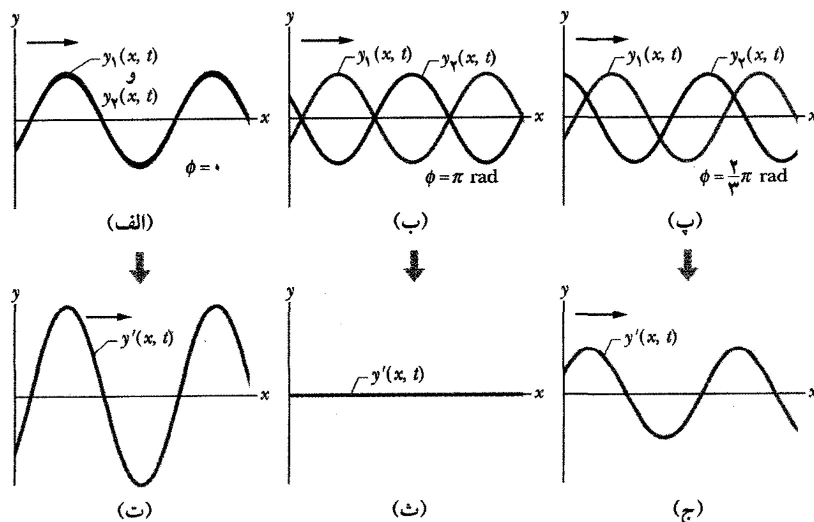
$$y'(x,t) = \left[2y_m \cos\frac{1}{2}\phi\right]\sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right) \qquad (۳۲\text{-}۵۱)$$

همانطور که شکل ۳۲-۱۵ نشان می‌دهد، موج برایند نیز یک موج سینوسی در حال حرکت در جهت افزایش x است. این تنها موجی است که در واقع روی ریسمان دیده می‌شود (دو موج تداخل‌کنندهٔ معادله‌های ۳۲-۴۷ و ۳۲-۴۸ *دیده نمی‌شوند.*)

جابه‌جایی

$$y'(x,t) = \underbrace{\left[2y_m \cos\tfrac{1}{2}\phi\right]}_{\text{بزرگی دامنه را می‌دهد}}\ \underbrace{\sin\left(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\phi\right)}_{\text{جملهٔ نوسانی}}$$

شکل ۳۲-۱۵ موج برایند معادلهٔ ۳۲-۵۱، حاصل از تداخل دو موج عرضی سینوسی، نیز یک موج عرضی سینوسی است با دامنه و جملهٔ نوسان‌کننده.



شکل ۳۲-۱۶ دو موج مشابه سینوسی $y_1(x,t)$ و $y_2(x,t)$ در طول ریسمان در جهت مثبت محور x حرکت می‌کنند. آنها تداخل می‌کنند و موج برایند $y'(x,t)$ را به دست می‌دهند. موج برایند موجی است که در واقع روی ریسمان دیده می‌شود. اختلاف فاز ϕ بین دو موج تداخل کننده برابر است با (الف) $0\ rad$ یا $0°$ ، (ب) $\pi\ rad$ یا $180°$ ، و (پ) $\frac{2}{3}\pi\ rad$ یا $120°$. موجهای برایند مربوط در (ت)، (ث)، و (ج) نشان داده شده‌اند.

اگر دو موج سینوسی با دامنه و طول موج یکسان در طول ریسمان کشیده شده‌ای در یک جهت حرکت کنند، تداخل آنها یک موج سینوسی برایند در حال حرکت در آن جهت ایجاد می‌کند.

موج برایند از دو نظر با موجهای تداخل‌کننده تفاوت دارد: (۱) ثابت فاز آن برابر $\frac{1}{2}\phi$ است، و (۲) دامنهٔ آن y'_m، کمیت داخل کروشه در معادلهٔ ۳۲-۵۱ است.

$$y'_m = \left|2y_m \cos\frac{1}{2}\phi\right| \quad \text{(دامنه)} \qquad (32\text{-}52)$$

اگر $\phi = 0\,\text{rad}$ (یا $0°$) باشد، همانطور که در شکل ۳۲-۱۶ الف دیده می‌شود دو موج تداخل‌کننده دقیقاً همفازند. آنگاه معادلهٔ ۳۲-۵۱ به صورت زیر درمی‌آید.

$$y'(x,t) = 2y_m \sin(kx - \omega t) \qquad (\phi = 0) \qquad (32\text{-}53)$$

این موج برایند در شکل ۳۲-۱۶ ت رسم شده است. توجه کنید که از این شکل و هم از معادلهٔ ۳۲-۵۳ دیده می‌شود که دامنهٔ موج برایند دو برابر دامنهٔ هر یک از موجهای تداخل‌کننده است. این بزرگترین دامنه‌ای است که موج برایند می‌تواند داشته باشد، چون جملهٔ کسینوس در معادله‌های ۳۲-۵۱ و ۳۲-۵۲ در $\phi = 0$ بیشترین مقدار (یک) را دارد. تداخلی که بیشترین دامنهٔ ممکن را ایجاد می‌کند *تداخل کاملاً سازنده* نامیده می‌شود.

اگر $\phi = \pi rad$ (یا $180°$) باشد، موجهای تداخل‌کننده مطابق شکل ۳۲-۱۶ ب، دقیقاً ناهمفازند. در این صورت $\cos\frac{1}{2}\phi$ برابر $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ و دامنهٔ موج برایند که با معادلهٔ ۳۲-۵۱ داده می‌شود برابر صفر است. بنابراین، برای همهٔ مقدارهای x ، t داریم

$$y'(x,t) = 0 \quad (\phi = \pi \text{rad}) \qquad (32\text{-}54)$$

موج برایند در شکل ۳۲-۱۶ ث رسم شده است. اگرچه ما دو موج را در طول ریسمان ارسال کرده‌ایم ولی هیچ حرکتی در ریسمان دیده نمی‌شود. این نوع تداخل را *تداخل کاملاً ویرانگر* می‌نامند.

چون موج سینوسی پس از هر $2\pi\text{rad}$ شکل خود را تکرار می‌کند، اختلاف فاز $\phi = 2\pi$ rad (یا $360°$) مربوط به موجی است که نسبت به موج دیگر به فاصله‌ای برابر با یک طول موج جابه‌جا شده است. بنابراین، اختلاف فازها را می‌توان علاوه بر زاویه‌ها برحسب طول موج نیز بیان کرد. برای مثال، در شکل ۳۲-۱۶ ب می‌توان گفت که موجها به اندازهٔ ۰/۵ طول موج ناهمفازند. جدول ۳۲-۱ مثالهای دیگری از اختلاف فاز و تداخلی را که می‌توانند ایجاد کنند نشان می‌دهد. توجه کنید که هرگاه تداخل نه کاملاً سازنده و نه کاملاً ویرانگر باشد، آن را *تداخل میانه* می‌گویند. در این صورت، دامنهٔ موج برایند بین ۰

جدول ۳۲-۱

اختلاف فازها و انواع تداخل حاصل[1]

اختلاف فاز برحسب				
درجه	رادیان	طول موج	دامنهٔ موج برایند	نوع تداخل
۰	۰	۰	$2y_m$	کاملاً سازنده
۱۲۰	$2\pi/3$	۰/۳۳	y_m	میانه
۱۸۰	π	۰/۵	۰	کاملاً ویرانگر
۲۴۰	$4\pi/3$	۰/۶۷	y_m	میانه
۳۶۰	2π	۱/۰۰	$2y_m$	کاملاً سازنده
۸۶۵	۱۵/۱	۲/۴۰	$0/60\, y_m$	میانه

و $2y_m$ است. برای مثال، از جدول ۳۲-۱، اگر موجهای تداخل‌کننده دارای اختلاف فاز $120°$

$$(\phi = \frac{2}{3}\pi\text{rad} = 0/33 \text{ طول موج})$$

باشد، در این صورت دامنهٔ y_m موج برایند برابر با دامنهٔ موجهای تداخل‌کننده است. (به شکلهای ۳۲-۱۶ ب و ث نگاه کنید).

اگر اختلاف فاز دو موج با طول موج یکسان صفر یا عدد درستی از طول موج باشد، این دو موج همفازند. بنابراین، قسمت درست هر اختلاف فاز را که *با طول موج بیان شده باشد* می‌توان حذف کرد.برای مثال اختلاف فاز ۰/۴۰ طول موج معادل ۲/۴۰ طول موج است و در محاسبه‌ها می‌توان عدد ساده‌تر را به کار برد.

✔ **نکته وارسی ۴** در اینجا چهار اختلاف فاز ممکن دیگر بین دو موج مسئله بالا برحسب طول موج داده شده است: ۰/۲۰، ۰/۴۵، ۰/۶۰، ۰/۸۰. اینها را به ترتیب بزرگی دامنهٔ موج برایند مرتب کنید.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۲-۶

دو موج سینوسی مشابه که در طول یک ریسمان کشیده شده در یک جهت حرکت می‌کنند، با یکدیگر تداخل می‌کنند. دامنهٔ y_m هر موج ۹/۸mm و اختلاف فاز ϕ بین آنها $100°$ است.

(الف) دامنهٔ y'_m موج برایند حاصل از تداخل این دو موج چقدر و نوع تداخل کدام است؟

نکتهٔ کلیدی اینها موجهای سینوسی مشابهی هستند که در طول ریسمان در یک جهت حرکت می‌کنند بنابراین، تداخل آنها یک موج در حال حرکت سینوسی ایجاد می‌کند.

محاسبه‌ها: چون آنها مشابه‌اند دارای *دامنهٔ یکسان* هستند. پس، دامنهٔ y'_m موج برایند با معادلهٔ ۳۲-۵۲ داده می‌شود.

۱. اختلاف فاز بین دو موج مشابه، با دامنهٔ y_m که در یک جهت حرکت می‌کنند.

(پاسخ) $y'_m = \left|2y_m \cos\frac{1}{2}\phi\right| = |(2)(9.8\,mm)\cos(100°/2)|$

$= 13mm$

به دو روش می‌توان گفت که تداخل میانه است. اختلاف فاز بین ۰٫۰°۱۸۰ است و متناظر با آن، دامنهٔ y_m بین ۰ و $2y_m (=19.6mm)$ است.

(ب) برای ایجاد موج برایندی با دامنهٔ ۴/۹mm، اختلاف فاز برحسب رادیان و برحسب طول موج باید چقدر باشد؟

محاسبه‌ها: اکنون y'_m داده شده است و باید ϕ را به دست آوریم. از معادلهٔ ۳۲-۵۲

$$y'_m = \left|2y_m \cos\frac{1}{2}\phi\right|$$

حال داریم

$$4.9mm = (2)(9.8mm)\cos\frac{1}{2}\phi$$

که به دست می‌دهد (ماشین حساب را روی حالت رادیان قرار دهید)

(پاسخ) $\phi = 2\cos^{-1}\dfrac{4.9mm}{(2)(9.8mm)}$

$= \pm 2.636rad \approx \pm 2.6rad$

دو پاسخ وجود دارد چون همین موج برایند را می‌توان با قرار دادن موج اول به صورت پیشرو (حرکت در جلو) یا پس‌رو (حرکت در عقب) نسبت به موج دوم به اندازهٔ ۲/۶rad به دست آورد. برحسب طول موج، اختلاف فاز عبارت است از

(پاسخ) $\dfrac{\phi}{2\pi rad/\text{طول موج}} = \dfrac{\pm 2.636rad}{2\pi rad/\text{طول موج}}$

$= \pm 0.42$

۳۲-۱۱ بردارهای فاز

یک موج ریسمان (یا هر نوع دیگری از موج) را می‌توان به طور برداری با یک بردار فاز نمایش داد. در اصل، بردار فاز برداری است که بزرگی آن برابر با دامنهٔ موج است و حول یک مبدأ می‌چرخد؛ تندی زاویه‌ای بردار فاز برابر با بسامد زاویه‌ای ω موج است. برای مثال، موج

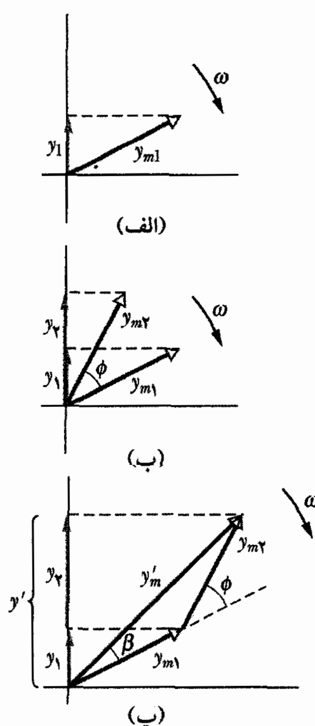
$$y_1(x,t) = y_{m1}\sin(kx - \omega t) \qquad (۳۲\text{-}۵۵)$$

با بردار فاز نشان داده شده در شکل ۳۲-۱۷ الف نمایش داده شده است. بزرگی بردار فاز دامنهٔ y_{m1} موج است. وقتی بردار فاز با تندی زاویه‌ای ω به دور مبدأ می‌چرخد، تصویر y_1 آن روی محور قائم به طور سینوسی از یک نقطهٔ بیشینهٔ y_{m1} تا یک کمینهٔ $-y_m$ تغییر می‌کند و سپس به y_{m1} برمی‌گردد. این تغییر متناظر با تغییر سینوسی در جابه‌جایی y_1 هر نقطه در طول ریسمان است که موج از آن نقطه می‌گذرد.

هنگامی که دو موج در یک ریسمان در یک جهت حرکت می‌کنند، می‌توان این موجها و برایند آنها را با یک *نمودار بردار فاز* نمایش داد. بردار فاز در شکل ۳۲-۱۷ ب معادلهٔ موج ۳۲-۵۵ را نمایش می‌دهد و موج دیگر با رابطهٔ زیر داده می‌شود.

$$y_2(x,t) = y_{m2}\sin(kx - \omega t + \phi) \qquad (۳۲\text{-}۵۶)$$

فاز این موج دوم به اندازهٔ ثابت فاز ϕ نسبت به فاز موج اول تغییر کرده است. چون بردارهای فاز با تندی زاویه‌ای ω یکسانی می‌چرخند، زاویهٔ بین دو بردار فاز همیشه ϕ است. اگر ϕ یک کمیت مثبت باشد در این صورت بردار فاز برای موج ۲، همانطور که در شکل ۳۲-۱۷ ب رسم شده، در حین چرخش از بردار فاز موج ۱ *عقب می‌ماند*. اگر ϕ یک کمیت *منفی* باشد، در این صورت بردار فاز موج ۲ از بردار فاز موج ۱ *جلو می‌افتد*.



شکل ۳۲-۱۷ (الف) یک بردار فاز با بزرگی y_{m1} که با تندی زاویه‌ای ω حول مبدأ می‌چرخد یک موج سینوسی را نمایش می‌دهد. تصویر y_1 بردار فاز روی محور قائم جابه‌جایی نقطه‌ای را نشان می‌دهد که موج از آن می‌گذرد. (ب) بردار فاز دوم، نیز با تندی زاویه‌ای ω اما بزرگی y_{m2} با زاویهٔ ثابت ϕ نسبت به بردار فاز اول می‌چرخد، موج دیگری را با ثابت فاز ϕ نشان می‌دهد. (پ) موج برایند با جمع برداری y'_m دو بردار فاز نشان داده شده است.

چون عدد موج زاویه‌ای k و بسامد زاویه‌ای ω موجهای y_1, y_2 یکسان است، از معادله‌های ۳۲-۵۱ و ۳۲-۵۲ می‌دانیم که برایند آنها به شکل زیر است.

$$y'(x,t) = y'_m \sin(kx - \omega t + \beta) \qquad (۳۲\text{-}۵۷)$$

که در آن y'_m دامنهٔ موج برایند و β ثابت فاز آن است. برای یافتن مقدارهای y'_m, β، همانطور که برای به دست آوردن معادلهٔ ۳۲-۵۱ انجام دادیم، باید مجموع دو موج ترکیب شونده را به دست آوریم. برای انجام این کار روی نمودار بردار فاز، دو بردار فاز را در هر لحظه از چرخش آنها مانند شکل ۳۲-۱۷ پ که در آن بردار فاز y_{m2} از بردار فاز y_{m1} جلو افتاده است، به طور برداری جمع می‌کنیم. بزرگی جمع برداری برابر با دامنهٔ y'_m در معادلهٔ ۳۲-۵۷ است. زاویهٔ بین مجموع برداری و بردار فاز برای y_{m1} برابر ثابت فاز β در معادلهٔ ۳۲-۵۷ است.

توجه کنید که می‌توان از بردارهای فاز برای ترکیب موجها، حتی اگر دامنه‌های آنها متفاوت باشند، استفاده کرد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۲-۷

دو موج سینوسی $y_1(x,t), y_2(x,t)$ با طول موج یکسان با هم در طول یک ریسمان و در یک جهت حرکت می‌کنند. دامنهٔ آنها به ترتیب $y_{m1} = ۴/۰\,\text{mm}$ و $y_{m2} = ۴/۰\,\text{mm}$ و ثابت فاز آنها ۰ و $\pi/۳\text{rad}$ است. دامنهٔ y'_m و ثابت فاز β موج برایند چقدرند؟ موج برایند را به صورت معادلهٔ ۳۲-۵۷ بنویسید.

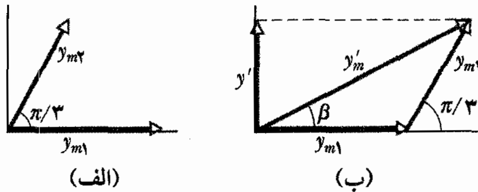
نکتهٔ کلیدی

(۱) دو موج ویژگیهای مشترکی دارند: چون آنها در طول یک ریسمان حرکت می‌کنند باید تندی v یکسانی داشته باشند که این تندی برحسب کشش و چگالی خطی ریسمان با معادلهٔ ۳۲-۲۶ داده می‌شود. با داشتن طول موج یکسان، آنها باید عدد موج زاویه‌ای $k(=۲\pi/\lambda)$ یکسانی داشته باشند. همچنین با داشتن عدد موج k و تندی v یکسان، آنها باید دارای بسامد زاویه‌ای $\omega(=kv)$ یکسانی باشند.

(۲) موجها (آنها را موج ۱ و ۲ می‌نامیم) را می‌توان با بردارهای فاز که دور مبدأ با تندی زاویه‌ای ω یکسانی می‌چرخند نمایش داد. چون ثابت فاز موج ۲ به اندازهٔ $\pi/۳$ بزرگتر از ثابت فاز موج ۱ است، بردار فاز ۲، همانطور که در شکل ۳۲-۱۸ الف نشان داده شده، در چرخش ساعتگرد به مقدار $\pi/۳$ از بردار فاز ۱ عقب است. پس موج برایند حاصل از تداخل موج ۱ و ۲ را می‌توان با بردار فازی که مجموع برداری بردار فاز ۱ و ۲ است نشان داد.

محاسبه‌ها: برای ساده کردن جمع برداری، در شکل ۳۲-۱۸ الف بردارهای فاز ۱ و ۲ را در لحظه‌ای که بردار فاز ۱ در امتداد محور افقی قرار دارد رسم کرده‌ایم. سپس بردار فاز ۲ عقب افتاده را در زاویهٔ مثبت $\pi/۳\text{rad}$ رسم می‌کنیم. در شکل ۳۲-۱۸ ب بردار فاز ۲ را به گونه‌ای جابه‌جا می‌کنیم که انتهای آن در نوک بردار فاز ۱ قرار گیرد. سپس می‌توانیم بردار فاز y'_m موج برایند را از انتهای بردار فاز ۱ به نوک بردار فاز ۲ رسم کنیم. ثابت فاز β، زاویه‌ای است که بردار فاز y'_m با بردار فاز ۱ می‌سازد.

برای یافتن مقدار y'_m, β می‌توانیم مجموع بردارهای فاز ۱ و ۲ را مستقیماً با ماشین حساب با قابلیت برداری (با افزودن برداری با بزرگی ۴/۰ و زاویهٔ ۰rad به برداری با بزرگی ۳/۰ و زاویهٔ $\pi/۳\text{rad}$) به دست آورد یا اینکه بردارها را به صورت مؤلفه‌ای جمع کنیم. برای مؤلفه‌های افقی داریم



شکل ۳۲-۱۸ (الف) دو بردار فاز با بزرگیهای y_{m1} و y_{m2} و اختلاف فاز $\pi/۳$. (ب) جمع برداری این بردارهای فاز در هر لحظه در ضمن چرخش آنها بزرگی y_m را برای موج برایند به دست می‌دهد.

$$y'_{mh} = y_{m1}\cos ۰ + y_{m2}\cos\pi/۳$$
$$= ۴/۰\,\text{mm} + (۳/۰\,\text{mm})\cos\pi/۳ = ۵/۵۰\,\text{mm}$$

برای مؤلفه‌های قائم داریم

$$y'_{mv} = y_{m1}\sin ۰ + y_{m2}\sin\pi/۳$$
$$= ۰ + (۳/۰\,\text{mm})\sin\pi/۳ = ۲/۶۰\,\text{mm}$$

بنابراین دامنهٔ موج برایند برابر است با

$$y'_m = \sqrt{(۵/۵۰\,\text{mm})^۲ + (۲/۶۰\,\text{mm})^۲} \quad \text{(پاسخ)}$$
$$= ۶/۱\text{mm}$$

و ثابت فاز برابر است با

$$\beta = \tan^{-1}\frac{۲/۶۰\,\text{mm}}{۵/۵۰\,\text{mm}} = ۰/۴۴\text{rad} \quad \text{(پاسخ)}$$

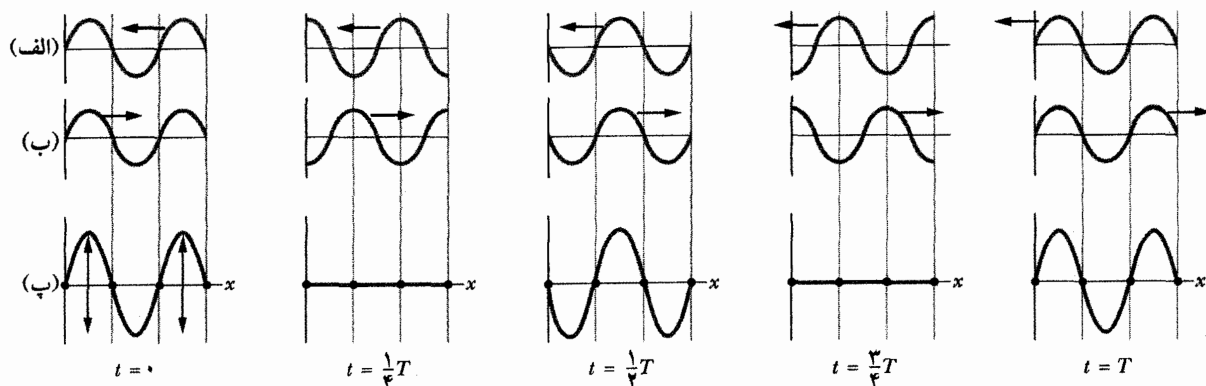
از شکل ۳۲-۱۸ ب، ثابت فاز β یک زاویهٔ مثبت نسبت به بردار فاز ۱ دارد. پس، موج برایند در ضمن حرکت به اندازهٔ ثابت فاز $\beta = ۰/۴۴\text{rad}$ از موج ۱ عقب می‌ماند. از معادلهٔ ۳۲-۵۷، می‌توانیم موج برایند را به صورت زیر بنویسیم.

$$y'_m(x,t) = (۶/۱\text{mm})\sin(kx - \omega t + ۰/۴۴\text{rad}) \quad \text{(پاسخ)}$$

۳۲-۱۲ موجهای ایستاده

در بخش ۳۲-۱۰، در مورد دو موج سینوسی بحث کردیم که طول موج و دامنهٔ آنها یکسان بود و در یک جهت در طول یک ریسمان کشیده شده حرکت می‌کردند. اگر اینها در دو جهت مخالف حرکت کنند چه می‌شود؟ موج برایند را دوباره می‌توان از اصل برهم‌نهی پیدا کرد.

شکل ۳۲-۱۹ این وضعیت را به طور نموداری نشان می‌دهد. این نمودار دو موج ترکیب شونده را نشان می‌دهد که یکی در شکل ۳۲-۱۹ الف به سمت چپ و دیگری در شکل ۳۲-۱۹ ب به سمت راست حرکت می‌کند. شکل ۳۲-۱۹ پ جمع آنها را نشان می‌دهد که با استفاده از اصل برهم‌نهی به طور نموداری به دست آمده است. ویژگی برجستهٔ موج برایند این است که در



شکل ۳۲-۱۹ (الف) پنج عکس فوری از یک موج که به سمت چپ حرکت می‌کند، در زمانهای t در زیر قسمت (پ) نشان داده شده‌اند. (T دورهٔ تناوب نوسان است). (ب) پنج عکس فوری از یک موج مشابه با موج در قسمت (الف) در زمانهای مشابه t که به سمت راست حرکت می‌کنند. (پ) عکسهای فوری مربوط به برهم‌نهی دو موج روی ریسمان. در $t = ۰$، $۱/۲T$ و T تداخل کاملاً سازنده رخ می‌دهد چون قله‌ها با قله‌ها و دره‌ها با دره‌ها بر هم منطبق‌اند. در $t = ۱/۴T$ و $۳/۴\ T$ تداخل کاملاً ویرانگر است چون قله‌ها بر دره‌ها منطبق‌اند. بعضی نقطه‌ها (گره‌ها با نقطه مشخص شده‌اند) هرگز نوسان نمی‌کنند؛ بعضی نقطه‌ها (شکمها) بیشترین نوسانها را دارند.

طول ریسمان مکانهایی وجود دارند که در آنجا ریسمان هرگز حرکت نمی‌کند، این مکانها را **گره** می‌نامند. چهار عدد از چنین گره‌هایی در شکل ۳۲-۱۹ پ با نقطه مشخص شده‌اند. وسط گره‌های مجاور را **شکم** می‌گویند، که دامنهٔ موج برایند در آنجا بیشینه است. نقشهای موج مانند شکل ۳۲-۱۹ پ **موج ایستاده** نامیده می‌شوند زیرا که نقشهای موج به طرف چپ یا راست حرکت نمی‌کنند; محل بیشینه‌ها و کمینه‌ها تغییر نمی‌کند.

> اگر دو موج سینوسی با دامنه و طول موج یکسان در جهت *مخالف* در طول یک ریسمان کشیده شده حرکت کنند، تداخل آنها با یکدیگر یک موج ایستاده ایجاد می‌کند.

برای تحلیل یک موج ایستاده، دو موج ترکیب شونده را با معادله‌های زیر نمایش می‌دهیم

$$y_1(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t) \qquad (۵۸\text{-}۳۲)$$

و

$$y_2(x,t) = y_m \sin(kx + \omega t) \qquad (۵۹\text{-}۳۲)$$

از اصل برهم نهی برای موج مرکب داریم

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$
$$= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t)$$

با استفاده از رابطهٔ مثلثاتی معادلهٔ ۳۲-۵۰ خواهیم داشت

$$y'(x,t) = [2y_m \sin kx]\cos \omega t \qquad (۶۰\text{-}۳۲)$$

که در شکل ۳۲-۲۰ نمایش داده شده است. این معادله یک موج در حال حرکت را توصیف نمی‌کند چون به شکل معادلهٔ ۳۲-۱۷ نیست، بلکه یک موج ایستاده را توصیف می‌کند.

کمیت $2y_m \sin kx$ در داخل کروشهٔ معادلهٔ ۳۲-۶۰ را می‌توان به عنوان دامنهٔ نوسان عنصر ریسمان در نظر گرفت که در مکان x واقع است. ولی، چون دامنه همیشه مثبت است و $\sin kx$ می‌تواند منفی باشد، مقدار مطلق کمیت $2y_m \sin kx$ را دامنه در x در نظر می‌گیریم.

جابه‌جایی

$$y'(x,t) = [2y_m \sin kx]\cos \omega t$$

دامنه در مکان x — جملهٔ نوسانی

شکل ۳۲-۲۰ موج برایند معادلهٔ ۳۲-۶۰ یک موج ایستاده است و از تداخل دو موج سینوسی با دامنه و طول موج یکسان که در جهت مخالف حرکت می‌کنند حاصل می‌شود.

در یک موج سینوسی پیشرونده، دامنهٔ موج برای تمام عنصرهای ریسمان یکسان است. این در مورد موج ایستاده‌ای که دامنهٔ آن برحسب *مکان تغییر می‌کند* درست نیست. برای مثال، در موج ایستادهٔ معادلهٔ ۳۲-۶۰، به ازای مقدارهای kx که $\sin kx = 0$ است، دامنه صفر می‌شود. آن مقدارها عبارت‌اند از

$$kx = n\pi \quad \text{به ازای} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (۶۱\text{-}۳۲)$$

با قرار دادن $k = 2\pi/\lambda$ در این معادله و ترتیب دوباره خواهیم داشت

$$x = n\frac{\lambda}{2} \quad \text{(گره‌ها) به ازای} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (۶۲\text{-}۳۲)$$

که مکانهای دامنهٔ صفر، گره‌ها، برای موج ایستادهٔ معادلهٔ ۳۲-۶۰ هستند. توجه کنید که گره‌های مجاور به اندازهٔ نیم طول موج یعنی، $\lambda/2$ از هم فاصله دارند.

بیشینهٔ مقدار دامنهٔ موج ایستادهٔ معادلهٔ ۳۲-۶۰، برابر $2y_m$ است که به ازای مقدارهایی از kx که به ازای آنها $|\sin kx| = 1$ است به دست می‌آید. این مقدارها عبارت‌اند از

$$kx = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots \qquad (۶۳\text{-}۳۲)$$
$$= \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad \text{به ازای} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

با قرار دادن $k = 2\pi/\lambda$ در ۳۲-۶۳ و ترتیب دوباره خواهیم داشت

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$ به ازای (شکمها) (۳۲-۶۴)

که مکانهای دامنهٔ بیشینهٔ، شکمها، موج ایستاده در معادلهٔ ۳۲-۶۰ را به دست می‌دهند. شکمها از یکدیگر به اندازهٔ نیم طول موج فاصله دارند و در وسط دو گره قرار دارند.

بازتاب موج در مرز

یک موج ایستاده در یک ریسمان کشیده شده را می‌توان با موج پیشرونده و بازتاب آن از انتهای دور سیمان به طوری که موج به عقب برگردد و از خودش بگذرد به وجود آورد. در این حالت موج فرودی (اولیه) و موج بازتابیده را می‌توان به ترتیب با معادله‌های ۳۲-۵۸ و ۳۲-۵۹ توصیف کرد و این موجها پس از ترکیب نقشی از موجهای ایستاده را تشکیل می‌دهند.

در شکل ۳۲-۲۱ از یک تپ برای نمایش چگونگی ایجاد بازتاب استفاده می‌کنیم. در شکل ۳۲-۲۱ الف یک ریسمان در انتهای چپ خود ثابت شده است. وقتی تپ به این انتها می‌رسد، نیرویی رو به بالا بر تکیه‌گاه (دیوار) وارد می‌کند. بنابر قانون سوم نیوتون، تکیه‌گاه نیز نیرویی برابر و در جهت مخالف بر ریسمان وارد می‌کند. این نیروی دوم در تکیه‌گاه تپی را ایجاد می‌کند که در جهت مخالف تپ فرودی در طول ریسمان به عقب حرکت می‌کند. در بازتاب «سخت» از این نوع، در نقطهٔ تکیه‌گاه باید یک گره وجود داشته باشد چون ریسمان در آنجا ثابت شده است. تپهای بازتابیده و فرودی دارای علامتهای مخالف‌اند، پس اثر یکدیگر را در آن نقطه از بین می‌برند.

در شکل ۳۲-۲۱ ب؛ انتهای چپ ریسمان به حلقهٔ سبکی بسته شده است که می‌تواند بدون اصطکاک در راستای میله به طور آزادانه بلغزد. وقتی تپ فرودی به آنجا برسد حلقه به بالای میله حرکت می‌کند. وقتی حلقه حرکت کند، ریسمان را می‌کشد و با کشیدن ریسمان یک تپ بازتابیده با همان علامت و دامنه مانند تپ فرودی ایجاد می‌کند. بنابراین، در چنین بازتاب «نرمی» تپهای فرودی و بازتابیده یکدیگر را تقویت می‌کنند و در انتهای ریسمان شکم ایجاد می‌شود؛ بیشینهٔ جابه‌جایی حلقه دو برابر دامنهٔ هر یک از تپهاست.

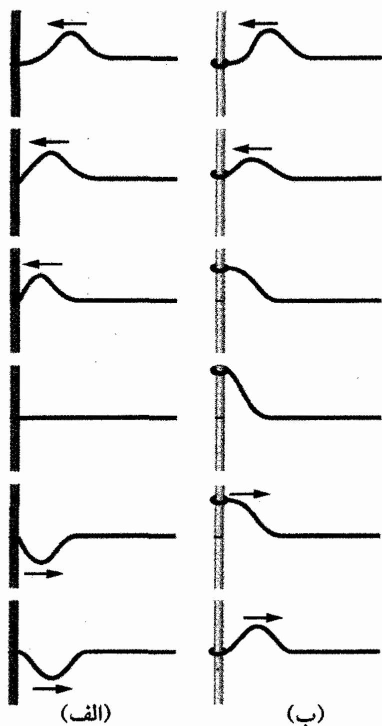
✔ نکته وارسی ۵ دو موج با دامنه و طول موج یکسان در سه وضعیت مختلف برای ایجاد موجهای برایندی با معادله‌های زیر تداخل می‌کنند.

(۱) $y'(x,t) = 4\sin(5x - 4t)$

(۲) $y'(x,t) = 4\sin(5x)\cos(4t)$

(۳) $y'(x,t) = 4\sin(5x + 4t)$

در کدامیک از این وضعیتها دو موج ترکیب شونده (الف) در جهت مثبت x (ب) در جهت منفی x و (پ) در جهتهای مخالف، حرکت می‌کنند؟



شکل ۳۲-۲۱ (الف) تپ فرودی از سمت راست در انتهای چپ ریسمان که به دیوار بسته شده است، بازتابیده می‌شود. توجه کنید که تپ بازتابیده نسبت به تپ فرودی وارون شده است. (ب) در اینجا انتهای چپ ریسمان به حلقه‌ای بسته شده است که می‌تواند بدون اصطکاک به بالا و پایین میله آزادانه بلغزد. حالا تپ بدون وارون شدن بازتابیده می‌شود.

۳۲-۱۳ موجهای ایستاده و تشدید

ریسمانی را مانند سیم گیتار در نظر بگیرید که بین دو گیره کشیده شده است. فرض کنید یک موج سینوسی پیوسته با بسامد معین را در طول سیم مثلاً به سمت راست ارسال کنید. وقتی موج به انتهای سمت راست می‌رسد، بازتاب می‌کند و به عقب و سمت چپ برمی‌گردد. وقتی که این موج به انتهای سمت چپ می‌رسد دوباره بازتاب می‌کند و این موج بازتابیدهٔ جدید به سمت راست حرکت می‌کند و با موجهایی که به سمت راست و به سمت چپ حرکت می‌کنند ترکیب می‌شود. به طور خلاصه، در مدت کوتاهی تعداد زیادی از موجهای حرکت کننده ترکیب می‌شوند و با یکدیگر تداخل می‌کنند.

به ازای بسامدهای معینی، تداخل یک نقش موج ایستاده (یا **مد نوسان**) با گره‌ها و شکمهایی بزرگ شبیه شکل ۳۲-۲۲ ایجاد می‌کند. گفته می‌شود که چنین موج ایستاده‌ای در وضعیت **تشدید** تشکیل شده و ریسمان در این بسامدهای معین که **بسامدهای تشدیدی** نامیده می‌شوند در حالت **تشدید** است. اگر ریسمان در بسامدی غیر از بسامد تشدیدی نوسان کند، موج ایستاده ایجاد نمی‌شود. در نتیجه تداخل موجی که به راست

می‌رود و موجی که به چپ می‌رود فقط منجر به نوسانهای کوچک (شاید غیرمحسوس) می‌شود.

فرض کنید که یک ریسمان بین دو گیره به فاصلهٔ ثابت L کشیده شده است. برای یافتن رابطه‌ای برای بسامدهای تشدیدی ریسمان، توجه داریم که باید در هر انتها گره وجود داشته باشد، چون هر انتها ثابت است و نمی‌تواند نوسان کند. ساده‌ترین نقشی که این الزام را فراهم می‌کند در شکل ۳۲-۲۳ الف نشان داده شده است، که ریسمان را در دو وضعیت جابه‌جایی حدی نشان می‌دهد (یکی خط توپر و دیگری خط‌چین که با هم یک "حلقهٔ" منفرد را تشکیل می‌دهند). فقط یک شکم وجود دارد که آن هم در مرکز ریسمان واقع است. توجه کنید که در طول L نصف یک طول موج وجود دارد که آن را طول ریسمان در نظر گرفته‌ایم. پس برای این نقش $\lambda/۲=L$ است. این شرط بیانگر این است که اگر موجهایی که به سمت راست حرکت می‌کنند و موجهایی که به سمت چپ حرکت می‌کنند با تداخل خود این نقش را ایجاد کنند، طول موج آنها باید $\lambda=۲L$ باشد.

دومین نقش سادهٔ دیگر که الزام گره‌ها را در دو سر ثابت برآورده می‌کند در شکل ۳۲-۲۳ ب نشان داده شده است. این نقش سه گره و دو شکم دارد و نقش دو- حلقه‌ای گفته می‌شود. برای اینکه موجهایی که به چپ و به راست می‌روند این وضع را ایجاد کنند طول موج آنها باید $\lambda=L$ باشد. نقش سوم در شکل ۳۲-۲۳ پ نشان داده شده است. این نقش چهار گره و سه شکم دارد و طول موج آن برابر است با $\lambda=\frac{۲}{۳}L$.

می‌توان این کار را با نقشهای پیچیدهٔ بیشتری ادامه داد. در هر مرحلهٔ بعدی، هر نقش از مرحلهٔ قبل یک گره و یک شکم بیشتر دارد و یک $\lambda/۲$ در فاصلهٔ L اضافه می‌شود.

بنابراین، با یک موج با طول موجی برابر یکی از مقدارهای زیر؛ می‌توان یک موج ایستاده را روی ریسمانی به طول L ایجاد کرد.

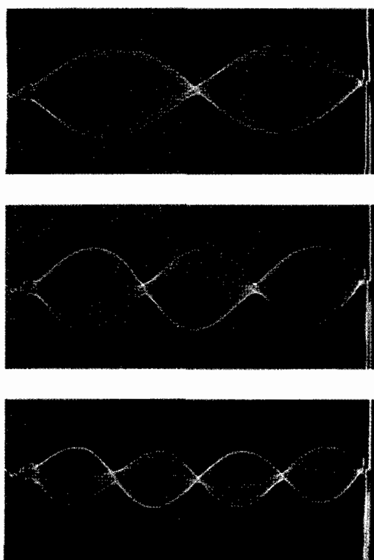
$$\lambda=\frac{۲L}{n} \quad \text{به ازای } n=۱,۲,۳,.... \qquad (۳۲\text{-}۶۵)$$

بسامدهای تشدیدی مربوط به این طول موجها از معادلهٔ ۳۲-۱۳ به دست می‌آیند.

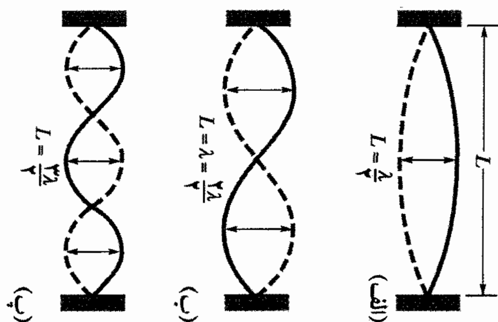
$$f=\frac{v}{\lambda}=n\frac{v}{۲L} \quad \text{به ازای } n=۱,۲,۳,..... \qquad (۳۲\text{-}۶۶)$$

در اینجا v، تندی موج پیشرونده روی ریسمان است.

معادلهٔ ۳۲-۶۶ حاکی از آن است که بسامدهای تشدیدی مضربهای درستی از پایینترین بسامد تشدیدی $f=v/۲L$ هستند، که متناظر با $n=۱$ است. مد نوسان با این پایینترین بسامد را **مد اصلی** یا **هماهنگ اول** می‌نامند. **هماهنگ دوم** مد نوسان با $n=۲$ است، هماهنگ سوم با $n=۳$ است و نظایر آن. بسامدهای مربوط به این مدها را با $f_۱$، $f_۲$، $f_۳$ و نظایر آن نمایش می‌دهند. مجموعه‌ای از کلیهٔ مدهای ممکن نوسان را **سری هماهنگ** می‌نامند و n **شمارهٔ هماهنگ** n امین هماهنگ نامیده می‌شود.



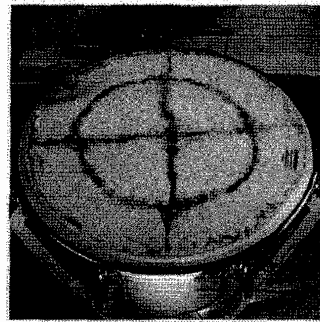
شکل ۳۲-۲۲ عکسهای استروبوسکوپی، نقشهای موج ایستادهٔ (ناقص) را در ریسمانی که یک ارتعاش کننده در انتهای چپ آن را به نوسان واداشته است، آشکار می‌کند. این نقشها در بسامدهای معینی از نوسان پیش می‌آیند.



شکل ۳۲-۲۳ ریسمانی که بین دو گره کشیده شده در نقشهای موج ایستاده به نوسان انداخته شده است. (الف) ساده‌ترین نقش ممکن یک حلقه است که به شکل مرکب تشکیل شده توسط ریسمان در جابه‌جاییهای حدی خود اشاره دارد. (خط پر و خط‌چین). (ب) ساده‌ترین نقش بعدی دو حلقه دارد. (پ) نقش بعدی سه حلقه دارد.

در مورد یک ریسمان تحت کششی معین، هر بسامد تشدید متناظر با یک نقش تشدید خاص است. بنابراین اگر بسامد در گسترهٔ شنوایی باشد، می‌توانید شکل ریسمان را بشنوید.

پدیدهٔ تشدید می‌تواند در دو بعد (برای مثال، شکل ۳۲-۲۴ یک نقش موج ایستاده دوبعدی را روی پوستهٔ نوسان‌کنندهٔ یک طبل نشان می‌دهد.) یا در سه بعد (مانند لغزش ساختمان بلندی که بر اثر برخورد باد می‌لرزد رخ دهد).



شکل ۳۲-۲۴ یکی از چندین نقش ممکن موج ایستاده روی پوستهٔ یک طبل که به وسیله گرد سیاه پاشیده شده روی آن قابل دیدن شده است. وقتی که طبل توسط یک ارتعاشگر مکانیکی در سمت چپ در بالای شکل با تک بسامدی به نوسان درآید، گرد در گره‌ها جمع می‌شود که در این مثال دوبعدی دایره‌ها و خطهای راست هستند.

پل عابر پیاده و سالن کنسرت

وقتی پل هزاره روی رودخانهٔ تایمز اولین بار به روی عابرین افتتاح شد، در آغاز پل نوسانی نداشت، اثر پای عابرین نیروهای عمودی و افقی روی پل ایجاد می‌کرد که هماهنگ دوم را روی پل به وجود می‌آورد. (که خیلی شبیه هارمونیک دوم در ریسمان بود)، ولی عابرین خیلی کم بودند و قدمهای آنها ناهماهنگ بود. ولی، وقتی تعداد آنها از مقدار معینی بیشتر می‌شد به طور ناگهانی هارمونیک دوم قابل توجه و قدم زدن دشوار می‌شد. برای حفظ تعادل، بسیاری از عابرین گام‌های خود را با تاب خوردن پل همزمان می‌کردند، که خیلی بدتر می‌شد و موجب بسته شدن پل می‌گردید تا اینکه یک وسیلهٔ میراکننده به آن اضافه کردند. (مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱-۳ را ببینید.) وقتی در یک ورزشگاه فوتبال یا در یک سالن کنسرت حاضرین شروع به تاب خوردن یا پایکوبی به صورت هماهنگ کنند نوسان‌های ساختاری مشابهی رخ می‌دهد. شاید بدترین وضع در یک سالن در حال پایکوبی در چراغ آویز سقف به وجود می‌آید. وقتی جمعیت هماهنگ با ضربه‌های موسیقی در حال پایکوبی هستند، در کف تشدید ایجاد می‌شود، که یک تشدید نوعی با بسامد ۲Hz است. این تشدید در وقتی که جمعیت هماهنگ کردن حرکت خود با نوسانها را بیشتر کنند به اندازه‌ای زیاد می‌شود که کف را می‌شکند و فرو می‌ریزد. برای اجتناب از این، ساختمانهای مدرن الزام دارند کف طوری ساخته شود که بسامدهای تشدید کمتر از ۵Hz نباشد.

✓ نکته وارسی ۶ در دسته بسامدهای تشدیدی زیر یک بسامد (کمتر از ۴۰۰Hz) وجود ندارد: ۳۷۵،۳۰۰،۲۲۵،۱۵۰ هرتز. (الف) این بسامد کدام است؟ (ب) بسامد هماهنگ هفتم چقدر است؟

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۲-۸ مهارت خود را تقویت کنید

شکل ۳۲-۲۵ نقشی از نوسان تشدیدی یک ریسمان به جرم $m=۲/۵۰۰g$ و طول $L=۰/۸۰۰m$ را نشان می‌دهد که تحت کشش $\tau=۳۲۵/۰N$ است. طول موج λ موجهای عرضی ایجادکنندهٔ نقش موج ایستاده و عدد هماهنگ n چقدر است؟ بسامد f موجهای ایستاده و نوسانهای عنصرهای در حرکت ریسمان چقدر است؟ بزرگی بیشینهٔ سرعت عرضی u_m عنصری که در مختصهٔ $x=۰/۱۸۰m$ نوسان می‌کند چقدر است؟ (به محور x در شکل توجه کنید) در چه نقطه‌ای در حین نوسان عنصر سرعت عرضی بیشینه است؟

نکته‌های کلیدی

(۱) موجهای عرضی که نقش موج ایستاده را ایجاد می‌کنند باید چنان طول موجی داشته باشد که عدد درست n و نصف طول موج در طول L ریسمان قرار بگیرد.

(۲) بسامد این موجها و نوسانهای عنصرهای ریسمان با معادلهٔ ۳۲-۶۶ $(f=nv/۲L)$ داده می‌شود.

(۳) جابه‌جایی یک عنصر ریسمان به صورت تابعی از مکان x و زمان t با معادلهٔ ۳۲-۶۰ داده می‌شود.

$$y'(x,t)=[۲y_m \sin kx]\cos \omega t \quad (۳۲-۶۷)$$

y
۸/۰۰ mm
x (m)
۰
۰/۸۰۰

شکل ۳۲-۲۵ نوسان تشدیدی یک ریسمان تحت کشش

طول موج و عدد هماهنگ در شکل ۳۲-۲۵، خط توپر که در واقع عکس فوری نوسانهاست، نشان می‌دهد که ۲ طول موج گاهی در طول $L=۰/۸۰۰m$ ریسمان قرار می‌گیرد. پس داریم

$$۲\lambda = L \quad (۳۲-۶۸)$$

یا

$$\lambda=\frac{L}{۲}$$

$$=\frac{۰/۸۰۰m}{۲}=۰/۴۰۰m \quad \text{(پاسخ)}$$

با شمارش تعداد حلقه‌ها (یا نصف طول موجها) در شکل ۳۲-۲۵ ملاحظه می‌کنیم که عدد هماهنگ برابر است با

$$n=۴ \quad \text{(پاسخ)}$$

با مقایسهٔ معادله‌های ۳۲-۶۸ و ۳۲-۶۵ $(\lambda=۲L/n)$ به همین نتیجه می‌رسیم.

بسامد اگر ابتدا تندی f موجها را پیدا کنیم می‌توانیم بسامد موجهای عرضی را از معادلهٔ ۳۲-۱۳ $(v=\lambda f)$ به دست آوریم. این تندی با معادلهٔ ۳۲-۲۶ داده می‌شود. ولی به جای چگالی خطی نامعلوم μ مقدار m/L را قرار دهیم. داریم

$$v=\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}=\sqrt{\frac{\tau}{m/L}}=\sqrt{\frac{\tau L}{m}}$$

$$=\sqrt{\frac{(۳۲۵N)(۰/۸۰۰m)}{۲/۵۰\times۱۰^{-۳}\,kg}}=۳۲۲/۴۹\,m/s$$

با مرتب کردن معادلهٔ ۳۲-۱۶ می‌نویسیم.

$$f=\frac{v}{\lambda}=\frac{۳۲۲/۴۹\,\mathrm{m/s}}{۰/۴۰۰\mathrm{m}}$$

(پاسخ) $$=۸۰۶/۲\mathrm{Hz}\approx ۸۰۶\mathrm{Hz}$$

توجه کنید که با عددگذاری در معادلهٔ ۳۲-۶۶ همین نتیجه به دست می‌آید.

(پاسخ) $$f=m\frac{v}{۲L}=۴\frac{۳۲۲/۴۹\,\mathrm{m/s}}{۲(۰/۸۰۰\mathrm{m})}$$

$$=۸۰۶\mathrm{Hz}$$

توجه کنید که این ۸۰۶Hz نه فقط بسامد موجهایی است که هماهنگ چهارم را ایجاد می‌کنند بلکه بسامد عنصرهای ریسمان است که در شکل ۳۲-۲۵ به طور قائم نوسان می‌کنند. این همچنین بسامد صوتی است که از ریسمان شنیده می‌شود.

سرعت عرضی جابه‌جایی y' عنصر ریسمان واقع در مختصهٔ x با معادلهٔ ۳۲-۶۷ به صورت تابعی از زمان t داده می‌شود. جملهٔ $\cos\omega t$ بستگی زمانی دارد و بنابراین حرکت موج ایستاده را به دست می‌دهد. جملهٔ $۲y_m \sin kx$ میزان حرکت- یعنی دامنه را مشخص می‌کند. بیشترین دامنه در شکم ایجاد می‌شود که در آنجا $۲y_m$ برابر ۱+ یا ۱- است و بنابراین بیشترین دامنه $۲y_m$ است. از شکل ۳۲-۲۵ می‌بینیم که $۲y_m=۴/۰۰\mathrm{m}$ که از آنجا $y_m=۲/۰۰\mathrm{m}$ است.

می‌خواهیم سرعت عرضی را به دست آوریم- سرعت یک عنصر ریسمان موازی با محور y. برای یافتن آن، از معادله ۳۲-۶۷ نسبت به زمان مشتق می‌گیریم.

$$u(x,t)=\frac{\partial y'}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}[(۲y_m \sin kx)\cos\omega t] \qquad (۳۲\text{-}۶۹)$$

$$=[-۲y_m\omega \sin kx]\sin\omega t$$

در این جملهٔ $\sin\omega t$ تغییر با زمان و جملهٔ $-۲y_m\omega\sin kx$ میزان این تغییر را به دست می‌دهند. ما مقدار مطلق این میزان را می‌خواهیم

$$u_m=|-۲y_m\omega\sin kx|$$

برای محاسبهٔ این مقدار برای عنصر واقع در $x=۰/۱۸۰\mathrm{m}$ ابتدا توجه می‌کنیم که

$y_m=۲/۰۰\mathrm{mm}$، $k=۲\pi/\lambda=۲\pi/(۰/۴۰۰\mathrm{m})$ و $\omega=۲\pi f=۲\pi(۸۰۶/۲\mathrm{Hz})$. پس بیشینهٔ تندی عنصر $x=۰/۱۸۰\mathrm{m}$ برابر است با

$$u_m=|-۲(۲/۰۰\times ۱۰^{-۳}\mathrm{m})(۲\pi)(۸۰۶/۲\mathrm{Hz})$$
$$\times\sin\left(\frac{۲\pi}{۰/۴۰۰\mathrm{m}}\times ۰/۱۸۰\mathrm{m}\right)$$

(پاسخ) $$=۶/۲۵\,\mathrm{m/s}$$

برای تعیین اینکه چه موقع عنصر ریسمان این تندی بیشینه را دارد، می‌توانیم معادلهٔ ۳۲-۶۹ را بررسی کنیم. ولی، کمی فکر می‌تواند از کار زیاد جلوگیری کند. عنصر در حرکت هماهنگ ساده است و باید در مکان کاملاً بالا و مکان کاملاً پایین به طور لحظه‌ای متوقف شود. این عنصر موقع حرکت در نقطهٔ وسط نوسان بیشترین تندی را خواهد داشت. درست مثل قطعه در نوسانگر قطعه- فنر.

تدبیرهای حل مسئله

تدبیر ۲: هماهنگهای روی ریسمان

وقتی بخواهیم اطلاعاتی دربارهٔ هماهنگ معینی در یک ریسمان کشیده شده به طول L به دست آوریم، نخست آن هماهنگ را رسم می‌کنیم. (مانند شکل ۳۲-۲۳). اگر برای مثال هماهنگ پنجم را بخواهیم باید پنج حلقه بین نقطه‌های ثابت تکیه‌گاه رسم کنیم. این بدان معناست که پنج حلقه هر کدام به طول $\lambda/۲$ روی هم طول L ریسمان را دربر می‌گیرند. پس، $۵(\lambda/۲)=L$ و $\lambda=۲L/۵$ است. برای به دست آوردن بسامد این هماهنگ می‌توانیم از معادلهٔ ۳۲-۱۳ $(f=v/\lambda)$ استفاده کنیم.

به خاطر بسپارید که طول موج یک هماهنگ فقط به طول L ریسمان بستگی دارد، ولی بسامد به تندی موج v نیز بستگی دارد، که به وسیلهٔ کشش و چگالی خطی ریسمان توسط معادلهٔ ۳۲-۲۶ به دست می‌آید.

بازنگری و خلاصهٔ درس

موجهای عرضی و طولی موجهای مکانیکی فقط در محیطهای مادی وجود دارند و قانونهای نیوتون بر آنها حاکم است. موجهای مکانیکی **عرضی**، مانند موجها در یک ریسمان کشیده شده، موجهایی هستند که در آن ذره‌های محیط عمود بر جهت حرکت موج نوسان می‌کنند. موجهایی که در آن ذره‌های محیط موازی با جهت حرکت موج نوسان کنند موجهای **طولی** هستند.

موجهای سینوسی شکل ریاضی یک موج سینوسی که در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند به صورت زیر است.

$$y(x,t)=y_m\sin(kx-\omega t) \qquad (۳۲\text{-}۲)$$

که در آن y_m **دامنهٔ** موج، k **عدد موج زاویه‌ای**، ω **بسامد زاویه‌ای** و $kx-\omega t$ **فاز** است. **طول موج** λ با این رابطه به k مربوط می‌شود.

$$k=\frac{۲\pi}{\lambda} \qquad (۳۲\text{-}۵)$$

دورهٔ تناوب T و **بسامد** f موج، با رابطهٔ زیر به ω مربوطاند

$$\frac{\omega}{۲\pi}=f=\frac{۱}{T} \qquad (۳۲\text{-}۹)$$

سرانجام **تندی موج** v با رابطهٔ زیر به سایر عوامل مربوط می‌شود.

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \qquad (۱۳-۳۲)$$

معادلهٔ موج پیشرونده هر تابعی به شکل

$$y(x,t) = h(kx \pm \omega t) \qquad (۱۷-۳۲)$$

می‌تواند یک **موج پیشرونده** را نشان دهد که تندی آن با معادلهٔ ۳۲-۱۳ داده می‌شود و شکل موج به شکل ریاضی h بستگی دارد. علامت مثبت نشانهٔ حرکت موج در جهت منفی محور x و علامت منفی نشانهٔ حرکت موج در جهت مثبت است.

تندی موج در ریسمان کشیده شده تندی موج در یک ریسمان کشیده شده با خواص ریسمان مشخص می‌شود. تندی در ریسمان با کشش τ و چگالی خطی μ عبارت است از

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \qquad (۲۶-۳۲)$$

توان توان متوسط یا متوسط آهنگی که انرژی به وسیلهٔ یک موج سینوسی در ریسمان کشیده شده انتقال می‌یابد با رابطهٔ زیر داده می‌شود.

$$P_{avg} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2 \qquad (۳۳-۳۲)$$

برهم‌نهی موجها هرگاه دو یا چند موج از یک محیط بگذرند، جابه‌جایی هر ذره از این محیط عبارت است از جمع جابه‌جاییهایی که تک‌تک موجها در ذره ایجاد می‌کنند.

تداخل موجها دو موج سینوسی که در یک ریسمان **تداخل** می‌کنند، بنابر اصل برهم‌نهی با هم جمع می‌شوند یا یکدیگر را از بین می‌برند. اگر این دو در یک جهت حرکت کنند و دامنهٔ y_m و بسامد (در نتیجه طول موج) آنها یکسان باشد، ولی به اندازهٔ **ثابت فاز** ϕ اختلاف فاز داشته باشند، نتیجه عبارت است از یک موج تنها با همان بسامد.

$$y'(x,t) = \left[2y_m \cos\frac{1}{2}\phi\right]\sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right) \qquad (۵۱-۳۲)$$

اگر $\phi = 0$ باشد، موجها دقیقاً همفازند و تداخل آنها کاملاً سازنده است؛ اگر $\phi = \pi \text{rad}$ باشد، آنها دقیقاً ناهمفازند و تداخل آنها کاملاً ویرانگر است.

بردارهای فاز یک موج $y(x,t)$ را می‌توان با یک **بردار فاز** نمایش داد. بردار فاز برداری است که بزرگی آن برابر با دامنهٔ y_m موج است و با تندی زاویه‌ای برابر با بسامد زاویه‌ای ω موج حول مبدأ می‌چرخد. تصویر بردار فاز چرخان روی یک محور قائم جابه‌جایی y نقطه را در طول حرکت موج به دست می‌دهد.

موجهای ایستاده تداخل دو موج سینوسی مشابه که در جهتهای مخالف در حرکت‌اند موجهای ایستاده ایجاد می‌کنند. موج ایستاده در یک ریسمان با دو سر بسته شده به صورت زیر داده می‌شود.

$$y'(x,t) = [2y_m \sin kx]\cos \omega t \qquad (۶۰-۳۲)$$

موجهای ایستاده با نقطه‌های ثابت با جابه‌جایی صفر **گره** و نقطه‌های ثابت با بیشینهٔ جابه‌جایی **شکم** نامیده می‌شوند.

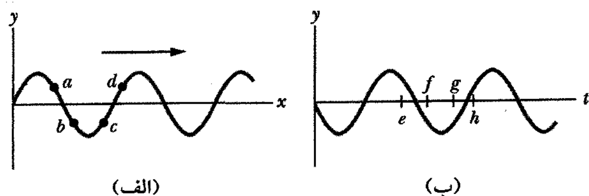
تشدید موجهای ایستاده در یک ریسمان را می‌توان با بازتاب موجهای پیشرونده از انتهای ریسمان ایجاد کرد. اگر یک سر ثابت باشد، این نقطه باید مکان گره باشد. این بسامدهایی را که موجهای ایستاده در یک ریسمان در آنها رخ می‌دهند محدود می‌کند. هر بسامد ممکن یک **بسامد تشدیدی** است و نقش موج ایستادهٔ متناظر با آن **یک مد نوسان** است. در یک ریسمان کشیده شده به طول L با دو سر ثابت، بسامدهای تشدیدی عبارت‌اند از

$$f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2L} \qquad \text{به ازای } n = 1,2,3,\ldots\ldots \qquad (۶۶-۳۲)$$

مد نوسان مربوط به $n=1$، **مد اصلی** یا **هماهنگ اول** نامیده می‌شود. مد مربوط به $n=2$، **هماهنگ دوم** نام دارد و نظایر آن.

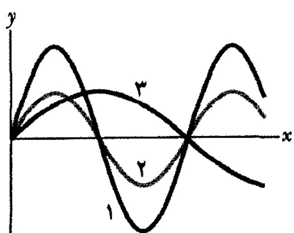
پرسشها

۱- شکل ۳۲-۲۶ الف یک عکس فوری از موجی را نشان می‌دهد که در جهت مثبت محور x در طول ریسمان تحت کششی حرکت می‌کند. چهار عنصر سیم با حروف در آن نقطه‌ها مشخص شده‌اند. برای هر یک از این عنصرها معین کنید که آیا در لحظهٔ عکسبرداری عنصر به بالا حرکت می‌کند یا پایین یا به طور لحظه‌ای ساکن است. (*راهنمایی:* موج را در لحظهٔ عبور از چهار عنصر ریسمان در نظر بگیرید، مثل اینکه ویدئویی از موج را وقتی به طرف راست حرکت می‌کند تماشا می‌کنید.)
شکل ۳۲-۲۶ ب جابه‌جایی عنصر ریسمان واقع در، برای مثال، $x=0$ را برحسب تابعی از زمان به دست می‌دهد. در زمانهایی که با حروف نشان داده شده، آیا عنصر به بالا حرکت می‌کند یا به پایین یا به طور لحظه‌ای ساکن است؟



شکل ۳۲-۲۶ پرسش ۱

۲- شکل ۳۲-۲۷ سه موج را نشان می‌دهد که *به طور جداگانه* در طول ریسمانی که تحت کشش معینی در امتداد محور x قرار دارد، ارسال شده‌اند. موجها را به ترتیب بزرگی (الف) طول موج، (ب) تندی، و (پ) بسامد زاویه‌ای آنها مرتب کنید.



شکل ۳۲-۲۷ پرسش ۲

۳- چهار موج زیر در طول ریسمانهایی با چگالی خطی مشابه حرکت می‌کنند (x برحسب متر و t برحسب ثانیه است). موجها را به ترتیب بزرگی (الف) تندی موج آنها، (ب) کشش در طول ریسمانهایی که در آنها حرکت می‌کنند مرتب کنید.

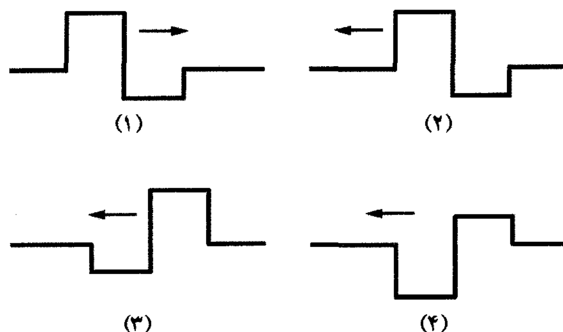
$$y_1 = (3\text{mm})\sin(x - 3t) \quad (1)$$

$$y_2 = (6\text{mm})\sin(2x - t) \quad (2)$$

$$y_3 = (1\text{mm})\sin(4x - t) \quad (3)$$

$$y_4 = (2\text{mm})\sin(x - 2t) \quad (4)$$

۴- در شکل ۳۲-۲۸، موج ۱ دارای یک قلهٔ مستطیلی به ارتفاع ۴ یکا و پهنای d و یک درهٔ مستطیلی به عمق ۲ یکا و پهنای d است. موج در امتداد محور x به سمت راست حرکت می‌کند. گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ موجهای مشابهی هستند که در آنها ارتفاعها، عمقها و پهناها یکسان است و در امتداد همان محور به سمت چپ حرکت می‌کنند و از موج ۱ می‌گذرند. موج ۱ که به سمت راست حرکت می‌کند با یکی از موجهایی که به سمت چپ حرکت می‌کند موقع عبور از یکدیگر با هم تداخل می‌کنند. با کدام موجی که به سمت چپ می‌رود تداخل برای یک لحظه (الف) عمیقترین دره، (ب) خط مستقیم، (پ) قلهٔ تخت به پهنای $2d$ را به دست می‌دهد؟



شکل ۳۲-۲۸ پرسش ۴

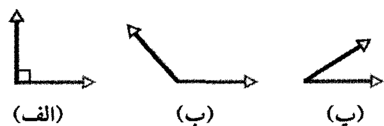
۵- یک موج سینوسی در طول تختی که تحت کشش است ارسال می‌شود و با آهنگ متوسط $P_{avg,1}$ انرژی را منتقل می‌کند. سپس دو موج، مشابه با موج اول در طول نخ ارسال می‌شوند. به طوری که اختلاف فاز ϕ آنها یا ۰/۲ طول موج یا ۰/۵ طول موج است. (الف) فقط با محاسبه‌های ذهنی، این گزینه‌های ϕ را بنابر آهنگ متوسطی که موج انرژی را منتقل می‌کند به ترتیب بزرگی مرتب کنید. (ب) برای اولین انتخاب ϕ، آهنگ متوسط برحسب $P_{avg,1}$ چقدر است؟

۶- دامنه و اختلاف فاز چهار جفت موج با طول موجهای یکسان عبارت‌اند از (الف) $2\text{mm}, 6\text{mm}, \pi\text{rad}$؛ (ب) $3\text{mm}, 5\text{mm}, \pi\text{rad}$؛ (پ) $7\text{mm}, 9\text{mm}, \pi\text{rad}$؛ (ت) $2\text{mm}, 2\text{mm}, 0\text{rad}$. هر جفت در یک جهت و در طول یک ریسمان حرکت می‌کنند. بدون محاسبه، چهار جفت را به ترتیب بزرگی دامنهٔ موج برایند آنها مرتب کنید. (*راهنمایی:* از نمودارهای بردار فاز استفاده کنید.)

۷- اگر با دو موج سینوسی با دامنهٔ یکسان که به طور همفاز در یک ریسمان حرکت می‌کنند، شروع کنید و سپس یکی از آنها به طریقی تغییر فازی برابر ۵/۴ طول موج پیدا کند، چه نوع تداخلی در ریسمان رخ می‌دهد؟

۸- اگر هماهنگ هفتم را در یک ریسمان ایجاد کنید، (الف) چند گره وجود دارند، (ب) آیا در نقطهٔ وسط یک گره، شکم یا حالت میانه وجود دارد؟ اگر سپس هماهنگ ششم را ایجاد کنید، (پ) آیا طول موج تشدیدی از طول موج هماهنگ بلندتر است یا کوتاهتر، و (ت) آیا بسامد تشدیدی بیشتر است یا کمتر؟

۹- شکل ۳۲-۲۹ نمودارهای بردار فاز را برای سه وضعیت نشان می‌دهد که در آن دو موج در طول یک ریسمان حرکت می‌کنند. هر شش موج دامنهٔ یکسانی دارند. وضعیتها را بنابر بزرگی دامنهٔ موج برایند در ریسمان مرتب کنید.



شکل ۳۲-۲۹ پرسش ۹

۱۰- (الف) اگر یک موج ایستاده در ریسمانی با رابطهٔ زیر داده شده باشد

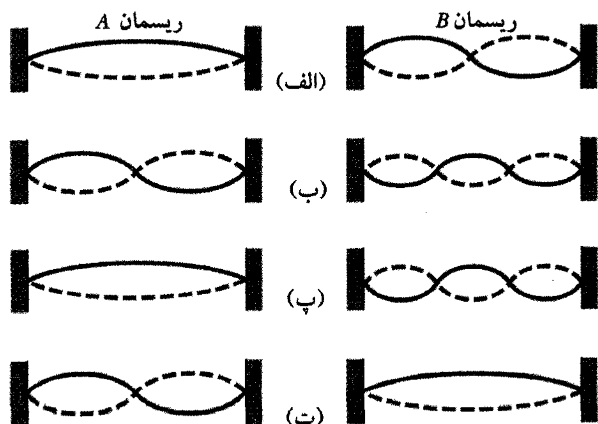
$$y'(t) = (3\text{mm})\sin(5x)\cos(4t)$$

در نوسانهای ریسمان در $x = 0$، آیا گره وجود دارد یا شکم؟ (ب) اگر موج ایستاده با رابطهٔ زیر داده شده باشد

$$y'(t) = (3\text{mm})\sin(5x + \pi/2)\cos(4t)$$

آیا در $x = 0$، گره وجود دارد یا شکم؟

۱۱- طول و چگالی خطی ریسمانهای A, B یکسان است ولی ریسمان B تحت کشش بیشتری نسبت به A قرار دارد. شکل ۳۲-۳۰ چهار وضعیت (الف) تا (ت) را نشان می‌دهد که در آنها نقشهای موج ایستاده در دو ریسمان وجود دارند. در کدام وضعیت این احتمال وجود دارد که ریسمانهای A, B در بسامد تشدیدی یکسانی نوسان کنند؟



شکل ۳۲-۳۰ پرسش ۱۱

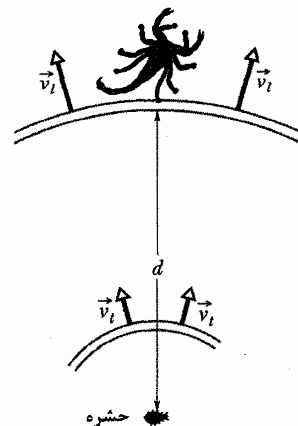
مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس).
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
●●●- تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

بخش ۳۲-۵ تندی موج پیشرونده

●۱- بسامد زاویه‌ای موجی ۱۱۰ rad/s و طول موج آن ۱/۸۰ m است. مطلوب است تعیین (الف) عدد موج زاویه‌ای و (ب) تندی موج.

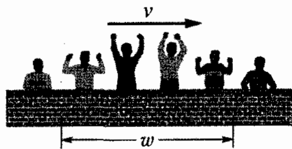
●۲- عقرب صحرایی می‌تواند حرکت حشرهٔ نزدیک به خود (صید خود) را با ارسال موجی در راستای سطح ماسه‌ها آشکار کند (شکل ۳۲-۳۱). این موجها دو دسته‌اند: موجهای عرضی که با سرعت $v_t = ۵۰\ m/s$ و موجهای طولی که با سرعت $v_l = ۱۵۰\ m/s$ حرکت می‌کنند. اگر یک حرکت ناگهانی چنین موجهایی را ارسال کند، عقرب می‌تواند فاصلهٔ حشره را در فاصلهٔ زمانی Δt مدت زمانی که موجها از نزدیکترین پایش به حشره می‌رسند، تشخیص می‌دهد. اگر $\Delta t = ۴/۰\ ms$ باشد، فاصلهٔ حشره چقدر است؟



شکل ۳۲-۳۱ مسئلهٔ ۲

●۳- یک موج سینوسی در طول ریسمانی حرکت می‌کند. زمان لازم برای اینکه یک نقطهٔ خاص از بیشینهٔ جابه‌جایی تا صفر حرکت کند، ۰/۱۷s است. مطلوب است (الف) دورهٔ تناوب و (ب) بسامد موج. (پ) طول موج ۱/۴۰ m است، تندی موج چقدر است؟

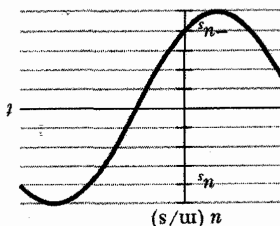
●۴- *موج انسانی* در ضمن مسابقه‌های ورزشی در استادیوم بزرگ پر از جمعیت، تماشاگرها موجی (تپی) را در ورزشگاه می‌فرستند (شکل ۳۲-۳۲). وقتی این موج به گروهی از تماشاگرها می‌رسد، آنها با فریاد از روی صندلی‌ها بلند شده و سپس می‌نشینند. در هر لحظه، پهنای w موج عبارت است از فاصله از لبهٔ جلو (جمعیت در آنجا می‌خواهند بایستند) تا لبهٔ عقب (جمعیت در آنجا می‌خواهند بنشینند). فرض کنید یک موج انسانی فاصلهٔ ۸۵۳ صندلی در یک استادیوم را در مدت ۳۹s بپیماید، که مستلزم این است که تماشاگرها در مدت زمان ۱/۸s به موج عبوری با ایستادن و سپس نشستن پاسخ دهند. (الف) سرعت موج v (برحسب صندلی بر ثانیه) و (ب) پهنا (برحسب تعداد صندلی‌ها) چقدر است؟



شکل ۳۲-۳۲ مسئله ۴

●۵- اگر معادلهٔ $y(x,t) = (۶/۰\ mm)\sin[kx + (۶۰۰\ rad/s)]t + \phi$ بیانگر یک موج پیشرونده در طول ریسمانی باشد، چه مدت طول می‌کشد تا نقطه‌ای روی ریسمان فاصلهٔ بین جابه‌جایی $y = +۲/۰\ mm$ و $y = -۲/۰\ mm$ را طی کند؟

●●۶- شکل ۳۲-۳۳ سرعت عرضی u را برحسب زمان t برای نقطهٔ $x = ۰$ روی ریسمانی که موج از آن عبور می‌کند، نشان می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $u_s = ۴/۰\ m/s$ مشخص شده است. موج به شکل $y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$ است. ϕ چقدر است؟ (*توجه کنید:* ماشین حساب همیشه پاسخ درستی را برای وارونهٔ تابع مثلثاتی به دست نمی‌دهد لذا پاسخ خود را با جایگذاری آن و فرض یک مقدار دلخواه برای ω در $y(x,t)$ و سپس رسم تابع، بیازمایید.)


شکل ۳۲-۳۳ مسئلهٔ ۶

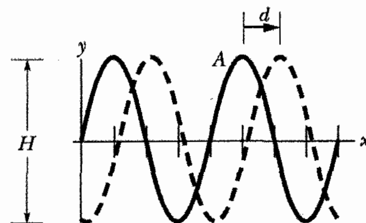
●●۷- تندی یک موج سینوسی با بسامد ۵۰۰Hz برابر ۳۵۰ m/s است. (الف) اختلاف فاز دو نقطه در چه فاصله‌ای از یکدیگر برابر $\pi/۳\ rad$ است؟ (ب) اختلاف فاز بین دو جابه‌جایی در نقطه‌ای معین در زمان $t = ۱/۰۰\ ms$، چقدر است؟ ILW

••۸- معادلهٔ یک موج عرضی که در طول ریسمان خیلی درازی حرکت می‌کند با معادلهٔ $y = ۶/۰ \sin(۰/۲۰ \pi x + ۴/۰ \pi t)$ داده می‌شود، که در آن x , y برحسب سانتی‌متر و t برحسب ثانیه است. تعیین کنید، (الف) دامنه، (ب) طول موج، (پ) بسامد، (ت) تندی، (ث) جهت انتشار موج، و (ج) بیشینهٔ تندی عرضی یک ذره در ریسمان. (خ) در $x = ۳/۵\text{cm}$ و $t = ۰/۲۶$ جابه‌جایی عرضی چقدر است؟

••۹- یک موج سینوسی عرضی با تندی $۸۰\,\text{m/s}$ در طول ریسمانی در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. در $t = ۰$ جابه‌جایی عرضی یک ذره از ریسمان در $x = ۰$ برابر $۱۶\,\text{m/s}$ است. (الف) بسامد موج چقدر است؟ (ب) طول موج چقدر است؟ اگر معادلهٔ موج به شکل $y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t + \phi)$ باشد، (پ) y_m، (ت) k (ث) ω، و (ج) ϕ چقدرند؟ (چ) علامت درست برای ω کدام است؟

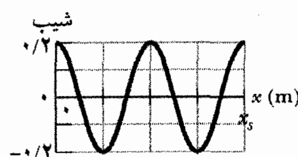
••۱۰- تابع $y(x,t) = (۱۵/۰\,\text{cm})\cos(\pi x - ۱۵\pi t)$ که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است، موجی را در ریسمان سفتی بیان می‌کند. تندی عرضی یک ذره از ریسمان در زمانی که ذره دارای جابه‌جایی $y = +۱۲/۰\,\text{cm}$ است، چقدر است؟

••۱۱- یک موج سینوسی که در طول ریسمانی حرکت می‌کند دو بار در شکل ۳۲-۳۴ نشان داده شده است، به طوری که قلهٔ A در زمان $۴/۰\,\text{ms}$ مسافت $d = ۶/۰\,\text{cm}$ را در جهت مثبت محور x طی می‌کند. فاصلهٔ بین خطهای رسم شده در امتداد محور برابر $۱۰\,\text{cm}$ و ارتفاع $\text{H} = ۶/۰۰\,\text{mm}$ است. اگر معادلهٔ موج به شکل $y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t)$ باشد، مطلوب است (الف) y_m، (ب) k (پ) ω، (ت) علامت درست برای ω .



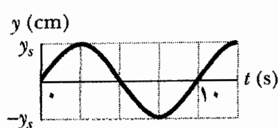
شکل ۳۲-۳۴ مسئلهٔ ۱۱

••۱۲- یک موج سینوسی در طول ریسمانی تحت کشش حرکت می‌کند. شکل ۳۲-۳۵ شیب در طول ریسمان را در زمان $t = ۰$ نشان می‌دهد. مقیاس محور x با $x_s = ۰/۸۰\,\text{m}$ مشخص شده است.



شکل ۳۲-۳۵ مسئلهٔ ۱۲

••۱۳- یک موج سینوسی عرضی با طول موج $۲۰\,\text{cm}$ در طول ریسمانی در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. جابه‌جایی y یک ذره از ریسمان در $x = ۰$ برحسب تابعی از زمان t در شکل ۳۲-۳۶ نشان داده شده است. مقیاس محور عمودی با $y_s = ۴/۰\,\text{cm}$ مشخص شده است. اگر تابع موج به شکل $y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t + \phi)$ باشد (الف) در $t = ۰$، نمودار y برحسب x به شکل تابع سینوسی مثبت است یا منفی؟ مطلوب است (ب) y_m، (پ) k ، (ت) ω، (ث) f (ج) علامت جلوی ω و (چ) تندی موج. (ح) وقتی $t = ۵/۰\,\text{s}$ است، سرعت عرضی ذره در $x = ۰$ چقدر است؟



شکل ۳۲-۳۶ مسئلهٔ ۱۳

بخش ۳۲-۶ تندی موج در ریسمان کشیده شده

•۱۴- کشش سیمی را که بین دو مانع بسته شده است بدون تغییر محسوسی در طول آن دو برابر می‌کنیم. نسبت تندی موج جدید به قدیم برای موجهای عرضی پیشرونده در طول این سیم چقدر است؟

•۱۵- تندی موج عرضی در طنابی به طول $۲/۰۰\,\text{m}$ و جرم $۶۰/۰\,\text{g}$ و تحت کشش با $۵۰۰\,\text{N}$، چقدر است؟ SSM

•۱۶- چگالیهای خطی سنگینترین و سبکترین سیمها در یک ویولن $۳۰\,\text{g/m}$ و $۰/۲۹\,\text{g/m}$ است. نسبت قطر سنگینترین سیم به قطر سبکترین سیم با فرض اینکه از یک جنس ساخته شده باشند، چقدر است؟

•۱۷- جرم بر یکای طول یک ریسمان کشیده شده $۵/۰\,\text{g/cm}$ و کشش آن $۱۰/۰\,\text{N}$ است. دامنهٔ یک موج سینوسی در این ریسمان $۰/۱۲\,\text{mm}$ و بسامد آن $۱۰۰\,\text{Hz}$ است و در جهت منفی محور x حرکت می‌کند. اگر معادلهٔ موج به شکل $y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t)$ باشد، مطلوب است (الف) y_m، (ب) k (پ) ω، (ت) علامت درست ω . SSM WWW

•۱۸- هرگاه کشش ریسمانی $۱۲۰\,\text{N}$ باشد، تندی یک موج عرضی در ریسمان $۱۷۰\,\text{m/s}$ است. برای افزایش تندی موج تا $۱۸۰\,\text{m/s}$، کشش چقدر باید تغییر کند؟

•۱۹- چگالی خطی ریسمانی $۱/۶\times۱۰^{-۴}\,\text{kg/m}$ است. یک موج عرضی روی این ریسمان دارای معادلهٔ زیر است

$$y = (۰/۰۲۱\text{m})\sin[(۲/۰\,\text{m}^{-1})x + (۳۰\,s^{-1})t]$$

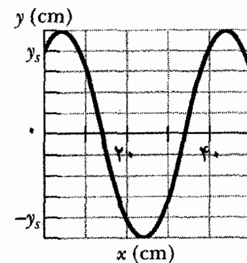
(الف) تندی موج و (ب) کشش در ریسمان چقدر است؟

•۲۰- معادلهٔ موج عرضی در ریسمانی عبارت است از

$$y = (۲/۰\,\text{mm})\sin[(۲۰\,\text{m}^{-1})x - (۶۰۰\,\text{s}^{-1})t]$$

کشش در ریسمان ۱۵N است. (الف) تندی موج چقدر است؟ (ب) چگالی خطی این ریسمان را برحسب گرم بر متر به دست آورید.

●●۲۱- یک موج عرضی سینوسی در طول ریسمانی در جهت منفی محور x حرکت می‌کند. شکل ۳۲-۳۷ نمودار جابه‌جایی را برحسب تابعی از مکان در زمان $t=۰$ نشان می‌دهد، مقیاس محور y با $y_s = ۴/۰\,\text{cm}$ مشخص شده است. کشش ریسمان برابر $۳/۶\text{N}$ و چگالی خطی آن ۲۵g/m است. مطلوب است (الف) دامنه، (ب) طول موج، (پ) تندی موج، و (ت) دورهٔ تناوب. (ث) بیشینهٔ تندی عرضی ذره روی ریسمان. اگر موج به صورت $y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t + \phi)$ باشد، مطلوب است (ج) k (چ) ω و (ح) ϕ. (خ) علامت درست ω. SSM ILW

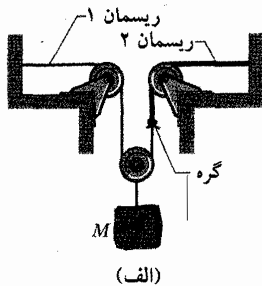


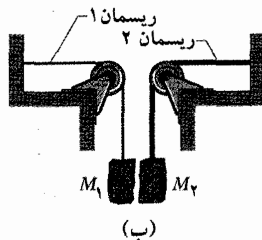
شکل ۳۲-۳۷ مسئله ۲۱

●●۲۲- یک موج سینوسی با تندی $۴۰\,\text{cm/s}$ در ریسمانی حرکت می‌کند. جابه‌جایی ذره‌های ریسمان در $x=۱۰\,\text{cm}$ بنابر رابطهٔ $y=(۵/۰\,\text{cm})\sin[۱/۰-(۴/۰\,\text{s}^{-1})t]$ با زمان تغییر می‌کند. چگالی خطی ریسمان $۴/۰\,\text{g/m}$ است. (الف) بسامد و (ب) طول موج این موج چقدر است؟ اگر معادلهٔ موج به شکل $y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t)$ باشد، مطلوب است (پ) y_m، (ت) k و (ث) ω. (ج) علامت درست ω . (چ) کشش در ریسمان.

●●۲۳- یک انتهای سیمی به جرم ۱۰۰ گرم در $x=۰$ و انتهای دیگرش در $x=۱۰/۰\,\text{m}$ است و تحت کشش $۲۵۰\,\text{N}$ قرار دارد. در لحظهٔ $t=۰$، تپ ۱ از انتهای واقع در $x=۱۰/۰\,\text{m}$ در طول سیم فرستاده می‌شود. در لحظهٔ $t=۳۰/۰\,\text{ms}$، تپ ۲ از انتهای دیگر، در $x=۰$، در طول سیم فرستاده می‌شود. تپها در چه مکان x به هم می‌رسند؟ ILW

●●●۲۴- در شکل ۳۲-۳۸ الف، چگالی خطی ریسمان ۱ برابر با $۳/۰۰\,\text{g/m}$ و چگالی خطی ریسمان ۲ برابر با $۵/۰۰\,\text{g/m}$ است. این ریسمانها تحت کشش ناشی از قطعه‌ای آویزان به جرم $M=۵۰۰\text{g}$ قرار دارند. تندی موج را در (الف) ریسمان ۱ و (ب) ریسمان ۲ حساب کنید. (*راهنمایی:* وقتی ریسمان نیمی به دور قرقره پیچیده است قرقره را با نیروی خالصی که دو برابر کشش در ریسمان است می‌کشد.) سپس قطعه را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم $(M_۱ + M_۲ = M)$ و دستگاه را مطابق شکل ۳۲-۳۸ ب درمی‌آوریم. (پ) $M_۱$ و (ت) $M_۲$ را به گونه‌ای تعیین کنید که تندی در هر دو ریسمان یکسان باشد.





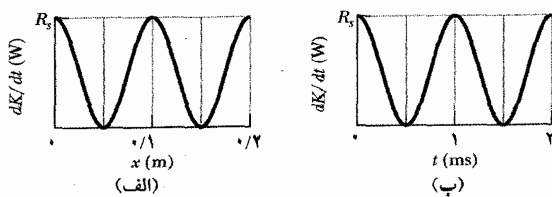
شکل ۳۲-۳۸ مسئلهٔ ۲۴

●●●۲۵- طناب یکنواختی به جرم m و طول L از سقف آویزان است. (الف) نشان دهید که تندی یک موج عرضی در طناب تابعی از y یعنی فاصله از انتهای پایینی است و با رابطهٔ $v=\sqrt{gy}$ داده می‌شود. (ب) نشان دهید که زمان لازم برای حرکت یک موج عرضی در طول طناب با رابطهٔ $t=۲\sqrt{L/g}$ داده می‌شود.

بخش ۳۲-۷ انرژی و توان موج پیشرونده در ریسمان

●۲۶- طول ریسمانی که موجها می‌توانند در آن حرکت کنند ۲/۷۰ و جرم آن $۲۶۰\,\text{g}$ است. کشش در ریسمان $۳۶/۰\,\text{N}$ است. برای اینکه توان متوسط برابر $۸۵/۰\,\text{W}$ باشد، بسامد موجهای پیشرونده با دامنهٔ $۷/۷۰\,\text{mm}$ باید چقدر باشد؟

●●۲۷- یک موج سینوسی در طول ریسمانی با چگالی خطی $۲/۰\,\text{g/m}$ فرستاده می‌شود. وقتی موج حرکت می‌کند، انرژیهای جنبشی عنصرهای جرم در طول ریسمان تغییر می‌کنند. شکل ۳۲-۳۹ الف که برحسب تابعی از مسافت x در طول ریسمان رسم شده، آهنگ dK/dt را که با آن انرژی جنبشی در لحظهٔ معینی از عنصر ریسمان می‌گذرد نشان می‌دهد. شکل ۳۲-۳۹ ب مشابه آن است به جز اینکه این شکل برحسب تابعی از زمان t رسم شده و آهنگی را که با آن انرژی جنبشی از یک عنصر جرم معین (در مکان مشخص) عبور می‌کند به دست می‌دهد. در هر دو شکل، مقیاس روی محور عمودی (آهنگ) با $R_s = ۱۰\,\text{w}$ مشخص شده است. دامنهٔ موج چقدر است؟



شکل ۳۲-۳۹ مسئلهٔ ۲۷

بخش ۳۲-۸ معادلهٔ موج

●۲۸- با استفاده از معادلهٔ موج تندی موج زیر را به دست آورید.

$$y(x,t) = (۳/۰۰\text{mm})\sin[(۴/۰۰\text{m}^{-1})x - (۷/۰۰\text{s}^{-1})t]$$

●●۲۹- با استفاده از معادلهٔ موج تندی موج زیر را به دست آورید.

$$y(x,t) = (۲/۰۰\text{mm})[(۲۰\text{m}^{-1})x - (۴/۰\text{s}^{-1})t]^{۰/۵}$$

●●●۳۰- با استفاده از معادلهٔ موج تندی موج را برحسب تابع عمومی $h(x,t)$ به دست آورید.

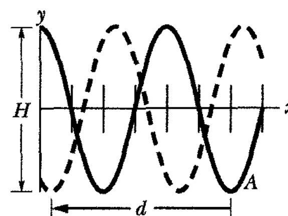
$$y(x,t) = (۴/۰۰\text{mm})h[(۳۰\text{m}^{-1})x + (۶/۰\text{s}^{-1})t]$$

بخش ۳۲-۱۰ تداخل موجها

●۳۱- دو موج پیشروندهٔ مشابه که در یک جهت حرکت می‌کنند دارای اختلاف فاز $\pi/۲$rad هستند. دامنهٔ موج برایند برحسب دامنهٔ مشترک y_m دو موج ترکیب‌شونده چقدر است؟ SSM

●۳۲- اختلاف فاز بین دو موج پیشروندهٔ مشابه که در طول یک ریسمان کشیده شده در یک جهت حرکت می‌کنند و موج مرکبی با دامنهٔ ۵۰ برابر دامنهٔ هر یک از موجهای ترکیب‌شونده ایجاد می‌کنند، چقدر است؟ پاسخ خود را برحسب (الف) درجه، (ب) رادیان، و (پ) طول موج بیان کنید.

●●۳۳- دو موج سینوسی با دامنهٔ یکسان ۹/۰۰mm و طول موج یکسان با هم در طول ریسمانی که در امتداد محور x کشیده شده است، حرکت می‌کنند. موج برآیند آنها در شکل ۳۲-۴۰ در دو حالت، وقتی ذرهٔ A در جهت منفی محور x در ۸/۰ms مسافت $d = ۵۶/۰$cm را طی می‌کند نشان داده شده است. فاصلهٔ بین خطها در امتداد محور x بیانگر ۱۰cm است. فرض کنید معادله برای یک موج به صورت $y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t + \phi_1)$ باشد که در آن $\phi_1 = ۰$ است و علامت درست برای ω را نیز باید شما تعیین کنید. برای معادلهٔ موج دیگر مطلوب است (الف) y_m، (ب) k، (پ) ω، (ت) ϕ_2، و (ث) علامت ω.



شکل ۳۲-۴۰ مسئلهٔ ۳۳

●●●۳۴- یک موج سینوسی با بسامد زاویه‌ای ۱۲۰۰rad/s و دامنهٔ ۳/۰۰mm در طول ریسمانی با چگالی خطی ۲/۰۰g/m و کشش ۱۲۰۰N فرستاده می‌شود. (الف) آهنگ متوسطی که با آن انرژی توسط موج به انتهای دیگر ریسمان منتقل می‌شود، چقدر است؟ (ب) اگر، به طور همزمان، یک موج مشابه در طول ریسمان مشابهی در مجاورت ریسمان اول حرکت کند، آهنگ متوسط کل که با آن انرژی توسط موجها به انتهای دیگر دو ریسمان منتقل می‌شود، چقدر است؟ اگر، در عوض، این دو موج به *طور همزمان* و در *یک ریسمان* فرستاده شوند، آهنگ متوسط کل انتقال انرژی توسط آنها وقتی که اختلاف فاز آنها (پ) ۰، (ت) ۰/۴πrad، و (ث) πrad است، چقدر است؟

بخش ۳۲-۱۱ بردارهای فاز

●۳۵- دو موج سینوسی با بسامد یکسان در یک جهت در طول ریسمانی حرکت می‌کنند. اگر $y_{m1} = ۳/۰$cm، $y_{m2} = ۴/۰$cm، $\phi_1 = ۰$ و $\phi_2 = \pi/۲$rad باشد، دامنهٔ موج برایند چقدر است؟ SSM

●●۳۶- دو موج سینوسی با بسامد یکسان در یک جهت در طول ریسمان محکم شده‌ای فرستاده شده‌اند. دامنهٔ یکی از موجها ۵/۰mm و دامنهٔ دیگری ۸/۰mm است. (الف) کدام اختلاف فاز ϕ_1 بین دو موج منجر به کوچکترین دامنه در موج برایند می‌شود؟ (ب) کوچکترین دامنه چقدر است؟ (پ) کدام اختلاف فاز ϕ_2 منجر به بزرگترین دامنه در موج برایند می‌شود؟ (ت) بزرگترین دامنه چقدر است؟ (ث) اگر اختلاف فاز برابر $(\phi_1 - \phi_2)/۲$ باشد، دامنهٔ موج برایند چقدر است؟

●●۳۷- دو موج سینوسی با دورهٔ تناوب یکسان با دامنه‌های ۵/۰ و ۷/۰mm در یک جهت در طول یک ریسمان کشیده شده حرکت می‌کنند؛ آنها موج برایندی با دامنهٔ ۹/۰mm ایجاد می‌کنند. ثابت فاز موج ۵/۰mm برابر صفر است. ثابت فاز موج ۷/۰mm چقدر است؟

●●۳۸- چهار موج در طول یک ریسمان و در یک جهت فرستاده می‌شوند:

$$y_1(x,t) = (۴/۰۰\text{mm})\sin(۲\pi x - ۴۰۰\pi t)$$
$$y_2(x,t) = (۴/۰۰\text{mm})\sin(۲\pi x - ۴۰۰\pi t + ۰/۷\pi)$$
$$y_3(x,t) = (۴/۰۰\text{mm})\sin(۲\pi x - ۴۰۰\pi t + \pi)$$
$$y_4(x,t) = (۴/۰۰\text{mm})\sin(۲\pi x - ۴۰۰\pi t + ۱/۷\pi)$$

دامنهٔ موج برایند چقدر است؟

●●۳۹- دو موج زیر در طول یک ریسمان حرکت می‌کنند:

$$y_1(x,t) = (۴/۶۰\text{ mm})\sin(۲\pi x - ۴۰۰\pi t)$$
$$y_2(x,t) = (۵/۶۰\text{ mm})\sin(۲\pi x - ۴۰۰\pi t + ۰/۸۰\pi\text{rad})$$

(الف) دامنه و (ب) زاویهٔ فاز (نسبت به موج ۱) موج برایند چقدر است؟ (پ) اگر موج سومی با دامنهٔ ۵/۰۰mm نیز در طول ریسمان در همان جهت دو موج اول فرستاده شود، زاویهٔ فاز آن باید چقدر باشد تا دامنهٔ موج برایند جدید بیشینه باشد؟

بخش ۳۲-۱۳ موجهای ایستاده و تشدید

●۴۰- ریسمانی به طول ۱۲۵cm دارای جرم ۲/۰۰g است. این ریسمان با کشش ۷/۰۰N بین دو تکیه‌گاه ثابت کشیده شده است. (الف) برای این ریسمان تندی موج چقدر است؟ (ب) پایینترین بسامد تشدیدی این ریسمان چقدر است؟

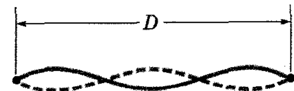
●۴۱- (الف) کوچکترین بسامد، (ب) دومین کوچکترین بسامد، و (پ) سومین کوچکترین بسامد برای موجهای ایستاده روی سیمی که طول آن ۱۰/۰m، جرم آن ۱۰۰g و تحت کشش ۲۵۰N قرار دارد، چقدر است؟ WWW SSM

●۴۲- ریسمان A بین دو گیره به فاصلهٔ L کشیده شده است. ریسمان B با همان چگالی خطی و تحت همان کشش ریسمان A بین دو گیره به فاصلهٔ $4L$ کشیده شده است. اولین هشت هماهنگ ریسمان B را در نظر بگیرید. برای کدامیک از هشت هماهنگ B (در صورت وجود) بسامد آن با بسامد (الف) هماهنگ اول A، (ب) هماهنگ دوم A و (پ) هماهنگ سوم A مطابقت دارد؟

●۴۳- جرم ریسمانی که دو انتهای آن در فاصلهٔ ۸/۴۰m ثابت شده ۰/۱۲۰kg است. این ریسمان تحت کشش ۹۶/۰N قرار دارد و در حال نوسان است. (الف) تندی موجها در ریسمان چقدر است؟ (ب) بلندترین طول موج ممکن برای ایجاد یک موج ایستاده چقدر است؟ (پ) بسامد این موج را به دست آورید. SSM

●۴۴- دو موج سینوسی با طول موجها و دامنه‌های یکسان در جهتهای مخالف در طول ریسمانی با تندی ۱۰cm/s حرکت می‌کنند. اگر بازهٔ زمانی بین دو لحظه که ریسمان مستقیم است برابر با ۰/۵۰s باشد، طول موج این موجها چقدر است؟

●۴۵- چگالی خطی یک تار نایلونی گیتار ۷/۲g/m است و تحت کشش ۱۵۰N قرار دارد. فاصلهٔ دو تکیه‌گاه $D=$ ۹۰cm است. تار با نقش موج ایستادهٔ نشان داده در شکل ۳۲-۴۱ نوسان می‌کند. (الف) تندی، (ب) طول موج و (پ) بسامد موجهای پیشرونده‌ای را که از برهم‌نهی آنها این موج ایستاده حاصل می‌شود، محاسبه کنید. ILW



شکل ۳۲-۴۱ مسئلهٔ ۴۵

●۴۶- ریسمانی که تحت کشش τ_i است در هماهنگ سوم خود با بسامد f_3 نوسان می‌کند، و موجهای روی ریسمان دارای طول موج λ_3 هستند. اگر کشش تا $\tau_f = 4\tau_i$ افزایش یابد و ریسمان دوباره در هماهنگ سوم نوسان کند، در این صورت (الف) بسامد نوسان برحسب f_3 و (ب) طول موج موجها برحسب λ_3، چقدر است؟

●۴۷- ریسمانی که بین دو تکیه‌گاه ثابت به فاصلهٔ ۷۵/۰cm کشیده شده است دارای بسامدهای تشدیدی ۴۲۰ و ۳۱۵Hz است و هیچ بسامد تشدیدی میان اینها وجود ندارد. مطلوب است (الف) پایینترین بسامد تشدیدی و (ب) تندی موج. SSM ILM

●۴۸- اگر یک خط انتقالی در هوای سرد یخ را دور خود جمع کند، افزایش قطر در معرض وزش باد موجب تشکیل گردباد می‌شود. تغییرات فشار هوا در این گردبادها به خصوص اگر بسامد تغییرات با بسامد تشدیدی خط جور باشد، باعث نوسان خط می‌شود. در خطهای دراز، بسامدهای تشدیدی به قدری به هم نزدیک هستند که تقریباً هر تندی بادی می‌تواند مد تشدیدی بطور کافی نیرومندی ایجاد کند که دکلهای نگهدارنده را بیندازد یا موجب اتصال کوتاه خط با خط مجاور شود. اگر طول یک خط انتقال ۳۴۷m، چگالی خطی ۳/۳۵kg/m و کشش آن ۶۵/۲MN باشد، (الف) بسامد مد اصلی و (ب) اختلاف بسامد بین مدهای متوالی چقدر است؟

●۴۹- یکی از بسامدهای هماهنگ برای ریسمان معینی که تحت کشش قرار دارد برابر ۳۲۵Hz است. بسامد هماهنگ بالاتر بعدی برابر ۳۹۰Hz است. بسامد هماهنگ بعدی بالاتر از ۱۹۵Hz کدام بسامد است؟

●●۵۰- طنابی که تحت کشش ۲۰۰N قرار دارد و در دو انتهایش ثابت شده است در هماهنگ دوم موج ایستاده نوسان می‌کند. جابه‌جایی طناب با رابطهٔ زیر داده می‌شود.

$$y = (0/10\,\mathrm{m})(\sin \pi x/2)\sin(12\pi t)$$

که در آن $x=0$ انتهای طناب، x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) طول طناب، (ب) تندی موج در طناب، و (پ) جرم طناب چقدرند؟ اگر طناب در هماهنگ سوم موج ایستاده نوسان کند، دورهٔ تناوب نوسان چقدر خواهد بود؟

●●۵۱- ریسمانی بنابر معادلهٔ زیر نوسان می‌کند

$$y' = (0/50\,\mathrm{cm})\sin\left[\left(\frac{\pi}{3}\mathrm{cm}^{-1}\right)x\right]\cos[(40\pi \mathrm{s}^{-1})t]$$

(الف) دامنه و (ب) تندی دو موجی (که غیر از جهت حرکت مشابه‌اند) را که برهم‌نهی آنها این نوسان را به دست می‌دهد، پیدا کنید. (پ) فاصلهٔ بین دو گره چقدر است؟ (ت) تندی عرضی ذره‌ای از ریسمان واقع در $x = 1/5cm$ در زمان $t=\frac{9}{8}\mathrm{s}$ چقدر است؟

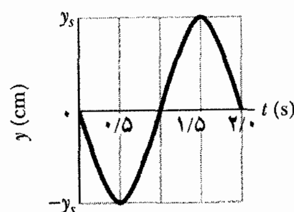
●●۵۲- نقش موج ایستاده در ریسمانی با رابطهٔ زیر بیان شده است

$$y(x,t) = 0/040(\sin 5\pi x)(\cos 40\pi t)$$

که در آن x , y برحسب متر و t برحسب ثانیه است. به ازای $x \geq 0$، مکان گره با (الف) کوچکترین، (ب) دومین کوچکترین، و (پ) سومین کوچکترین مقدار x در کجا واقع است؟ (ت) دورهٔ تناوب حرکت نوسانی هر نقطه (به جز گره) چقدر است؟ (ث) تندی و (ج) دامنهٔ دو موج پیشرونده‌ای که تداخل کرده و این موج را ایجاد می‌کنند چقدر است؟ به ازای $t \geq 0$، (چ) اولین، (ح) دومین، و (خ) سومین زمانی که تمام نقطه‌ها در ریسمان دارای سرعت عرضی صفرند کدام است؟

●●۵۳- دو موج در ریسمانی به طول ۳/۰m برقرار شده‌اند تا یک موج ایستادهٔ سه حلقه‌ای را با دامنهٔ ۱/۰cm ایجاد کنند. تندی موج ۱۰۰m/s است. فرض کنید معادله برای یکی از موجها به شکل $y(x,t) = y_m \sin(kx + \omega t)$ باشد. در معادله برای موج دیگر مطلوب است (الف) y_m، (ب) k (پ) ω، و (ت) علامت ω. SSM WWW

●●۵۴- برای موج ایستادهٔ عرضی معینی در ریسمان، شکم در $x=0$ و گره در $x=0/10\,\text{m}$ قرار دارد. جابه‌جایی $y(t)$ ذره‌ای از ریسمان در $x=0$ در شکل ۳۲-۴۲ نشان داده شده است که در آن مقیاس محور y با $y_s=4/0\,\text{cm}$ مشخص شده است. وقتی $t=0/50\,\text{s}$ است جابه‌جایی ذره‌ای از ریسمان در (الف) $x=0/20\,\text{m}$ و (ب) $x=0/30\,\text{m}$ چقدر است؟ در $x=0/20\,\text{m}$ سرعت عرضی ذرهٔ ریسمان در (پ) $t=0/50\,\text{s}$ و (ت) $t=1/0\,\text{s}$ چقدر است؟ (ث) موج ایستاده را در گسترهٔ $x=0$ تا $x=0/40\,\text{m}$ در $t=0/50\,\text{s}$ رسم کنید.



شکل ۳۲-۴۲ مسئلهٔ ۵۴

●●۵۵- مولدی در یک انتهای ریسمان خیلی دراز موج زیر را تولید می‌کند

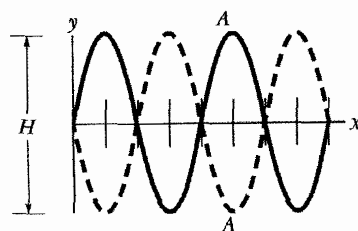
$$y=(6/0\,\text{cm})\cos\frac{\pi}{2}[(2/00\,\text{m}^{-1})x+(8/00\,\text{s}^{-1})t]$$

و مولد دیگری در انتهای دیگر موج زیر را تولید می‌کند

$$y=(6/0\,\text{cm})\cos\frac{\pi}{2}[(2/00\,\text{m}^{-1})x+(8/00\,\text{s}^{-1})t]$$

(الف) بسامد، (ب) طول موج، و (پ) تندی هر موج را حساب کنید. به ازای $x\geq 0$، محل گره‌ای که (ت) کوچکترین، (ث) دومین کوچکترین و (ج) سومین کوچکترین مقدار x را دارد در کجا واقع است؟ به ازای $x\geq 0$، محل شکمی که (چ) کوچکترین، (ح) دومین کوچکترین و (خ) سومین کوچکترین مقدار x را دارد در کجا واقع است؟

●●۵۶- دو موج سینوسی با دامنه و طول موج یکسان با هم در طول ریسمانی که در امتداد محور x کشیده است حرکت می‌کنند. موج برایند آنها که شکم A از حد نهایی جابه‌جایی به سمت بالا به حد نهایی جابه‌جایی به سمت پایین را در $6/0\,\text{ms}$ طی می‌کند در شکل ۳۲-۴۳ نشان داده شده است. خطهای عمودی به فاصلهٔ $10\,\text{cm}$ از هم در امتداد محور مشخص شده‌اند. ارتفاع H برابر با $1/80\,\text{cm}$ است. فرض کنید معادله برای یکی از موجها به شکل $y(x,t)=y_m\sin(kx-\omega t)$ داده شده باشد. در معادله برای موج دیگر مطلوب است (الف) y_m، (ب) k، (پ) ω، و (ت) علامت ω.



شکل ۳۲-۴۳ مسئلهٔ ۵۶

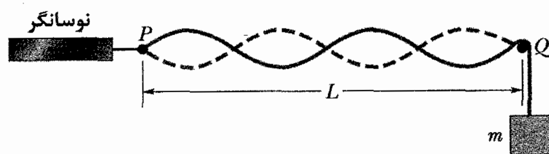
●●۵۷- برای تولید یک موج ایستاده در یک صفحهٔ قائم، دو موج زیر در ریسمانی افقی در جهتهای مخالف فرستاده شده‌اند

$$y_1(x,t)=(6/00\,\text{mm})\sin(4/00\pi x-400\pi t)$$

$$y_2(x,t)=(6/00\,\text{mm})\sin(4/00\pi x-400\pi t)$$

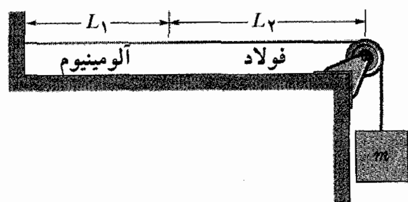
که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. یک شکم در نقطهٔ A قرار دارد. در یک بازهٔ زمانی که این نقطه از بیشینهٔ جابه‌جایی به سمت بالا تا کمینهٔ جابه‌جایی به سمت پایین را طی می‌کند، هر یک از موجها چه مسافتی را در ریسمان طی می‌کنند؟

●●۵۸- در شکل ۳۲-۴۴، ریسمانی به یک نوسانگر سینوسی در نقطهٔ P بسته شده و از روی تکیه‌گاهی در نقطهٔ Q عبور داده می‌شود و توسط قطعه‌ای به جرم m در حالت کشش قرار دارد. فاصلهٔ $L=1/20\,\text{m}$، چگالی خطی $\mu=1/6\,\text{g/m}$ و بسامد نوسانگر $f=120\,\text{Hz}$ است. دامنهٔ حرکت در نقطهٔ P به اندازه‌ای کوچک است که آن نقطه را می‌توان یک گره درنظر گرفت. گرهٔ دیگری در نقطهٔ Q وجود دارد. (الف) جرم m چقدر باید باشد تا نوسانگر پنجمین هماهنگ را در ریسمان تشکیل دهد؟ (ب) اگر $m=100\,\text{kg}$ باشد، در صورت وجود، مد موج ایستاده چیست؟



شکل ۳۲-۴۴ مسئله‌های ۵۸ و ۶۰

●●●۵۹- در شکل ۳۲-۴۵، یک سیم آلومینیومی به طول $L_1=60/0\,\text{cm}$، مساحت مقطع $1/00\times10^{-2}\,\text{cm}^{-2}$ و چگالی $2/60\,\text{g/cm}^3$ به یک سیم فولادی با چگالی $7/80\,\text{g/cm}^3$ و همان سطح مقطع متصل است. قطعه‌ای به جرم $m=10/0\,\text{kg}$ به این سیم مرکب به صورتی بسته شده است که فاصلهٔ L_2 نقطهٔ اتصال تا قرقره نگهدارنده $86/6\,\text{m}$ است. با استفاده از یک منبع خارجی موجهای عرضی با بسامد متغیر در سیم ایجاد می‌شود؛ گره‌ای در قرقره وجود دارد. (الف) پایینترین بسامدی را تعیین کنید که موج ایستاده‌ای را ایجاد کند که یکی از گره‌ها در نقطهٔ اتصال باشد. (ب) چند گره در این بسامد مشاهده می‌شود؟



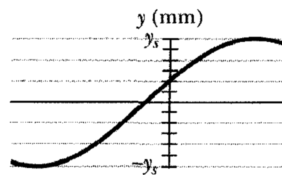
شکل ۳۲-۴۵ مسئلهٔ ۵۹

●●●۶۰- در شکل ۳۲-۴۴، ریسمانی در نقطهٔ p به یک نوسانگر سینوسی بسته شده و از روی تکیه‌گاهی در نقطهٔ Q عبور داده شده و توسط قطعه‌ای به جرم m در حالت کشش قرار دارد. فاصلهٔ L بین نقطهٔ P و نقطهٔ Q، ۱/۲۰m، و بسامد f نوسانگر در ۱۲۰Hz ثابت شده است. دامنهٔ حرکت در نقطهٔ P به اندازه‌ای کوچک است که آن نقطه را می‌توان گره در نظر گرفت. یک گره دیگر نیز در نقطهٔ Q وجود دارد. هرگاه جرم قطعهٔ آویزان ۲۸۶/۱g یا ۴۴۷/۰g باشد، یک موج ایستاده تشکیل می‌شود، ولی در جرمهای میان این دو تشکیل نمی‌شود. چگالی خطی ریسمان چقدر است؟ GO

مسئله‌های اضافی

۶۱- سه موج سینوسی با بسامد یکسان در طول ریسمانی در جهت مثبت محور x حرکت می‌کنند. دامنه‌های آنها به ترتیب $y_1, y_1/2, y_1/3$ و ثابتهای فاز آنها، $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ است.
(الف) دامنه و (ب) ثابت فاز موج حاصل چقدر است؟ (پ) شکل موج حاصل را در $t=0$ رسم و دربارهٔ رفتار آن با افزایش t بحث کنید. **SSM**

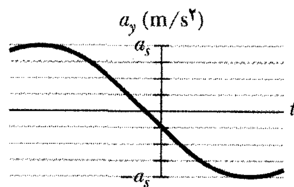
۶۲- شکل ۳۲-۴۶ جابه‌جایی y برحسب زمان t نقطه‌ای در یک ریسمان را در $x=0$ وقتی که موج از آن نقطه می‌گذرد نشان می‌دهد. مقیاس محور y با $y_s = 6/0\,\text{mm}$ مشخص شده است. شکل موج عبارت است از $y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$. مقدار ϕ چقدر است؟ (*توجه کنید:* ماشین حساب همیشه پاسخ درستی از معکوس تابع مثلثاتی به دست نمی‌دهد لذا پاسخ خود را با قرار دادن آن و یک مقدار فرضی برای ω در $y(x,t)$ بیازمایید و سپس تابع را رسم کنید.)



شکل ۳۲-۴۶ مسئلهٔ ۶۲

۶۳- دو موج سینوسی که غیر از فاز از هر جهت مشابه‌اند در طول ریسمانی در یک جهت حرکت می‌کنند و موج برایند $y'(x,t) = (3/0\,\text{mm})\sin(20x - 4/0t + 0/820\,\text{rad})$ را ایجاد می‌کنند که x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) طول موج λ دو موج، (ب) اختلاف فاز بین آنها و (پ) دامنهٔ y_m آنها چقدر است؟

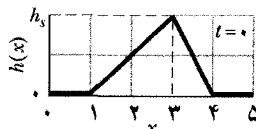
۶۴- در شکل ۳۲-۴۷ شتاب عرضی a_y برحسب زمان t نقطه‌ای در ریسمان را در $x=0$ وقتی که موجی به شکل کلی $y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$ از آن نقطه می‌گذرد، نشان می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $a_s = 400\,\text{m/s}^2$ مشخص شده است. مقدار ϕ چقدر است؟ (*توجه کنید:* ماشین حساب همیشه جواب درستی از معکوس تابع مثلثاتی به دست نمی‌دهد لذا پاسخ خود را با قرار دادن آن و یک مقدار فرضی برای ω در $y(x,t)$ بیازمایید و سپس تابع را رسم کنید.)



شکل ۳۲-۴۷ مسئلهٔ ۶۴

۶۵- یک موج سینوسی پیشرونده در $t=0$ و در $x=0$ روی ریسمان درازی دارای بسامد ۴۴۰rad/s و جابه‌جایی $y = +4/5\,\text{mm}$ و سرعت عرضی $u = -0/75\,\text{m/s}$ است. اگر شکل کلی موج به صورت $y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t - \phi)$ باشد، ثابت فاز ϕ چقدر است؟

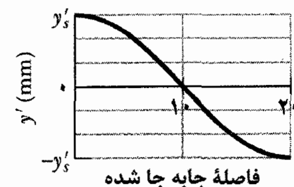
۶۶- یک تپ تنها که شکل موج آن با تابع $h(x - 5/0t)$ داده شده، به ازای $t=0$ در شکل ۳۲-۴۸ نشان داده شده است. مقیاس محور عمودی با $h_s = 2$ مشخص شده است. در اینجا x برحسب سانتی‌متر و t برحسب ثانیه است. مطلوب است (الف) تندی و (ب) جهت حرکت تپ. (پ) به ازای $t = 2\text{s}$ تابع $h(x - 5t)$ را برحسب x رسم کنید. (ت) تابع $h(x - 5t)$ را برحسب t به ازای $x = 10\,\text{cm}$ رسم کنید.



شکل ۳۲-۴۸ مسئلهٔ ۶۶

۶۷- به وسیلهٔ میله‌ای که به فاصلهٔ ۱/۰cm بالا و پایین می‌رود در انتهای ریسمان دراز افقی موج سینوسی عرضی ایجاد می‌شود. حرکت پیوسته است و به طور مرتب هر ثانیه ۱۲۰ مرتبه تکرار می‌شود. ریسمان دارای چگالی خطی ۱۲۰g/m است و تحت کشش ۹۰/۰N قرار دارد. مقدار بیشینهٔ (الف) تندی عرضی u و (ب) مؤلفهٔ عرضی کششی τ را به دست آورید.
(پ) نشان دهید که دو بیشینهٔ محاسبه شدهٔ بالا در مقدارهای یکسان فاز برای موج رخ می‌دهند. جابه‌جایی عرضی y ریسمان در این مقدارهای فاز چقدر است؟ (ت) بیشینهٔ آهنگ انتقال انرژی در طول ریسمان چقدر است؟ (ث) وقتی این بیشینهٔ انتقال رخ می‌دهد جابه‌جایی عرضی y چقدر است؟ (ج) کمینهٔ آهنگ انتقال انرژی در طول ریسمان چقدر است؟ (چ) وقتی این کمینهٔ انتقال رخ می‌دهد جابه‌جایی عرضی y چقدر است؟

۶۸- دو موج سینوسی $120\,Hz$ با بسامد و دامنهٔ یکسان در جهت مثبت محور x که در طول ریسمان تحت کشش قرار دارد، فرستاده می‌شوند. موجها را می‌توان به صورت همفاز یا ناهمفاز فرستاد. شکل ۳۲-۴۹ دامنهٔ y' موج حاصل را برحسب فاصلهٔ جابه‌جایی (مقدار مسافتی که یک موج نسبت به موج دیگر جابه‌جا می‌شود) نشان می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $y'_s = 6/0\,mm$ مشخص شده است. اگر معادله‌های دو موج به شکل $y'(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t)$ باشد مطلوب است (الف) y_m، (ب) k (پ) ω، و (ت) علامت درست برای ω.



شکل ۳۲-۴۹ مسئلهٔ ۶۸

۶۹- یک موج عرضی سینوسی با دامنهٔ y_m و طول موج λ در طناب کشیده شده‌ای حرکت می‌کند. (الف) نسبت بیشینهٔ تندی ذره (تندیی که یک ذره در طناب به طور عرضی نسبت به موج حرکت می‌کند) به تندی موج چقدر است؟ (ب) آیا این نسبت به جنس طناب بستگی دارد؟ **SSM**

۷۰- یک موج عرضی سینوسی که در جهت مثبت محور x در حرکت است دارای دامنهٔ $2/0\,cm$، طول موج $1/0\,cm$ و بسامد $400\,Hz$ است. اگر معادلهٔ موج به شکل $y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t)$ باشد، مطلوب است (الف) y_m، (ب) k (پ) ω، و (ت) علامت درست برای ω. (ث) بیشینهٔ تندی عرضی یک نقطه روی طناب و (ج) تندی موج چقدر است؟

۷۱- یک موج عرضی سینوسی که در جهت منفی محور x در حرکت است دارای دامنهٔ $1/00\,cm$، بسامد $550\,Hz$ و تندی $330\,m/s$ است. اگر معادلهٔ موج به شکل $y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t)$ باشد، مطلوب است (الف) y_m، (ب) ω، (پ) k و (ت) علامت درست برای ω.

۷۲- دو موج سینوسی با طول موج یکسان در یک جهت در طول یک ریسمان کشیده شده حرکت می‌کنند. برای موج ۱، $y_m = 3/0\,mm$ و $\phi = 0$؛ برای موج ۲، $y_m = 5/0\,mm$ و $\phi = 70°$ است. (الف) دامنه و (ب) ثابت فاز موج برایند چقدر است؟

۷۳- موجی دارای تندی $240\,m/s$ و طول موج $3/2\,m$ است. (الف) بسامد و (ب) دورهٔ تناوب موج چقدر است؟

۷۴- هنگام نواختن سیم ویولن در حالت معینی، پایینترین بسامد تشدیدی سیم $440\,Hz$ است. بسامد (الف) دومین و (ب) سومین هماهنگ سیم چقدر است؟

۷۵- ریسمانی به طول $120\,cm$ بین دو تکیه ثابت کشیده است. اگر موجهای ایستاده برقرار شده باشند مطلوب است (الف) بلندترین، (ب) دومین بلندترین و (پ) سومین بلندترین طول موج برای موجهایی که در ریسمان حرکت می‌کنند. (ت) این موجهای ایستاده را رسم کنید.

۷۶- معادلهٔ یک موج عرضی که در طول ریسمانی در حرکت است عبارت است از $y = 0/15 \sin(0/79x - 13t)$ که در آن x و y برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) جابه‌جایی y در $x = 2/3\,m$ و $t = 0/16\,s$ چقدر است؟ موج دومی به موج اول اضافه می‌شود تا روی ریسمان موج ایستاده ایجاد شود. اگر معادلهٔ موج دوم به شکل $y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t)$ باشد مطلوب است (ب) y_m، (پ) k و (ت) ω علامت درست ω برای این موج دوم. (ج) در $x = 2/3\,m$ و $t = 0/16\,s$ جابه‌جایی موج ایستادهٔ حاصل چقدر است؟

۷۷- سیمی به طول $1/50\,m$ دارای جرم $8/70\,g$ است و تحت کشش $120\,N$ قرار دارد. سیم در دو انتها محکم شده است و در آن نوسان برقرار می‌شود. (الف) تندی موجها در سیم چقدر است؟ طول موج موجهایی که (ب) یک حلقه و (پ) دو حلقهٔ موج ایستاده ایجاد می‌کنند، چقدر است؟ بسامد موجهایی که (ت) یک حلقه و (ث) دو حلقهٔ موج ایستاده ایجاد می‌کنند، چقدر است؟ **SSM**

۷۸- انرژی موجی با آهنگ P_1 و بسامد f_1 در ریسمانی که تحت کشش τ_1 است، انتقال می‌یابد. آهنگ انتقال انرژی جدید P_2 برحسب P_1 (الف) وقتی که کشش به $\tau_2 = 4\tau_1$ افزایش می‌یابد و (ب) وقتی که بسامد به $f_2 = f_1/2$ کاهش یابد، چقدر است؟

۷۹- معادلهٔ یک موج عرضی که در طول ریسمانی حرکت می‌کند عبارت است از

$$y = (2/0\,mm)\sin[(20\,m^{-1})x - (600\,s^{-1})t]$$

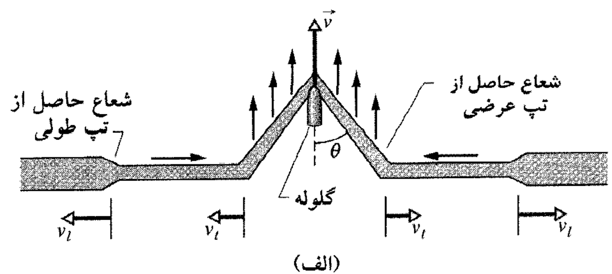
(الف) دامنه، (ب) بسامد، (پ) سرعت (شامل علامت)، و (ت) طول موج این موج را به دست آورید. (ث) بیشینهٔ تندی عرضی ذره در ریسمان چقدر است؟

۸۰- نوسان یک دیاپازون $600\,Hz$ موجهای ایستاده‌ای را در ریسمانی که به دو مانع بسته شده است ایجاد می‌کند. تندی موج در ریسمان $400\,m/s$ است. موج ایستاده دارای چهار حلقه با دامنهٔ $2/0\,mm$ است. (الف) طول ریسمان چقدر است؟ (ب) معادله‌ای برای جابه‌جایی ریسمان برحسب تابعی از مکان و زمان بنویسید.

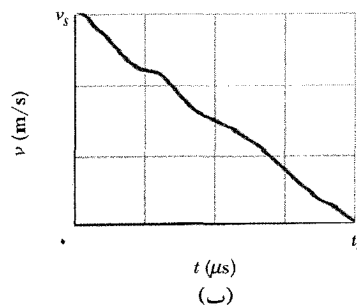
۸۱- در آزمایشی روی موجهای ایستاده، ریسمانی به طول $90\,cm$ به شاخهٔ یک دیاپازون الکتریکی که عمود بر طول ریسمان با بسامد $60\,Hz$ نوسان می‌کند، بسته شده است. جرم ریسمان $0/044\,kg$ است. اگر بخواهیم ریسمان با چهار حلقه

نوسان کند، ریسمان باید تحت چه کششی (وزنه‌هایی که به سر دیگر آن بسته شده است) قرار گیرد؟

۸۲- *جلیقهٔ ضد گلوله*. هرگاه پرتابه‌ای مثل گلوله یا قطعه‌ای از بمب با تندی زیاد به جلیقه‌های جدید برخورد کند بافت اصلی جلیقه پرتابه را متوقف می‌کند و با گسترش سریع انرژی پرتابه در یک ناحیهٔ وسیع مانع نفوذ آن می‌شود. این گسترش به وسیلهٔ تپهای طولی و عرضی که به سرعت از نقطهٔ برخورد به طور *شعاعی* حرکت می‌کنند انجام می‌گیرد و پرتابه دندانه‌ای مخروطی شکل ایجاد می‌کند. تپ طولی با تندی v_l در طول الیاف بافت و به جلوی دندانه حرکت می‌کند و موجب نازک شدن و کشیدگی الیاف پارچه به سمت نوک دندانه می‌شود. چنین الیاف شعاعی در شکل ۳۲-۵۰ الف نشان داده شده‌اند. قسمتی از انرژی پرتابه صرف این حرکت و کشیدگی می‌شود. تپش عرضی حاصل از دندانه‌ای شدن با تندی آهسته‌تر v_t حرکت می‌کند. وقتی پرتابه عمق دندانه را افزایش می‌دهد، شعاع دندانه افزایش می‌یابد و ماده در الیاف در جهت پرتابه حرکت می‌کند. (عمود بر جهت حرکت تپ عرضی). بقیهٔ انرژی پرتابه صرف این حرکت می‌شود. تمام انرژی که اساساً صرف تغییر شکل الیاف نمی‌شود به صورت انرژی گرمایی درمی‌آید. شکل ۳۲-۵۰ ب نموداری از تندی v برحسب زمان t برای گلوله‌ای به جرم ۱۰/۲g است که از هفت‌تیر قطر ۳۸ مستقیماً به جلیقه شلیک شده است. مقیاسهای محورهای عمودی و افقی با $v_s = ۳۰۰\text{m/s}$ و $t_s = ۴۰/۰\mu s$ مشخص شده‌اند. فرض کنید $v_l = ۲۰۰۰\text{m/s}$ و θ نصف زاویهٔ دندانه برابر $۶۰°$ است. در پایان برخورد شعاع (الف) ناحیهٔ نازک شده و (ب) دندانه چقدر است (فرض کنید که شخصی که جلیقهٔ ضد گلوله را پوشیده است ساکن بماند).



(الف)



(ب)

شکل ۳۲-۵۰ مسئلهٔ ۸۲

۸۳- تندترین موج عرضی که می‌تواند در طول یک سیم فولادی فرستاده شود چقدر است؟ به دلایل ایمنی، بیشینهٔ تنش کششی که سیم فولادی می‌تواند تحمل کند برابر $۷/۰۰\times۱۰^۸\ \text{N/m}^۲$ است. چگالی فولاد $۷۸۰۰\text{kg/m}^۳$ است. نشان دهید که پاسخ شما به قطر سیم بستگی ندارد.

۸۴- (الف) معادله‌ای بنویسید که یک موج عرضی سینوسی را توصیف کند. که روی طنابی در جهت مثبت محور y با عدد موج زاویه‌ای $۶۰\text{cm}^{-۱}$، دورهٔ تناوب $۰/۲۰\text{s}$ و دامنهٔ $۳/۰\text{mm}$ حرکت می‌کند. جهت z را جهت عرضی در نظر بگیرید. (ب) بیشینهٔ تندی عرضی ذره‌ای روی طناب، چقدر است؟

۸۵- موجی در ریسمان با رابطهٔ $y(x,t) = ۱۵/۰\sin(\pi x/۸ - ۴\pi t)$ بیان شده است، که در آن x و y برحسب سانتی‌متر و t برحسب ثانیه است. تندی عرضی نقطهٔ واقع در $x = ۶/۰۰\text{cm}$ هنگامی که $t = ۰/۲۵۰\text{s}$ است چقدر است؟ (ب) بیشینهٔ تندی عرضی هر نقطه در ریسمان چقدر است؟ (پ) بزرگی شتاب عرضی نقطهٔ واقع در $x = ۶/۰۰\text{cm}$ هنگامی که $t = ۰/۲۵۰\text{s}$ است چقدر است؟ (ت) بزرگی شتاب عرضی بیشینه برای هر نقطه در ریسمان، چقدر است؟

۸۶- موج ایستاده‌ای از مجموع دو موج پیشروندهٔ عرضی زیر حاصل شده است.

$$y_۱ = ۰/۰۵۰\cos(\pi x - ۴\pi t)$$

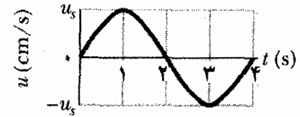
و

$$y_۲ = ۰/۰۵۰\cos(\pi x + ۴\pi t)$$

که در آن $y_۲, y_۱, x$ برحسب متر و t برحسب ثانیه است.
(الف) کوچکترین مقدار مثبت x مربوط به یک گره چقدر است؟ با شروع از $t = ۰$، مقدار (ب) اولین، (پ) دومین و (ت) سومین زمانی که ذره در $x = ۰$ دارای سرعت صفر است، چقدر است؟

۸۷- در آزمایشی، یک طناب افقی ۱/۲ کیلوگرمی که در دو انتهایش $(x = ۲m, x = ۰)$ ثابت شده است با بسامد $۵/۰\text{Hz}$ به بالا و پایین در مد پایه‌اش به نوسان درمی‌آید. در $t = ۰$، جابه‌جایی نقطه‌ای در $x = ۰$ برابر صفر و در جهت مثبت محور y با سرعت عرضی $۵/۰m/s$ به سمت بالا حرکت می‌کند.
(الف) دامنهٔ حرکت آن نقطه و (ب) کشش در طناب چقدر است؟ (پ) معادلهٔ موج ایستاده را برای مد پایه بنویسید. **SSM**

۸۸- یک موج سینوسی عرضی با طول موج ۲۰cm در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. سرعت عرضی ذره در $x = ۰$ برحسب تابعی از زمان در شکل ۳۲-۵۱ نشان داده شده است که در آن مقیاس محور عمودی با $u_s = ۵/۰\text{cm/s}$ مشخص شده است. (الف) تندی، (ب) دامنه و (پ) بسامد موج چقدر است؟ منحنی موج را در $t = ۲/۰\text{s}$، بین $x = ۰$ و $x = ۲۰\text{cm}$ رسم کنید.



شکل ۳۲-۵۱ مسئلهٔ ۸۸

۸۹- در توپهای بیسبال و گلف از نوعی نوار لاستیکی استفاده می‌شود که در گسترهٔ وسیعی از ازدیاد طول، نوار از قانون هوک پیروی می‌کند. طول قطعه‌ای از این ماده در حالت کشیده شده ℓ و جرم آن m است. وقتی نیروی F اعمال شود، نوار به اندازهٔ طول اضافی $\Delta\ell$ کشیده می‌شود. (الف) تندی (برحسب m، $\Delta\ell$ و ثابت فنر k) موجهای عرضی در این نوار لاستیکی کشیده شده چقدر است؟ (ب) با استفاده از پاسخ (الف)، نشان دهید که زمان لازم برای حرکت یک تپ عرضی در طول نوار لاستیکی اگر $\Delta\ell << \ell$ باشد، با $1/\sqrt{\Delta\ell}$ متناسب است و اگر $\Delta\ell >> \ell$ باشد ثابت است. **SSM**

۹۰- دو موج

$$y_1 = (2/50\,\text{mm})\sin[(25/1\,\text{rad/m})x - (440\,\text{rad/s})t]$$

و

$$y_2 = (1/50\,\text{mm})\sin[(25/1\,\text{rad/m})x - (440\,\text{rad/s})t]$$

در طول ریسمان کشیده شده‌ای حرکت می‌کنند. (الف) موج برایند را برحسب تابع t برای $x = 0, \lambda/8, \lambda/4, 3\lambda/8$ و $\lambda/2$، رسم کنید که در آن λ طول موج است. نمودارها باید از $t = 0$ تا کمی بیش یک دورهٔ تناوب ادامه داشته باشند. (ب) موج برایند عبارت است از برهم‌نهی یک موج ایستاده و یک موج پیشرونده. موج پیشرونده در چه جهتی حرکت می‌کند؟ (پ) چگونه می‌توانید موجهای اولیه را طوری تغییر دهید که موج برایند از برهم‌نهی موجهای ایستاده و پیشرونده با دامنه‌های یکسان با موج قبلی باشد ولی موج پیشرونده در جهت مخالف حرکت کند؟ سپس، با استفاده از نمودارهای خود مکانی را به دست آورید که در آن دامنهٔ نوسان (ت) بیشینه و (ث) کمینه باشد. (ج) رابطهٔ دامنهٔ بیشینه با دامنه‌های موجهای اولیه چگونه است؟ (چ) رابطهٔ دامنهٔ کمینه با دامنه‌های موجهای اولیه چگونه است؟

۹۱- دو موج با معادله‌های زیر بیان می‌شوند.

$$y_1 = 0/30\sin[\pi(5x - 200t)]$$

و

$$y_2 = 0/30\sin\left[\pi(5x - 200t) + \frac{\pi}{3}\right]$$

که در آن y_1, y_2, x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. هرگاه این دو موج ترکیب شوند، یک موج پیشرونده ایجاد می‌شود. (الف) دامنه، (ب) تندی و (پ) طول موج این موج پیشرونده چقدر است؟

۹۲- تندی موجهای الکترومغناطیسی (شامل نور مرئی، رادیویی و پرتوهای x) در خلأ برابر 3×10^8 m/s است. (الف) گسترهٔ طول موجهای نور مرئی از تقریباً 400nm در بنفش تا تقریباً 700nm در قرمز است. گسترهٔ بسامدهای این موجها چقدر است؟ (ب) گسترهٔ بسامد موجهای کوتاه رادیویی (برای مثال، FM و تلویزیونی VHF) برابر ۱/۵ تا 300MHz است. گسترهٔ طول موج متناظر چقدر است؟ (پ) گسترهٔ طول موجهای پرتوهای x از تقریباً 5/0nm تا تقریباً $1/0\times10^{-2}$ nm است. گسترهٔ بسامد پرتوهای x چقدر است؟

۹۳- یک موج پیشرونده در ریسمانی با معادلهٔ زیر بیان شده است.

$$y = 2/0\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{0/40} + \frac{x}{80}\right)\right]$$

که در آن x , y برحسب سانتی‌متر و t برحسب ثانیه است. (الف) به ازای $t = 0$، y را برحسب تابعی از x برای $0 \le x \le 160$ cm رسم کنید. (ب) قسمت (الف) را به ازای $t = 0/05$s و $t = 0/010$s تکرار کنید. با استفاده از نمودارها (پ) تندی موج و (ت) جهتی را که موج حرکت می‌کند تعیین کنید.

۳۳

موجها II



چه چیزی موجب این پژواک موسیقایی می‌شود که شبیه صدای پرندگان است؟

پاسخ در همین فصل.

پژواک در مکان‌های خاصی می‌تواند خوشایند باشد و در اتاق‌هایی که صحبت نامفهوم می‌شود ناخوشایند است، ولی آنها همیشه شبیه چشمهٔ صوت هستند. برای مثال، صدای دست‌زدن به همان صورت صدای دست‌زدن بر می‌گردد. ولی پژواک در جلو این پله‌های هرمی شکل در خرابه‌های مایا در مکزیک به طور قابل توجهی متفاوت است، چون صدای دست به صورت یک نوت موسیقی بر می‌گردد که بسامد آن کاهش می‌یابد.

۳۳-۱ فیزیک چیست؟

فیزیک موجهای صوتی پایهٔ مطالعات بیشماری در مجلههای پژوهشی در خیلی از زمینههاست. در اینجا فقط چند نمونه را در نظر میگیریم. بعضی از فیزیولژیستها علاقهمندند بدانند که سخن گفتن چگونه شکل میگیرد، چگونه میتوان نقص در سخن گفتن را تصحیح کرد، چگونه کم شنوایی را تخفیف داد و حتی خرناس کشیدن چگونه ایجاد میشود. برخی از مهندسین آکوستیک علاقهمند به اصلاح آکوستیکی کلیساهای جامع، سالنهای تأتر و نیز کم کردن صدا در نزدیکی بزرگراهها، احداث جادهها و باز تولید موسیقی در بلندگوها هستند. برخی مهندسین هوانوردی نگران موجهای شوکی هستند که به وسیلهٔ هواپیماهای مافوق صوت و معمولی در نواحی اطراف فرودگاهها ایجاد میشوند. برخی از پژوهشگران پزشکی میخواهند بدانند چگونه صداهای ایجاد شده به وسیلهٔ قلب و ریهها میتواند نشانهای از یک مشکل پزشکی در بیمار باشد. برخی باستانشناسان به این علاقهمندند که چگونه از فسیل دایناسورها میتوان اطلاعاتی را راجع به مسائل آوایی آنها به دست آورد. برخی مهندسین نظامی به این علاقهمندند که چگونه صداهای آتشبارها میتواند به سربازان امکان مشخص کردن نقطهٔ آتشباری را بدهد و از طرف دیگر، برخی از زیستشناسها علاقهمندند که بدانند گربه چگونه خُرخُر میکند.

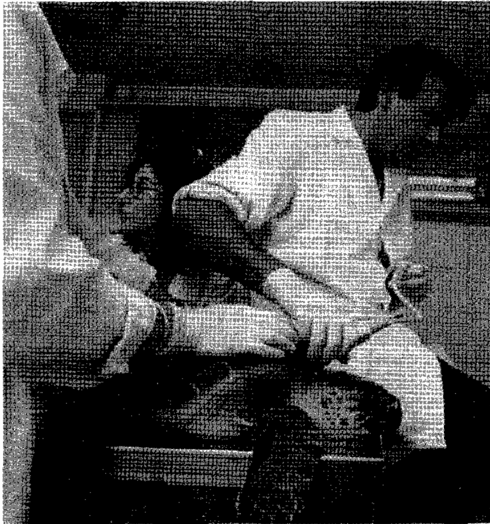
برای شروع بحث فیزیک صوت، ابتدا باید به این پرسش پاسخ دهیم که "موجهای صوتی چیست"؟

۳۳-۲ موجهای صوتی

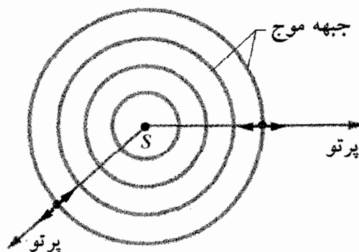
همانطور که در فصل ۳۲ دیدیم، موجهای مکانیکی موجهایی هستند که به وجود یک محیط مادی نیاز دارند. دو نوع موج مکانیکی وجود دارد: *موجهای عرضی* شامل نوسانهای عمود بر راستایی که موج حرکت میکند و *موجهای طولی* شامل نوسانهایی موازی با راستای حرکت موج.

در این کتاب، **موج صوتی** را میتوان تقریباً یک موج طولی در نظر گرفت. گروههای پژوهشی لرزهنگاری، از چنین موجهایی برای جستجوی نفت در پوستهٔ زمین استفاده میکنند. کشتیها از وسایل ناوبری و مسافت یابی صوتی (سونار) برای آشکار کردن موانع زیر آب بهره میگیرند. زیر دریاییها برای دنبال کردن زیر دریاییهای دیگر از موجهای صوتی استفاده میکنند که عمدتاً با شنیدن مشخصهٔ نوفهای حاصل از دستگاه پیشران آنها صورت میگیرد. شکل ۳۳-۱ نشان میدهد که چگونه موجهای صوتی برای شناسایی بافتهای نرم بدن حیوان یا انسان به کار میروند. در این فصل موجهای صوتی که در هوا حرکت میکنند و قابل شنیدن هستند را در نظر میگیریم.

شکل ۳۳-۲ نظراتی را نشان میدهد که در بحثهای خود به کار خواهیم برد. نقطهٔ S نمایش یک چشمهٔ صوتی کوچک به نام چشمهٔ *نقطهای* است که موجهای صوتی را در تمام جهتها گسیل میکند. *جبهههای موج* و *پرتوها* راستای حرکت و گسترش موجهای صوتی را نشان میدهند. **جبهههای موج** سطحهایی هستند که روی آنها نوسانهای هوای ناشی از موج صوتی مقدار یکسانی دارند: این سطحها در یک نمودار دو



شکل ۳۳-۱ داخل سر یک لاکپشت آبی با دستگاه فراصوتی بررسی میشود (که بیشتر از بسامدی است که میشنویم)، تصویری از داخل آن روی صفحهٔ نمایش در دست راست نشان داده میشود.



شکل ۳۳-۲ یک موج صوتی از چشمهٔ نقطهای S در محیطی سه بعدی حرکت میکند. جبهههای موج کرههایی به مرکز S را تشکیل میدهند، پرتوها نسبت به S شعاعی هستند. پیکانهای دوتایی کوتاه نشان میدهند که عنصرهای محیط موازی با پرتوها نوسان میکنند.

بعدی برای یک چشمهٔ نقطهای توسط تمام یا قسمتی از دایرهها نشان داده میشوند. **پرتوها** خطهایی عمود بر جبهههای موج هستند که جهت حرکت جبهههای موج را نشان میدهند. پیکانهای دوتایی کوتاه روی پرتوهای شکل ۳۳-۲ نشان میدهند که نوسانهای طولی هوا با پرتوها موازیاند.

در نزدیکی چشمهٔ نقطهای نظیر شکل ۳۳-۲ جبهههای موج کرویاند و در سه بعد گسترده میشوند، به این موجها *کروی* میگویند. وقتی جبهههای موج به طرف بیرون حرکت کنند و شعاع آنها بزرگتر شوند، انحنای آنها کاهش مییابد. دورتر از

چشمه، جبهه‌های موج را می‌توان تقریباً به صورت صفحه‌هایی (یا خطهایی در شکل‌های دو بعدی) نشان داد که به آنها **موجهای تخت** می‌گویند.

۳۳-۳ تندی صوت

تندی هر موج مکانیکی، عرضی یا طولی، هم به خاصیت لختی محیط (برای ذخیرهٔ انرژی جنبشی) و هم به خاصیت کشسانی محیط (برای ذخیرهٔ انرژی پتانسیل) بستگی دارد. بنابراین، می‌توان معادلهٔ ۳۲-۲۶ را که تندی یک موج عرضی را در طول یک ریسمان کشیده شده به دست می‌دهد به صورت کلی زیر نوشت

$$v=\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}=\sqrt{\frac{\text{خاصیت کشسانی}}{\text{خاصیت لختی}}} \qquad (۳۳-۱)$$

که در آن (برای موجهای عرضی) τ کشش در ریسمان و μ چگالی خطی آن است. اگر محیط هوا و موج طولی باشد، می‌توان حدس زد که خاصیت لختی، که متناظر با μ است، چگالی حجمی ρ هواست. برای خاصیت کشسانی چه چیزی را باید در نظر گرفت؟

در یک ریسمان کشیده شده، انرژی پتانسیل به کشیده شدن متناوب عنصرهای ریسمان به هنگام عبور موج از آنها مربوط می‌شود. هنگامی که یک موج صوتی از هوا می‌گذرد، انرژی پتانسیل به تراکمها و انبساطهای متناوب عنصرهای حجمی کوچک هوا مربوط است. خاصیتی را که تعیین می‌کند تا چه میزان حجم یک عنصر از محیط با افزایش یا کاهش فشار وارده (نیرو بر یکای مساحت) تغییر می‌کند **مدول کپه‌ای B** می‌نامند می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود (از معادلهٔ ۱۲-۲۵ جلد اول)

$$B=-\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \qquad \text{(تعریف مدول کپه‌ای)} \qquad (۳۳-۲)$$

در اینجا $\Delta V/V$ تغییر نسبی در حجم ناشی از تغییر فشار Δp است. همانطور که در بخش ۳۰-۳ توضیح داده شد یکای SI فشار نیوتون بر متر مربع است، که به آن نام ویژهٔ *پاسکال* (Pa) داده شده است. از معادلهٔ ۳۳-۲ می‌توان دید که یکای B نیز پاسکال است. علامت Δp همیشه مخالف با علامت ΔV است. هرگاه فشار روی یک عنصر افزایش یابد (Δp مثبت)، حجم آن کاهش می‌یابد (ΔV منفی). علامت منفی را در معادلهٔ ۳۳-۲ منظور می‌کنیم تا B همیشه یک کمیت مثبت باشد. اکنون با قرار دادن B به جای τ و ρ به جای μ در معادلهٔ ۳۳-۱ خواهیم داشت

$$v=\sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad \text{(تندی صوت)} \qquad (۳۳-۳)$$

که تندی صوت در محیطی با مدول کپه‌ای B و چگالی ρ است. جدول ۳۳-۱ تندی صوت را در چند محیط نشان می‌دهد.

جدول ۳۳-۱

تندی صوت[1]

محیط	تندی (m/s)
گازها	
هوا (۰°C)	۳۳۱
هوا (۲۰°C)	۳۴۳
هلیوم	۹۶۵
هیدروژن	۱۲۸۴
مایعها	
آب (۰°C)	۱۴۰۲
آب (۲۰°C)	۱۴۸۲
آب دریا[2]	۱۵۲۲
جامدها	
آلومینیوم	۶۴۲۰
فولاد	۵۹۴۱
گرانیت	۶۰۰۰

۱- در ۰°C و فشار 1atm ، به جز حالتی که غیر از آن ذکر شده باشد.
۲- در ۲۰°C و شوری ۳/۵٪.

چگالی آب تقریباً ۱۰۰۰ برابر چگالی هواست. اگر این تنها عامل مؤثر باشد، از معادلهٔ ۳۳-۳۰ انتظار می‌رود که تندی صوت در آب به طور قابل توجهی از تندی صوت در هوا کمتر باشد. ولی، جدول ۳۳-۱ نشان می‌دهد که عکس این مطلب درست است. (دوباره از معادلهٔ ۳۳-۱) نتیجه می‌گیریم که مدول کپه‌ای آب باید بیشتر از ۱۰۰۰ برابر هوا باشد. در واقع همین‌طور است. آب خیلی بیشتر از هوا تراکم ناپذیر است، (به معادلهٔ ۳۳-۲ نگاه کنید) و راه دیگر این است که گفته شود مدول کپه‌ای آن خیلی بزرگتر است.

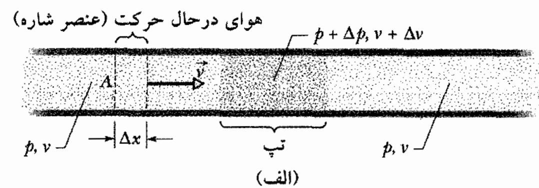
اثبات معادلهٔ ۳۳-۳

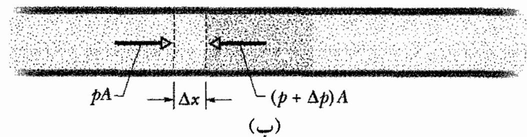
اکنون معادلهٔ ۳۳-۳ را با کاربرد مستقیم قانونهای نیوتون به دست می‌آوریم. تپ تنهایی را در نظر می‌گیریم که در آن هوای فشرده شده (از راست به چپ) با تندی v در هوای داخل لولهٔ درازی، مانند شکل ۳۲-۲، حرکت می‌کند. فرض کنید که در راستای تپ با همان تندی حرکت کنیم، در نتیجه به نظر می‌رسد که تپ در چارچوب مرجع ما ساکن است. شکل ۳۳-۳ الف وضعیت را از دید این چارچوب نشان می‌دهد. تپ ساکن است و هوا با تندی v از چپ به راست در این چارچوب حرکت می‌کند.

فشار آشفته نشدهٔ هوا را p و فشار داخل تپ را $p+\Delta p$ در نظر می‌گیریم، که در آن Δp به دلیل تراکم مثبت است. عنصری از هوا به ضخامت Δx و مساحت وجه A را در نظر می‌گیریم که با تندی v به طرف تپ حرکت می‌کند. وقتی این

عنصر وارد تپ می‌شود، وجه جلویی آن با ناحیه‌ای با فشار بالاتر روبه‌رو می‌شود، به طوری که تندی تپ را تا تندی $v+\Delta v$ کند می‌کند، که در آن Δv منفی است. این کند شدن زمانی که وجه عقبی عنصر به تپ می‌رسد کامل می‌شود، که فاصلهٔ زمانی زیر برای این کار لازم است

$$\Delta t=\frac{\Delta x}{v} \qquad (۳۳-۴)$$





شکل ۳۳-۳ تپ تراکمی از راست به چپ در داخل یک لولهٔ دراز پر از هوا فرستاده می‌شود. چارچوب مرجع این شکل به صورتی انتخاب شده است که تپ ساکن است و هوا از چپ به راست حرکت می‌کند. (الف) عنصری از هوا به پهنای Δx با تندی v به طرف تپ حرکت می‌کند. (ب) وجه جلویی این عنصر وارد تپ می‌شود. نیروهای وارد بر وجه جلویی و عقبی (ناشی از فشار هوا) نشان داده شده‌اند.

حال قانون دوم نیوتون را برای این عنصر به کار می‌بریم. در مدت Δt، نیروی متوسط وارد بر وجه عقبی عنصر برابر pA به سمت راست، و نیروی متوسط وارد بر وجه جلویی برابر $(p+\Delta p)A$ و به سمت چپ است (شکل ۳۳-۳ ب). بنابراین، نیروی خالص متوسط وارد بر این عنصر در مدت Δt عبارت است از

$$F=pA-(p+\Delta p)A$$
$$=-\Delta p A \qquad \text{(نیروی خالص)} \qquad (۳۳-۵)$$

علامت منفی نشان می‌دهد که نیروی خالص وارد بر عنصر هوا در شکل ۳۳-۳ ب به سمت چپ است. حجم این عنصر $A\Delta x$ است، پس به کمک معادلهٔ ۳۳-۴ می‌توان جرم آن را به صورت زیر نوشت

$$\Delta m=\rho\Delta V=\rho A\Delta x=\rho Av\Delta t \qquad \text{(جرم)} \qquad (۳۳-۶)$$

شتاب متوسط این عنصر در مدت Δt عبارت است از

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \text{(شتاب)} \qquad (۳۳-۷)$$

بنابراین، با استفاده از قانون دوم نیوتون $(F=ma)$، از معادله‌های ۳۳-۵، ۳۳-۶ و ۳۳-۷، داریم

$$-\Delta p A=(\rho Av\Delta t)\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\rho v^{2}=-\frac{\Delta p}{\Delta v/v} \qquad (۳۳-۸)$$

هوایی که خارج از تپ حجم $V(=Av\Delta t)$ را اشغال می‌کند به اندازهٔ $\Delta V(=A\Delta v\Delta t)$ به هنگام ورود به تپ متراکم می‌شود، پس

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{A\Delta v\Delta t}{Av\Delta t}=\frac{\Delta v}{v} \qquad (۳۳-۹)$$

با قرار دادن معادلهٔ ۳۳-۹ و پس از آن معادلهٔ ۳۳-۲ در معادلهٔ ۳۳-۸ داریم

$$\rho v^{2}=-\frac{\Delta p}{\Delta v/v}=-\frac{\Delta p}{\Delta V/V}=B$$

از حل آن برای v معادلهٔ ۳۳-۳ برای تندی هوا به سمت راست در شکل ۳۳-۳ و در نتیجه تندی واقعی تپ به سمت چپ به دست می‌آید.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳-۱

وقتی یک تپ صوتی، مثلاً از صدای دست، در پایین پله‌های هرم شکل نشان داده شده در تصویر آغاز فصل به وجود می‌آید، موج‌های صوتی از پله‌های متوالی، نزدیکترین (پایین‌ترین) در آغاز (در شکل ۳۳-۱ الف) و دورترین (بالاترین) در پایان (شکل ۳۳-۱ب) بازتابیده می‌شود. عمق و ارتفاع پله‌ها $d=۰/۲۶۳\text{m}$ و سرعت صوت $۳۴۳\,\text{m/s}$ است. مسیرهای طی شده توسط موج‌های صوتی به طرف یا از پله‌های پایین تقریباً افقی است. مسیرهای مایل موج‌های صوتی به طرف یا از پله‌های نزدیک بالاترین تقریباً °۴۵ نسبت به افق است. با چه بسامد f_{bot} تپ‌های پژواک از پله‌های پایین به شنونده می‌رسند؟ با چه بسامد f_{top} از پله‌های بالا در زمان کمی بعد می‌رسند؟

نکته‌های کلیدی (۱) بسامد f که در آن تپ‌ها به شنونده بر می‌گردند معکوس زمان Δt بین تپ‌های متوالی است. (۲) فاصلهٔ زمانی Δt لازم برای صوت که فاصلهٔ معین L را طی کند با رابطهٔ $v=L/\Delta t$ به سرعت v مربوط است.

محاسبه‌ها: در شکل ۳۳-۴ الف در پایین پله‌ها با موج صوتی که از پلهٔ بالاتر باز تابیده می‌شود مسافت $L=۲d$ بیشتر از موج صوتی که از پلهٔ پایین‌تر بازتابیده می‌شود، می‌پیماید. (موج بالاتر باید دوبار عمق پله را به پیماید). بنابراین فاصلهٔ زمانی تپ‌های پژواک در شنونده عبارت است از:

$$\Delta t_{bot}=\frac{L}{v}=\frac{۲d}{v} \qquad (۳۳-۱۰)$$
$$=\frac{۲(۰/۲۶۳\text{m})}{۳۴۳\,\text{m/s}}=۱/۵۳۳\times۱۰^{-۳}\,\text{s}$$

بسامد f_{bot} تپ‌های رسیده به شنونده عبارت است از

$$f_{bot}=\frac{۱}{\Delta t_{bot}} \qquad (۳۳-۱۱)$$
$$=\frac{۱}{۱/۵۳۳\times۱۰^{-۳}\,\text{s}}=۶۵۲\text{ Hz} \qquad \text{(پاسخ)}$$

فاصلهٔ زمانی Δt_{bot} جهت تمیز دادن تک‌تک تپ‌ها برای شنونده خیلی کوتاه است. در واقع بسامد f_{top} با احساس است- شنونده یک نوت موسیقی را با بسامد ۶۵۲ Hz می‌شنود.

در شکل ۳۳-۴ ب در بالای پله‌ها مسیر شیبدار رفت و برگشت موج‌ها بدان معناست که موج باز تابیده از پلهٔ بالاتر فاصله

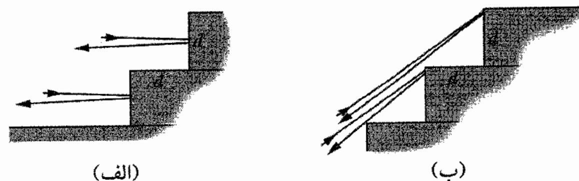
$L=۲\sqrt{۲}\,d$ را بیشتر از موجی که از پلهٔ پایین‌تر بازتابیده می‌شود می‌پیماید. (مسیر در راستای وتر مثلث قائم‌الزاویه با ساق‌های مساوی به طول d دو برابر است). پس قاصلهٔ زمانی تپ‌های پژواک در شنونده عبارت است از

$$\Delta t_{top}=\frac{L}{v}=\frac{۲\sqrt{۲}d}{v} \qquad (۱۲-۳۳)$$
$$=\frac{۲\sqrt{۲}(۰/۲۶۳\text{m})}{۳۴۳\,\text{m/s}}=۲/۱۶۸\times۱۰^{-۳}\,\text{s}$$

و بسامد با احساس عبارت است از

$$f_{top}=\frac{۱}{\Delta t_{top}}$$
$$=\frac{۱}{۲/۱۶۸\times۱۰^{-۳}\,\text{s}}=۴۶۱\text{ Hz} \qquad \text{(پاسخ)}$$

بنابراین، دست‌زدن در جلوی پله‌ها پژواکی درست می‌کند که با بسامد شروع می‌شود و با بسامد پایان می‌پذیرد. می‌توانید چنین پژواک موسیقایی را از پله‌های دیگر یا حتی از نرده‌های یک حصار که در کنار آن ایستاده باشید، بشنوید.

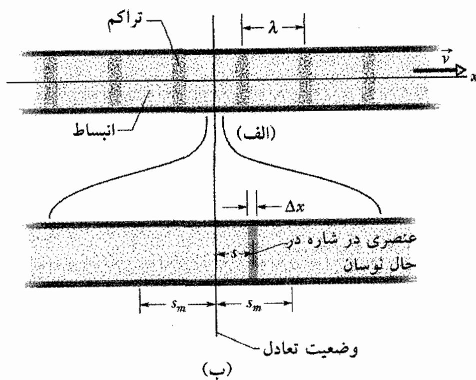


شکل ۳۳-۴ موج‌های صوتی از (الف) پایین پله‌ها و (ب) از بالای پله‌های یک راه‌پله‌ی بلند بازتابیده می‌شوند.

۳۳-۴ موجهای صوتی پیشرونده

در اینجا تغییرات جابه‌جاییها و تغییرات فشار مربوط به یک موج سینوسی را که در هوا حرکت می‌کند بررسی می‌کنیم، شکل ۳۳-۵ الف چنین موج پیشرونده‌ای را نشان می‌دهد که در یک لولهٔ دراز پر از هوا به طرف راست حرکت می‌کند. از فصل ۳۲ به خاطر بیاورید که با حرکت سینوسی پیستونی در انتهای چپ لوله (مانند شکل ۳۲-۲) می‌توان چنین موجی را ایجاد کرد. حرکت پیستون به طرف راست عنصر هوای مجاور پیستون را حرکت می‌دهد و آن را متراکم می‌کند؛ با حرکت پیستون به طرف چپ عنصر هوا به طرف چپ بر می‌گردد و فشار کاهش می‌یابد. وقتی هر عنصری از هوا به نوبت به عنصر بعدی فشار آورد، حرکت راست- چپ هوا و تغییر در فشار آن در طول لوله به صورت یک موج صوتی حرکت می‌کند.

عنصر باریکی از هوا به ضخامت Δx را مطابق شکل ۳۳-۵ ب در نظر می‌گیریم. وقتی موج از این قسمت لوله می‌گذرد، عنصر هوا نسبت به وضعیت تعادل خود با حرکت هماهنگ ساده به چپ و راست نوسان می‌کند. بنابراین، نوسانهای هر عنصر هوا به واسطهٔ موج پیشروندهٔ صوتی، مانند یک عنصر ریسمان به واسطهٔ یک موج عرضی، نوسان می‌کند، با این تفاوت که عنصر هوا به جای عرضی، طولی نوسان می‌کند. چون



شکل ۳۳-۵ (الف) یک موج صوتی که با تندی v در لولهٔ دراز پر از هوا حرکت می‌کند، شامل یک نقش تناوبی در حال حرکت از تراکمها و انبساطهای هواست. موج در یک لحظهٔ دلخواه نشان داده شده است. (ب) نمایی از قسمت کوچکی از لوله که در راستای افقی بزرگ شده است. وقتی موج عبور می‌کند، عنصری از هوا به ضخامت Δx نسبت به وضعیت تعادل آن با حرکت هماهنگ ساده به چپ و راست نوسان می‌کند. در لحظهٔ نشان داده شده در (ب)، این عنصر به اندازهٔ فاصلهٔ S به راست وضعیت تعادل خود جابه‌جا شده است. بیشینهٔ جابه‌جایی آن در راست یا چپ S_m است.

عنصرهای ریسمان موازی با محور y نوسان می‌کنند، معادلهٔ جابه‌جایی آنها را به صورت $y(x,t)$ می‌نویسیم. به همین ترتیب، چون عنصرهای هوا موازی با محور x نوسان می‌کنند، می‌توانیم معادلهٔ جابه‌جایی آنها را به شکل گیج کنندهٔ $x(x,t)$ بنویسیم ولی به جای آن از $s(x,t)$ استفاده می‌کنیم. برای نشان دادن اینکه جابه‌جاییهای $s(x,t)$ تابعهایی سینوسی از x و t هستند، می‌توانیم تابع سینوس یا تابع کسینوس را به کار بریم. در این فصل تابع کسینوسی را به کار می‌بریم، در نتیجه داریم

$$s(x,t)=s_m\cos(kx-\omega t) \qquad (۱۳-۳۳)$$

شکل ۳۳-۶ الف قسمتهای مختلف این معادله را مشخص کرده است. در آن، s_m **دامنهٔ جابه‌جایی**- یعنی بیشینهٔ جابه‌جایی عنصر هوا در دو طرف مکان تعادل خود است (به شکل ۳۳-۵ ب نگاه کنید). عدد موج زاویه‌ای k، بسامد زاویه‌ای ω، بسامد f، طول موج λ، تندی v و دورهٔ تناوب T برای یک موج صوتی (طولی) تعریف شده‌اند و دقیقاً همان رابطه‌های موج عرضی را دارند، به غیر از اینکه در اینجا λ فاصله‌ای (دوباره در راستای جهت حرکت) است که در آن نقش تراکم و انبساط ناشی از موج شروع به تکرار خودش می‌کند. (به شکل ۳۳-۵ الف نگاه کنید). (فرض بر این است که s_m خیلی کمتر از λ است).

وقتی موج حرکت می‌کند، فشار هوا در هر نقطهٔ x در شکل ۳۳-۵ الف به طور سینوسی تغییر می‌کند. برای توصیف این تغییر می‌توان نوشت

$$\Delta p(x,t)=\Delta p_m\sin(kx-\omega t) \qquad (۱۴-۳۳)$$

شکل ۳۳-۶ ب قسمتهای مختلف این معادله را مشخص کرده است. مقدار منفی Δp در معادلهٔ ۳۳-۱۴ مربوط به انبساط هوا و مقدار مثبت مربوط به تراکم است. در اینجا Δp_m **دامنهٔ فشار** است که بیشینهٔ افزایش یا کاهش در فشار ناشی از موج است:

وقتی هیچ موجی وجود ندارد، Δp_m معمولاً خیلی کمتر از فشار موجود p است. چنانکه اثبات خوهیم کرد، دامنهٔ فشار Δp_m با معادلهٔ زیر به دامنهٔ جابه‌جایی s_m معادلهٔ ۳۳-۱۳ مربوط است

$$\Delta p_m = (v\rho\omega)s_m \qquad (۳۳\text{-}۱۵)$$

جابه‌جایی

(الف) $s(x,t) = s_m \cos(kx - \omega t)$

دامنهٔ جابه‌جایی — جملهٔ نوسانی

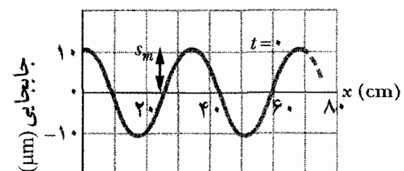
(ب) $\Delta p(x,t) = \Delta p_m \sin(kx - \omega t)$

دامنهٔ فشار — تغییر فشار

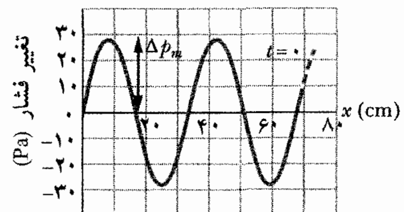
شکل ۳۳-۶ (الف) تابع جابه‌جایی و (ب) تابع تغییرات فشار یک موج صوتی پیشرونده شامل دامنه و یک جملهٔ نوسانی است.

شکل ۳۳-۷ معادله‌های ۳۳-۱۳ و ۳۳-۱۴ را در $t=0$ نشان می‌دهد؛ دو منحنی با گذشت زمان در امتداد محور افقی به طرف راست حرکت می‌کنند. توجه کنید که تغییر جابه‌جایی و فشار به اندازهٔ $\pi/2\ \text{rad}$ (یا $90°$) با هم اختلاف فاز دارند. پس، برای مثال، تغییر فشار Δp در هر نقطه از موج به هنگامی که جابه‌جایی بیشینه باشد برابر با صفر است.

> ✔ **نکتهٔ وارسی ۱** وقتی که یک عنصر نوسان کنندهٔ هوا در شکل ۳۳-۵ ب از نقطهٔ جابه‌جایی صفر به طرف راست حرکت کند، آیا فشار در عنصر در مقدار تعادل خود است، درست شروع به افزایش می‌کند یا درست شروع به کاهش؟



(الف)



(ب)

شکل ۳۳-۷ (الف) نمودار تابع جابه‌جایی (معادلهٔ ۳۳-۱۳) به ازای $t=0$. (ب) نمودار مشابهی از تابع تغییر فشار (معادلهٔ ۳۳-۱۴). هر دو نمودار برای موج صوتی $1000\ \text{Hz}$ که دامنهٔ فشار آن در آستانهٔ درد است رسم شده‌اند؛ به مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳-۷ نگاه کنید.

اثبات معادله‌های ۳۳-۱۴ و ۳۳-۱۵

شکل ۳۳-۵ ب عنصر نوسان کننده‌ای از هوا با مساحت سطح مقطع A و ضخامت Δx را نشان می‌دهد که از وضعیت تعادل خود به اندازهٔ s جابه‌جا شده است. از معادلهٔ ۳۳-۲ برای تغییر فشار در عنصر جابه‌جا شده می‌توان نوشت

$$\Delta P = -B\frac{\Delta V}{V} \qquad (۳۳\text{-}۱۶)$$

کمیت V در معادلهٔ ۳۳-۱۶ حجم این عنصر است که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$V = A\Delta x \qquad (۳۳\text{-}۱۷)$$

کمیت ΔV در معادلهٔ ۳۳-۱۶ تغییر در حجم است که وقتی عنصر جابه‌جا شود به وجود می‌آید. این تغییر حجم ناشی از این است که جابه‌جاییهای دو وجه این عنصر کاملاً یکسان نیستند و به اندازهٔ Δs با یکدیگر فرق دارند. بنابراین، می‌توان تغییر حجم را به صورت زیر نوشت

$$\Delta V = A\Delta s \qquad (۳۳\text{-}۱۸)$$

با قرار دادن معادله‌های ۳۳-۱۷ و ۳۳-۱۸ در معادلهٔ ۳۳-۱۶ و استفاده از حد دیفرانسیلی خواهیم داشت

$$\Delta p = -B\frac{\Delta s}{\Delta x} = B\frac{\partial s}{\partial x} \qquad (۳۳\text{-}۱۹)$$

نماد ∂ در معادلهٔ ۳۳-۱۹ نشان دهنده این است که مشتق در اینجا مشتق جزئی است و معنی آن این است که وقتی زمان ثابت است s چگونه نسبت به x تغییر می‌کند. پس از معادلهٔ ۳۳-۱۳ با ثابت در نظر گرفتن t خواهیم داشت

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[s_m \cos(kx-\omega t)] = -ks_m \sin(kx-\omega t)$$

با قرار دادن این مقدار به جای مشتق جزئی در معادلهٔ ۳۳-۱۹ خواهیم داشت

$$\Delta p = Bks_m \sin(kx-\omega t)$$

به ازای $\Delta p_m = Bks_m$، معادلهٔ ۳۳-۱۴ به دست می‌آید که می‌خواستیم ثابت کنیم. حال، با استفاده از معادلهٔ ۳۳-۳ می‌توان نوشت

$$\Delta p_m = (Bk)s_m = (v^2\rho k)s_m$$

معادلهٔ ۳۳-۱۵، که می‌خواستیم آن را نیز اثبات کنیم، فوراً با قرار دادن ω/v به جای k در معادلهٔ ۳۲-۱۳ به دست می‌آید.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳-۲

بیشینهٔ دامنهٔ فشار Δp_m که گوش انسان در صداهای بلند می‌تواند تحمل کند حدود $28\ \text{Pa}$ است (که خیلی کمتر از فشار معمولی هوا یعنی تقریباً $10^5\ \text{Pa}$ است). دامنهٔ جابه‌جایی s_m برای چنین صوتی در هوایی با چگالی $\rho = 1/21\ \text{kg/m}^3$ در بسامد $1000\ \text{Hz}$ و تندی $343\ \text{m/s}$ چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی دامنهٔ جابه‌جایی s_m موج صوتی با معادلهٔ ۳۳-۱۵ به دامنهٔ فشار Δp_m موج مربوط است.

محاسبه: با حل این معادله برای s_m داریم

$$s_m=\frac{\Delta p_m}{v\rho\omega}=\frac{\Delta p_m}{v\rho(2\pi f)}$$

با قرار دادن داده‌های مسئله، خواهیم داشت

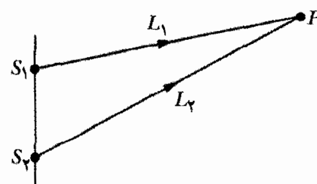
$$s_m=\frac{28\ \text{Pa}}{(343\ \text{m/s})(1/21\ \text{kg/m}^3)(2\pi)(1000\ \text{Hz})}=1/1\times10^{-5}\ \text{m}=11\ \mu\text{m}$$ (پاسخ)

این تقریباً یک هفتم ضخامت ورق کتاب است. بدیهی است که دامنهٔ جابه‌جایی حتی بلندترین صدایی که گوش می‌تواند تحمل کند خیلی کوچک است.

دامنهٔ فشار Δp_m برای *ضعیف‌ترین* صدای قابل آشکارسازی در $1000\ \text{Hz}$ برابر $2/8\times10^{-5}\ \text{Pa}$ است. اگر مانند بالا عمل کنیم $s_m=1/1\times10^{-11}\ \text{m}$ یا $11\ \text{pm}$ به دست می‌آید که تقریباً یک دهم شعاع یک اتم نوعی است. در واقع گوش یک آشکارساز حساس برای موجهای صوتی است.

۳۳-۵ تداخل

موجهای صوتی مانند موجهای عرضی می‌توانند تداخل کنند. حالت ویژه‌ای را در نظر می‌گیریم، یعنی تداخل بین دو موج صوتی مشابه که در یک جهت حرکت می‌کنند. شکل ۳۳-۸ نشان می‌دهد که چگونه می‌توانیم این وضعیت را برقرار کنیم: دو چشمهٔ نقطه‌ای S_1 و S_2 موجهای صوتی همفاز و با طول موج λ یکسان را گسیل می‌کنند. بنابراین، گفته می‌شود که خود دو چشمه همفازند؛ یعنی وقتی موجها از چشمه‌ها خارج شدند، جابه‌جایی آنها همواره یکسان است. موجهایی را در نظر می‌گیریم که از نقطهٔ P در شکل ۳۳-۸ می‌گذرند. فرض می‌کنیم که فاصلهٔ چشمه‌ها تا نقطهٔ P خیلی بزرگتر از فاصلهٔ بین چشمه‌هاست به طوری که می‌توان فرض کرد که موجها تا P در یک امتداد حرکت می‌کنند.



شکل ۳۳-۸ دو چشمهٔ نقطه‌ای S_1 و S_2 موجهای صوتی کروی همفاز گسیل می‌دارند. پرتوها نشان می‌دهند که موجها از نقطهٔ مشترک P می‌گذرند.

اگر موجها برای رسیدن به P مسیرهایی با طول مساوی را طی کنند، در آنجا همفاز خواهند بود. همانطور که برای موجهای عرضی گفته شد، این بدان معناست که در آنجا یک تداخل کاملاً سازنده وجود خواهد داشت. ولی، در شکل ۳۳-۸ مسیر L_2 که موج ناشی از S_2 طی می‌کند از مسیر L_1 که موج ناشی از S_1 طی می‌کند درازتر است. اختلاف در طول مسیرها بدین معناست که موجها در نقطهٔ P همفاز نیستند. به بیان دیگر، اختلاف فاز ϕ آنها در نقطهٔ P به **اختلاف طول مسیر** $\Delta L=|L_2-L_1|$ آنها بستگی دارد.

برای مرتبط کردن اختلاف فاز ϕ به اختلاف طول مسیر ΔL، یادآوری می‌کنیم (از بخش ۳۲-۴) که اختلاف فاز 2π متناظر با یک طول موج است. پس می‌توان تناسب زیر را نوشت

$$\frac{\phi}{2\pi}=\frac{\Delta L}{\lambda} \qquad (۳۳-۲۰)$$

که از آن داریم

$$\phi=\frac{\Delta L}{\lambda}2\pi \qquad (۳۳-۲۱)$$

تداخل کاملاً سازنده وقتی رخ می‌دهد که ϕ برابر با صفر، 2π یا مضرب درستی از 2π باشد. این شرط را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\phi=m(2\pi) \quad m=0,1,2,\cdots$$ به ازای (تداخل کاملاً سازنده) (۳۳-۲۲)

از معادلهٔ ۳۳-۲۱ این شرط وقتی برقرار است که نسبت $\Delta L/\lambda$ برابر باشد با

$$\frac{\Delta L}{\lambda}=0,1,2,\cdots$$ (تداخل کاملاً سازنده) (۳۳-۲۳)

برای مثال، اگر اختلاف طول مسیر $\Delta L=|L_2-L_1|$ در شکل ۳۳-۸ برابر با 2λ باشد، آنگاه $\Delta L/\lambda=2$ و در نقطهٔ P موجها تداخل کاملاً سازنده خواهند داشت. تداخل کاملاً سازنده است زیرا موج ناشی از S_2 نسبت به موج ناشی از S_1 به اندازهٔ 2λ انتقال فاز یافته است و دو موج در نقطهٔ P **دقیقاً همفاز** هستند.

تداخل کاملاً ویرانگر در وقتی است که ϕ مضرب فردی از π باشد، شرط این تداخل را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\phi=(2m+1)\pi \quad m=0,1,2,\cdots$$ به ازای (تداخل کاملاً ویرانگر) (۳۳-۲۴)

از معادلهٔ ۳۳-۲۱ این شرط وقتی برقرار می‌شود که نسبت $\Delta L/\lambda$ برابر باشد با

$$\frac{\Delta L}{\lambda}=0/5,1/5,2/5,\cdots$$ (تداخل کاملاً ویرانگر) (۳۳-۲۵)

برای مثال، اگر اختلاف طول مسیر $\Delta L=|L_2-L_1|$ در شکل ۳۳-۸ برابر با $2/5\lambda$ باشد، آنگاه $\Delta L/\lambda=2/5$ و در نقطهٔ P موجها در تداخل کاملاً ویرانگر خواهند بود. تداخل کاملاً ویرانگر است زیرا موج ناشی از S_2 نسبت به موج ناشی از S_1 به اندازهٔ ۲/۵ طول موج انتقال فاز دارد و دو موج در نقطهٔ P **دقیقاً در فاز مخالف‌اند.**

البته، دو موج می‌توانند تداخل میانی ایجاد کنند، مثلاً وقتی که $\Delta L/\lambda=1/2$ باشد. این حالت به تداخل کاملاً سازنده $(\Delta L/\lambda=1/0)$ نزدیکتر از حالت تداخل کاملاً ویرانگر $(\Delta L/\lambda=1/5)$ است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳-۴ مهارت خود را تقویت کنید

در شکل ۳۳-۹ الف دو چشمهٔ نقطه‌ای همفاز S_1 و S_2 که از یکدیگر $D=1/5\lambda$ فاصله دارند، موجهای صوتی با طول موج λ گسیل می‌کنند.

(الف) اختلاف طول مسیر ناشی از S_1 و S_2 در نقطهٔ P_1 که روی عمود منصف D در فاصله‌ای بزرگتر از D قرار دارد، چقدر است؟ چه نوع تداخلی در P_1 رخ می‌دهد؟

استدلال: چون موجها برای رسیدن به P_1 مسافت یکسانی را طی می‌کنند، پس اختلاف طول مسیر آنها برابر است با

$$\Delta L = 0 \qquad \text{(پاسخ)}$$

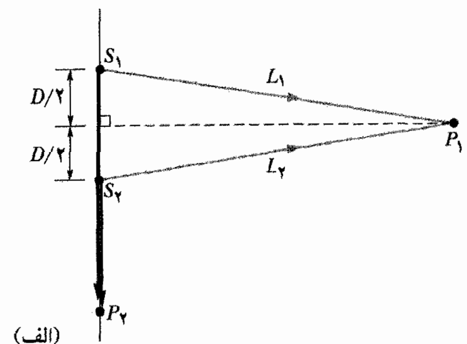
از معادلهٔ ۳۳-۲۳، این بدان معناست که در P_1 موجها در تداخل کاملاً سازنده قرار دارند.

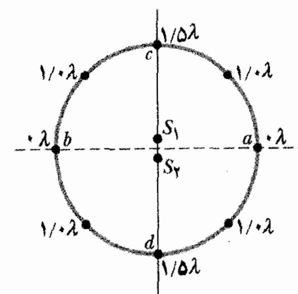
(ب) اختلاف طول مسیر و نوع تداخل را در نقطهٔ P_2 در شکل ۳۳-۹ الف به دست آورید.

استدلال: موج ناشی از S_1 برای رسیدن به P_2 باید مسافت اضافی $D(=1/5\lambda)$ را طی کند. بنابراین، اختلاف طول مسیر برابر است با

$$\Delta L = 1/5\lambda \qquad \text{(پاسخ)}$$

از معادلهٔ ۳۳-۲۵، این بدان معناست که موجها در P_2 دقیقاً ناهمفازند و در تداخل کاملاً ویرانگر قرار دارند.





شکل ۳۳-۹ (الف) دو چشمهٔ نقطه‌ای S_1 و S_2 به فاصلهٔ D از یکدیگر موجهای کروی همفاز گسیل می‌کنند. این موجها برای رسیدن به نقطهٔ P_1 مسافتهای یکسانی را طی می‌کنند. نقطهٔ P_2 روی امتداد خط واصل S_1 و S_2 قرار دارد. (ب) اختلاف طول مسیر (برحسب طول موج) بین موجهای ناشی از S_1 و S_2 در هشت نقطه روی یک دایرهٔ بزرگ در اطراف چشمه‌ها نشان داده شده است.

(پ) شکل ۳۳-۹ ب دایره‌ای به شعاع خیلی بزرگتر از D را نشان می‌دهد که مرکز آن وسط چشمه‌های S_1 و S_2 قرار دارد. چند نقطه N پیرامون این دایره وجود دارد که در آنها تداخل کاملاً سازنده است؟

استدلال: فرض کنید که از نقطهٔ a به نقطهٔ d به صورت ساعتگرد روی دایره حرکت کنیم. وقتی به سمت d حرکت می‌کنیم، اختلاف طول مسیر ΔL افزایش می‌یابد و در نتیجه نوع تداخل تغییر می‌کند. از (الف) می‌دانیم که اختلاف طول مسیر در نقطهٔ a برابر $\Delta L = 0\lambda$ است. از (ب) می‌دانیم که در نقطهٔ d، $\Delta L = 1/5\lambda$ است. بنابراین، باید همانطور که در شکل ۳۳-۹ ب نشان داده شده نقطه‌ای روی پیرامون دایره بین a و d وجود داشته باشد که در آن نقطه $\Delta L=\lambda$ باشد. از معادلهٔ ۳۳-۲۳، در آن نقطه تداخل کاملاً سازنده رخ می‌دهد. همچنین، بین نقطهٔ a و نقطهٔ d نقطهٔ دیگری وجود ندارد که در آن تداخل کاملاً سازنده رخ دهد، چون به جزء عدد ۱ عدد درستی بین صفر و ۱/۵ وجود ندارد.

برای مشخص کردن سایر نقطه‌ها روی بقیهٔ پیرامون دایره که در آنها تداخل کاملاً سازنده رخ دهد از تقارن استفاده می‌کنیم. تقارن نسبت به خط cd نقطهٔ b را به دست می‌دهد که در آن $\Delta L=\lambda$ است. سه نقطهٔ دیگر نیز وجود دارند که در آنها $\Delta L=\lambda$ است. در مجموع داریم

$$N = 6 \qquad \text{(پاسخ)}$$

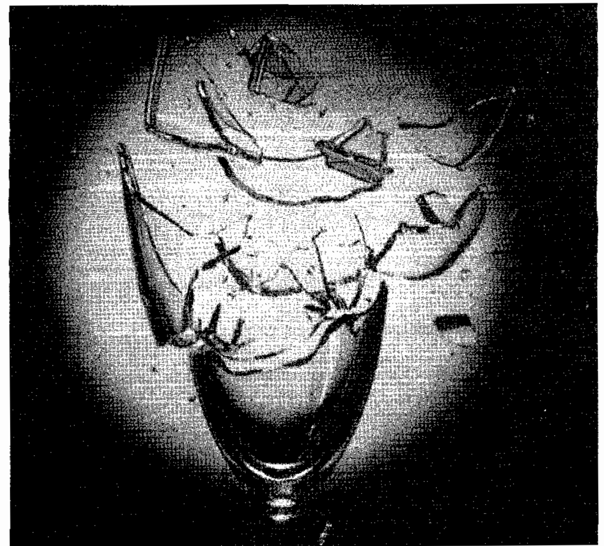
۳۳-۶ شدت و تراز صوت

اگر بخواهید در جایی بخوابید که صدای موسیقی در نزدیکی آنجا بلند است، متوجه می‌شوید که چیزی بیش از بسامد، طول موج و تندی برای صوت وجود دارد. در آنجا شدت نیز وجود دارد. **شدت I** یک موج صوتی در یک سطح عبارت است از آهنگ متوسط انرژیی که به یکای سطح می‌رسد یا از آن عبور می‌کند. رابطهٔ شدت به این صورت نوشته می‌شود

$$I = \frac{P}{A} \qquad (۲۶\text{-}۳۳)$$

که در آن P آهنگ زمانی انتقال انرژی (توان) موج صوتی و A مساحت سطحی است که با صوت برخورد می‌کند. شدت I با رابطهٔ زیر به جابه‌جایی s_m این موج صوتی مربوط می‌شود

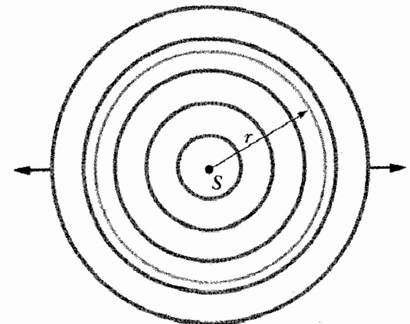
$$I = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 s_m^2 \qquad (۲۷\text{-}۳۳)$$



صوت می‌تواند موجب نوسان جدارهٔ یک لیوان شود. اگر صوت یک موج ایستاده ایجاد کند و اگر شدت صوت به اندازهٔ کافی زیاد باشد، ممکن است لیوان بشکند.

تغییر شدت با فاصله

چگونگی تغییر شدت با فاصله از یک چشمهٔ صوتی واقعی اغلب پیچیده است. بعضی چشمه‌های واقعی (مانند بلندگوها) ممکن است صدا را فقط در یک جهت ارسال کنند و محیط معمولاً پژواکهایی (موجهای صوتی بازتابیده) ایجاد می‌کند که با موجهای صوتی مستقیم همپوشانی می‌کنند. ولی در بعضی از وضعیتها می‌توان از پژواکها چشم پوشی و فرض کرد که چشمهٔ صوتی یک چشمهٔ نقطه‌ای است که صوت را به طور *همسانگرد*، یعنی با شدت یکسان در تمام جهتها، گسیل می‌کند. جبهه‌های موج گسترده شده از چنین چشمهٔ نقطه‌ای همسانگردی در یک لحظهٔ خاص در شکل ۳۳-۱۰ نشان داده شده است.



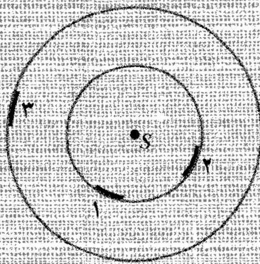
شکل ۳۳-۱۰ یک چشمهٔ نقطه‌ای S موجهای صوتی را به طور یکنواخت در تمام جهتها گسیل می‌کند. این موجها از یک کرهٔ فرضی به شعاع r که مرکز آن در چشمه واقع است، می‌گذرند.

فرض کنید که انرژی مکانیکی موجهای صوتی به هنگام گسترده شدن از این چشمه پایسته است. همچنین فرض کنید که مرکز دایرهٔ فرضی به شعاع r، همانطور که در شکل ۳۳-۱۰ نشان داده شده، روی چشمه در نظر گرفته شود. همهٔ انرژی گسیل شده به وسیلهٔ چشمه باید از سطح کره بگذرد. بنابراین، آهنگی که انرژی موجهای صوتی با آن از سطح کره می‌گذرد باید آهنگی باشد که انرژی توسط چشمه گسیل می‌شود (یعنی توان P_s چشمه). از معادلهٔ ۳۳-۲۶ شدت I در کره باید به صورت زیر باشد

$$I = \frac{P_s}{4\pi r^2} \qquad (۳۳-۲۸)$$

که در آن $4\pi r^2$ مساحت کره است. از معادلهٔ ۳۳-۲۸ دیده می‌شود که شدت صوت از یک چشمهٔ نقطه‌ای همسانگرد برحسب مربع فاصلهٔ r از چشمه کاهش می‌یابد.

✔ *نکتهٔ وارسی ۲* در شکل سه قطعهٔ کوچک ۱، ۲، ۳ نشان داده شده‌اند که روی سطحهای دو کرهٔ فرضی قرار دارند؛ مرکز این کره‌ها روی چشمهٔ صوتی همسانگرد و نقطه‌ای S قرار دارد. آهنگ انتقال انرژی که از این سه قطعه به وسیلهٔ موجهای صوتی می‌گذرد یکسان است. این قطعه‌ها را به ترتیب بزرگی (الف) شدت صوت در آنها و (ب) مساحت آنها، مرتب کنید.



مقیاس دسی بل

در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳-۲ دیدیم که دامنهٔ جابه‌جایی در گوش انسان در گسترهٔ تقریباً 10^{-5} m در مورد بلندترین صوت قابل تحمل و 10^{-11} m در مورد ضعیفترین صوت قابل آشکارسازی قرار دارد که نسبت آنها 10^{-6} m است. از معادلهٔ ۳۳-۲۷ می‌بینیم که شدت یک صوت به نسبت *مربع* دامنهٔ آن تغییر می‌کند، پس نسبت شدتها در این دو حد برای دستگاه شنوایی انسان 10^{12} است. انسان گسترهٔ وسیعی از شدتها را می‌تواند بشنود.

برای بحث در چنین گسترهٔ وسیعی از مقدارها از لگاریتم استفاده می‌کنیم. رابطهٔ زیر را در نظر می‌گیریم

$$y = \log x$$

که در آن x و y متغیرند. خاصیت این معادله آن است که اگر x را در ۱۰ *ضرب کنیم*، y به اندازهٔ ۱ افزایش می‌یابد. برای اینکه موضوع روشن شود می‌نویسیم

$$y' = \log(10x) = \log 10 + \log x = 1 + y$$

به همین ترتیب اگر x را در 10^{12} ضرب کنیم، y فقط به اندازهٔ ۱۲ افزایش می‌یابد.

بنابراین به جای اینکه از شدت I یک موج صوتی سخن بگوییم، خیلی راحت‌تر است که **تراز صوتی** β را در نظر بگیریم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\beta = (۱۰\,\text{dB})\log\frac{I}{I_۰} \qquad (۳۳-۲۹)$$

که در آن dB مخفف **دسی‌بل**، یکای تراز صوتی است که به افتخار الکساندر گراهام بل[1] انتخاب شده است. $I_۰$ در معادلهٔ ۳۳-۲۹ یک شدت مرجع استاندارد است ($=۱۰^{-۱۲}\,\text{W/m}^۲$) و دلیل انتخاب آن این است که نزدیک به حد پایین گسترهٔ شنوایی انسان است. به ازای $I = I_۰$، از معادلهٔ ۳۳-۲۹، $\beta = ۱۰\log ۱ = ۰$ به دست می‌آید، پس تراز مرجع استاندارد متناظر با صفر دسی بل است. در این صورت هر وقت که شدت صوت یک مرتبهٔ بزرگی (ضریبی از ۱۰) افزایش یابد β به اندازهٔ ۱۰ dB افزایش می‌یابد. بنابراین، $\beta = ۴۰$ متناظر با شدتی $۱۰^۴$ برابر تراز مرجع استاندارد است. در جدول ۳۳-۲ ترازهای صوتی برای چند محیط مختلف آمده است.

جدول ۳۳-۲

چند تراز صوتی (dB)

آستانهٔ شنوایی	۰
صدای برگهای خشک	۱۰
صحبت کردن	۶۰
کنسرت راک	۱۱۰
آستانهٔ درد	۱۲۰
موتور جت	۱۳۰

اثبات معادلهٔ ۳۳-۲۷

در شکل ۳۳-۵ الف لایهٔ نازکی از هوا را به ضخامت dx، مساحت A و جرم dm در نظر می‌گیریم که هنگام عبور موج صوتی به معادلهٔ ۳۳-۱۳ از آن به عقب و جلو نوسان می‌کند. انرژی جنبشی dK این لایهٔ هوا عبارت است از

$$dK = \frac{۱}{۲}dm\,v_s^۲ \qquad (۳۳-۳۰)$$

در اینجا v_s تندی موج نیست بلکه تندی عنصر نوسان کنندهٔ هواست که به صورت زیر از معادله ۳۳-۱۳ به دست می‌آید

$$v_s = \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_m \sin(kx-\omega t)$$

با استفاده از این رابطه و قرار دادن $dm = \rho A\,dx$ می‌توان معادلهٔ ۳۳-۳۰ را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$dK = \frac{۱}{۲}(\rho A\,dx)(-\omega s_m)^۲ \sin^۲(kx-\omega t) \qquad (۳۳-۳۱)$$

از تقسیم معادلهٔ ۳۳-۳۱ بر dt آهنگ حرکت انرژی جنبشی به همراه موج به دست می‌آید. همانطور که در فصل ۳۲ در مورد موج عرضی دیدیم، dx/dt تندی v موج است، پس داریم

$$\frac{dK}{dt} = \frac{۱}{۲}\rho A v\omega^۲ s_m^۲ \sin^۲(kx-\omega t) \qquad (۳۳-۳۲)$$

آهنگ *متوسط* انتقال انرژی جنبشی عبارت است از

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_{\text{avg}} = \frac{۱}{۲}\rho A v\omega^۲ s_m^۲[\sin^۲(kx-\omega t)]_{\text{avg}}$$

$$= \frac{۱}{۴}\rho A v\omega^۲ s_m^۲ \qquad (۳۳-۳۳)$$

برای به دست آوردن این معادله، از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که مقدار متوسط مجذور یک تابع سینوسی (یا کسینوسی) در یک نوسان کامل برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

فرض می‌کنیم که انرژی *پتانسیل* نیز با همین آهنگ متوسط همراه با موج انتقال می‌یابد. شدت موج I که آهنگ متوسط بریکای مساحتی است که هر دو نوع انرژی به وسیلهٔ موج منتقل می‌شود، از معادلهٔ ۳۳-۳۳ عبارت است از

$$I = \frac{۲(dK/dt)_{\text{avg}}}{A} = \frac{۱}{۲}\rho v\omega^۲ s_m^۲$$

که همان معادلهٔ ۳۳-۲۷ است که می‌خواستیم به دست آوریم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳-۴

یک جرقهٔ الکتریکی در راستای خط مستقیمی به طول $L = ۱۰\,\text{m}$ می‌جهد و به طور شعاعی یک تپ صوتی از جرقه گسیل می‌شود. (به جرقه چشمهٔ *خطی* صوت گفته می‌شود.) توان گسیل شده $P_s = ۱/۶\times۱۰^۴\,\text{W}$ است.

(الف) شدت I صوت هنگامی که به فاصلهٔ $r = ۱۲\,\text{m}$ از جرقه می‌رسد چقدر است؟

نکته‌های کلیدی (۱) همانطور که در شکل ۳۳-۱۱ نشان داده شده است، یک استوانهٔ فرضی به شعاع $r = ۱۲\,\text{m}$ و طول $L = ۱۰\,\text{m}$ (در دو انتها باز است) را به دور جرقه در نظر می‌گیریم. پس شدت I در سطح استوانه برابر نسبت P/A است که در آن P آهنگ زمانی انتقال انرژی صوتی است که از سطح می‌گذرد و A مساحت سطح است. (۲) فرض کنیم اصل پایستگی انرژی برای انرژی صوتی برقرار است. این بدان معناست که آهنگ P عبور انرژی از این استوانه باید با آهنگ P_s انرژی گسیل شده توسط چشمه برابر باشد.

محاسبه‌ها: با توجه به این مطالب و اینکه مساحت سطح استوانه برابر $A = ۲\pi rL$ است، داریم

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P_s}{۲\pi rL} \qquad (۳۳-۳۴)$$

از این رابطه معلوم است که شدت صوت ناشی از یک چشمهٔ خطی با فاصلهٔ r کاهش می‌یابد (نه با مجذور فاصلهٔ r نظیر یک چشمهٔ نقطه‌ای). با قرار دادن داده‌های مسئله داریم

$$I = \frac{۱/۶\times۱۰^۴\,\text{W}}{۲\pi(۱۲\,\text{m})(۱۰\,\text{m})} = ۲۱/۲\,\text{W/m}^۲ \approx ۲۱\,\text{W/m}^۲ \qquad \text{(پاسخ)}$$

---

1. Alexander Graham Bell

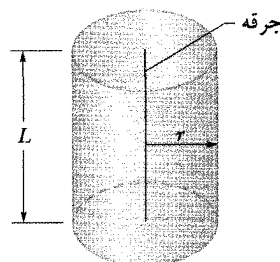
(ب) انرژی صوتی با چه آهنگ زمانی P_d با یک آشکارساز صوتی به مساحت $A_d = ۲/۰\,\text{cm}^۲$ و به فاصلهٔ $r = ۱۲\,\text{m}$ که به طرف جرقه است برخورد می‌کند؟

محاسبه‌ها: می‌دانیم که شدت صوت در آشکارساز برابر است با نسبت آهنگ P_d انتقال انرژی به مساحت آشکارساز A_d،

$$I = \frac{P_d}{A_d} \qquad (۳۵\text{-}۳۳)$$

می‌توان فرض کرد که آشکارساز روی سطح استوانه‌ای قسمت (الف) قرار دارد. در این‌صورت، شدت صوت در آشکارساز عبارت است از شدت $I(=۲۱/۲\,\text{W/m}^۲)$ در سطح استوانه. با حل معادلهٔ ۳۳-۳۵ برای P_d، داریم

$$P_d = (۲۱/۲\,\text{W/m}^۲)(۲/۰\times۱۰^{-۴}\,\text{m}^۲) = ۴/۲\,\text{mW} \qquad \text{(پاسخ)}$$



شکل ۳۳-۱۱ جرقه‌ای در راستای یک مسیر مستقیم به طول L موجهای صوتی را به طور شعاعی رو به بیرون گسیل می‌کند. این موجها از یک استوانهٔ فرضی به شعاع r و طول L که به دور جرقه در نظر گرفته می‌شود می‌گذرند.

مسئلهٔ نمونه ۳۳-۵

خیلی از اعضای کنسرتهای راک از آسیب دیدن شنوایی خود رنج می‌برند چون در طی سالها نوازندگی با ترازهای صوتی بالا در نزدیکی بلندگوها یا شنیدن موسیقی با گوشیها قرار دارند. بعضی از آنها مثل تد ناگنت کاملاً شنوایی خود را از دست می‌دهند. برخی دیگر مثل پیتر تانزهند از گروه هو صدای زنگ دائمی را حس می‌کنند (وزوز گوش). اخیراً تعداد زیادی از نوازندگان راک مثل لارس اولریخ از گروه متال (شکل ۳۳-۱۲) شروع به استفاده از گوشیهای مخصوص کرده‌اند تا در حین اجرای کنسرت به گوش آنها صدمه وارد نشود. اگر گوشی تراز موجهای صوتی را $۲۰\,\text{dB}$ کاهش دهد، نسبت شدت I_f نهایی موجها به شدت I_i اولیهٔ آنها چقدر خواهد بود؟

نکتهٔ کلیدی هم برای شدت نهایی و هم برای شدت اولیه، بنابر تعریف تراز صوتی در معادلهٔ ۳۳-۲۹، تراز صوتی β به شدت بستگی دارد

محاسبه‌ها: برای موجهای نهایی داریم

$$\beta_f = (۱۰\,\text{dB})\log\frac{I_f}{I_۰}$$

و برای موجهای اولیه داریم

$$\beta_i = (۱۰\,\text{dB})\log\frac{I_i}{I_۰}$$

اختلاف بین ترازهای صوتی عبارت است از

$$\beta_f - \beta_i = (۱۰\,\text{dB})\left(\log\frac{I_f}{I_۰} - \log\frac{I_i}{I_۰}\right) \qquad (۳۶\text{-}۳۳)$$

با استفاده از اتحاد زیر

$$\log\frac{a}{b} - \log\frac{c}{d} = \log\frac{ad}{bc}$$

می‌توان معادلهٔ ۳۳-۳۶ را به صورت زیر نوشت

$$\beta_f - \beta_i = (۱۰\,\text{dB})\log\frac{I_f}{I_i} \qquad (۳۷\text{-}۳۳)$$

با مرتب کردن دوبارهٔ رابطه و قرار دادن مقدار کاهش تراز صوتی به صورت $\beta_f - \beta_i = -۲۰\,\text{dB}$، در می‌یابیم که

$$\log\frac{I_f}{I_i} = \frac{\beta_f - \beta_i}{۱۰\,\text{dB}} = \frac{-۲۰\,\text{dB}}{۱۰\,\text{dB}} = -۲/۰$$

سپس اگر از دو طرف رابطه آنتی لگاریتم بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{I_f}{I_i} = \log^{-۱}(-۲/۰) = ۰/۰۱۰ \qquad \text{(پاسخ)}$$

بنابراین، گوشی شدت موجها را تا ۰/۰۱۰ شدت اولیه کاهش می‌دهد که کاهش با دو مرتبهٔ بزرگی است



شکل ۳۳-۱۲ لارس اولریخ از گروه متال یکی از حامیان انجمن آموزش شنوایی و هشدار به نوازندگان موسیقی راک است که خطرات تراز صوتی بالا برای شنوایی را گوشزد می‌کند.

۳۳-۷ چشمه‌های صوتی در موسیقی

صوتهای موسیقایی را می‌توان با تارهای نوسان‌کننده (گیتار، پیانو، ویولن)، غشاهای نوسان کننده (طبل، تمبک)، ستونهای هوای نوسان کننده (فلوت، قرەنی، ارگ و کرنا، شکل ۳۳-۱۳)، تیغه‌های چوبی یا میله‌های فولادی (ماریمبا، گزیلوفون)، و

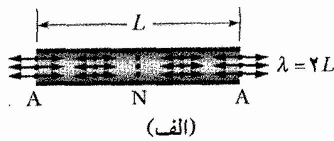
بسیاری از اجسام نوسان کنندهٔ دیگر ایجاد کرد. بیشتر این وسایل بیش از یک قسمت نوسان‌کننده دارند.



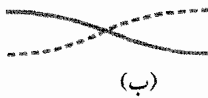
شکل ۳۳-۱۳ ستون هوای داخل کرنا هنگامی که ساز نواخته می‌شود، به نوسان در می‌آید.

از فصل ۳۲ بیاد آورید که موجهای ایستاده را می‌توان با بستن یک ریسمان کشیده شده که در دو انتها ثابت‌اند ایجاد کرد. این موجها به این دلیل به وجود می‌آیند که موجهای پیشرونده در طول ریسمان در هر انتها روی ریسمان باز تابیده می‌شوند. اگر طول موج موجهای ریسمان به طور مناسبی با طول ریسمان سازگار باشد، برهم‌نهی موجهای پیشرونده در جهتهای مخالف، یک نقش موج ایستاده (یا مد نوسان) ایجاد می‌کند. طول موج مورد نیاز برای این سازگاری این است که متناظر با یک *بسامد تشدیدی* در ریسمان باشد. مزیت برقراری موجهای ایستاده این است که ریسمان پس از آن با یک دامنهٔ بزرگ و پایدار که هوای محیط را به عقب و جلو می‌راند نوسان می‌کند و در نتیجه یک موج صوتی قابل ملاحظه با همان بسامد نوسانهای ریسمان به وجود می‌آورد. این ایجاد صدا مثلاً برای یک نوازندهٔ گیتار اهمیت زیادی دارد.

به همین ترتیب می‌توان موجهای ایستادهٔ صوتی را در لوله‌ای پر شده از هوا ایجاد کرد. وقتی موجهای صوتی در هوای درون لوله حرکت می‌کنند، از هر انتها بازتابیده می‌شوند و در لوله بر می‌گردند. (حتی اگر یک سر لوله باز باشد این بازتاب روی می‌دهد ولی بازتاب به کاملی وقتی که انتها بسته باشد نیست). اگر طول موج موجهای صوتی به طور مناسبی با طول لوله سازگار باشد، برهم‌نهی موجهای پیشرونده در دو جهت مخالف در لوله یک نقش موج ایستاده به وجود می‌آورد. طول موج مورد نیاز موجهای صوتی برای این سازگاری این است که متناظر با بسامد تشدیدی لوله باشد. مزیت چنین موج ایستاده‌ای این است که هوا در لوله با دامنهٔ بزرگ و پایدار نوسان می‌کند و از هر انتهای باز یک موج صوتی که همان بسامد نوسانها در لوله را دارد گسیل می‌شود. این گسیل صوت برای نوازندهٔ ارگ از اهمیت زیادی برخوردار است.



(الف)



(ب)

شکل ۳۳-۱۴ (الف) ساده‌ترین نقش جابه‌جایی موج ایستاده برای موجهای صوتی (طولی) در لوله‌ای که دو انتهای آن باز است دارای یک شکم (A) در هر انتها و یک گره (N) در وسط است. (جابه‌جاییهای طولی نشان داده شده با پیکانهای دو سر خیلی بزرگتر از اندازهٔ واقعی رسم شده‌اند.) (ب) نقش موج ایستاده متناظر برای موجهای (عرضی) روی ریسمان.

بسیاری از ویژگیهای دیگر نقشهای موج صوتی شبیه به ویژگیهای موجهای ایستاده در ریسمان است: انتهای بستهٔ لوله مانند انتهای ثابت ریسمانی است که در آنجا باید یک گره (جابه‌جایی صفر) وجود داشته باشد. انتهای باز لوله مانند انتهای ریسمانی است که مطابق شکل ۳۲-۲۱ ب به حلقه‌ای وصل است که آزادانه حرکت می‌کند و در آنجا یک شکم به وجود می‌آید. (در واقع، شکم برای انتهای باز لوله اندکی دورتر از دهانه قرار دارد، ولی در اینجا به این جزییات نمی‌پردازیم.)

ساده‌ترین نقش موج ایستاده که می‌تواند در یک لوله با دو انتهای باز ایجاد شود در شکل ۳۳-۱۴ الف نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رود یک شکم در هر انتهای لوله و یک گره نیز در وسط لوله قرار دارد. راه ساده تر برای نمایش موج صوتی طولی ایستاده- با ترسیم آن مانند یک موج عرضی ایستاده در ریسمان- در شکل ۳۳-۱۴ ب نشان داده شده است.

نقش موج ایستاده در شکل ۳۳-۱۴ الف *مد اصلی* یا *هماهنگ اول* نامیده می‌شود. برای اینکه این هماهنگ ایجاد شود، موجهای صوتی در لوله‌ای به طول L باید دارای طول موجی برابر با $L = \lambda/۲$ باشند به طوری که $\lambda = ۲L$. تعدادی از نقشهای موج صوتی ایستاده برای لوله‌ای با دو انتهای باز در شکل ۳۳-۱۵ الف با استفاده از نمایش موج روی ریسمان نشان داده شده است. برای ایجاد *هماهنگ دوم* موجهای صوتی باید دارای طول موج $\lambda = ۲L/۳$ باشند و برای *هماهنگ سوم* باید موجها دارای طول موج $\lambda = ۲L/۳$ باشند و نظایر آن.

در حالت کلی، بسامدهای تشدیدی برای لوله‌ای به طول L با دو انتهای باز متناظر با این طول موجها هستند

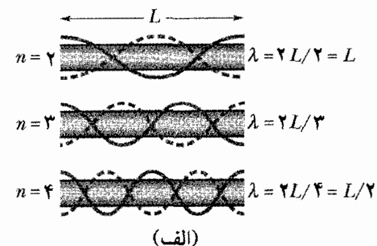
$$\lambda = \frac{۲L}{n} \quad \text{به ازای} \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots \qquad (۳۳\text{-}۳۸)$$

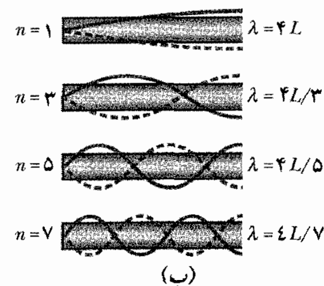
که در آن n *عدد هماهنگ* نام دارد. در این صورت، بسامدهای تشدیدی با رابطهٔ زیر داده می‌شوند

$$f=\frac{v}{\lambda}=\frac{nv}{۲L} \quad , \quad n=۱,۲,۳,\ldots \quad \text{به ازای} \quad \text{(لوله‌ای با دو انتهای باز)} \qquad (۳۳-۳۹)$$

که در آن v تندی صوت است.

شکل ۳۳-۱۵ ب (با استفاده از نمایش موج روی ریسمان) چند نقش موج صوتی را نشان می‌دهد که فقط در لوله با یک انتهای باز می‌تواند ایجاد شود. لازم است در انتهای باز یک شکم و در انتهای بسته یک گره وجود داشته باشد. ساده‌ترین نقش این است که موجهای صوتی دارای طول موجی باشند که با رابطهٔ $L=\lambda/۴$ داده می‌شود، یعنی $\lambda=۴L$. ساده‌ترین نقش بعدی این است که طول موج با رابطهٔ $L=\frac{۳}{۴}\lambda$ داده شود، یعنی $L=\frac{۴}{۳}L$ و نظایر آن.





شکل ۳۳-۱۵ نقشهای موج ایستاده برای موجهای روی ریسمان روی لوله‌ها رسم شده‌اند تا نقشهای موج صوتی ایستاده در لوله‌ها را نمایش دهند. (الف) هر *دو انتهای* لوله باز است، هر هماهنگی می‌تواند در این لوله ایجاد شود. (ب) *یک انتهای* لوله باز است، فقط هماهنگهای فرد می‌توانند ایجاد شوند.

در حالت کلی، بسامدهای تشدیدی برای لوله‌ای به طول L فقط با یک انتهای باز به طول موجهای زیر مربوط است

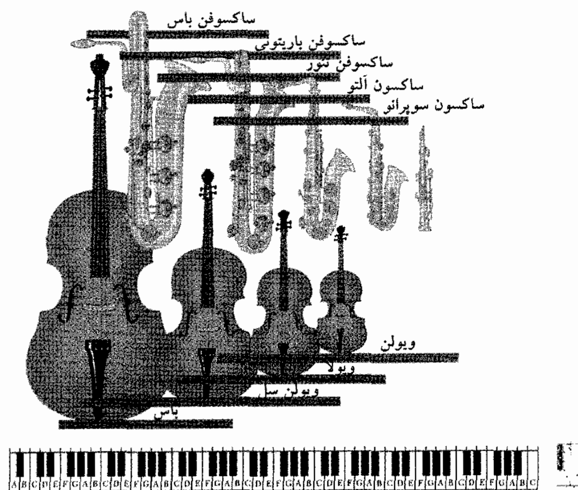
$$\lambda=\frac{۴L}{n} \qquad n=۱,۲,۳,\ldots \quad \text{به ازای} \qquad (۳۳-۴۰)$$

که در آن عدد هماهنگ n *باید* یک *عدد* فرد باشد. بنابراین، بسامدهای تشدیدی با رابطهٔ زیر داده می‌شوند

$$f=\frac{v}{\lambda}=\frac{nv}{۴L} \qquad n=۱,۳,۵,\ldots \quad \text{به ازای} \quad \text{(لوله‌ای با یک انتهای باز)} \qquad (۳۳-۴۱)$$

دوباره توجه کنید که فقط هماهنگهای فرد می‌توانند در لوله‌ای با یک انتهای باز وجود داشته باشند. برای مثال، هماهنگ دوم، $n=۲$ ، نمی‌تواند در چنین لوله‌ای ایجاد شود. همچنین توجه کنید که برای چنین لوله‌ای صفت جملهٔ "هماهنگ سوم" به عدد هماهنگ n اشاره دارد (نه به هماهنگ ممکن سوم).

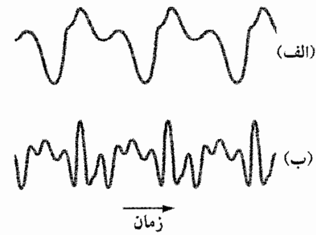
طول یک وسیلهٔ موسیقی گسترهٔ بسامدهایی را که برای عملکرد آن طراحی شده‌است به دست می‌دهد و طول کوتاهتر بر بسامدهای بالاتر دلالت دارد. برای مثال شکل ۳۳-۱۶ خانوادهٔ ساکسوفن و ویولن را با گسترهٔ بسامدهای آنها در مقایسه با صفحه کلید پیانو، نشان می‌دهد. توجه کنید که برای هر وسیله، بسامدهای بالا و پایین با بسامدهای وسیلهٔ مجاور هم همپوشانی دارند.



شکل ۳۳-۱۶ خانوادهٔ ساکسوفن و ویولن، که رابطه‌های بین طول این وسایل و گسترهٔ بسامدهای تولید شده را نشان می‌دهد. گسترهٔ بسامدی هر وسیله با یک نوار افقی در طول یک مقیاس بسامدی توسط صفحهٔ کلیدهای پیانو نشان داده شده است. بسامد به سمت راست افزایش می‌یابد.

در هر دستگاه نوسان کننده که یک صوت موسیقی را ایجاد می‌کند، چه تار ویولن یا هوا در یک لولهٔ ارگ، هماهنگهای اصلی با یک یا چند هماهنگ بالاتر معمولاً به طور همزمان ایجاد می‌شوند. بنابراین، همه را با هم- یعنی به صورت یک موج خالص حاصل از برهم‌نهی می‌شنویم. وقتی وسایل مختلف نت یکسانی را با هم می‌نوازند، بسامد اصلی ایجاد شده توسط آنها یکسان است اما شدت هماهنگهای بالاتر متفاوت است. برای مثال، هماهنگ چهارم نت میانی C ممکن است برای وسیله‌ای به نسبت شدید و برای وسیلهٔ دیگری به نسبت ضعیف باشد یا حتی شنیده نشود. بنابراین، چون وسایل مختلف موجهای خالص متفاوتی ایجاد می‌کنند در نتیجه وقتی حتی یک نت معینی نواخته شود، صدا به نحو متفاوتی شنیده می‌شود. برای دو موج خالص نشان داده شده در شکل ۳۳-۱۷ که نت یکسانی با دو وسیلهٔ مختلف نواخته شده‌اند همین موضوع برقرار است.

✔ ***نکتهٔ وارسی ۳*** دو انتهای لولهٔ A به طول L و لولهٔ B به طول $۲L$ باز است. چه هماهنگی از لولهٔ B بسامد یکسانی با بسامد اصلی لولهٔ A دارد؟



شکل ۳۳-۱۷ شکلهای موج ایجاد شده به وسیلهٔ (الف) فلوت و (ب) قرنی هنگامی که نت یکسانی با بسامد هماهنگ اول یکسان نواخته می‌شود.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳-۶

نوفه‌های ضعیف زمینهٔ موجود در یک اتاق، در یک لولهٔ مقوایی به طول $L = ۶۷/۰\,\text{cm}$ با دو انتهای باز موج ایستادهٔ اصلی را ایجاد می‌کند. فرض کنید که تندی صوت در هوای داخل لوله $۳۴۳\,\text{m/s}$ است.

(الف) چه بسامدی از لوله شنیده می‌شود؟

نکتهٔ کلیدی در لوله‌ای با دو انتهای باز، وضعیت متقارنی وجود دارد که در آن موج ایستاده در هر یک از دو انتها دارای شکم است. نقش موج ایستاده (شبیه موج در ریسمان) همانی است که در شکل ۳۳-۱۴ ب نشان داده شده است.

محاسبه: بسامد برای مد اصلی به ازای $n = ۱$ با معادلهٔ ۳۳-۳۹ داده می‌شود

$$f = \frac{nv}{۲L} = \frac{(۱)(۳۴۳\,\text{m/s})}{۲(۰/۶۷۰\,\text{m})} = ۲۵۶\,\text{Hz} \qquad \text{(پاسخ)}$$

اگر نوفه‌های زمینه هماهنگهای بالاتری مانند هماهنگ دوم را ایجاد کنند، بسامدهایی که مضرب *صحیحی* از ۲۵۶ هستند نیز شنیده خواهند شد.

(ب) اگر گوش خود را در یک انتهای لوله قرار دهید کدام بسامد اصلی را از لوله خواهید شنید؟

نکتهٔ کلیدی وقتی گوش خود را به قدر کافی به یک انتهای لوله نزدیک می‌کنید، وضعیت نامتقارنی داریم- شکم هنوز در انتهای باز وجود دارد ولی دراین حالت یک گره در انتهای دیگر (بسته) قرار دارد. نقش موج ایستاده مثل نقش بالایی در شکل ۳۳-۱۵ ب است. بسامد برای مد اصلی به ازای $n = ۱$ با معادلهٔ ۳۳-۴۱ داده می‌شود

$$f = \frac{nv}{۴L} = \frac{(۱)(۳۴۳\,\text{m/s})}{۴(۰/۶۷۰\,\text{m})} = ۱۲۸\,\text{Hz} \qquad \text{(پاسخ)}$$

اگر نوفه‌های زمینه هر هماهنگ بالاتری را ایجاد کنند، آنها مضرب *فردی از* ۱۲۸ Hz خواهند بود. این بدان معناست که بسامد ۲۶۰ Hz (مضرب زوجی است) نمی‌تواند ایجاد شود.

۳۳-۸ زنش

اگر به فاصلهٔ چند دقیقه به دو صوت که بسامد آنها مثلاً ۵۵۲ Hz و ۵۶۴ Hz است گوش دهیم، بسیاری از ما نمی‌توانیم یکی را از دیگری تشخیص دهیم. ولی، اگر این صوتها به طور همزمان به گوش برسند، آنچه که می‌شنویم صوتی است که بسامد آن ۵۵۸ Hz ، یعنی *متوسط* ترکیب این دو بسامد است. همچنین تغییر عمده‌ای نیز در شدت این صوت می‌شنویم- شدت با *زنشهایی* موجدار که با بسامد ۱۲ Hz تکرار می‌شوند به آرامی زیاد و کم می‌شود و این *اختلاف* بین دو بسامد ترکیب شده است. شکل ۳۳-۱۸ این پدیدهٔ زنش را نشان می‌دهد.

فرض کنیم تغییرات وابسته به زمان جابه‌جاییهای ناشی از دو موج صوتی را در یک مکان معین به صورت زیر بنویسیم

$$s_۱ = s_m \cos \omega_۱ t \quad \text{و} \quad s_۲ = s_m \cos \omega_۲ t \qquad (۳۳\text{-}۴۲)$$

که در آنها $\omega_۱ > \omega_۲$ است. برای سادگی، فرض کرده‌ایم که موجها دارای دامنهٔ یکسانی هستند. بنابر اصل برهم‌نهی، برایند جابه‌جایی عبارت است از

$$s = s_۱ + s_۲ = s_m(\cos \omega_۱ t + \cos \omega_۲ t)$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی زیر (به پیوست ث نگاه کنید)

$$\cos\alpha + \cos\beta = ۲\cos\left[\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)\right]\cos\left[\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)\right]$$

جابه‌جایی برایند را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$s = ۲s_m \cos\left[\frac{۱}{۲}(\omega_۱ - \omega_۲)t\right]\cos\left[\frac{۱}{۲}(\omega_۱ + \omega_۲)t\right] \qquad (۳۳\text{-}۴۳)$$

اگر بنویسیم

$$\omega' = \frac{۱}{۲}(\omega_۱ - \omega_۲) \quad \text{و} \quad \omega = \frac{۱}{۲}(\omega_۱ + \omega_۲) \qquad (۳۳\text{-}۴۴)$$

در این‌صورت معادلهٔ ۳۳-۴۳ را می‌توانیم به این صورت بنویسیم

$$s(t) = [۲s_m \cos\omega' t]\cos\omega t \qquad (۳۳\text{-}۴۵)$$

حال فرض می‌کنیم که بسامدهای زاویه‌ای $\omega_۱$ و $\omega_۲$ موجهای ترکیب شونده تقریباً برابرند، به این معنا که در معادلهٔ ۳۳-۴۴، $\omega \gg \omega'$ است. در نتیجه می‌توان معادلهٔ ۳۳-۴۵ را به عنوان یک تابع کسینوسی در نظر گرفت که بسامد زاویه‌ای آن ω و دامنهٔ آن قدر مطلق کمیت داخل کروشه است (که ثابت نیست و با بسامد ω' تغییر می‌کند).

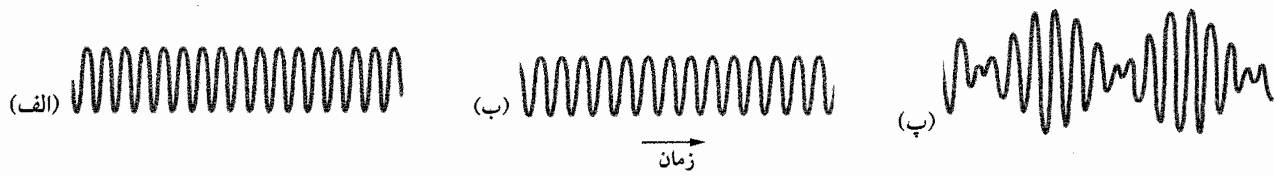
بیشینهٔ دامنه زمانی رخ می‌دهد که $\cos\omega' t$ در معادلهٔ ۳۳-۴۵ دارای مقدار ۱+ و ۱- باشد، و این در هر تکرار تابع کسینوس دوبار حاصل می‌شود. چون بسامد زاویه‌ای $\cos\omega' t$ برابر ω' است، بسامد زاویه‌ای زنش ω که در آن زنش رخ می‌دهد عبارت است از $\omega_{\text{زنش}} = ۲\omega'$. بنابراین، به کمک معادلهٔ ۳۳-۴۴ می‌توان نوشت

$$\omega_{\text{زنش}} = ۲\omega' = (۲)\left(\frac{۱}{۲}\right)(\omega_۱ - \omega_۲) = \omega_۱ - \omega_۲$$

چون $\omega = ۲\pi f$ است، می توان این را به صورت زیر نوشت

$$f_{\text{زنش}} = f_۱ - f_۲ \qquad \text{(بسامد زنش)} \qquad (۳۳\text{-}۴۶)$$

موسیقیدانان از پدیدهٔ زنش برای کوک کردن سازهای خود استفاده می‌کنند. اگر سازی را در برابر یک بسامد استاندارد بنوازیم (برای مثال، نتی که "نت همسازی A" نامیده می‌شود و



شکل (۳۳-۱۸) (الف و ب) تغییرات فشار Δp دو موج صوتی به طور جداگانه نشان داده شده است. بسامدهای این موجها تقریباً برابرند. (پ) تغییر فشار برایند اگر دو موج به طور همزمان آشکار شوند.

با قرەنی اول ارکستر نواخته می‌شود) و تا محو شدن زنش کوک کنیم، آنگاه ساز با این استاندارد کوک شده است. در وین موسیقی نت A(۴۴۰ Hz) به صورت تلفنی در خدمت موسیقیدانان بسیار این شهر است.

مسئلهٔ نمونه ۳۳-۷

وقتی یک پنگوئن امپراتور از جستجوی غذا بر می‌گردد، چگونه می‌تواند از میان هزاران پنگوئن که برای گرم شدن در هوای زنندهٔ قطب جنوب کنار هم قرار گرفته‌اند جفت خود را پیدا کند. این با دیدن صورت نمی‌گیرد، زیرا پنگوئن‌ها حتی برای یک پنگوئن شبیه هم به نظر می‌رسند. پاسخ در نحوهٔ صدا درآوردن پنگوئن‌ها قرار دارد.

اغلب پرندگان با استفاده از یک طرف عضو صوتی دو طرفهٔ خود به نام *سوتک* آواز می‌خوانند. ولی پنگوئنهای امپراتور با استفادهٔ همزمان از دو طرف، آواز می‌خوانند. هر طرف عضو صوتی موجهای ایستادهٔ صوتی در گلو و دهان پرنده ایجاد می‌کند که خیلی شبیه موجهای ایجاد شده در لوله‌ای با دو انتهای باز است. فرض کنید که بسامد هماهنگ اول ایجاد شده به وسیلهٔ طرف A برابر با $f_{A1} = ۴۳۲\,Hz$ و بسامد هماهنگ اول که به وسیلهٔ طرف B ایجاد می‌شود برابر با $f_{B1} = ۳۷۱\,Hz$ باشد. بسامد زنش بین دو بسامد هماهنگ اول و بین دو بسامد هماهنگ دوم چقدر است؟

نکته‌های کلیدی بسامد زنش بین دو بسامد بنابر معادلهٔ ۳۳-۴۶ $(f_{زنش} = f_1 - f_2)$، برابر اختلاف آنهاست.

محاسبه: برای دو بسامد هماهنگ اول، f_{A1} و f_{B1}، بسامد زنش برابر است با

$$f_{زنش,1} = f_{A1} - f_{B1} = ۴۳۲\,Hz - ۳۷۱\,Hz = ۶۱\,Hz$$

(پاسخ)

چون موجهای ایستاده در پنگوئن عملاً مشابه موجهای ایستاده در لوله‌ای با دو انتهای باز است، بسامدهای تشدید با معادلهٔ ۳۳-۳۹ $(f = nv/2L)$ داده می‌شود که در آن L طول (نامعلوم) مؤثر لوله است. بسامد هماهنگ اول برابر $f_1 = v/2L$ و بسامد هماهنگ دوم برابر با $f_2 = 2v/2L$ است. با مقایسهٔ این دو بسامد، می‌بینیم که در کل داریم

$$f_2 = 2f_1$$

برای پنگوئن، هماهنگ دوم طرف A دارای بسامد $f_{A2} = 2f_{A1}$ و هماهنگ دوم طرف B دارای بسامد $f_{B2} = 2f_{B1}$ است. با استفاده از معادلهٔ ۳۳-۴۶ و بسامدهای f_{A2} و f_{B2} در می‌یابیم که بسامد زنش مربوط برابر است با

$$f_{زنش,2} = f_{A2} - f_{B2} = 2f_{A1} - 2f_{B1} = 2(۴۳۲\,Hz) - 2(۳۷۱\,Hz) = ۱۲۲\,Hz$$

(پاسخ)

آزمایشها بیانگر این است که پنگوئنها می‌توانند به چنین بسامدهای زنش بالایی پی ببرند (انسان نمی‌تواند). بنابراین فریاد پنگوئنها پر از هماهنگ‌های متفاوت و بسامدهای زنش متفاوت است و امکان تشخیص صدا را حتی در میان صدای هزاران پنگوئنی که کاملاً به هم چسبیده‌اند فراهم می‌کند.

۳۳-۹ اثر دوپلر

اتومبیل پلیس که در کنار بزرگراه پارک کرده است آژیری را با بسامد ۱۰۰۰Hz ایجاد می‌کند. اگر شما نیز اتومبیل خود را در کنار بزرگراه پارک کرده باشید همان بسامد را خواهید شنید. ولی اگر بین شما و ماشین پلیس حرکت نسبی وجود داشته باشد، چه به طرف یکدیگر حرکت کنید یا از یکدیگر فاصله بگیرید، بسامد متفاوتی را خواهید شنید. برای مثال، اگر با سرعت ۱۲۰km/h (تقریباً ۷۵ mi/h) به *طرف* ماشین پلیس حرکت کنید، بسامد *بالاتری* (۱۰۹۶Hz، ۹۶Hz بیشتر) را خواهید شنید. اگر با همین تندی از اتومبیل پلیس *دور شوید*، بسامد پایینتری (۹۰۴Hz، ۹۶Hz کمتر) را خواهید شنید.

این تغییرهای بسامد وابسته به حرکت، مثالهایی از **اثر دوپلر** هستند. این اثر در سال ۱۸۴۲/۱۲۲۱ به وسیلهٔ فیزیکدان اتریشی یوهان کریستین دوپلر[1] پیشنهاد شد (هر چند تمام کار را وی انجام نداد). این اثر در سال ۱۸۴۵/۱۲۲۴ به وسیلهٔ بایز بالوت[2] در هلند "با استفاده از لوکوموتیوی که ماشین روباز حامل چند ترومپ‌نواز را می‌کشید" به طور تجربی آزمایش شد.

اثر دوپلر نه تنها در مورد موجهای صوتی بلکه در مورد موجهای الکترومغناطیسی؛ از جمله میکروموجها، موجهای رادیویی و نور مرئی نیز برقرار است. ولی در اینجا فقط موجهای صوتی را بررسی می‌کنیم و چارچوب مرجع خود را

1. Johann Christian Doppler
2. Buys Ballot

قسمتی از هوا در نظر می‌گیریم که این موجها در آن حرکت می‌کنند. این بدان معناست که تندی چشمهٔ S موجهای صوتی و آشکارساز D این موجها را *نسبت تودهٔ هوا* اندازه می‌گیریم. (مگر آنکه تودهٔ هوا نسبت به زمین ساکن باشد و در نتیجه می‌توان تندیها را نسبت به زمین نیز اندازه‌گیری کرد.) فرض می‌کنیم که S و D با تندیهای کمتر از صوت به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند یا از یکدیگر دور می‌شوند.

اگر آشکارساز یا چشمه یا هر دو در حرکت باشند، بسامد صوت گسیل شدهٔ f و بسامد آشکار ساز f' با رابطهٔ زیر به هم مربوط‌اند

$$f' = f\frac{v \pm v_D}{v \pm v_S} \qquad \text{(اثر دوپلر کلی)} \qquad (۳۳-۴۷)$$

که در آن v تندی صورت در هوا، v_D تندی آشکارساز نسبت به هوا و v_s تندی چشمه نسبت به هواست. انتخاب علامت مثبت یا منفی با قاعدهٔ زیر تعیین می‌شود:

> وقتی حرکت آشکارساز یا چشمه به سمت دیگری باشد علامت تندی باید بیانگر تغییر بسامد به سمت افزایش باشد. وقتی آشکارساز یا چشمه از دیگری دور شود علامت تندی باید بیانگر تغییر بسامد به سمت کاهش باشد.

به طور خلاصه، *نزدیک شدن* به معنی *افزایش* و *دور شدن* به معنی *کاهش بسامد* است.

در اینجا مثالهایی از این قاعده را بیان می‌کنیم. اگر آشکارساز به سمت چشمه حرکت کند در صورت کسر معادلهٔ ۳۳-۴۷ علامت مثبت را به کار می‌بریم تا بسامد افزایش یابد. اگر آشکار ساز از چشمه دور شود، علامت منفی را در صورت کسر به کار می‌بریم تا بسامد کاهش یابد. اگر آشکار ساز ساکن باشد v_D را برابر صفر در نظر می‌گیریم. اگر چشمه به سمت آشکارساز حرکت کند، علامت منفی را در مخرج کسر معادلهٔ ۳۳-۴۷ به کار می‌بریم تا بسامد افزایش یابد. اگر چشمه از آشکارساز دور شود، علامت مثبت را در مخرج به کار می‌بریم تا بسامد کاهش یابد. اگر چشمه ساکن باشد v_s را برابر صفر قرار می‌دهیم.

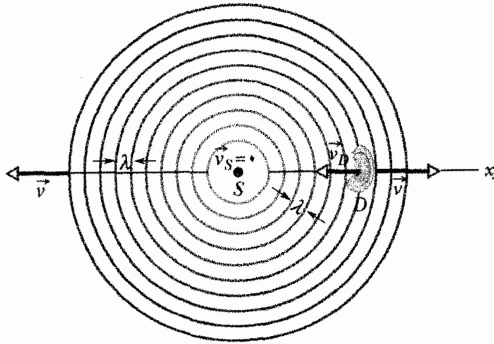
حال، برای دو وضعیت خاص معادله‌هایی را برای اثر دوپلر و سپس معادلهٔ ۳۳-۴۷ را برای حالت کلی به دست می‌آوریم.

۱. وقتی آشکارساز نسبت به هوا حرکت می‌کند و چشمه نسبت به هوا ساکن است، حرکت بسامدی را که در آن آشکارساز با جبهه‌های موج برخورد می‌کند تغییر می‌دهد و در نتیجه بسامدهای آشکار شده موج صوتی تغییر می‌کند.

۲. وقتی چشمه نسبت به هوا حرکت می‌کند و آشکارساز نسبت به هوا ساکن است، حرکت موجب تغییر طول موج موجهای صوتی می‌شود و در نتیجه بسامد آشکار شده تغییر می‌کند (یادآوری می‌شود که بسامد به طول موج وابسته است.)

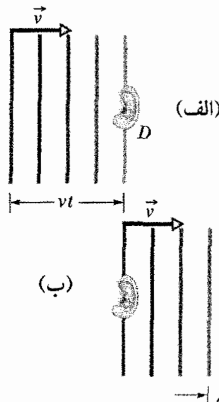
آشکار ساز متحرک، چشمه ساکن

در شکل ۳۳-۱۹، آشکارساز D (که با گوش نشان داده شده است) با تندی v_D به طرف چشمهٔ ساکن S حرکت می‌کند که جبهه‌های موج کروی با طول موج λ و بسامد f گسیل می‌کند که با تندی v صوت در هوا حرکت می‌کنند. فاصلهٔ جبهه‌های موج از یکدیگر یک طول موج است. بسامد آشکار شده به وسیلهٔ آشکار ساز D عبارت است از آهنگی که در آن آشکارساز D جبهه‌های موج (یا تک تک طول موجها) را قطع می‌کند. اگر D ساکن باشد، این آهنگ f خواهد بود ولی چون D به داخل جبهه‌های موج حرکت می‌کند، آهنگ برخوردها بیشتر می‌شود و در نتیجه بسامد آشکارسازی شدهٔ f' بیشتر از f خواهد بود.



شکل ۳۳-۱۹ چشمهٔ صوتی ساکن S جبهه‌های موج کروی را با فاصلهٔ یک طول موج گسیل می‌کند که با تندی v به بیرون گسترش می‌یابند. آشکار ساز صوتی D که با علامت گوش نشان داده شده است، با سرعت $\vec{v}_D$ به طرف چشمه حرکت می‌کند. به علت حرکت خود آشکارساز، آشکارساز بسامد بالاتری را دریافت می‌کند.

حال وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن D ساکن است (شکل ۳۳-۲۰). در زمان t، جبهه‌های موج مسافت vt را به طرف راست طی می‌کنند. تعداد طول موجها در این فاصلهٔ vt برابر است با تعداد طول موجهای قطع شده به وسیلهٔ D در زمان t، و این تعداد برابر است با vt/λ. آهنگی که D طول موجها را قطع می‌کند عبارت است از بسامد f آشکار شده به وسیلهٔ D، یعنی

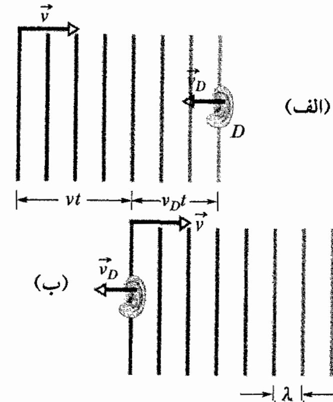


شکل ۳۳-۲۰ جبهه‌های موج شکل ۳۳-۱۹، که تخت فرض شده‌اند و (الف) به طرف آشکارساز ساکن D حرکت می‌کنند و (ب) از آن می‌گذرند؛ این جبهه‌های موج در زمان t مسافت vt را به طرف راست طی می‌کنند.

$$f=\frac{vt/\lambda}{\lambda}=\frac{v}{\lambda} \quad (۳۳-۴۸)$$

در این وضعیت، با D ساکن، هیچ اثر دوپلری وجود ندارد- بسامد آشکار شده به وسیلهٔ D همان بسامد گسیل شده به وسیلهٔ S است.

اکنون دوباره وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن آشکارساز D در جهت مخالف جبهه‌های موج حرکت می‌کند (شکل ۳۳-۲۱). در زمان t ، مانند قبل جبهه‌های موج به اندازهٔ مسافت vt به طرف راست حرکت می‌کنند، ولی حالا آشکار ساز D مسافت v_Dt را به طرف چپ طی می‌کند. بنابراین، در زمان t ، مسافت طی شده به وسیلهٔ جبهه‌های موج نسبت به D برابر با $vt+v_Dt$ است. تعداد طول موجها در این مسافت نسبی $vt+v_Dt$ عبارت است از تعداد طول موجهای قطع شده به وسیلهٔ D در زمان t و برابر است با $(vt+v_Dt/\lambda)$. آهنگی که آشکارساز D در این وضعیت طول موجها را قطع می‌کند برابر است با بسامد f' که با رابطهٔ زیر داده می‌شود



شکل ۳۳-۲۱ جبهه‌های موج (الف) به آشکارساز D که در جهت مخالف جبهه‌های موج حرکت می‌کند نزدیک می‌شوند و (ب) از آن دور می‌شوند. در مدت t ، جبهه‌های موج مسافت vt را به طرف راست و آشکارساز D مسافت v_Dt را به طرف چپ می‌پیمایند.

$$f'=\frac{(vt+v_Dt)/\lambda}{t}=\frac{v+v_D}{\lambda} \quad (۳۳-۴۹)$$

از معادلهٔ ۳۳-۴۸، داریم $\lambda=v/f$. پس معادلهٔ ۳۳-۴۹ به صورت زیر در می‌آید

$$f'=\frac{v+v_D}{v/f}=f\frac{v+v_D}{v} \quad (۳۳-۵۰)$$

توجه کنید که در معادلهٔ ۳۳-۵۰ ، f' باید بزرگتر از f باشد مگر اینکه $v_D=۰$ باشد (آشکار ساز ساکن است).

به همین ترتیب اگر آشکارساز D از چشمه دور شود، بسامد آشکار شده توسط آن را می‌توان پیدا کرد. در این وضعیت، در زمان t جبهه‌های موج نسبت به D مسافت $vt-v_Dt$ را طی می‌کنند و f' با رابطهٔ زیر داده می‌شود

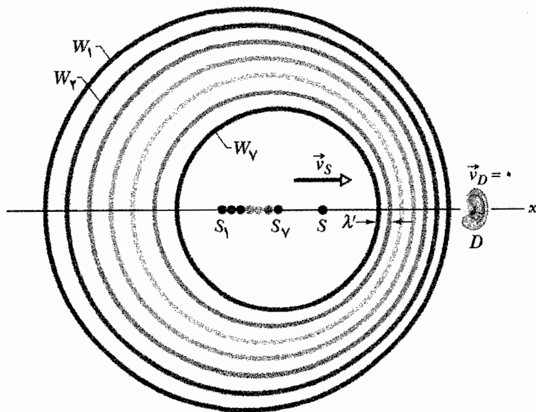
$$f'=f\frac{v-v_D}{v} \quad (۳۳-۵۱)$$

در معادلهٔ ۳۳-۵۱ ، f' باید کمتر از f باشد مگر اینکه $v_D=۰$ باشد. معادله‌های ۳۳-۵۰ و ۳۳-۵۱ را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد

$$f'=f\frac{v\pm v_D}{v} \quad \text{(۳۳-۵۲) (آشکارساز متحرک- چشمهٔ ساکن)}$$

چشمه متحرک، آشکارساز ساکن

فرض می‌کنیم آشکار ساز D نسبت به هوا ساکن است و چشمهٔ S با تندی v_S به طرف D حرکت می‌کند (شکل ۳۳-۲۲). حرکت S طول موج موجهای صوتی گسیل شده و در نتیجه بسامد آشکار شده به وسیلهٔ D را تغییر می‌دهد.



شکل ۳۳-۲۲ آشکارساز D ساکن است و چشمهٔ S با تندی v_S به طرف آن حرکت می‌کند. وقتی چشمه در S_1 است جبههٔ موج W_1 و وقتی در S_7 است جبههٔ موج W_7 گسیل می‌شود. در لحظهٔ نشان داده شده چشمه در S واقع است. آشکارساز بسامد بزرگتری دریافت می‌کند زیرا چشمه با دنبال کردن جبهه‌های موج خود، طول موج λ' کوچکتری در جهت حرکتش گسیل می‌کند.

برای مشاهدهٔ این تغییر، فرض می‌کنیم $T(=1/f)$ زمان بین گسیل دو جبههٔ موج متوالی W_1 و W_2 باشد. در مدت T ، جبههٔ موج W_1 مسافت vt و چشمه مسافت v_sT را طی می‌کنند در پایان T ، جبههٔ موج W_2 گسیل می‌شود. در جهتی که چشمهٔ S حرکت می‌کند، فاصلهٔ میان W_1 و W_2 ، که طول موج λ' موجهایی است که در آن جهت حرکت می‌کنند، برابر با $vT-v_sT$ است. اگر D این موجها را آشکار کند، بسامد f' را آشکار می‌کند که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$f'=\frac{v}{\lambda'}=\frac{v}{vT-v_ST}=\frac{v}{v/f-v_S/f}$$
$$=f\frac{v}{v-v_s} \quad (۳۳-۵۳)$$

توجه کنید که f' باید بزرگتر از f باشد مگر اینکه $v_s=۰$ باشد.

در جهتی مخالف با آنکه S حرکت کرده است، طول موج λ' موجها عبارت است از $vT+v_sT$. اگر D این موجها را آشکار کند، بسامد f' را آشکار می‌کند که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$f'=f\frac{v}{v+v_s} \quad (۳۳-۵۴)$$

توجه کنید که f' باید کمتر از f باشد مگر اینکه $v_s = ۰$ باشد.

معادلــه‌های ۳۳-۵۳ و ۳۳-۵۴ را می‌توان بــه صــورت زیــر خلاصه کرد

$$f' = f \frac{v}{v \pm v_s} \quad \text{(چشمه متحرک، آشکارساز ساکن)} \qquad (۳۳-۵۵)$$

معادلهٔ کلی اثر دوپلر

اکنون می‌توانیم با جایگزین کــردن f در معادلــهٔ ۳۳-۵۵ (بــسامد چشمه) بــا f' از معادلــهٔ ۳۳-۵۲ (بــسامد وابــسته بــه حرکــت آشکارساز) معادلهٔ کلی اثر دوپلر را به دست آوریم. نتیجهٔ معادلهٔ ۳۳-۴۷ برای اثر کلی دوپلر است.

این معادلهٔ کلی نه تنها برای وقتی که هــم آشکارســاز و هــم چشمه در حرکت‌اند برقرار است بلکه برای دو وضعیت خاصی که در بالا بحث کردیم نیز صادق است. برای وضعیتی که در آن آشکارساز حرکت می‌کند و چشمه ساکن است، مقــدار $v_S = ۰$ را در معادلهٔ ۳۳-۴۷ قرار می‌دهیم. معادلهٔ ۳۳-۵۲ به دست می‌آید که قبلاً آن را به دست آوردیم. برای وضعیتی که چشمه حرکت می‌کند و آشکارساز ساکن اســت، مقــدار $v_D = ۰$ را در معادلــهٔ ۳۳-۴۷ قرار می‌دهیم، معادلهٔ ۳۳-۵۵ به دست می‌آید که قبلاً آن را به دست آوردیم. بنابراین، معادلهٔ ۳۳-۴۷ معادله‌ای کلی است که باید آن را به خاطر داشت .

✔ نکتهٔ وارسی ۴ در شکل جهت حرکت یک چشمهٔ صوتی و یک آشکارساز در شش وضعیت در هوای ساکن نشان داده شده است. برای هر وضعیت، آیا بسامد آشکار شده بزرگتر از بسامد گسیل شده است، یا کمتر یا نمی‌توان بدون اطلاعات بیشتر دربارهٔ تندیهای واقعی اظهارنظر کرد؟

	چشمه	آشکارساز
(الف)	→	تندی صفر
(ب)	←	تندی صفر
(پ)	→	→
(ت)	←	←
(ث)	→	←
(ج)	←	→

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳-۸ مهارت خود را تقویت کنید

خفاش‌ها با گسیل و سپس آشکارسازی بازتاب‌هــای مــوج‌هــای فراصوتی که موج‌های صوتی با بسامدهای بزرگتر از بسامدهایی که انسان می‌تواند بشنود هــستند، جهــت‌یــابی و صــید خــود را جستجو می‌کنند. فرض کنید خفاشی در تعقیب حشره‌ایی که بــا ســـرعت $\vec{v}_m = (۸/۰۰ \text{m/s})\hat{i}$ حرکـــت مـــی‌کنـــد بـــا ســـرعت $\vec{v}_b = (۹/۰۰ \text{m/s})\hat{i}$ پرواز می‌کنــد و مــوج فراصــوتی بــا بــسامد $f_{be} = ۸۲/۵۲ \text{ kHz}$ گسیل می‌کنــد. بــا چــه بــسامد f_{md} حــشره آشکار می‌شود؟ بــا چــه بــسامد f_{bc} خفــاش پــژواک برگــشتی از حشره را آشکار می‌کند؟

نکته‌های کلیدی بــسامد بــا حرکــت نــسبی خفــاش و حــشره جابه‌جا می‌شود. چون در راستای یک محور حرکت می‌کنند، در اثر کلی دوپلر بسامد جابه‌جا شده با معادلهٔ ۳۳-۴۷ داده می‌شود. حرکت به طرف هم بسامد را بــه بــالا و حرکــت از هــم دیگــر بسامد را به طرف پایین جابه‌جا می‌کند.

آشکارسازی توسط حشره

معادلهٔ کلی دوپلر عبارت است از

$$f' = f \frac{v \pm v_D}{v \pm v_S} \qquad (۳۳-۵۶)$$

در این جا، بسامد آشکار شدهٔ f' کــه مــی‌خــواهیم پیــدا کنــیم بسامد آشکار شدهٔ f_{md} توســط حــشره اســت در طــرف راســت معادلــه، بــسامد f عبــارت اســت از بــسامد گــسیل شــدهٔ $f_{be} = ۸۲/۵۲ \text{ kHz}$ توســـط خفـــاش، ســـرعت صـــوت $v = ۳۴۳ \text{ m/s}$ ، سرعت v_D آشکارساز عبارت است از سرعت حشره $v_m = ۸/۰۰ \text{m/s}$ و سرعت v_s چــشمه ســرعت خفــاش $v_b = ۹/۰۰ \text{m/s}$ است.

جاگذاری دو معادلهٔ ۳۳-۵۶ به آسانی انجام مــی‌گیــرد. ولــی در تصمیم‌گیری دربارهٔ علامت مثبت و منفی باید دقت شود. دربارهٔ *به طرف هم* و *از یکدیگر* فکر کنید. سرعت حشره (آشکارساز) در صورت معادلهٔ ۳۳-۵۶ است. حشره از خفاش دور مــی‌شــود که بسامد آشکار شده را کاهش می‌دهد. چون ســرعت در صــورت است، علامت منفی را در نظر می گیریم (صورت کوچک می‌شود). مرحله‌های استدلال در جدول ۳۳-۳ نوشته شده است.

سرعت خفاش در مخرج معادلهٔ ۳۳-۵۶ است. خفاش به طــرف حشره حرکت می‌کند که بسامد آشکار شده را افزایش می‌دهــد. چون سرعت در مخرج اســت، علامــت منفــی قــرار مــی‌دهــیم (مخرج کوچکتر می‌شود). با قرار دادن اینها داریم:

$$f_{md} = f_{be} \frac{v - v_m}{v - v_b}$$

$$= (۸۲/۵۲ \text{k Hz}) \frac{۳۴۳ \text{ m/s} - ۸/۰۰ \text{m/s}}{۳۴۳ \text{ m/s} - ۹/۰۰ \text{m/s}}$$

$$= ۸۲/۷۶۷ \text{kHz} \approx ۸۲/۸ \text{kHz} \qquad \text{(پاسخ)}$$

آشکارسازی پژواک توسط خفاش

در مورد پژواک برگشتی به خفاش، حشره بــه صــورت چــشمهٔ صوت عمل می‌کند که بسامد f_{md} گــسیل مــی‌کنــد کــه حــساب کردیم. پس اکنون حشره چشمه است (دور می‌شــود) و خفــاش آشکارساز است (نزدیــک مــی‌شــود). مرحلــه‌هــای اســتدلال در جدول ۳۳-۳ نوشته شده است. برای پیدا کردن بسامد آشکار f_{bd} شده توسط خفاش معادلهٔ ۳۳-۵۶ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f_{bd} = f_{md} \frac{v + v_b}{v + v_m}$$

$$= (۸۲/۷۶۸ \text{k Hz}) \frac{۳۴۳ \text{ m/s} + ۹/۰۰ \text{m/s}}{۳۴۳ \text{ m/s} + ۸/۰۰ \text{m/s}}$$

$$= ۸۳/۰۰ \text{kHz} \approx ۸۳/۰ \text{kHz} \qquad \text{(پاسخ)}$$

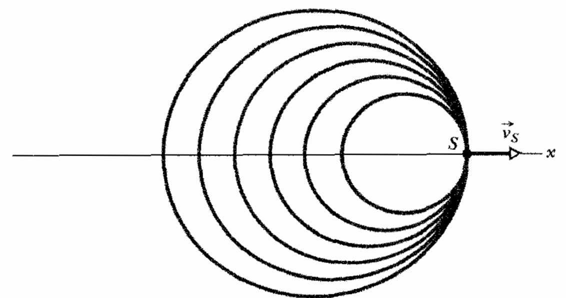
بعضی حشره‌ها با پارازیت دادن از سیستم آشکارســازی خفــاش با صدای فراصوتی می‌گریزند

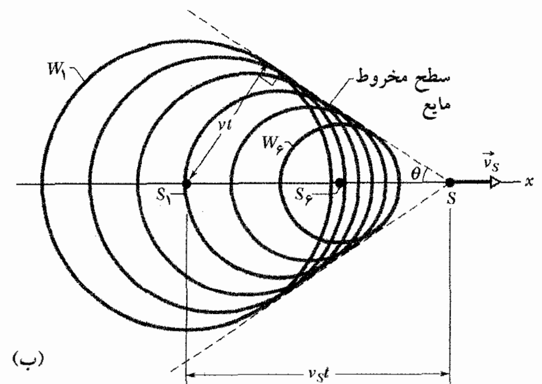
جدول ۳۳-۳

خفاش به حشره: آشکارساز	خفاش به حشره: چشمه	پژواک برگشتی به خفاش: آشکارساز	پژواک برگشتی به خفاش: چشمه
حشره	خفاش	خفاش	حشره
سرعت $v_D - v_m$ دور می‌شوند	سرعت $v_s - v_b$ نزدیک می‌شوند	سرعت $v_D - v_b$ نزدیک می‌شوند	سرعت $v_s - v_m$ از هم دور می‌شوند
جابه‌جایی به پایین صورت منفی	جابه‌جایی به بالا مخرج منفی	جابه‌جایی به بالا صورت مثبت	جابه‌جایی به پایین مخرج مثبت

۳۳-۱۰ تندیهای فراصوتی، موجهای ضربه‌ای

اگر چشمه با تندی صوت به طرف یک آشکارساز ساکن حرکت کند، یعنی اگر $v_S = v$ باشد معادله‌های ۳۳-۴۷ و ۳۳-۵۵ پیش‌بینی می‌کنند که بسامد آشکار شدهٔ f' بینهایت بزرگ خواهد بود. این بدان معناست که چشمه به اندازه‌ای سریع حرکت می‌کند که مانند شکل ۳۳-۲۳ الف با جبهه‌های موج کروی خود همگام می‌شود. وقتی که تندی چشمه از تندی صوت تجاوز کند چه رخ می‌دهد؟



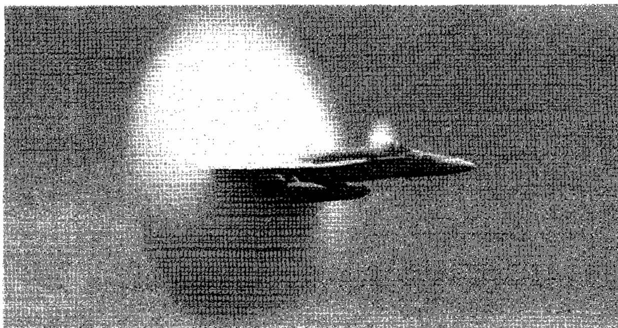


شکل ۳۳-۲۳ (الف) چشمهٔ صوتی S با تندی v_S برابر با تندی صوت و در نتیجه با همان سرعت جبهه‌های موج ایجاد شده حرکت می‌کند. (ب) چشمهٔ صوتی S با تندی v_S بزرگتر از تندی صوت و در نتیجه سریعتر از جبهه‌های موج حرکت می‌کند. وقتی چشمه در مکان S_1 است جبههٔ موج W_1 و در مکان S_6 جبههٔ موج W_6 را ایجاد می‌کند. همهٔ جبهه‌های موج کروی با تندی صوت v گسترش می‌یابند و درون یک سطح مخروطی شکل به نام مخروط ماخ جمع می‌شوند و یک موج ضربه‌ای تشکیل می‌دهند. سطح جانبی مخروط دارای نیم زاویهٔ θ است که بر تمام جبهه‌های موج مماس است.

برای چنین تندیهای *فراصوتی*، دیگر معادله‌های ۳۳-۴۷ و ۳۳-۵۵ به کار نمی‌روند. شکل ۳۳-۲۳ ب جبهه‌های موج کروی ایجاد شده در مکانهای مختلف چشمه را نشان می‌دهد. شعاع هر جبههٔ موج در این شکل vt است، که در آن v تندی صوت و t زمانی است که از گسیل آن جبههٔ موج توسط چشمه گذشته است. توجه کنید که تمام جبهه‌های موج در یک پوش V شکل در ترسیم دو بعدی در شکل ۳۳-۲۳ ب جمع شده‌اند. جبهه‌های موج در واقع در سه بعد گسترش می‌یابند و جمع شدن آنها عملاً مخروطی را تشکیل می‌دهد که به آن *مخروط ماخ* می‌گویند. گفته می‌شود که یک *موج ضربه‌ای* در سطح جانبی این مخروط وجود دارد، چون جمع شدن جبهه‌های موج موجب بالا رفتن و پایین آمدن ناگهانی فشار هوا به هنگام عبور سطح از هر نقطه می‌شود. از شکل ۳۳-۲۳ ب می‌توان دید که نیم زاویهٔ θ مخروط، به نام زاویهٔ مخروط ماخ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\sin\theta = \frac{vt}{v_S t} = \frac{v}{v_S} \qquad \text{(زاویهٔ مخروط ماخ)} \qquad (۳۳\text{-}۵۷)$$

نسبت v_S / v را *عدد ماخ* می‌نامند. وقتی می‌گوییم که هواپیمایی با ۲/۳ ماخ پرواز می‌کند، این بدان معناست که تندی آن ۲/۳ برابر تندی صوت در هوایی است که هواپیما در آن پرواز می‌کند. موجهای ضربه‌ای که به وسیلهٔ یک هواپیما (شکل ۳۳-۲۴) یا پرتابهٔ فراصوتی ایجاد می‌شود، انفجاری از صدا به نام *دیوار صوتی* ایجاد می‌کند که در آن فشار هوا در ابتدا ناگهان افزایش و سپس پیش از برگشتن به حال عادی به طور ناگهان به زیر حالت عادی کاهش می‌یابد. بخشی از صدا که موقع شلیک گلوله به گوش می‌رسد دیوار صوتی است که به وسیلهٔ گلوله ایجاد می‌شود. دیوار صوتی را وقتی که شلاق بلندی به سرعت به حرکت در می‌آید نیز می‌توان شنید: نزدیک انتهای شلاق، حرکت سریعتر از صوت است و دیوار صوتی کوچکی ایجاد می‌کند- *صدای* شلاق.



شکل ۳۳-۲۴ موجهای ضربه‌ای که به وسیلهٔ بالهای یک هواپیمای جت FA 18 ایجاد شده است. موجهای ضربه‌ای قابل مشاهده‌اند چون کاهش ناگهانی در فشار هوا در آنها موجب متراکم شدن ملکولهای آب و تشکیل مه می‌شود.

بازنگری و خلاصهٔ درس

موجهای صوتی موجهای صوتی موجهای مکانیکی طولی هستند که می‌توانند در جامدها، مایعها یا گازها حرکت کنند. تندی v یک موج صوتی در محیطی با **مدول کپه‌ای** B و چگالی ρ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$v=\sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad \text{(تندی صوت)} \qquad (۳-۳۳)$$

در هوای $۲۰°C$ تندی صوت $۳۴۳\,m/s$ است.

موج صوتی موجب یک جابه‌جایی طولی s در عنصر جرم از محیط می‌شود که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$s=s_m\cos(kx-\omega t) \qquad (۱۳-۳۳)$$

که در آن s_m **دامنهٔ جابه‌جایی** (بیشینهٔ جابه‌جایی) از وضعیت تعادل، $k=۲\pi/\lambda$ و $\omega=۲\pi f$ ، λ و f به ترتیب طول موج و بسامد موج صوتی هستند. موج صوتی همچنین موجب تغییر فشار Δp محیط نسبت به فشار تعادل می‌شود

$$\Delta p=\Delta p_m\sin(kx-\omega t) \qquad (۱۴-۳۳)$$

که در آن **دامنهٔ فشار** عبارت است از

$$\Delta p_m=(v\rho\omega)s_m \qquad (۱۵-۳۳)$$

تداخل تداخل دو موج صوتی با طول موجهای یکسان که از یک نقطهٔ مشترک می‌گذرند به اختلاف فاز ϕ در آنجا بستگی دارد. اگر موجهای صوتی به طور همفاز گسیل شوند و تقریباً در یک جهت حرکت کنند، ϕ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\phi=\frac{\Delta L}{\lambda}۲\pi \qquad (۲۱-۳۳)$$

که در آن ΔL **اختلاف راه** آنهاست (اختلاف در فاصله‌هایی که به وسیلهٔ موجها برای رسیدن به نقطهٔ مشترک طی می‌شود.) وقتی ϕ مضرب درستی از ۲π باشد، تداخل کاملاً سازنده رخ می‌دهد

$$\phi=m(۲\pi) \qquad \text{به ازای}\quad m=۰,۱,۲,\cdots \qquad (۲۲-۳۳)$$

و هم ارز با آن، وقتی ΔL با این رابطه به λ مربوط باشد

$$\frac{\Delta L}{\lambda}=۰,۱,۲,\cdots \qquad (۲۳-۳۳)$$

وقتی ϕ مضرب فردی از π باشد تداخل کاملاً ویرانگر رخ می‌دهد

$$\phi=(۲m+۱)\pi \qquad \text{به ازای}\quad m=۰,۱,۲,\cdots \qquad (۲۴-۳۳)$$

و هم ارز با آن، وقتی ΔL با رابطهٔ زیر به λ مربوط باشد

$$\frac{\Delta L}{\lambda}=۰/۵,۱/۵,۲/۵,\cdots \qquad (۲۵-۳۳)$$

شدت صوت **شدت I** یک موج صوتی در یک سطح عبارت است از متوسط آهنگ بریکای مساحت که انرژی به وسیلهٔ موج به آن می‌رسد یا از آن انتقال می‌یابد

$$I=\frac{P}{A} \qquad (۲۶-۳۳)$$

که در آن P آهنگ انتقال انرژی (توان) موج صوتی و A مساحت سطح قطع کنندهٔ صوت است. شدت I با رابطهٔ زیر به دامنهٔ جابه‌جایی s_m موج صوتی وابسته است

$$I=\frac{۱}{۲}\rho v\omega^۲ s_m^۲ \qquad (۲۷-۳۳)$$

شدت در فاصلهٔ r از یک چشمهٔ نقطه‌ای که موجهای صوتی با توان P_s را گسیل می‌کند عبارت است از

$$I=\frac{P_s}{۴\pi r^۲} \qquad (۲۸-۳۳)$$

تراز صوتی برحسب دسی‌بل *تراز صوتی برحسب دسی‌بل* (dB) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\beta=(۱۰\,dB)\log\frac{I}{I_۰} \qquad (۲۹-۳۳)$$

که در آن $I_۰(=۱۰^{-۱۲}\,W/m^۲)$ تراز شدت مرجعی است که تمام شدتها با آن مقایسه می‌شوند. به ازای افزایش هر ضریب ۱۰ در شدت، $۱۰\,dB$ به تراز صوتی افزوده می‌شود.

نقشهای موج ایستاده در لوله‌ها نقشهای موج صوتی ایستاده را می‌توان در لوله‌ها ایجاد کرد. یک لوله با دو انتهای باز در بسامدهای زیر در تشدید است

$$f=\frac{v}{\lambda}=\frac{nv}{۲L}\ ,\quad n=۱,۲,۳,\ldots \qquad (۳۹-۳۳)$$

که در آن v تندی صوت در هوای داخل لوله است. برای لوله‌ای که یک انتهای آن بسته و انتهای دیگرش باز است، بسامدهای تشدیدی عبارت‌اند از

$$f=\frac{v}{\lambda}=\frac{nv}{۴L}\quad n=۱,۳,۵,\ldots \qquad (۴۱-۳۳)$$

زنش *زنش* وقتی ایجاد می‌شود که دو موج با بسامدهای اندک متفاوت $f_۱$ و $f_۲$ با یکدیگر آشکارسازی شوند. بسامد زنش عبارت است از

$$f_{\text{زنش}}=f_۱-f_۲ \qquad (۴۶-۳۳)$$

اثر دوپلر *اثر دوپلر* عبارت است از تغییر در بسامد مشاهده شدهٔ یک موج هنگامی که چشمه یا آشکارساز نسبت به محیط انتقال (مثل هوا) حرکت می‌کند. در مورد صوت بسامد مشاهده شدهٔ f' برحسب بسامد چشمهٔ f با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$f'=f\frac{v\pm v_D}{v\pm v_S} \qquad \text{(اثر دوپلر کلی)} \qquad (۴۷-۳۳)$$

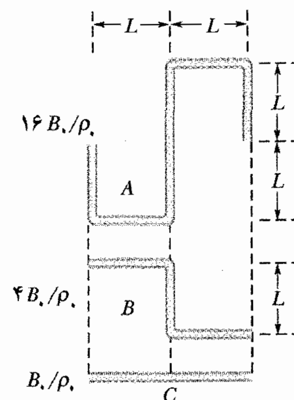
که در آن v_D تندی آشکارساز نسبت به محیط، v_S تندی چشمه نسبت به محیط و v تندی صوت در محیط است. علامتها به صورتی انتخاب می‌شوند که f' برای نزدیک شدن بزرگتر و برای دور شدن کمتر باشد.

موج ضربه‌ای اگر تندی چشمه‌ای نسبت به محیط از تندی صوت در محیط تجاوز کند، دیگر معادلهٔ دوپلر برقرار نیست. در چنین مواردی، موجهای ضربه‌ای حاصل می‌شود. نیم زاویهٔ θ مخروط ماخ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\sin\theta=\frac{v}{v_S} \qquad \text{(زاویهٔ مخروط ماخ)} \qquad (۵۷-۳۳)$$

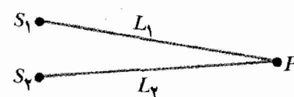
پرسشها

۱- در شکل ۳۳-۲۵، سه لولهٔ دراز (A ، B , C) در فشارهای متفاوت با سه گاز مختلف پر شده‌اند. نسبت مدول کپه‌ای نسبت به چگالی برای هر گاز برحسب مقدار پایهٔ B_0/ρ_0 نشان داده شده است. در انتهای سمت چپ هر لوله یک پیستون قرار دارد که می‌تواند یک تپ صوتی را در لوله بفرستد (نظیر شکل ۳۲-۲). هر سه تپ به طور همزمان فرستاده می‌شوند. لوله‌ها را بنابر زمان رسیدن تپها به انتهای باز لوله به ترتیب زودتر رسیدن مرتب کنید.



شکل ۳۳-۲۵ پرسش ۱

۲- در شکل ۳۳-۲۶، دو چشمهٔ نقطه‌ای S_1 و S_2 که همفازند موجهای صوتی مشابه با طول موج ۲/۰m گسیل می‌کنند. برحسب طول موجها اختلاف فاز بین موجهایی که به نقطهٔ P می‌رسند چقدر است، اگر (الف) $L_1 = ۳۸\text{m}$ و $L_2 = ۳۴\text{m}$ ، (ب) $L_1 = ۳۹\text{m}$ و $L_2 = ۳۶\text{m}$ باشد؟ (پ) با فرض اینکه فاصلهٔ چشمه‌ها خیلی کوچکتر از L_1 و L_2 باشد، چه نوع تداخلی در وضعیتهای (الف) و (ب) در P حاصل می‌شود؟



شکل ۳۳-۲۶ پرسش ۲

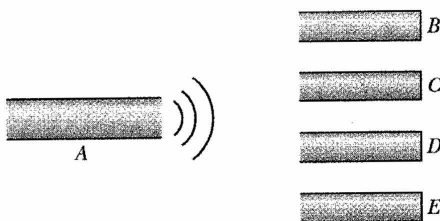
۳- در اولین آزمایش، یک موج صوتی سینوسی به داخل لولهٔ بلندی پر از هوا فرستاده می‌شود، آهنگ متوسط انتقال انرژی $P_{avg,1}$ است. در دومین آزمایش، دو موج صوتی دیگر ولی یکسان با موج اول، با اختلاف فاز ϕ بین دو موج برابر با صفر، ۰/۲ یا ۰/۵ طول موج، به طور همزمان به داخل فرستاده می‌شوند. (الف) فقط با محاسبهٔ ذهنی گزینه‌های ϕ را بنابر آهنگ متوسطی که در آن موجها انرژی را انتقال می‌دهند به ترتیب بزرگی مرتب کنید. (ب) برای گزینهٔ اول ϕ ، آهنگ متوسط برحسب $P_{avg,1}$ چقدر است؟

۴- لولهٔ A به طول L یک انتهایش باز است. لولهٔ B به طول $2L$ دو انتهایش باز است. کدام هماهنگهای لولهٔ B دارای بسامدی برابر با بسامد تشدیدی لولهٔ A است؟

۵- برای یک لولهٔ معین، بسامد چهار هماهنگ از شش هماهنگ که کمتر از ۱۰۰۰Hz هستند عبارت‌اند از: ۳۰۰، ۶۰۰، ۷۵۰ و ۹۰۰ هرتز. دو بسامد دیگر چقدرند؟

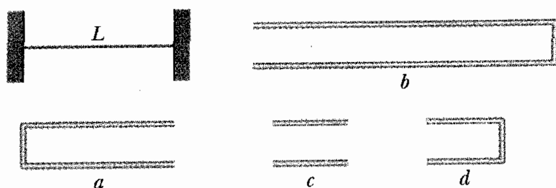
۶- هماهنگ ششم در لوله‌ای ایجاد شده است. (الف) این لوله چند انتهای باز دارد (دست کم یکی دارد)؟ (ب) در نقطهٔ وسط آیا گره وجود دارد یا شکم یا یک حالت میانه؟

۷- در شکل ۳۳-۲۷، لولهٔ A با یک چشمهٔ صوتی داخلی کوچک در هماهنگ سوم خود نوسان می‌کند. صوت گسیل شده به انتهای راست در چهار لوله با یک انتهای باز (به مقیاس رسم نشده‌اند) که مجاور آن قرار دارند، تشدید ایجاد می‌کند. لولهٔ B در پایینترین هماهنگ خود و لولهٔ E در چهارمین پایینترین هماهنگ خود نوسان می‌کنند. بدون محاسبه، هر پنج لوله را به ترتیب بزرگی طول آنها مرتب کنید. (*راهنمایی*: موج ایستاده را به مقیاس و سپس لوله‌ها را به مقیاس رسم کنید).



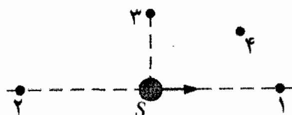
شکل ۳۳-۲۷ پرسش ۷

۸- شکل ۳۳-۲۸ ریسمان کشیده‌ای به طول L و لوله‌های a، b، c و d به ترتیب به طولهای L، $2L$، $L/2$ و $L/2$ را نشان می‌دهد. کشش ریسمان چنان تنظیم می‌شود تا اینکه تندی موجها در ریسمان برابر با تندی موجهای صوتی در هوا شود. سپس مد اصلی نوسان در ریسمان ایجاد می‌شود. صوت ایجاد شده به وسیلهٔ ریسمان در کدام لوله موجب تشدید می‌شود و آن صوت چه مد نوسانی را ایجاد می‌کند؟



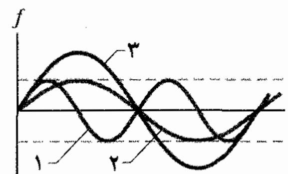
شکل ۳۳-۲۸ پرسش ۸

۹- شکل ۳۳-۲۹ یک چشمهٔ صوتی S در حال حرکت که صوتی در بسامد معینی گسیل می‌کند و چهار آشکارساز صوتی ساکن را نشان می‌دهد. آشکارسازها را به ترتیب بزرگی بسامد صوتی که از چشمه آشکار می‌کنند مرتب کنید.



شکل ۳۳-۲۹ پرسش ۹

۱۰- شخصی به نوبت سوار بر سه چرخ و فلک سریع می‌شود در حالی که یک چشمهٔ صوتی در اختیار دارد که بسامد معینی را به طور همسانگرد گسیل می‌کند. شما در فاصلهٔ دوری از هر چرخ و فلک ایستاده‌اید. بسامدی که از هر کدام از سه چرخ و فلک در چرخش می‌شنوید با هم متفاوت است. تغییرات بسامد برای سه حالت در سه منحنی شکل ۳۳-۳۰ داده شده‌اند. این منحنیها را به ترتیب بزرگی (الف) تندی خطی v چشمهٔ صوتی، (ب) تندیهای زاویه‌ای ω چرخ و فلک‌ها و (پ) شعاعهای r چرخ و فلکها مرتب کنید.



شکل ۳۳-۳۰ پرسش ۱۰

مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)

SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها

WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

●-●●● تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.

اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

هر جا در مسئله‌ها نیاز باشد از موارد زیر استفاده کنید، مگر اینکه مورد خاصی مشخص شود

تندی صوت در هوا = ۳۴۳ m/s = ۱۱۲۵ ft/s

و

چگالی هوا = ۱/۲۱ kg/m^3

بخش ۳۳-۳ تندی صوت

●۱- وقتی در کلیسایی بسته می‌شود فردی که درست داخل کلیسا قرار دارد آخرین پژواک را پس از ۱۵s می‌شنود. (الف) اگر پژواک به خاطر یک بازتاب منفرد از دیوار مقابل در باشد، فاصلهٔ دیوار از در چقدر است؟ (ب) اگر دیوار در فاصلهٔ ۲۵/۷ متری قرار داشته باشد چند بازتاب (رفت و برگشت) به آخرین پژواک مربوط است؟

●۲- ستونی از سربازان با ۱۲۰ قدم در دقیقه رژه می‌روند و با ضربه‌های طبلی در ابتدای ستون هماهنگ هستند. مشاهده می‌شود که وقتی سربازی که طبل می‌زند با پای راست پیش می‌رود سربازان عقب ستون با پای چپ به جلو می‌روند. طول تقریبی ستون سربازان چقدر است؟

●۳- دو تماشاگر در یک بازی فوتبال در ورزشگاه توپی را که شوت شده است می‌بینند و لحظه‌ای بعد صدای آن را می‌شنوند. تأخیر زمانی برای تماشاگر A برابر ۰/۲۳s و برای تماشاگر B برابر ۰/۱۲s است. خطهای دید دو تماشاگر از بازیکن زنندهٔ شوت با هم زاویهٔ °۹۰ دارند. (الف) تماشاگر A و (ب) تماشاگر B از بازیکن چقدر فاصله دارند؟ (ب) فاصلهٔ تماشاگرها از یکدیگر چقدر است؟

●۴- اگر ۰/۳۲g اکسیژن ۲۲/۴L فضا را اشغال کند و تندی صوت در اکسیژن برابر ۳۱۷ m/s باشد، مدول کپه‌ای اکسیژن چقدر است؟

●●۵- سنگی به داخل چاهی انداخته می‌شود. صدای برخورد آن با ته چاه پس از ۳/۰۰ m/s شنیده می‌شود. عمق چاه چقدر است؟ SSM WWW

●●۶- *اثر شکلات داغ.* ضربهٔ کوچکی به قاشق فلزی داخل یک لیوان آب بزنید و به بسامد f_i که می‌شنوید توجه کنید. سپس یک قاشق پر از پودر (مانند شکلات یا قهوه) به آن اضافه کنید و در حالی که پودر را هم می‌زنید دوباره ضربهٔ کوچکی بزنید. بسامدی که می‌شنوید دارای مقدار بسامد f_s کمتر است چون حباب‌های کوچک هوا بر اثر تغییر پودر در آب آزاد می‌شوند. وقتی که حباب‌ها به سطح آب می‌رسند و ناپدید می‌شوند، بتدریج بسامد جابه‌جا می‌شود و به مقدار اولیه می‌رسد. در ضمن این عمل حباب‌ها به طور محسوس چگالی یا حجم آب یا طول موج صوت را تغییر نمی‌دهند. در عوض مقدار dV/dp یعنی تغییر دیفرانسیلی در حجم به واسطهٔ تغییر دیفرانسیلی در فشار به علت موج‌های صوتی در آب تغییر می‌کند. اگر $f_s/f_i = ۰/۳۳۳$ باشد، نسبت $(dV/dp)_s/(dV/dp)_i$ چقدر است؟

●●۷- زمین لرزه در درون زمین موجهای صوتی ایجاد می‌کند. در زمین برخلاف گاز، موجهای صوتی عرضی (S) و طولی (P) می‌توانند وجود داشته باشند. معمولاً، تندی موجهای S حدود ۴/۵ km/s و تندی موجهای P حدود ۸/۰ km/s است. یک زلزله نگار موجهای P و S را از یک زلزله ثبت می‌کند. نخستین موجهای P سه دقیقه قبل از موجهای S دریافت می‌شوند. اگر موجها روی یک خط راست حرکت کنند، زمین لرزه در چه فاصله‌ای رخ داده است؟ SSM ILW

●●۸- شخصی با چکش به انتهای یک میلهٔ نازک ضربه‌ای می‌زند. تندی صوت در میله ۱۵ برابر تندی صوت در هواست. فرد دیگری که گوشش را نزدیک به انتهای دیگر میله نگه داشته است دو صدا را با بازهٔ زمانی ۰/۱۲s می‌شنود: یکی از طریق میله می‌آید و دیگری از طریق هوای مجاور میله. اگر تندی صوت در هوا ۳۴۳ m/s باشد، طول میله چقدر است؟

بخش ۳۳-۴ موجهای صوتی پیشرونده

•۹- از فراصوت با بسامد $۴/۵۰ \mathrm{MHz}$ برای بررسی تومور در بافت نرم استفاده می‌شود. (الف) طول موج چنین موج صوتی در هوا چقدر است؟ (ب) اگر تندی صوت در بافت $۱۵۰۰\ \mathrm{m/s}$ باشد، طول موج این موج در بافت چقدر است؟

•۱۰- فشار در یک موج صوتی پیشرونده با معادلهٔ زیر داده می‌شود

$$\Delta p = (۱/۵۰\,\mathrm{Pa}) \sin \pi [(۰/۹۰۰\,\mathrm{m^{-1}})x - (۳/۵\,\mathrm{s^{-1}})t]$$

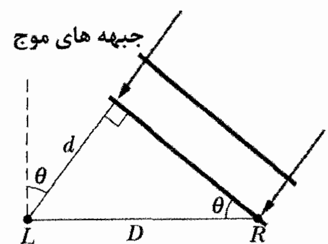
مطلوب است (الف) دامنهٔ فشار، (ب) بسامد، (پ) طول موج و (ت) تندی موج.

•۱۱- اگر شکل یک موج صوتی که در هوا حرکت می‌کند به صورت زیر باشد

$$s(x,t) = (۶/۰\,\mathrm{nm}) \cos[kx + (۳۰۰۰\,\mathrm{rad/s})t + \phi]$$

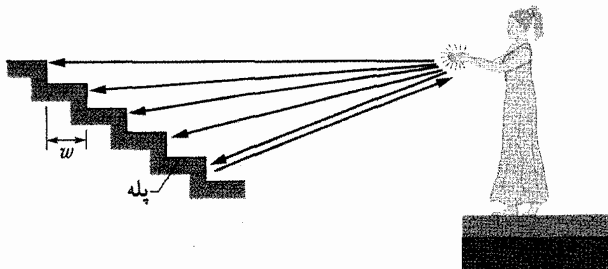
چه مدت طول می‌کشد تا اینکه مولکول معینی از هوا مسیری در امتداد بین جابه‌جایی $s = +۲/۰\,\mathrm{nm}$ و $s = -۲/۰\,\mathrm{nm}$ را طی کند؟

•۱۲- *توهم در زیر آب.* راهنمای به کار رفته توسط مغز برای تعیین جهت یک چشمهٔ صوتی عبارت است از تأخیر زمانی Δt بین رسیدن صوت به گوش نزدیکتر به چشمه و رسیدن آن به گوش دورتر. فرض کنید که چشمه به اندازه‌ای دور است که وقتی جبههٔ موج به گوش می‌رسد، می‌توان آن را مسطح در نظر گرفت، فاصلهٔ گوش‌ها را D در نظر بگیرید. (الف) اگر چشمه با زاویهٔ θ در مقابل قرار داشته باشد (شکل ۳۳-۳۱)، Δt برحسب D و سرعت صوت V در هوا چقدر است؟ (ب) اگر در آب فرو روید و چشمهٔ صوتی مستقیماً در طرف راست باشد، Δt برحسب D و سرعت صوت در آب v_w چقدر است؟ (پ) بر اساس راهنمای تأخیر زمانی، مغز مشاهده می‌کند که صوت داخل آب با زاویهٔ θ از جهت مقابل می‌رسد. θ را در مورد آب شیرین در $۲۰°$ محاسبه کنید.



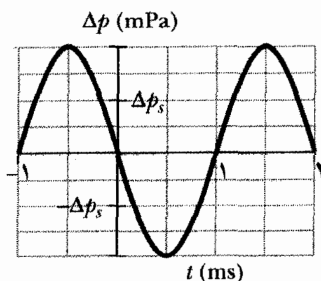
شکل ۳۳-۳۱ مسئلهٔ ۱۲

••۱۳- موجهای صوتی صدای دست زدن روی صحنهٔ یک سالن نمایش از پله‌هایی به پهنای $w = ۰/۷۵\,\mathrm{m}$ (شکل ۳۳-۳۲) پراکنده می‌شوند. صدا به صورت دسته‌ای تپ دوره‌ای، هر کدام از یک پله، به صحنه بر می‌گردند؛ اثر تپهای صوتی، مشابه نواختن یک نت است. (الف) فرض کنید که تمام پرتوها در شکل ۳۳-۳۲ افقی هستند، بسامدی که تپها با آن بر می‌گردند (یعنی، بسامد نتهای دریافت شده) را به دست آورید. (ب) اگر پهنای پله‌ها کمتر می‌بود، بسامد بیشتر می‌شد یا کمتر؟



شکل ۳۳-۳۲ مسئلهٔ ۱۳

••۱۴- شکل ۳۳-۳۳ خروجی از یک نشان‌دهندهٔ فشار را نشان می‌دهد که در نقطه‌ای در مسیر گذر یک موج صوتی تک بسامد که در هوایی با چگالی یکنواخت $۱/۲۱\,\mathrm{kg/m^3}$ و با تندی $۳۴۳\,\mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند، قرار دارد. مقیاس محور عمودی با $\Delta p = ۱۶۰\,\mathrm{mPa}$ مشخص شده است. اگر تابع *جابه‌جایی* موج به صورت $s(x,t) = s_m \cos(kx - \omega t)$ نوشته شده باشد، (الف) s_m، (ب) k و (پ) ω چقدرند؟ سپس هوا را سرد می‌کنیم تا چگالی آن برابر $۱/۳۵\,\mathrm{kg/m^3}$ و تندی موج صوتی در آن برابر $۳۲۰\,\mathrm{m/s}$ باشد. چشمهٔ صوتی دوباره یک موج صوتی را با همان بسامد و همان دامنهٔ فشار گسیل می‌کند. اکنون (ت) s_m، (ث) k و (ج) ω چقدرند.



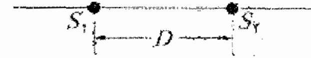
شکل ۳۳-۳۳ مسئلهٔ ۱۴

••۱۵- یک موج صوتی به شکل $s = s_m \cos(kx - \omega t + \phi)$ با تندی $۳۴۳\,\mathrm{m/s}$ در هوای داخل یک لولهٔ افقی دراز حرکت می‌کند. در یک لحظه، ملکول هوای A واقع در $x = ۲/۰۰۰\,\mathrm{m}$ در بیشینهٔ جابه‌جایی مثبت خودش، در $۶/۰۰\,\mathrm{nm}$ و ملکول هوای B واقع در $x = ۲/۰۷۰\,\mathrm{m}$ در بیشینهٔ جابه‌جایی مثبت خودش، در $۲/۰۰\,\mathrm{nm}$ قرار دارند. تمام مولکولهای بین A و B در جابه‌جاییهای میانی قرار دارند. بسامد موج چقدر است؟

بخش ۳۳-۵ تداخل

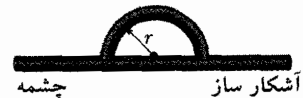
•۱۶- دو موج صوتی از دو چشمهٔ مختلف با بسامد یکسان $۵۴۰\,\mathrm{Hz}$ و با تندی $۳۳۰\,\mathrm{m/s}$ در یک جهت حرکت می‌کنند. چشمه‌ها همفازند. در نقطه‌ای که $۴/۴۰\,\mathrm{m}$ از یک چشمه و $۴/۰۰\,\mathrm{m}$ از چشمهٔ دیگر فاصله دارد، اختلاف فاز بین موجها چقدر است؟

●●۱۷- شکل ۳۳-۳۴ دو چشمهٔ صوتی نقطه‌ای و همسانگرد S_1 و S_2 را نشان می‌دهد. چشمه‌ها موجهایی با طول موج $۰/۵۰\,\text{m}$ به طور همفاز گسیل می‌کنند؛ فاصلهٔ چشمه‌ها $D = ۱/۷۵\,\text{m}$ است. اگر یک آشکار ساز صوتی را روی دایرهٔ بزرگی که مرکز آن در وسط دو چشمه قرار دارد حرکت دهیم، در چند نقطه موجها (الف) دقیقاً همفاز و (ب) دقیقاً ناهمفاز به آشکارساز می‌رسند؟



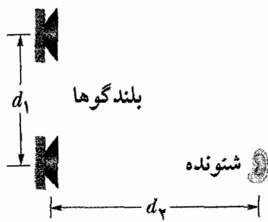
شکل ۳۳-۳۴ مسئلهٔ ۱۷

●●۱۸- در شکل ۳۳-۳۵، صوتی با طول موج $۴۰/۰\,\text{cm}$ از چشمه‌ای به سمت راست لوله‌ای که شامل یک قسمت مستقیم و یک نیمدایره است حرکت می‌کند. قسمتی از موج صوتی پس از عبور از قسمت نیمدایره به بقیهٔ موج که مستقیماً از قسمت مستقیم می‌گذرد، می‌پیوندد. این بهم پیوستن منجر به تداخل می‌شود. کوچکترین شعاع r که باعث ایجاد کمینهٔ شدت در آشکارساز می‌شود، چقدر است؟



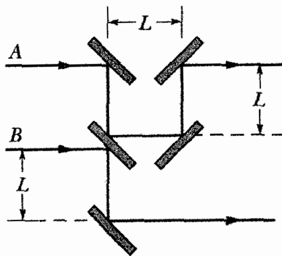
شکل ۳۳-۳۵ مسئلهٔ ۱۸

●●۱۹- در شکل ۳۳-۳۶، دو بلندگو که در فاصلهٔ $d_1 = ۲/۰۰\,\text{m}$ از یکدیگر قرار دارند، همفازند. فرض کنید که دامنه‌های موجهای صوتی حاصل از بلندگوها در مکان شنونده‌ای که در فاصلهٔ $d_2 = ۳/۷۵\,\text{m}$ به طور مستقیم در جلوی یکی از بلندگوها قرار دارد تقریباً یکسان است. گسترهٔ شنوایی، $۲۰\,\text{Hz}$ تا $۲۰\,\text{kHz}$، را برای یک شنوایی معمولی در نظر بگیرید. (الف) پایینترین بسامد $f_{\min,1}$ که سیگنال کمینه (تداخل ویرانگر) در گوش شنونده ایجاد می‌کند چقدر است؟ $f_{\min,1}$ باید در چه عددی ضرب شود تا (ب) دومین پایینترین بسامد $f_{\min,2}$ که سیگنال کمینه را به دست می‌دهد و (پ) سومین پایینترین بسامد $f_{\min,3}$ که سیگنال کمینه را به دست می‌دهد، حاصل شود؟ (ت) پایینترین بسامد $f_{\max,1}$ که سیگنال بیشینه (تداخل سازنده) را در گوش شنونده ایجاد می‌کند چقدر است؟ $f_{\max,1}$ باید در چه عددی ضرب شود تا (ث) دومین پایینترین بسامد $f_{\max,2}$ که سیگنال بیشینه را به دست دهد و (ج) سومین پایینترین بسامد $f_{\max,3}$ که سیگنال بیشینه را به دست می‌دهد، حاصل شود؟ SSM



شکل ۳۳-۳۶ مسئلهٔ ۱۹

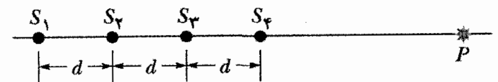
●۲۰- در شکل ۳۳-۳۷، موجهای صوتی A و B هر دو با طول موج λ، در ابتدا همفازند و همانطور که با دو پرتو نشان داده شده‌اند به سمت راست حرکت می‌کنند. موج A از چهار سطح بازتابیده می‌شود و سرانجام در همان جهت اولیه‌اش حرکت می‌کند. موج B پس از بازتاب از دو سطح در همان جهت حرکت می‌کند. فرض کنید فاصلهٔ L در شکل به صورت مضرب q از λ بیان شود: $L = q\lambda$. (الف) کوچکترین و (ب) دومین کوچکترین مقدار q باید چقدر باشد تا A و B پس از بازتاب کاملاً ناهمفاز باشند؟



شکل ۳۳-۳۷ مسئلهٔ ۲۰

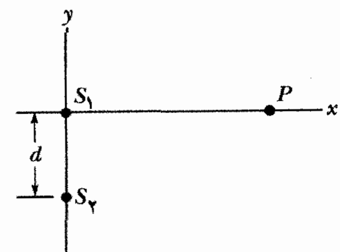
●●۲۱- دو بلندگو به فاصلهٔ $۳/۳۵\,\text{m}$ از یکدیگر در صحنه‌ای در فضای آزاد واقع‌اند. شنونده‌ای به فاصلهٔ $۱۸/۳\,\text{m}$ از یکی و $۱۹/۵\,\text{m}$ از دیگری قرار دارد. در حین امتحان کردن صدا، یک مولد سیگنال دو بلندگو را به طور همفاز با دامنه و بسامد یکسان به کار می‌اندازد. بسامد انتقال یافته در محدودهٔ شنوایی ($۲۰\,\text{Hz}$ تا $۲۰\,\text{kHz}$) تغییر می‌کند. (الف) پایینترین بسامد $f_{\min,1}$ که سیگنال کمینه را (تداخل ویرانگر) در محل شنونده به دست می‌دهد، چقدر است؟ $f_{\min,1}$ را باید در چه عددی ضرب کرد تا (ب) دومین پایینترین بسامد $f_{\min,2}$ که سیگنال کمینه را به دست می‌دهد و (پ) سومین پایینترین بسامد $f_{\min,3}$ که سیگنال کمینه را به دست می‌دهد حاصل شود؟ (ت) پایینترین بسامد $f_{\max,1}$ که سیگنال بیشینه (تداخل سازنده) را در محل شنونده به دست می‌دهد، چقدر است؟ $f_{\max,1}$ را باید در چه عددی ضرب کرد تا (ث) دومین پایین‌ترین بسامد $f_{\max,2}$ که سیگنال بیشینه را به دست می‌دهد، و (ج) سومین پایینترین بسامد $f_{\max,3}$ که سیگنال بیشینه را به دست می‌دهد، حاصل شود؟ ILW

●●۲۲- شکل ۳۳-۳۸ چهار چشمهٔ صوتی نقطه‌ای و همسانگرد را نشان می‌دهد که در فاصله‌های یکسان روی محور x قرار دارند. چشمه‌ها صوتی همفاز با طول موج یکسان λ و دامنهٔ یکسان s_m گسیل می‌کنند. نقطهٔ P روی محور x نشان داده شده است. فرض کنید موجهای صوتی به سمت نقطهٔ P حرکت می‌کنند و کاهش دامنهٔ آنها قابل چشم‌پوشی است. اگر فاصلهٔ d در شکل برابر (الف) $\lambda/۴$ ، (ب) $\lambda/۲$ و (پ) λ باشد، دامنهٔ موج خالص در نقطهٔ P چه مضربی از s_m خواهد بود؟



شکل ۳۳-۳۸ مسئلهٔ ۲۲

●●●۲۳- شکل ۳۳-۳۹ دو چشمهٔ نقطه‌ای $S_۱$ و $S_۲$ را نشان می‌دهد که صوتی را با طول موج $\lambda = ۲/۰۰\,m$ گسیل می‌کنند. گسیلها همسانگرد و همفازند و فاصلهٔ بین دو چشمه برابر $d = ۱۶/۰\,m$ است. در هر نقطه‌ای مانند P روی محور x، موج از $S_۱$ و موج از $S_۲$ تداخل می‌کنند. وقتی P خیلی دور است $(x \approx \infty)$ مطلوب است (الف) اختلاف فاز بین موجهایی که از $S_۱$ و $S_۲$ به P می‌رسند و (ب) نوع تداخلی که آنها ایجاد می‌کنند. حال نقطهٔ P را در امتداد محور x به طرف $S_۱$ حرکت می‌دهیم. (پ) آیا اختلاف فاز بین موجها افزایش می‌یابد یا کاهش؟ (ت) در چه فاصلهٔ x موجها دارای اختلاف فاز (ث) $۰/۵۰\lambda$ ، (ج) $۱/۰۰\lambda$ و (چ) $۱/۵۰\lambda$ هستند؟



شکل ۳۳-۳۹ مسئلهٔ ۲۳

بخش ۳۳-۶ شدت صوت و تراز صوتی

●۲۴- یک چشمهٔ نقطه‌ای $۱/۰\,W$ به طور همسانگرد موجهای صوتی گسیل می‌کند. با فرض اینکه انرژی موجها پایسته است، شدت در فاصلهٔ (الف) $۱/۰\,m$ از چشمه و (ب) $۲/۵\,m$ از چشمه چقدر است؟

●۲۵- چشمه‌ای موجهای صوتی را به طور همسانگرد گسیل می‌کند. شدت موجها در فاصلهٔ $۲/۵۰\,m$ از چشمه $۱/۹ \times ۱۰^{-۴}\,W/m^۲$ است. با فرض اینکه انرژی موجها پایسته است، توان چشمه چقدر است؟ SSM

●۲۶- اختلاف تراز دو صوت $۱/۰۰\,dB$ است. نسبت شدت بیشتر به شدت کمتر چقدر است؟

●۲۷- شدت یک موج صوتی با بسامد $۳۰۰\,Hz$ برابر $۱/۰۰\,\mu W/m^۲$ است. دامنهٔ نوسانهای هوا که به وسیله این موج ایجاد شده‌اند، چقدر است؟

●۲۸- یک چشمهٔ موج صوتی دارای توان $۱/۰۰\,\mu W$ است. اگر چشمه نقطه‌ای باشد (الف) در فاصلهٔ $۳/۰۰\,m$ از چشمه شدت چقدر است؟ (ب) در همین فاصله تراز صوتی برحسب دسی‌بل چقدر است؟

●۲۹- تراز صوتی یک چشمهٔ صوتی معین تا $۳۰\,dB$ افزایش می‌یابد. با چه ضریبی (الف) شدت آن و (ب) دامنهٔ فشار آن افزایش می‌یابد؟ SSM WWW

●●۳۰- فرض کنید تراز صوتی صحبت دونفر در ابتدا برابر $۷۰\,dB$ است و پس از آن به تراز آرامتر $۵۰\,dB$ کاهش می‌یابد. اگر بسامد صوت برابر $۵۰۰\,Hz$ باشد، مطلوب است تعیین شدت (الف) اولیه و (ب) نهایی و دامنهٔ موج صوتی (پ) اولیه و (ت) نهایی.

●۳۱- نوعی قورباغهٔ امریکایی به خاطر صدای بلندی که با آن جفت خود را می‌خواند مشهور است. صدا نه از دهان قورباغه بلکه به وسیلهٔ پردهٔ گوشهایی که روی سرش قرار دارد، گسیل می‌شود. اگر صدای گسیل شده دارای بسامد $۲۶۰\,Hz$ و تراز صوتی $۸۵\,dB$ (نزدیک گوش) باشد، دامنهٔ نوسان پردهٔ گوش چقدر است؟ چگالی هوا $۱/۲۱\,kg/m^۳$ است.

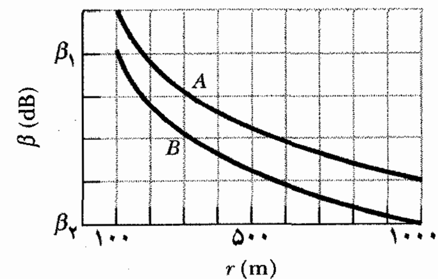
●●۳۲- تقریباً یک سوم مردم، با شنوایی معمولی دارای گوشهایی هستند که به طور پیوسته صدایی با شدت پایین را از مجرای گوش گسیل می‌کنند. فردی با چنین *گسیل خود به خودی و پیوستهٔ صوت* بندرت این صدا می‌شنود و از آن مطلع است مگر در یک محیط که در آن هیچ صدایی نباشد، اما گاهی این گسیل به قدر کافی بلند است و افراد نزدیک به او آن را می‌شنوند. در یکی از این مشاهدات، موج صوتی دارای بسامد $۱۶۶۵\,Hz$ و دامنهٔ فشار $۱/۱۳ \times ۱۰^{-۳}\,Pa$ است. (الف) جابه‌جایی دامنه و (ب) شدت موج گسیل شده توسط گوش، چقدر است؟

۳۳- وقتی بند انگشت خود را به صدا در می‌آورید به طور ناگهانی حفرهٔ بند انگشت را گشاد می‌کنید و حجم مایع مفصلی درون آن زیاد شده باعث می‌شود تا ناگهان حبابی در مایع پدید آید. ایجاد ناگهانی حباب را "حفره‌سازی" می‌نامند که تپی صوتی به وجود می‌آورد، صدای شکستن. فرض کنید که صدا به طور یکنواخت در تمام جهتها منتقل می‌شود و کاملاً از داخل بند به سمت خارج عبور می‌کند. اگر تپ دارای تراز صوتی $۶۲\,dB$ در گوش شما باشد تخمین بزنید که این حفره‌سازی با چه آهنگی انرژی ایجاد می‌کند؟

●●۳۴- وقتی جمعیتی در جایی افزایش می‌یابد، برای اینکه شنونده حرف شما را بشنود باید بلندتر صحبت کنید تا بر نوفهٔ زمینهٔ افراد دیگر غلبه کنید. ولی وقتی به سطح فریاد برسید تنها راه برای اینکه صدای شما شنیده شود این است که به شنونده نزدیک شوید و وارد «فضای شخصی» او شوید. به جای خود یک چشمهٔ همسانگرد نقطه‌ای با توان ثابت P و به جای شنونده خود نقطه‌ای قرار دهید که بخشی از موج‌های صوتی شما را جذب می‌کند. در ابتدا فاصلهٔ این دو نقطه را $r = ۱/۲۰\,\mathrm{m}$ در نظر بگیرید. اگر نوفهٔ زمینه به اندازهٔ $\Delta\beta = ۵\,\mathrm{dB}$ افزایش یابد، تراز صوتی در شنونده شما نیز باید افزایش یابد. در این موقع چه فاصلهٔ r_f مورد نیاز است؟

●●۳۵- یک چشمهٔ نقطه‌ای به طور همسانگرد صوتی با توان $۳۰/۰\,\mathrm{W}$ گسیل می‌کند. یک میکروفون کوچک با مساحت مقطع مؤثر $۰/۷۵\,\mathrm{cm^۲}$ در فاصلهٔ $۲۰۰\,\mathrm{m}$ از چشمه قرار دارد. مطلوب است (الف) شدت صوت در آنجا و (ب) توان دریافت شده به وسیلهٔ میکروفون.

●●۳۶- دو چشمهٔ صوتی جوی A و B با توان ثابت، صوتی را به طور همسانگرد گسیل می‌کنند. ترازهای صوتی β که آنها گسیل می‌کنند در شکل ۳۳-۴۰ برحسب فاصلهٔ شعاعی r از چشمه‌ها رسم شده است. مقیاس محور عمودی با $\beta_۱ = ۸۵/۰\,\mathrm{dB}$ و $\beta_۲ = ۶۵/۰\,\mathrm{dB}$ مشخص شده است. (الف) تفاوت بین ترازهای صوتی آنها در $r = ۱۰\,\mathrm{m}$ و (ب) نسبت توان بیشتر به توان کمتر چقدر است؟



شکل ۳۳-۴۰ مسئلهٔ ۳۶

●●●۳۷- یک چشمهٔ صوتی یک موج صوتی سینوسی را با بسامد زاویه‌ای $۳۰۰۰\,\mathrm{rad/s}$ و دامنهٔ $۱۲/۰\,\mathrm{nm}$ در لوله‌ای می‌فرستد. شعاع داخلی لوله $۲/۰۰\,\mathrm{cm}$ است. (الف) آهنگ متوسطی که انرژی (مجموع انرژیهای جنبشی و پتانسیل) با آن به انتهای دیگر لوله منتقل می‌شود چقدر است؟ (ب) اگر، به طور همزمان، موج مشابهی در طول لولهٔ مشابهی مجاور با آن حرکت کند، آهنگ متوسط کلی که انرژی موجها با آن به انتهای دیگر لوله‌ها منتقل می‌شود چقدر است؟ اگر این دو موج به طور همزمان در یک لوله ارسال شوند، آهنگ متوسط کل که آنها انرژی را با آن منتقل می‌کنند وقتی اختلاف فاز (پ) ۰، (ت) $۰/۴۰\pi\,\mathrm{rad}$ و (ث) $\pi\,\mathrm{rad}$ باشد، چقدر است؟

بخش ۳۳-۷ چشمه‌های صوتی موسیقایی

●۳۸- زائده روی جمجمهٔ نوعی دایناسور شامل یک استخوان بینی دراز خمیده مشابه لوله‌ای با دو انتهای باز است. ممکن است که دایناسور از این استخوان برای تولید مد اصلی استفاده می‌کرده است. (الف) اگر مجرای بینی در فسیل این نوع دایناسور $۲/۰\,\mathrm{m}$ طول داشته باشد، بسامدی که ایجاد می‌کرده چقدر بوده است؟ (ب) اگر بتوان دایناسور را مجدداً به وجود آورد (مشابه فیلم پارک ژوراسیک) آیا شخصی با محدودهٔ شنوایی $۶۰\,\mathrm{Hz}$ تا $۲۰\,\mathrm{kHz}$ قادر به شنیدن این مد اصلی خواهد بود و اگر چنین است، این صوت دارای بسامد زیاد است یا کم؟ فسیل نشان می‌دهد که مجرای بینی با بسامد کوچکتر متعلق دایناسور ماده است. (پ) آیا معلوم می‌شود که بسامد اصلی نوع ماده بیشتر از دایناسور نر است یا کمتر؟

●۳۹- طول تار یک ویولن $۱۵/۰\,\mathrm{cm}$ است که در دو انتها بسته شده و در مد $n = ۱$ خود نوسان می‌کند. تندی موجها در تار $۲۵۰\,\mathrm{m/s}$ و تندی صوت در هوا $۳۴۸\,\mathrm{m/s}$ است. (الف) بسامد و (ب) طول موجِ موج صوتی گسیل شده، چقدر است؟

●۴۰- موجی صوتی در یک محیط شاره از مانعی باز می‌تابد به طوری که یک موج ایستاده تشکیل می‌شود. فاصلهٔ بین گره‌ها $۳/۸\,\mathrm{cm}$ و تندی انتشار $۱۵۰۰\,\mathrm{m/s}$ است. بسامد موج صوتی را پیدا کنید.

●۴۱- در لولهٔ A، نسبت بسامد هماهنگ معینی به بسامد هماهنگ کمتر بعدی برابر $۱/۲$ است. در لولهٔ B، نسبت بسامد هماهنگ معینی به بسامد هماهنگ کمتر بعدی برابر $۱/۴$ است. چند انتهای باز در (الف) لولهٔ A و (ب) لولهٔ B وجود دارد؟

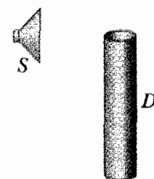
●۴۲- لولهٔ A ارگی، با دو سر باز، دارای بسامد اصلی $۳۰۰\,\mathrm{Hz}$ است. هماهنگ سوم لولهٔ B ارگ، با یک انتهای باز، دارای بسامدی برابر با بسامد هماهنگ دوم لولهٔ A است. طول (الف) لولهٔ A و (ب) لولهٔ B چقدر است؟

●۴۳- (الف) اگر بسامد اصلی یک تار ویولن به جرم $۸۰۰\,\mathrm{mg}$ و طول $۲۲/۰\,\mathrm{cm}$ برابر $۹۲۰\,\mathrm{Hz}$ باشد، تندی موجها را در آن پیدا کنید. (ب) کشش تار چقدر است؟ برای مد اصلی، طول موج (پ) موجهای تار و (ت) موجهای صوتی گسیل شده به وسیلهٔ تار، چقدر است؟ **SSM ILW**

●۴۴- سطح آب در یک لولهٔ شیشه‌ای قائم به طول $۱/۰۰\,\mathrm{m}$ در هر نقطه می‌تواند تنظیم شود. یک دیاپازن که در $۶۸۶\,\mathrm{Hz}$ ارتعاش می‌کند درست بالای قسمت باز لوله نگهداشته می‌شود

تا در هوای قسمت بالای لوله موج ایستاده برقرار شود. (هوای قسمت بالای لوله مانند لوله‌ای عمل می‌کند که یک سر آن بسته و سر دیگر آن باز است.) (الف) سطح آب در چند مکان متفاوت برای صوت حاصل از دیاپازن در قسمت پر از هوای لوله، که مانند لوله‌ای است که یک سر آن بسته (توسط آب) و انتهای دیگرش باز است تشدید ایجاد می‌کند؟ مطلوب است تعیین (الف) کمترین و (ب) دومین کمترین ارتفاع در لوله برای اینکه تشدید ایجاد شود.

۴۵•- در شکل ۳۳-۴۱، S یک بلندگوی کوچک است که با یک نوسانگر صوتی با بسامد از ۱۰۰۰Hz تا ۲۰۰۰Hz کار می‌کند و D یک لولهٔ استوانه‌ای به طول ۴۵/۷cm با دو انتهای باز است. تندی صوت در هوای داخل لوله ۳۴۴m/s است. (الف) در چند بسامد صدای بلندگو در لوله تشدید ایجاد می‌کند؟ مطلوب است تعیین (الف) کمترین و (ب) دومین کمترین بسامدهایی که در آنها تشدید ایجاد می‌شود. SSM



شکل ۳۳-۴۱ مسئلهٔ ۴۵

۴۶••- یکی از بسامدهای هماهنگ لولهٔ A با دو انتهای باز برابر ۳۲۵Hz است. بیشترین بسامد هماهنگ بعدی ۳۹۰Hz است. کدام بسامد هماهنگ بیشترین بسامد بعدی پس از بسامد هماهنگ ۱۹۵Hz است؟ (ب) عدد این بالاترین هماهنگ بعدی چند است؟ یکی از بسامدهای هماهنگ لولهٔ B با فقط یک انتهای باز برابر ۱۰۸۰Hz است. بیشترین بسامد هماهنگ بعدی ۱۳۲۰Hz است. (پ) کدام بسامد هماهنگ بیشترین بسامد بعدی پس از بسامد هماهنگ ۶۰۰Hz است؟ (ت) عدد این بالاترین هماهنگ بعدی چند است؟

۴۷••- سیم ویلونی به طول ۳۰/۰cm و چگالی خطی ۰/۶۵۰g/m در نزدیکی بلندگویی قرار داده شده است که توسط یک نوسانگر صوتی با بسامد متغیر به صدا در می‌آید. معلوم شده است که وقتی بسامد نوسانگر در گسترهٔ ۵۰۰-۱۵۰۰Hz تغییر کند سیم فقط در بسامدهای ۸۸۰Hz و ۱۳۲۰Hz به نوسان در می‌آید. کشش در تار چقدر است؟ SSM

۴۸••- یک انتهای لوله‌ای به طول ۱/۲۰m بسته است. سیم کشیده‌ای در نزدیکی انتهای باز قرار داده می‌شود. طول سیم ۰/۳۳۰m و جرم آن برابر با ۹/۶۰g است. سیم در دو انتها بسته شده و در مد اصلی خود نوسان می‌کند. به علت تشدید، ستون هوای داخل لوله در بسامد اصلی ستون هوا به نوسان در می‌آید. (الف) این بسامد و (ب) کشش در سیم را پیدا کنید. GO

۴۹••- در ته یک چاه آب با دیواره‌های قائم در ۷/۰۰Hz تشدید صورت می‌گیرد ولی در بسامدهای کمتر از آن تشدید ایجاد نمی‌شود. (هوای قسمت بالای چاه مشابه لوله‌ای است که یک انتهایش باز و انتهای دیگرش بسته است). چگالی هوا در چاه ۱/۱۰kg/m^3 و مدول کپه‌ای آن ۱/۳۳×۱۰^5 Pa است. عمق چاه تا سطح آب چقدر است؟

۵۰••- لولهٔ A به طول ۱/۲۰m که دو انتهایش باز است با بسامد سومین هماهنگ خود نوسان می‌کند. لوله پر از هواست و تندی صوت در آن ۳۴۳m/s است. لولهٔ B که یک انتهایش بسته است، با بسامد دومین هماهنگ خود نوسان می‌کند. بسامد لولهٔ B به طور اتفاقی با بسامد لولهٔ A برابر است. محور x در طول لولهٔ A قرار دارد و $x=0$ در یک انتهای آن واقع است. (الف) چند گره در امتداد این محور واقع‌اند؟ (ب) کمترین و (پ) دومین کمترین مقدار x واقع در آن گره‌ها چقدرند؟ GO (ت) بسامد اصلی B چقدر است؟

۵۱•- سیم A ویولنی اندکی سفت کشیده شده است. وقتی سیم با دیاپازونی به صدا در آید که به طور دقیق ۴۴۰Hz نوسان می‌کند، زنش با ۴/۰۰ بر ثانیه شنیده می‌شود. دورهٔ نوسان سیم ویولن چقدر است؟

بخش ۳۳-۸ زنش

۵۲•- دیاپازنی با بسامد نامعلوم با یک دیاپازن استاندارد با بسامد ۳۸۴Hz سه زنش در ثانیه به وجود می‌آورد. اگر بر یک شاخهٔ دیاپازن اولی تکه موم کوچکی چسبانده شود، بسامد زنش کاهش می‌یابد. بسامد این دیاپازن چقدر است؟

۵۳••- هرگاه دو سیم مشابه پیانو تحت کشش باشند بسامد اصلی آنها ۶۰۰Hz است. هنگامی که هر دو سیم به طور همزمان نوسان کنند، چه کسری از افزایش در کشش یک سیم ۶ زنش در ثانیه به وجود می‌آورد؟ SSM

۵۴••- پنج دیاپازن مشابه که در بسامدهای نزدیک به هم ولی متفاوت نوسان می‌کنند در دست است. با به صدا درآوردن دیاپازنها به صورت دو به دو (الف) بیشینه و (ب) کمینهٔ تعداد بسامدهای زنش مختلفی که بسته به اختلاف بسامد می‌تواند ایجاد شود چند است؟

بخش ۳۳-۹ اثر دوپلر

۵۵•- اتومبیل پلیس در امتداد جادهٔ مستقیمی اتومبیلی را که با سرعت غیر مجاز در حرکت است تعقیب می‌کند؛ هر دو وسیله با تندی ۱۶۰km/h در حرکت‌اند. آژیر پلیس صدایی را با بسامد ۵۰۰Hz تولید می‌کند. جابه‌جایی دوپلری در بسامد که توسط اتومبیل خلافکار شنیده می‌شود چقدر است؟

•۵۶- آمبولانسی که در بسامد $1600\,Hz$ آژیر می‌کشد از دوچرخه سواری با تندی $2/44\,m/s$ سبقت می‌گیرد. پس از گذشتن آمبولانس، دوچرخه سوار بسامد $1590\,Hz$ را می‌شنود. آمبولانس با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

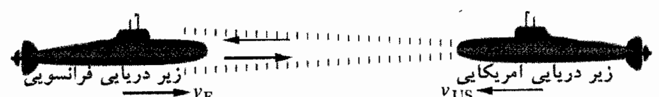
•۵۷- سوتی با بسامد $540\,Hz$ روی دایره‌ای به شعاع $60/0\,cm$ با تندی زاویه‌ای $15/0\,rad/s$ حرکت می‌کند. (الف) کمترین و (ب) بیشترین بسامدهایی که به وسیلهٔ شنونده‌ای در فاصلهٔ دور که نسبت به مرکز دایره در حال سکون قرار دارد شنیده می‌شود چقدر است؟ **ILW**

••۵۸- یک آشکارساز در حال سکون موجهای صوتی با بسامد $0/150\,MHz$ را به طرف کامیونی که با تندی $45/0\,m/s$ نزدیک می‌شود می‌فرستد. بسامد موجهای بازتابیده به طرف آشکارساز چقدر است؟

••۵۹- آژیر دزدگیر صوتی شامل چشمه‌ای است که موجهایی با بسامد $28/0\,kHz$ گسیل می‌کند. بسامد زنش موجهای بازتابیده از شخصی که با تندی متوسط $950\,m/s$ به طور مستقیم از آژیر دور می‌شود چقدر است؟ **ILW**

••۶۰- چشمهٔ صوتی A و سطح بازتاب دهندهٔ B مستقیماً به طرف هم حرکت می‌کنند. نسبت به هوا، تندی A برابر $29/9\,m/s$، تندی B برابر $65/8\,m/s$ و تندی صوت برابر $329\,m/s$ است. چشمهٔ موجهایی گسیل می‌کند که بسامد دریافتی آنها در چارچوب چشمه برابر $1200\,Hz$ است. در چارچوب بازتاب دهنده (الف) بسامد و (ب) طول موج موجهای صوتی دریافتی چقدرند؟ در چارچوب چشمه (پ) بسامد و (ت) طول موج موجهای صوتی بازتابیده به چشمه چقدرند؟

••۶۱- در شکل ۳۳-۴۲ یک زیر دریایی فرانسوی و یک زیر دریایی امریکایی در آب آرام در اقیانوس اطلس شمالی در ضمن یک رزمایش به طرف هم حرکت می‌کنند. تندی زیر دریایی فرانسوی $v_F = 50/0\,km/h$ و تندی زیر دریایی امریکایی $v_{US} = 70/0\,km/h$ است. زیر دریایی فرانسوی یک سیگنال صوتی (موج صوتی در آب) با بسامد $1000\,Hz$ می‌فرستد. تندی این موجها $5470\,km/h$ است. (الف) بسامد سیگنالی که به وسیلهٔ زیر دریایی امریکایی دریافت می‌شود، چقدر است؟ (ب) بسامد دریافت شده به وسیلهٔ زیر دریایی فرانسوی در بازتاب از زیر دریایی امریکایی چقدر است؟



شکل ۳۳-۴۲ مسئلهٔ ۶۱

••۶۲- آشکارساز ساکنی بسامد یک چشمهٔ صوتی را اندازه‌گیری می‌کند که در ابتدا مستقیماً با سرعت ثابت به طرف آشکارساز حرکت می‌کند و سپس (پس از رد شدن از آشکارساز) مستقیماً با سرعت ثابت از آن دور می‌شود. بسامد گسیل شده f است. وقتی چشمه به آشکارساز نزدیک می‌شود بسامد برابر f'_{app} و وقتی از آن دور می‌شود بسامد برابر f'_{rec} است. اگر $(f_{app} - f_{rec})/f = 0/500$ باشد، نسبت v_s/v، تندی چشمه به تندی صوت چقدر است؟

••۶۳- خفاشی در یک غار با استفاده از علائم فراصوتی پرواز می‌کند. فرض کنید که بسامد صوت گسیل شده از خفاش $39000\,Hz$ باشد. در یک حرکت سریع به طرف سطح یک دیوار صاف، خفاش با تندی $0/025$ برابر تندی صوت در هوا حرکت می‌کند. خفاش موج صوتی بازتابیده از دیوار را با چه بسامدی دریافت می‌کند؟

••۶۴- شکل ۳۳-۴۳ چهار لوله را با طولهای $1/0\,m$ یا $2/0\,m$ نشان می‌دهد که مطابق شکل یک یا دو انتهای هر یک از آنها باز است. هماهنگ سوم در هر یک از لوله‌ها برقرار می‌شود و قسمتی از صوت که از آنها خارج می‌شود به وسیلهٔ آشکارساز D که مستقیماً در حال دور شدن از لوله‌هاست، آشکار می‌شود. برحسب تند صوت v، تندی آشکارساز باید چقدر باشد تا بسامدی که از (الف) لولهٔ ۱ (ب) لولهٔ ۲، (پ) لولهٔ ۳ و (ت) لولهٔ ۴ دریافت می‌کند برابر با بسامد اصلی لوله باشد؟



شکل ۳۳-۴۳ مسئلهٔ ۶۴

•••۶۵- شخصی در نزدیکی پنجرهٔ باز قطاری که با سرعت $10/00\,m/s$ به طرف شرق حرکت می‌کند نشسته است. شخص دیگری در نزدیکی خط آهن ایستاده و دور شدن قطار را مشاهده می‌کند. لوکوموتیو سوت خود را با بسامد $500/0\,Hz$ به صدا در می‌آورد. هوا آرام است. (الف) شخص بیرون چه بسامدی را می‌شنود؟ (ب) شخص درون قطار چه بسامدی را می‌شنود؟ باد از شرق با تندی $10/00\,m/s$ شروع به وزیدن می‌کند. (پ) اکنون شخص بیرون چه بسامدی را می‌شنود؟ (ت) شخصی درون قطار چه بسامدی را می‌شنود؟ **SSM WWW**

•••۶۶- دو قطار با سرعت $30/5\,m/s$ نسبت به زمین به سوی یکدیگر حرکت می‌کنند. یکی از قطارها سوت خود را با بسامد $500\,Hz$ به صدا در می‌آورد. (الف) در هوای آرام، صدای سوت با چه بسامدی در قطار دیگر شنیده می‌شود؟ (ب) اگر باد با $30/5\,m/s$ به طرف سوت و در جهت دور شدن از

شنونده بوزد، چه بسامدی در قطار دیگر شنیده می‌شود؟ (پ) اگر جهت باد معکوس شود چه بسامدی شنیده می‌شود؟

•••۶۷- آژیری با بسامد $2000\,\text{Hz}$ و مأمور پدافند شهری هر دو نسبت به زمین ساکن هستند. مأمور چه بسامدی را می‌شود اگر بادی با تندی $12\,\text{m/s}$ (الف) از چشمه به مأمور و (ب) از مأمور به چشمه بوزد؟

بخش ۳۳-۱۰ تندیهای فراصوتی، موجهای ضربه‌ای

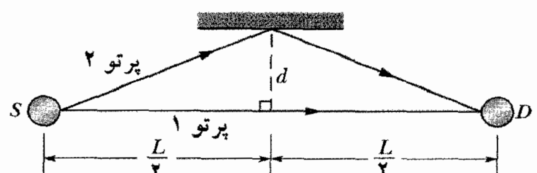
•۶۸- موجهای ضربه‌ای که از کابین خلبان در شکل ۳۳-۲۴ خارج می‌شوند دارای زاویهٔ تقریباً 60° هستند. موقع عکسبرداری هواپیما با تندی $1350\,\text{km/h}$ در حرکت بوده است. تندی صوت در ارتفاع هواپیما تقریباً چقدر است؟

••۶۹- یک هواپیما جت در ارتفاع $5000\,\text{m}$ با تندی ۱/۵ ماخ از بالای سر شما عبور می‌کند. (الف) زاویهٔ مخروط ماخ را به دست آورید. (ب) چه مدت پس از عبور هواپیما از بالای سر شما موج ضربه‌ای به شما می‌رسد؟ تندی صوت را $331\,\text{m/s}$ در نظر بگیرید. SSM

•••۷۰- هواپیمایی با ۱/۵ برابر تندی صوت پرواز می‌کند. ۱۰ دقیقه پس از عبور هواپیما درست از بالای سر شخص روی زمین، دیوار صوتی به او می‌رسد. ارتفاع هواپیما چقدر است؟ فرض کنید تندی صوت برابر $330\,\text{m/s}$ باشد.

مسئله‌های اضافی

۷۱- در شکل ۳۳-۴۴، چشمهٔ نقطه‌ای S صوتی با طول موج $0/850\,\text{m}$ را به طور همسانگرد گسیل می‌کند. پرتو صوتی ۱ به طور مستقیم به طرف آشکارساز D در فاصلهٔ $L = 10/0\,\text{m}$ انتشار می‌یابد. پرتو صوتی ۲ با بازتاب (عملاً "برگشتن") از یک سطح مسطح به طرف D انتشار می‌یابد. بازتاب روی عمود و منصف خط SD در فاصلهٔ d از خط، رخ می‌دهد. فرض کنید که بازتاب، موج صوتی را به مقدار $0/500\lambda$ انتقال می‌دهد. برای حداقل چه مقداری از d (به غیر از صفر) صوت مستقیم و صوت بازتابیده (الف) کاملاً ناهمفاز و (ب) کاملاً همفاز به D می‌رسند؟



شکل ۳۳-۴۴ مسئلهٔ ۷۱

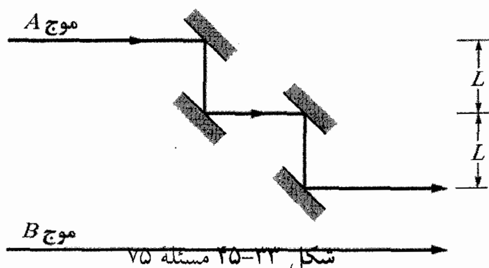
۷۲- آشکارسازی در ابتدا با سرعت ثابتی به طور مستقیم به طرف چشمهٔ صوتی ساکنی حرکت می‌کند و سپس (پس از عبور از آن) به طور مستقیم از آن دور می‌شود. بسامد گسیل شده f است. در حین نزدیک شدن بسامد آشکار شده f'_{app} و در طی دور شدن f'_{rec} است. اگر بسامدها با رابطهٔ $(f'_{\text{app}} - f'_{\text{rec}})/f = 0/500$ به هم مربوط باشند، نسبت v_D / v، تندی آشکارساز به تندی صوت، چقدر است؟

۷۳- دو موج صوتی با دامنهٔ $12\,\text{nm}$ و طول موج $35\,\text{cm}$ داخل لولهٔ درازی در یک جهت ولی با اختلاف فاز $\pi/3\,\text{rad}$ حرکت می‌کنند. (الف) دامنه و (ب) طول موج موج صوتی خالص که از تداخل آنها حاصل می‌شود، چقدر است؟ حال اگر موجهای صوتی در لوله در جهتهای مخالف حرکت کنند، (پ) دامنه و (ت) طول موج موج خالص چقدر است؟

۷۴- یک موج صوتی سینوسی در هوا و در جهت مثبت محور x با تندی $343\,\text{m/s}$ حرکت می‌کند. در یک لحظه، وقتی مولکول B هوا ساکن است مولکول A هوا در بیشینهٔ جابه‌جایی خود در جهت منفی محور x قرار دارد. فاصلهٔ بین این دو مولکول $15/0\,\text{cm}$ است و مولکولهای بین A و B در جابه‌جایی میانی در جهت منفی محور x واقع‌اند. (الف) بسامد موج صوتی چقدر است؟

در یک آرایهٔ مشابه برای یک موج صوتی سینوسی دیگر، مولکول C هوا در بیشینهٔ جابه‌جایی خود در جهت مثبت محور x است در حالی که مولکول D هوا در جابه‌جایی بیشینهٔ خود در جهت منفی قرار دارد. فاصلهٔ بین مولکولها دوباره $15/0\,\text{cm}$ و مولکولهای بین C و D دارای جابه‌جایی میانی هستند. (ب) بسامد موج صوتی چقدر است؟

۷۵- در شکل ۳۳-۴۵، موجهای صوتی A و B هر دو با طول موج λ، در ابتدا همفازند و همانطور که با دو پرتو نشان داده شده‌اند به سمت راست حرکت می‌کنند. موج A از چهار سطح بازتابیده می‌شود و سرانجام در همان جهت اولیه‌اش حرکت می‌کند. چه مضربی از طول موج λ برابر است با کوچکترین مقدار مسافت L در شکل تا A و B پس از بازتابها کاملاً ناهمفاز باشند؟



شکل ۳۳-۴۵ مسئلهٔ ۷۵

۷۶- یک نوازندهٔ ترومپت روی واگن مسطح در حال حرکتی قرار دارد و نوازندهٔ ترومپت دیگری کنار خط آهن ایستاده است و هر دو نت $440\,\text{Hg}$ را می‌نوازند. موجهای صوتی توسط ناظر ساکنی بین دو نوازنده با بسامد زنش ۴ زنش در ثانیه شنیده می‌شود. تندی واگن مسطح چقدر است؟

۷۷- آژیری که صوتی با بسامد $1000\,Hz$ گسیل می‌کند با تندی $10\,m/s$ به طرف صخره‌ای از شما دور می‌شود. تندی صوت در هوا را برابر $330\,m/s$ در نظر بگیرید. (الف) بسامد صوتی که مستقیماً از آژیر می‌شنوید چقدر است؟ (ب) بسامد صوتی که پس از بازتاب از صخره می‌شنوید چقدر است؟ (پ) بسامد زنش بین این دو صوت چقدر است؟ آیا قابل احساس است؟ (باید کمتر از $20\,Hz$ باشد تا احساس شود). **SSM**

۷۸- یک چشمهٔ صوتی در امتداد محور x و بین دو آشکارساز A و B حرکت می‌کند. طول موجی صوتی که در A آشکار می‌شود $0/500$ برابر طول موج صوت آشکار شده در B است. نسبت v_s/v، تندی چشمه به تندی صوت چقدر است؟

۷۹- بلندگویی صوتی با بسامد $2000\,Hz$ و شدت $0/960\,mW/m^2$ را در فاصلهٔ $6/10\,m$ به طور همسانگرد گسیل می‌کند. فرض کنید که بازتابی وجود ندارد. (الف) در $30/0\,m$ شدت چقدر است؟ (ب) جابه‌جایی دامنه و (پ) دامنهٔ فشار صوت چقدر است؟

۸۰- در نقطهٔ معینی، دو موج تغییر فشاری ایجاد می‌کنند که با رابطه‌های $\Delta p_1 = \Delta p_m \sin \omega t$ و $\Delta p_2 = \Delta p_m \sin(\omega t - \phi)$ داده می‌شوند. در این نقطه، اگر ϕ برابر با (الف) ۰، (ب) $\pi/2$، (پ) $\pi/3$ و (ت) $\pi/4$ باشد، نسبت $\Delta p_1/\Delta p_m$ که در آن Δp_r دامنهٔ فشار موج برایند است، چقدر است؟

۸۱- در فاصلهٔ $10\,m$ از چشمهٔ نقطه‌ای همسانگرد صوت، شدت برابر $0/0080\,W/m^2$ است. (الف) توان چشمه چقدر است؟ (ب) در فاصلهٔ $5/0\,m$ از چشمه شدت صوت چقدر است؟ (پ) در فاصلهٔ $10\,m$ از چشمه تراز صوتی چقدر است؟ **SSM**

۸۲- چگالی متوسط پوستهٔ زمین تا $10\,km$ پایینتر از سطح زمین برابر $2/7\,g/cm^3$ است. تندی موجهای طولی زلزله‌ای در آن عمق به وسیلهٔ محاسبهٔ زمان رسیدن از زلزله‌های دور برابر $5/4\,km/s$ است. با استفاده از این اطلاعات مدول کپه‌ای پوستهٔ زمین در آن عمق را به دست آورید. برای مقایسه، مدول کپه‌ای فولاد تقریباً برابر $16\times10^{10}\,Pa$ است.

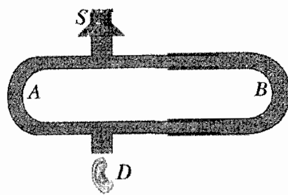
۸۳- دو دیاپازن مشابه می‌توانند در $440\,Hz$ نوسان کنند. شخصی در مکانی بین خط واصل آنها قرار دارد. وقتی (الف) شخص ساکن و دیاپازنها در یک جهت با تندی $3/00\,m/s$ حرکت کنند و (ب) دیاپازنها ساکن و شخص در امتداد خط با تندی $3/00\,m/s$ حرکت کند، بسامد زنش که به وسیلهٔ او اندازه‌گیری می‌شود چقدر است؟

۸۴- شما می‌توانید فاصلهٔ خود را از یک آذرخش با شمارش ثانیه‌ها بین مشاهدهٔ برق زدن و شنیدن صدای رعد، حساب کنید. تعداد ثانیه‌ها را باید بر چه عدد صحیحی تقسیم کرد تا فاصله برحسب کیلومتر به دست آید؟

۸۵- (الف) اگر دو موج صوتی، یکی در هوا و دیگری در آب (شیرین) دارای شدت یکسان باشند، نسبت دامنهٔ فشار موج در آب به دامنهٔ فشار موج در هوا چقدر است؟ فرض کنید که هوا و آب در دمای $20^\circ C$ هستند. (جدول ۳۰-۱ را ببینید) (ب) اگر بجای این حالت، دامنه‌های فشار یکسان باشند، نسبت شدت موجها چقدر است؟ **SSM**

۸۶- نسبتهای (بزرگتر به کوچکتر) (الف) شدت، (ب) دامنهٔ فشار و (پ) دامنهٔ جابه‌جایی ذره برای دو صوتی را که تراز صوتی آنها به مقدار $37\,dB$ متفاوت است پیدا کنید.

۸۷- شکل ۳۳-۴۶ یک تداخل‌سنج صوتی را نشان می‌دهد که از هوا پر شده است و برای نشان دادن تداخل موجهای صوتی به کار می‌رود. چشمهٔ صوتی S یک پردهٔ نوسانی است؛ D آشکارساز صوتی، مثل گوش یا میکروفون است. طول مسیر SBD قابل تغییر است، اما مسیر SAD ثابت است. در D، موجهایی که در امتداد مسیر SBD می‌آیند با موجهایی که در امتداد مسیر SAD می‌آیند تداخل می‌کنند. در یک آزمایش، شدت صوت در D دارای کمینه مقدار ۱۰۰ واحد در مکانی از بازوی قابل حرکت است و وقتی بازو به اندازهٔ $1/65\,cm$ جابه‌جا شود به طور پیوسته به بیشینه مقدار ۹۰۰ واحد افزایش می‌یابد. (الف) بسامد صوتی که به وسیلهٔ چشمه گسیل می‌شود چقدر است؟ (ب) نسبت دامنهٔ موج SAD به دامنل موج SBD در D چقدر است؟ (پ) با در نظر گرفتن اینکه این موجها از یک چشمه گسیل می‌شوند، چطور ممکن است که این موجها دارای دامنهٔ متفاوت باشند؟

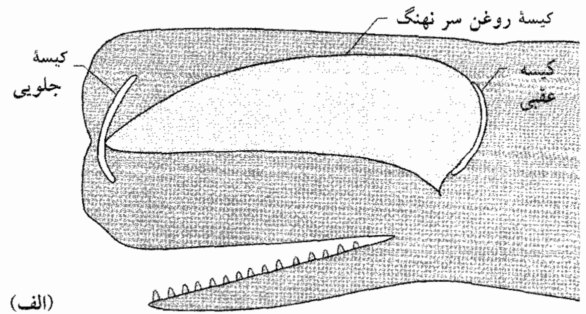


شکل ۳۳-۴۶ مسئلهٔ ۸۷

۸۸- گلوله‌ای با تندی $685\,m/s$ شلیک می‌شود. زاویه‌ای را که مخروط ضربه با خط حرکت گلوله می‌سازد به دست آورید.

۸۹- نهنگ (شکل ۳۳-۴۷ الف) به وسیلهٔ ایجاد یک ردیف صدای تق تق حرف می‌زند. در واقع، نهنگ فقط یک صدا نزدیک جلوی سرش برای شروع این ردیف صدا تولید می‌کند. پس از آن قسمتی از این صدا از سر او وارد آب می‌شود تا اولین تق این ردیف صدا باشد. بقیهٔ صدا به عقب می‌رود و از میان کیسهٔ روغن سر نهنگ (جسمی از پیه) به یک کیسه در عقب (لایه‌ای از هوا) می‌رود و از آن بازتاب می‌کند و سپس از میان کیسهٔ روغن سر نهنگ به طرف جلو حرکت می‌کند. وقتی به کیسهٔ جلویی سر (لایهٔ دیگری از هوا) می‌رسد قسمتی از صدا به داخل آب می‌رود و دومین تق را تشکیل می‌دهد و بقیه

به طرف عقب بر می‌گردد و از میان کیسهٔ روغن سر نهنگ عبور می‌کند (و به تقهای بعدی می‌انجامد).



شکل ۳۳-۴۷ مسئلهٔ ۸۹

شکل ۳۳-۴۷ ب نمودار ثبت شدهٔ یک ردیف از تق تقها را که توسط یک میکروفون در زیر آب آشکار شده، نشان می‌دهد. یکای بازهٔ زمانی ۱/۰ms روی نمودار نشان داده شده است. فرض کنید که تندی صدا در کیسهٔ روغن سر نهنگ برابر ۱۳۷۲m/s باشد، طول کیسهٔ روغن سر نهنگ را به دست آورید. از چنین محاسبه‌ای، دانشمندان علوم دریایی طول نهنگ را از ردیف تق تق آن، تخمین می‌زنند.

۹۰- یک موج طولی سینوسی پیوسته به داخل فنر بسیار درازی که یک سر آن به چشمه‌ای نوسانی متصل است فرستاده می‌شود. موج در جهت منفی محور x حرکت می‌کند؛ بسامد چشمه ۲۵Hz است؛ در هر لحظه فاصلهٔ بین نقطه‌های پی در پی که دارای بیشینهٔ انبساط هستند برابر ۲۴cm است؛ جابه‌جایی طولی بیشینهٔ ذره‌ای از فنر برابر ۰/۳۰cm است؛ و ذره در زمان $t=۰$ در $x=۰$ بوده و جابه‌جایی آن برابر صفر است. اگر موج را به صورت $s(x,t)=s_m\cos(kx\pm\omega t)$ بنویسیم (الف) s_m، (ب) k، (پ) ω، (ت) تندی موج و (ث) انتخاب علامت صحیح برای ω چیست؟

۹۱- فرض کنید که یک شیپور ۱۰۰Hz چشمه‌ای نقطه‌ای و همسانگرد باشد که در فاصلهٔ ۱۰km صدای آن به سختی شنیده می‌شود. در چه فاصله‌ای صدای آن آزاردهنده خواهد شد؟

۹۲- تندی صوت در یک فلز معین برابر v_m است. یک انتهای لولهٔ درازی از این فلز به طول L باز است و از آن ضربهٔ شدیدی وارد می‌شود. شنونده‌ای در انتهای دیگر دو صدا را می‌شنود، یکی موجی که از طریق دیوارهٔ فلزی لوله حرکت می‌کند و دیگری موجی که از طریق هوای داخل لوله حرکت می‌کند. (الف) اگر v تندی صوت در هوا باشد، بازهٔ زمانی t بین دریافت دو صدا توسط گوش شنونده چقدر است؟ (ب) اگر $t=۱/۰۰s$ و فلز فولاد باشد، طول L چقدر است؟

۹۳- لوله‌ای به طول ۰/۶۰m که یک انتهایش بسته است با گاز نامعلومی پر شده است. سومین کمترین بسامد هماهنگ برای لوله برابر ۷۵۰Hz است. (الف) تندی صوت در این گاز چقدر است؟ (ب) وقتی لوله پر از گاز است بسامد اصلی آن چقدر است؟

۹۴- چهار موج صوتی در یک لوله و در یک جهت فرستاده می‌شوند:

$$s_1(x,t)=(۹/۰۰\text{nm})\cos(۲\pi x-۷۰۰\pi t)$$
$$s_2(x,t)=(۹/۰۰\text{nm})\cos(۲\pi x-۷۰۰\pi t+۰/۷\pi)$$
$$s_3(x,t)=(۹/۰۰\text{nm})\cos(۲\pi x-۷۰۰\pi t+\pi)$$
$$s_4(x,t)=(۹/۰۰\text{nm})\cos(۲\pi x-۷۰۰\pi t+۱/۷\,\pi)$$

دامنهٔ موج برایند چقدر است؟ (*راهنمایی:* برای ساده سازی مسئله از نمودار فازنما استفاده کنید.)

۹۵- خط مستقیم AB دو چشمهٔ نقطه‌ای به فاصلهٔ ۵/۰۰m از هم را که موجهای صوتی ۳۰۰Hz با دامنهٔ یکسان و کاملاً ناهمفاز گسیل می‌کنند به هم متصل می‌کند (الف) کوتاهترین فاصلهٔ بین نقطهٔ وسط AB و نقطه‌ای روی AB که تداخلش با موجها موجب نوسانهای بیشینهٔ هوا می‌شود، چقدر است؟ (ب) دومین و (پ) سومین کوتاهترین فاصله چقدر است؟

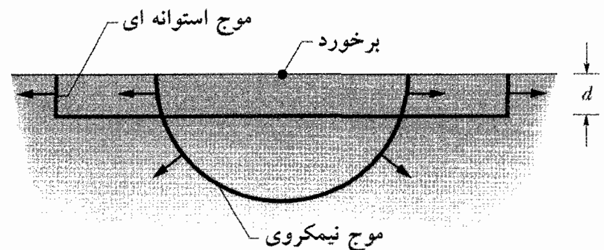
۹۶- یک چشمهٔ نقطه‌ای که روی محور x ساکن است یک موج صوتی سینوسی را با بسامد ۶۸۶ Hz و تندی ۳۴۳m/s گسیل می‌کند. موج به صورت شعاعی به دور از چشمه حرکت می‌کند و موجب می‌شود که مولکولهای هوا به عقب و جلو به صورت شعاعی نوسان کنند. فرض کنید جبههٔ موج را به صورت خطی در نظر بگیریم که نقطه‌هایی را که مولکولهای هوا در آنجا بیشینهٔ جابه‌جایی شعاعی به طرف بیرون را دارند به هم وصل می‌کنند، در هر لحظهٔ معین، جبهه‌های موج دایره‌های هم مرکزی هستند که مرکز آنها روی چشمه واقع است. (الف) در امتداد x فاصلهٔ بین دو جبههٔ موج مجاور هم چقدر است؟ سپس، چشمه با تندی ۱۱۰m/s در امتداد محور x حرکت می‌کند. در امتداد x، فاصلهٔ بین جبهه‌های موج در (ب) جلو و (پ) پشت چشمه چقدر است؟

۹۷- شما در فاصلهٔ D از یک چشمهٔ نقطه‌ای همسانگرد صوتی قرار دارید. ۵۰/۰ m به طرف چشمه حرکت می‌کنید در می‌یابید که شدت صوت دو برابر شده است. فاصلهٔ D را حساب کنید.

۹۸- در دهم جولای ۱۹۹۶ یک قطعه گرانیت از دیوارهٔ درهٔ یوزمیت[1] جدا شد و شروع به لغزیدن به پایین دیواره کرد و شبیه پرتابه به حرکت در آمد. موجهای لرزه‌ای ایجاد شده از برخورد این قطعه با زمین لرزه‌نگارهایی را در فاصلهٔ ۲۰۰ کیلومتری به کار انداختند. اندازه‌گیریهای بعدی نشان داد که

1. Yosemite valley

جرم قطعه بین $7/3\times10^{7}$ kg و 7×10^{8} kg بوده است و محل سقوط آن ۵۰۰m به طور قائم و ۳۰m به طور افقی از نقطهٔ پرتاب بوده است، (زاویهٔ پرتاب معلوم نیست). (الف) انرژی جنبشی قطعه را درست پیش از برخورد با زمین تخمین بزنید. دو نوع موج زلزله‌ای در نظر بگیرید که از محل برخورد گسترش می‌یابند، یک *موج اصلی* نیمکروی که در زمین به شکل یک نیمکره حرکت می‌کند و گسترده می‌شود و یک *موج سطحی* استوانه‌ای که در امتداد زمین به صورت یک استوانهٔ قائم کم عمق حرکت می‌کند (شکل ۳۳-۴۸). فرض کنید برخورد به مدت ۰/۵۰s دوام داشته باشد و عمق d استوانهٔ قائم برابر ۵/۰m و هر نوع موج ۲۰٪ انرژی قطعه پیش از برخورد را در خود داشته باشد. فرض کنید هیچ انرژی مکانیکی در حین حرکت توسط موجها تلف نشده باشد، مطلوب است محاسبهٔ شدت (ب) موج اصلی و (پ) موج سطحی، وقتی که آنها از فاصلهٔ ۲۰۰km به لرزه‌نگار رسیده باشند. (ت) بر پایهٔ این نتایج، کدام موج در لرزه‌نگار واقع در فاصله دور ساده‌تر آشکار می‌شود؟



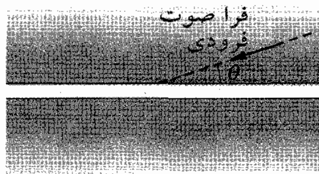
شکل ۳۳-۴۸ مسئلهٔ ۹۸

۹۹- فرو ریختن بهمن‌وار شن در برخی از صحراها از تپه‌های شنی موجب طنین صدایی می‌شود که بقدر کافی بلند است و از فاصلهٔ ۱۰km شنیده می‌شود. طنین صدا به وضوح نتیجهٔ ارتعاشهای تناوبی لایهٔ شنی است که سُر می‌خورد- ضخامت لایه از هم باز و جمع می‌شود. اگر بسامد گسیل شده ۹۰Hz باشد (الف) دورهٔ تناوب نوسان ضخامت و (ب) طول موج صوت چقدر است؟

۱۰۰- مسافران اتومبیلی که با تندی ۱۶/۰m/s به طرف شرق حرکت می‌کند آژیر اتومبیل اورژانس را که از عقب با تندی ۴۰/۰m/s (نسبت به هوا و زمین) به آنها نزدیک می‌شود با بسامد ۹۵۰Hz می‌شنوند. تندی صوت در هوا برابر ۳۴۰m/s است. (الف) سرنشین اتومبیل اورژانس آژیر را با چه بسامدی می‌شنود؟ (ب) سرنشینان اتومبیل پس از عبور اتومبیل اورژانش از آنها چه بسامدی را می‌شنوند؟

۱۰۱- فراصوت که شامل موجهای صوتی با بسامدی بالاتر از حد شنوایی انسان است می‌تواند برای تصویر برداری از داخل بدن انسان مورد استفاده قرار گیرد. افزون بر این، با فراصوت می‌توان تندی جریان خون در بدن را اندازه‌گیری کرد؛ این عمل با مقایسهٔ بسامد فراصوت فرستاده شده به بدن با بسامد فراصوت بازتاب یافته توسط خون به سطح بدن انجام می‌گیرد. در حین تپهای خون این بسامد آشکارشده تغییر می‌کند.

فرض کنید که تصویر فراصوتی (شکل ۳۳-۴۹) از بازوی بیماری سرخرگی را نشان می‌دهد که با امتداد حرکت فراصوت زاویهٔ $\theta=20^\circ$ می‌سازد. همچنین فرض کنید که بسامد فراصوتی بازتابیده از خون داخل شاهرگ به اندازهٔ بیشینه مقدار ۵۴۹۵Hz نسبت به بسامد اصلی فراصوت یعنی ۵/۰۰۰۰۰۰MHz افزایش یافته است. (الف) در شکل ۳۳-۴۹ جهت حرکت خون به طرف راست است یا به طرف چپ؟ (ب) تندی صوت در بازوی انسان ۱۵۴۰m/s است. تندی بیشینهٔ خون چقدر است؟ (*راهنمایی*: مؤلفه سرعت خون در امتداد جهت حرکت فراصوت، موجب اثر دوپلر می‌شود.) (پ) اگر زاویهٔ θ بزرگتر شود، بسامد بازتاب بیشتر می‌شود یا کمتر؟ SSM



شکل ۳۳-۴۹ مسئلهٔ ۱۰۱

۱۰۲- لولهٔ A فقط یک انتهای باز دارد ولی لولهٔ B با طول چهار برابر طول A دو انتهایش باز است. از ۱۰ تا کمترین عددهای هماهنگ لولهٔ B کدامیک (الف) کمترین، (ب) دومین کمترین و (پ) سومین کمترین مقداری است که در آن بسامد هماهنگ B با یکی از بسامدهای هماهنگ A یکسان است؟

۱۰۳- *آبشار اکوستیکی*. تلاطم آب آبشار موجب می‌شود تا ناحیهٔ وسیعی از اطراف آن در گستره‌ای وسیع با بسامد کم به نوسان درآید. اگر آب به طور آزاد سقوط کند (به جای اینکه در حین سقوط با صخره‌ها برخورد کند)، در بسامد معین f_m، نوسان با بزرگترین دامنه انجام می‌شود. این واقعیت بیانگر وجود تشدید آکوستیکی بوده و f_m بسامد اصلی است. جدول زیر مقدارهای اندازه‌گیری شده برای f_m و طول L سقوط آزاد آب را برای نه آبشار در امریکا و کانادا به دست می‌دهد. مشخص کنید که چگونه با این داده‌ها می‌توان نموداری رسم کرد و تندی صوت را در آب آبشار به دست آورد. اگر تشدید آبشار مشابه تشدید در لوله‌ای باشد که (الف) دو سر آن باز است و (ب) فقط یک سر آن باز است، تندی صوت را از روی نمودار حساب کنید. تندی صوت در آب متلاطم پر از حباب می‌تواند ۲۵٪ کمتر از تندی ۱۴۰۰m/s در آب آرام باشد. (پ)

از پاسخهای (الف) و (ب) مشخص کنید که چند انتهای باز به طور مؤثر در تشدید آبشار وجود دارند.

آبشار	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
f_m(Hz)	۵/۶	۳/۸	۸/۰	۶/۱	۸/۸	۶/۰	۱۹	۲۱	۴۰
L(m)	۹۷	۷۱	۵۳	۴۹	۳۵	۲۴	۱۳	۱۱	۸

۱۰۴- شخصی در واگن قطار نتی با بسامد ۴۴۰Hz را باترومپت می‌نوازد. واگن با تندی ۲۰/۰m/s به طرف دیواری حرکت می‌کند. بسامد (الف) صوتی را که به دیوار می‌رسد و (ب) صوت باز تابیده که به نوازنده می‌رسد، چقدر است؟

۱۰۵- اتومبیل پلیس اتومبیلی را که سرعت بالایی دارد تعقیب می‌کند. فرض کنید ماشین خلافکار دارای بیشینهٔ تندی ۸۰/۰m/s و اتومبیل پلیس ۵۴/۰m/s باشد. در لحظه‌ای که دو اتومبیل به بیشینهٔ تندی خود می‌رسند، اگر بسامد آژیر پلیس ۴۴۰Hz باشد، اتومبیل خلافکار چه بسامدی را خواهد شنید؟ فرض کنید تندی صوت در هوا ۳۴۰ m/s است.

۱۰۶- یک موج صوتی به طور یکنواخت در همهٔ جهتها از یک چشمه نقطه‌ای دور می‌شود. (الف) برای جابه‌جایی s یک محیط انتقال دهنده در فاصلهٔ r از چشمه رابطهٔ زیر را ثابت کنید

$$s=\frac{b}{r}\sin k(r-vt)$$

که در آن b یک ثابت است. تندی، جهت انتشار، زمان تناوب و شتاب موج را در نظر بگیرید. (ب) ابعاد ثابت b چیست؟

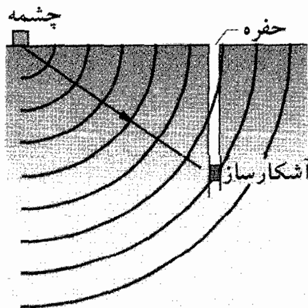
۱۰۷- در شکل ۳۳-۳۴، S_1 و S_2 دو چشمهٔ نقطه‌ای همسانگرد صوت هستند. آنها موجهایی همفاز با طول موج ۰/۵۰m گسیل می‌کنند و فاصلهٔ دو چشمه $D=$۱/۶۰m است. اگر یک آشکارساز صوتی را در امتداد دایرهٔ بزرگی که مرکز آن در وسط دو چشمه است حرکت دهیم، در چند نقطه موجها به طور (الف) کاملاً همفاز و (ب) کاملاً ناهمفاز به آشکارساز می‌رسند؟

۱۰۸- فرض کنید یک بلندگوی کروی صدا را با توان ۱۰ W به طور همسانگرد در اتاقی که دیوارها، سقف و کف آن عایقبندی صوتی شده است (*محفظهٔ بدون پژواک*) گسیل می‌کند. (الف) در فاصلهٔ $d=$۳/۰m از مرکز چشمه شدت صوت چقدر است؟ (ب) نسبت دامنهٔ موج در $d=$۴/۰m به $d=$۳/۰m چقدر است؟

۱۰۹- در جستجو برای یافتن فسیل دایناسور موجود در صخره‌ها، باستان شناسان می‌توانند از موجهای صوتی برای تولید تصویر رایانه‌ای دایناسور استفاده کنند. این تصویر به باستان شناسان برای خارج کردن فسیل از داخل صخره کمک می‌کند. نظر ابتدایی در روش آشکارسازی این است که یک تپ قوی صوتی از چشمه (تفنگ لرزه نگاری) در سطح زمین گسیل می‌شود سپس آن را توسط نوعی میکروفون که در عمق مساوی در حفره‌هایی در زمین نصب شده‌اند آشکار می‌کنند. چشمه و یک میکروفون در شکل ۳۳-۵۰ نشان داده شده‌اند. اگر موج صوتی فاصلهٔ از چشمه تا میکروفون را مطابق شکل ۳۳-۵۰ فقط در صخره حرکت کند، موج با یک تندی مشخص V حرکت می‌کند و زمان مشخص T طول می‌کشد. ولی اگر موج در سر راهش از میان استخوان فسیلی بگذرد، کمی زمان بیشتری طول می‌کشد چون موج در استخوان خیلی آهسته‌تر از داخل صخره حرکت می‌کند. با اندازه‌گیری اختلاف Δt بین زمانهای قابل انتظار و اندازه‌گیری شده، می‌توان فاصلهٔ d طی شده در استخوان را معین کرد. پس از تکرار این روش برای مکانهای مختلف چشمه و میکروفونها رایانه می‌تواند فاصله‌های متعدد d اندازه‌گیری شده را به تصویری از فسیل تبدیل می‌کند. (الف) فرض کنید تندی صوت در استخوان فسیل $V-\Delta V$ باشد که در آن ΔV نسبت به V کوچک است. نشان دهید که فاصلهٔ d با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$d\approx\frac{V^2\Delta t}{\Delta V}$$

(ب) به ازای $V=$۵۰۰۰ m/s و $\Delta V=$۲۰۰m/s ، اگر صوت از قطر استخوان پای یک دایناسور بالغ بگذرد چه مقدار نوعی را برای Δt تخمین می‌زنید؟ (قطر استخوان را تخمین بزنید.)



شکل ۳۳-۵۰ مسئلهٔ ۱۰۹

۱۱۰- می‌توان با در نظر گرفتن ستاره‌ای که تپهای طولی *شعاعی* را در مد اصلی موج ایستاده انجام می‌دهد، یعنی شعاع ستاره به طور متناوب با زمان تغییر می‌کند و جابه‌جایی شکم روی سطح ستاره است، دورهٔ تناوب تپهای متغیر یک ستاره را تخمین زد. (الف) آیا انتظار دارید مرکز ستاره جابه‌جایی گره یا شکم باشد؟ (ب) با مقایسه با لوله‌ای که یک انتهای آن باز است، نشان دهید که دورهٔ تناوب تپ T با رابطهٔ $T=$۴R/v داده می‌شود، که در آن R شعاع تعادل ستاره و v تندی متوسط صوت در مادهٔ ستاره است. (پ) ستاره‌های کوتولهٔ سفید نوعی ترکیبی از ماده‌ای با مدول کپه‌ای ۱/۳۳×۱۰^{۲۲} Pa و چگالی ۱۰^{۱۰} kg/m^۳ دارند. شعاع آنها ۹/۰×۱۰$^{-۳}$ برابر شعاع خورشیدی است. دورهٔ تناوب تقریبی یک کوتولهٔ سفید چقدر است؟

۱۱۱- شنوندهٔ ساکنی (نسبت به هوا و زمین) از چشمه‌ای که با سرعت ۱۵m/s به او به طرف شرق نزدیک می‌شود، سیگنالی با بسامد f_1 را می‌شنود. اگر پس از آن شنونده با سرعت ۲۵m/s به طرف چشمه که به او نزدیک می‌شود به طرف غرب حرکت کند، او بسامد f_2 را می‌شنود که به مقدار ۳۷Hz با f_1 تفاوت دارد. بسامد چشمه چقدر است؟ (تندی صوت را در هوا برابر ۳۴۰m/s در نظر بگیرید.)

۱۱۲- یک نوازندهٔ گیتار سیم گیتار را در بسامد اصلی ۴۴۰Hz کوک می‌کند. (الف) اگر او کشش سیم را ۲۰٪ افزایش دهد، بسامد اصلی آن چقدر خواهد بود؟ (ب) اگر به جای این، او با لغزاندن انگشتش از کلید کوک تا یک سوم به پایین سیم به سمت پل واقع در انتها، طول سیم را که نوسان می‌کند کوتاه کند، بسامد اصلی چقدر خواهد بود؟

۳۴ تصویرها



دیـد در زیـر آب معمـولاً دشـوار اسـت حتـی اگـر در بالای آب دید خـوبی داشـته باشید. دلیل آن بـه چگـونگی تأثیر آب بر شکـست نـوری دارد که وارد چشم می‌شـود. شکست ممکن است در هـوا مناسـب ولـی در آب کـاملاً نامناسب باشد. با وجود ایـن، نوع خاصی ماهی موقـع شـنا کردن بخـشی از چشم‌هـای خـود را در سـطح آب نگـه می‌دارد که بـدین وسـیله بـه طور همزمان رو و زیر آب را می‌بیند.

چگونه چشمهای این ماهی هـم هـوا و هـم آب را می‌بیند؟

پاسخ در همین فصل.

۳۴-۱ فیزیک چیست؟

یکی از هدفهای فیزیک، کشف قانونهای بنیادی حاکم بر نور مانند قانون شکست است. هدف گسترده‌تر این است که این قانونها را شاید در مهمترین کاربرد آنها یعنی تولید تصویر به کار بریم. اولین تصویرهای عکاسی در سال ۱۸۲۴/۱۳۰۳ نوظهور بودند ولی امروزه دنیای ما با تصویر رشد بسیار یافته است. صنایع عظیمی بر تولید تصویرها در تلویزیون، رایانه و پردهٔ سینماها مبتنی‌اند. تصویرهای ماهواره‌ای در زمان درگیری به تحلیل‌گران نظامی و در زمان بلایا به تحلیل‌گران محیط زیست کمک می‌کنند. دوربینهای نظارتی به امنیت خانه‌ها کمک می‌کنند. ضمن اینکه می‌توانند خلوت خصوصی شهروندان را نیز برهم بزنند. مهندسان پزشکی و زیست‌شناسان هنوز با این معما روبه‌رو هستند که تصویر چگونه در چشم انسان شکل می‌گیرد و مغز چه نقشی دارد، در عین حال توانسته‌اند تصویرهایی ذهنی در برخی از افراد نابینا با شبیه‌سازی الکتریکی قشر دیداری مغز به وجود آورند.

اولین قدم در این فصل تعریف و طبقه‌بندی تصویرهاست. سپس چند راه اصولی که تصویرها را ایجاد می‌کنند، بررسی خواهیم کرد.

۳۴-۲ دو نوع تصویر

برای اینکه بتوانید مثلاً یک پنگوئن را ببینید، پرتوهای نور پخش شده از پنگوئن باید به چشم شما برسند و سپس به شبکیه در عقب چشم هدایت شوند. دستگاه بینایی شما، از شبکیه تا قشر دیداری مغز در عقب مغز، به طور خودکار و نیم‌هشیار اطلاعات فراهم شده توسط نور را پردازش می‌کنند. این دستگاه گوشه‌ها، سمتگیریها، بافتها، شکلها و رنگها را شناسایی می‌کند و سپس به طور سریع و با هشیاری **تصویری** را از پنگوئن به دست می‌دهد؛ (باز تولید آنچه را که از نور حاصل می‌شود) پنگوئن را در جهتی که پرتوهای نور از آنجا آمده است و در فاصلهٔ مناسبی درک می‌کنیم و تشخیص می‌دهیم.

دستگاه بینایی این پردازش و شناسایی را حتی اگر پرتوهای نور به طور مستقیم از پنگوئن نیامده باشند، مثلاً از آینه‌ای بازتابیده شده یا از طریق شکست در عدسیهای دوربین دو چشمی رسیده باشند انجام می‌دهد. با وجود این، پنگوئن را در جهتی خواهیم دید که پرتوهای نور پس از بازتاب یا شکست از آنجا می‌آیند و فاصله‌ای را که درک می‌کنیم ممکن است با فاصلهٔ واقعی پنگوئن کاملاً متفاوت باشد.

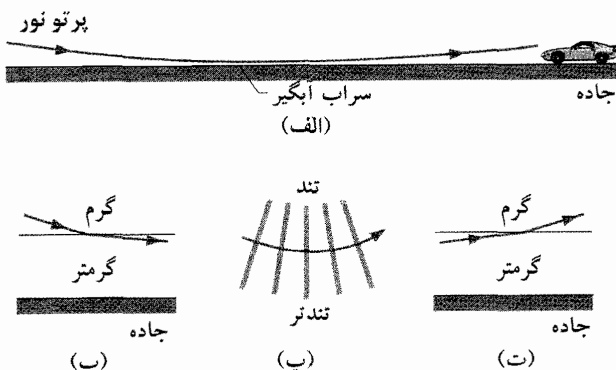
برای مثال، اگر پرتوهای نور از یک آینهٔ تخت بازتابیده شده باشند، پنگوئن در پشت آینه دیده خواهد شد زیرا پرتوهایی که به ما می‌رسند از آن جهت می‌آیند. البته، پنگوئن در آن پشت نیست. این نوع تصویر، که **تصویر مجازی** نامیده می‌شود واقعاً فقط در مغز وجود دارد ولی با این همه گفته می‌شود که در محل درک شده قرار دارد.

تصویر حقیقی از این نظر که روی سطحی مانند مقوا یا پردهٔ سینما تشکیل می‌شود با آن فرق دارد. تصویر حقیقی را می‌توان دید (در غیر این صورت سینماها خالی بودند)، ولی وجود تصویر به اینکه آن را می‌بینید بستگی ندارد، تصویر وجود دارد حتی اگر در آنجا نباشیم.

در این فصل به دنبال راههایی خواهیم بود که با آنها تصویرهای مجازی و حقیقی (مانند آینه‌ها) و شکست (مانند عدسیها) تشکیل می‌شود. همچنین تمایز بین این دو نوع تصویر را روشنتر می‌کنیم، ولی در اینجا نخست تصویر مجازی طبیعی را در نظر می‌گیریم.

سراب معمولی

یک مثال معمولی از تصویر مجازی آبگیری است که در یک روز آفتابی در فاصله‌ای در جاده دیده می‌شود ولی هرگز نمی‌توانید به آن برسید. این آبگیر یک **سراب** (نوعی تصویر توهمی) است که به وسیلهٔ پرتوهای نوری که از بخش پایینی آسمان در مقابل شما می‌آیند، تشکیل می‌شود (شکل ۳۴-۱ الف). وقتی این پرتوها به جاده می‌رسند، آنها بتدریج از هوای گرمتری که توسط جاده داغ شده و معمولاً نسبتاً گرم است می‌گذرند. با افزایش دمای هوا، چگالی هوا و در نتیجه ضریب



شکل ۳۴-۱ (الف) پرتوی که از قسمت پایین آسمان می‌آید در هوایی که به وسیلهٔ جاده گرم شده است شکسته می‌شود (بدون اینکه به جاده برسد). ناظری که این نور را دریافت می‌کند تصور می‌کند که نور از آبگیری روی جاده آمده است. (ب) خمیدگی (که در آن اغراق شده) یک پرتو نور که موقع حرکت به سمت پایین از یک مرز فرضی میان هوای گرم و هوای گرمتر می‌گذرد. (پ) تغییر جبهه‌های موج و خمیدگی مربوط به آن، که به این دلیل پیش می‌آید که انتهای پایین جبهه‌های موج در هوای گرمتر تندتر حرکت می‌کنند. (ت) خمیدگی یک پرتو که در امتداد یک مرز فرضی از هوای گرمتر به هوای گرم بالا می‌رود.

شکست هوا اندکی کاهش می‌یابد. به این ترتیب با پایین آمدن پرتوها آنها با ضریب شکستهای کوچکتری روبه‌رو می‌شوند و به طور پیوسته به طرف افق خمیده می‌شوند، (شکل ۳۴-۱ب). هرگاه پرتو افقی باشد، تا اندازه‌ای بالاتر از سطح جاده، هنوز خمیدگی وجود دارد زیرا قسمت پایین هر جبههٔ موج مربوطه در هوای کمی گرمتری قرار دارد و کمی تندتر از بخش بالایی جبههٔ موج حرکت می‌کند، (شکل ۳۴-۱پ). این حرکت نایکنواخت جبهه‌های موج پرتوها را به طرف بالا خم می‌کند. وقتی پرتو بالا می‌رود به خم شدن خود به طرف بالا از طریق ضریب شکستهای بتدریج بزرگتر ادامه می‌دهد، (شکل ۳۴-۱ت).

اگر مقداری از این نور به ناظر برسد، دستگاه بینایی به طور خودکار نتیجه می‌گیرد که این نور از ادامهٔ رو به عقب پرتوهایی که به او رسیده‌اند سرچشمه گرفته و احساس می‌کند که نور از سطح جاده آمده است. اگر نور آسمان اتفاقاً آبی باشد، سراب مانند آب به رنگ آبی دیده می‌شود. چون ممکن است که هوا به دلیل گرم شدن آشفته باشد، سراب مانند موجهای آب لرزان به نظر می‌رسد. رنگ مایل به آبی و لرزان بودن موجها خطای دید برای وجود یک آبگیر را افزایش می‌دهد ولی در واقع یک تصویر مجازی از بخش پایین آسمان است که دیده می‌شود.

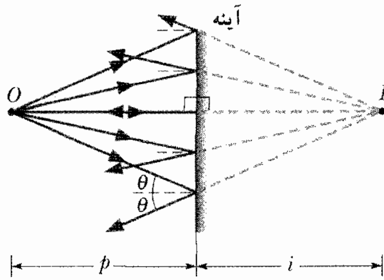
۳۴-۳ آینه‌های تخت

آینه سطحی است که می‌تواند باریکهٔ نور را به جای پراکنده کردن در جهتهای مختلف یا جذب آن، در یک جهت بازتاب دهد. سطح یک فلز براق مانند یک آینه است در حالی که یک دیوار سیمانی این طور نیست. در این بخش تصویرهایی را در نظر می‌گیریم که یک **آینهٔ تخت** (سطح بازتاب‌دهندهٔ تخت) می‌تواند ایجاد کند.

شکل ۳۴-۲ یک چشمهٔ نقطه‌ای نور O را نشان می‌دهد که آن را **شیء** می‌نامیم و در فاصلهٔ عمودی p در جلو یک آینهٔ تخت قرار دارد. نوری که بر آینه می‌تابد با پرتوهایی که از O گسترده می‌شوند، نمایش داده شده است. بازتاب این نور با پرتوهای بازتابیده‌ای که از آینه گسترده می‌شوند نمایش داده شده است.

اگر پرتوهای بازتابیده را به طرف عقب (پشت آینه) امتداد دهیم، درمی‌یابیم که امتداد آنها در نقطه‌ای به فاصلهٔ عمودی i در پشت آینه یکدیگر را قطع می‌کنند.

اگر به آینهٔ شکل ۳۴-۲ نگاه کنیم، چشم قسمتی از نورهای بازتابیده را دریافت می‌کند. برای احساس کردن آنچه که دیده می‌شود، یک چشمهٔ نقطه‌ای نور واقع در نقطهٔ تلاقی امتداد پرتوها دیده خواهد شد. این چشمهٔ نقطه‌ای تصویر I شیء O

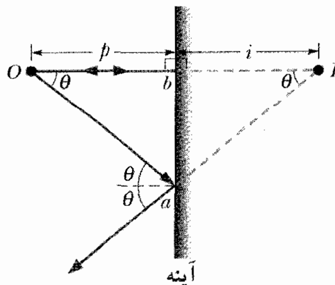


شکل ۳۴-۲ یک چشمهٔ نقطه‌ای نور O، به نام شیء، در فاصلهٔ عمودی p در جلو یک آینهٔ تخت قرار دارد. پرتوهای نور که از نقطهٔ O به آینه می‌رسند از آینه بازتابیده می‌شوند. اگر تعدادی از پرتوهای بازتابیده به چشم برسند، چشمهٔ نقطه‌ای نور I در پشت آینه در فاصلهٔ عمودی I دیده خواهد شد. چشمهٔ دیده شدهٔ I تصویر مجازی شیء O است.

است و **تصویر نقطه‌ای** نامیده می‌شود، زیرا یک نقطه است و مجازی است چون پرتوها در واقع از آن عبور نمی‌کنند. (به طوری که خواهیم دید، این پرتوها در مورد تصویر حقیقی از نقطهٔ تقاطع می‌گذرند.)

شکل ۳۴-۳ دو پرتو انتخاب شده از پرتوهای زیاد شکل ۳۴-۲ را نشان می‌دهد. یکی از این پرتوها به طور عمودی به نقطهٔ b برخورد می‌کند. پرتو دیگر با زاویهٔ فرود θ به نقطهٔ دلخواه a از آینه برخورد می‌کند. امتداد دو پرتو بازتابیده نیز نشان داده شده است. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ aOba و aIba در یک ضلع مشترک‌اند و سه زاویهٔ مساوی دارند، پس متشابه‌اند؛ بنابراین اضلاع افقی آنها برابر است، یعنی

$$Ib = Ob \qquad (۳۴-۱)$$



شکل ۳۴-۳ دو پرتو انتخاب شده از شکل ۳۴-۲، پرتو Oa زاویهٔ دلخواه θ را با عمود بر سطح آینه می‌سازد. پرتو Ob بر آینه عمود است.

که در آن Ib و Ob به ترتیب فاصلهٔ تصویر و شیء از آینه‌اند. از معادلهٔ ۳۴-۱ معلوم است که تصویر در فاصله‌ای در پشت آینه قرار دارد که جسم هم در همان فاصله در جلوی آینه واقع است. بنابر قرارداد (یعنی برای استفاده از معادله‌ها در حل مسئله‌ها) **فاصله‌های شیئی** p کمیتهای مثبت و **فاصله‌های تصویری** i برای تصویر مجازی (مانند اینجا) کمیتهای منفی در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین، معادلهٔ ۳۴-۱ را می‌توان به صورت $|i| = p$ یا به این صورت نوشت

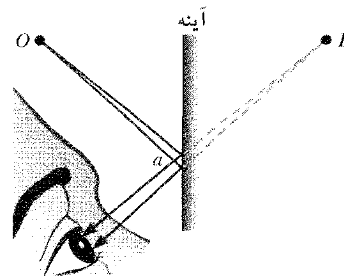
(۳۴-۲) (آینهٔ تخت) $i=-p$

فقط پرتوهایی که خیلی نزدیک به یکدیگرند می‌توانند پس از بازتاب از یک آینه وارد چشم شوند. برای موقعیت نشان داده شده در شکل ۳۴-۳، فقط بخش کوچکی از آینه در نزدیکی نقطهٔ a (بخشی که کوچکتر از مردمک چشم است) در تشکیل تصویر مفید است. برای پیدا کردن این بخش، یک چشم را ببندید، به تصویر آینه‌ای یک شیء کوچک مانند نوک یک مداد نگاه کنید. سپس انگشت خود را در سطح آینه حرکت دهید تا اینکه تصویر دیده نشود. فقط آن بخش کوچک از آینه که در زیر انگشت قرار دارد تصویر را ایجاد کرده است.

اشیای گسترده

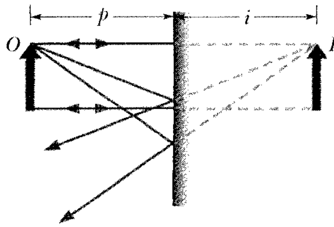
در شکل ۳۴-۵، شیء گستردهٔ O، که با پیکانی رو به بالا نشان داده شده است، در فاصلهٔ عمودی p در جلوی یک آینهٔ تخت قرار دارد. هر بخش کوچکی از شیء که در مقابل آینه قرار گیرد مانند یک چشمهٔ نقطه‌ای O شکلهای ۳۴-۲ و ۳۴-۳ عمل می‌کند. اگر نور بازتابیده از آینه به ما برسد تصویر مجازی I مشاهده خواهد شد که ترکیبی از تصویرهای نقطه‌ای مجازی تمام نقطه‌های شیء است. به نظر می‌رسد که این تصویر مجازی در فاصلهٔ (منفی) I در پشت آینه قرار دارد. فاصله‌های i و p به وسیلهٔ معادلهٔ ۳۴-۲ به هم مربوط‌اند.

محل تصویر یک شیء گسترده را نیز می‌توان مانند یک شیء نقطه‌ای در شکل ۳۴-۲ تعیین کرد: چند پرتو از پرتوهایی که از بالای شیء به آینه می‌رسند و پرتوهای بازتابیدهٔ متناظر را رسم می‌کنیم و سپس این پرتوهای بازتابیده را در عقب آینه امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را قطع کنند و تصویر بالای شیء را



شکل ۳۴-۴ باریکه‌ای از پرتوهای فرودی از O پس از بازتاب از آینه وارد چشم می‌شوند. فقط بخش کوچکی از آینه در نزدیکی a در این بازتاب سهیم است. به نظر می‌رسد که نور از نقطهٔ I در پشت آینه سرچشمه گرفته است.

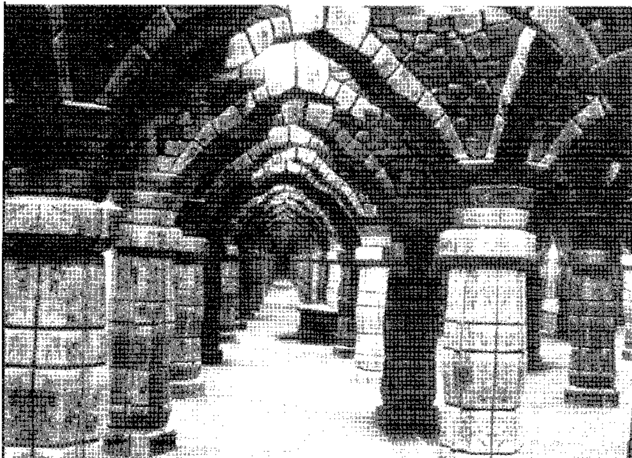
تشکیل دهند. سپس همین کار را برای پرتوهای پایین شیء انجام می‌دهیم. همانطور که در شکل ۳۴-۵ نشان داده شده است، معلوم می‌شود که تصویر مجازی I همان سمتگیری و *ارتفاع* (که موازی با آینه اندازه‌گیری می‌شود) شیء را دارد.



شکل ۳۴-۵ شیء گستردهٔ O و تصویر مجازی آن I در یک آینهٔ تخت.

هزارتوی آینه‌ای

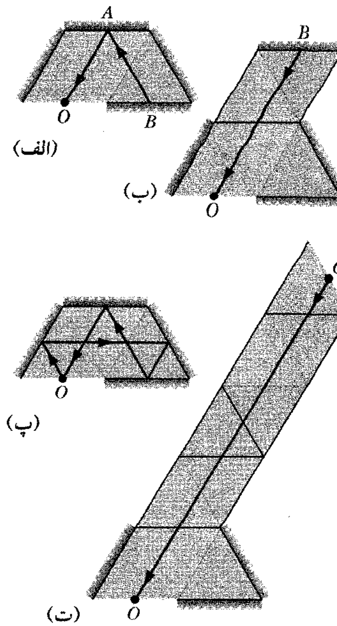
در یک هزارتوی آینه‌ای (شکل ۳۴-۶)، هر دیواری از کف تا سقف با آینه پوشانده شده است. با قدم زدن در چنین هزارتویی آنچه دیده می‌شود ترکیب اغوا کننده بازتابهای نور در همهٔ جهتهاست. ولی در هر جهتی تالاری دیده می‌شود که مسیری از هزارتو را نشان می‌دهد. با بررسی این تالارها درمی‌یابیم که پس از برخورد با آینه پس از آینهٔ دیگر، تالارها به طور غیرواقعی بزرگ هستند.



شکل ۳۴-۶ هزارتوی آینه‌ها

شکل ۳۴-۷ الف دید از بالای یک هزارتوی آینه‌ای ساده است که در آن کف به صورت بخش‌هایی با مثلث متساوی الاضلاع (زاویهٔ °۶۰) به صورتهای مختلف رنگ‌آمیزی و دیواره‌ها با آینه‌های قائم پوشانده شده‌اند. در حالی که در نقطهٔ O وسط ورودی هزارتو ایستاده‌اید به داخل آن نگاه می‌کنید. ولی، در جهت پرتوی که در شکل ۳۴-۷ الف نشان داده شده است چیز عجیبی مشاهده می‌کنید. این پرتو وسط آینهٔ B را ترک می‌کند و پس از بازتاب از وسط آینهٔ A به سمت شما می‌آید. (بازتاب از قانون بازتاب پیروی می‌کند که در اینجا هر دو زاویهٔ فرودی و بازتاب یکسان و برابر °۳۰ است.)

برای پی بردن به منشأ پرتوی که به شما رسیده است، مغز به طور خودکار پرتو را به عقب امتداد می‌دهد. به نظر می‌رسد که پرتو از نقطه‌ای که در پشت آینهٔ A قرار دارد سرچشمه گرفته است. یعنی شما تصویر B، پشت A را در فاصله‌ای برابر با

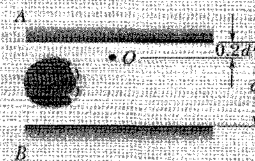


شکل ۳۴-۷ (الف) دید از بالای یک هزارتوی آینه‌ای. پرتوی از B پس از بازتاب از آینهٔ A در O به شما می‌رسد. (ب) به نظر می‌رسد که آینهٔ B در پشت آینهٔ A قرار دارد. (پ) پرتوی از شما که به شما می‌رسد. (ت) تصویر مجازی خود را در انتهای مسی ظاهری می‌بینید.

فاصلهٔ واقعی بین A ، B دریافت می‌کنید (شکل ۳۴-۷ب). به این ترتیب، وقتی در این جهت در مقابل هزارتو قرار می‌گیرید. به نظر شما B در امتداد مسیر مستقیم ظاهری که شامل چهار قسمت مثلثی در کف است قرار دارد.

ولی این تمام داستان نیست، چون پرتوهایی که به شما می‌رسند از آینهٔ B سرچشمه نگرفته‌اند- در آنجا فقط بازتاب کرده‌اند. برای یافتن منشأ، قانون بازتاب را به صورت بازتاب پس از بازتاب روی آینه‌ها به کار می‌بریم. پس از چهار بازتاب نشان داده شده در شکل ۳۴-۷ پ، سرانجام به منشأ پرتو می‌رسیم، یعنی خود شما! چیزی که در امتداد مسیر ظاهری می‌بینید تصویر مجازی خود شماست که در فاصلهٔ نه مثلث روی کف از شما قرار دارد، (۳۴-۷ت). (مسیر ظاهری دیگری وجود دارد که از نقطهٔ O ادامه یافته است. در کدام راه باید قرار گیرید تا در امتداد آن نگاه کنید؟)

نکتهٔ وارسی ۱ در این شکل شما در دستگاهی شامل دو آینهٔ قائم و موازی A ، B به فاصلهٔ d از یکدیگر، قرار دارید. شیئی در نقطهٔ O به فاصلهٔ $0/2d$ از آینهٔ A قرار دارد. هر آینه نخستین (در کمترین عمق) تصویر شیء را ایجاد می‌کند. سپس هر یک از آینه‌ها دومین تصویر را از شیء که نخستین تصویر در آینهٔ دیگر بوده است تشکیل می‌دهد. سپس هر آینه سومین تصویر شیء را که دومین تصویر در آینهٔ مقابل بوده است تشکیل می‌دهد- به همین ترتیب صدها تصویر را می‌توان دید. در چه عمقی پشت آینهٔ A تصویرهای اول، دوم و سوم در آینهٔ A قرار دارند؟

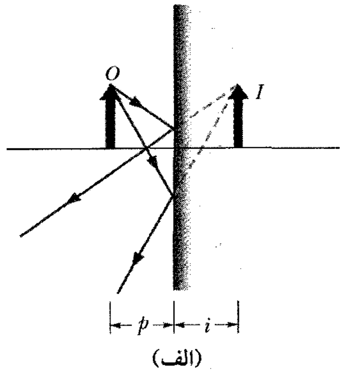


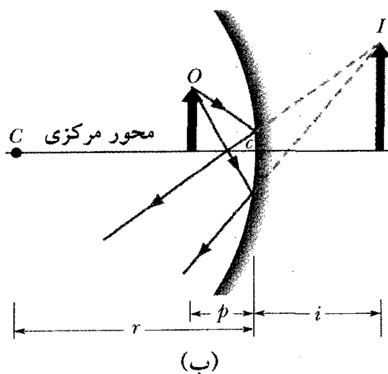
۳۴-۴ آینه‌های کروی

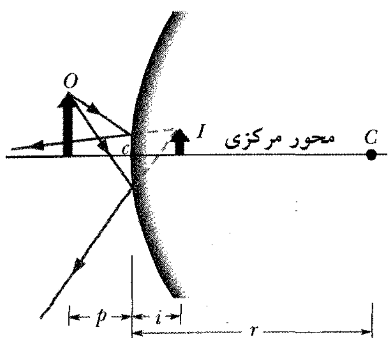
اکنون به جای تصویرهای ایجاد شده به وسیلهٔ آینه‌های تخت تصویرهای ایجاد شده به وسیلهٔ آینه‌هایی را که سطح خمیده دارند در نظر می‌گیریم. به ویژه، آینه‌های کروی را بررسی می‌کنیم که از نظر شکل بخش کوچکی از سطح یک کره هستند. آینهٔ تخت در واقع یک آینهٔ کروی با *شعاع انحنای* بینهایت بزرگ است و بنابراین تقریباً یک سطح مسطح است.

ساخت آینه‌های کروی

با آینهٔ تخت شکل ۳۴-۸ الف شروع می‌کنیم که رو به طرف چپ به طرف شیء O است که در شکل نشان داده شده و ناظری که در شکل نشان داده نشده است. برای ساختن یک **آینهٔ کاو** سطح آینه را خم می‌کنیم تا مانند شکل ۳۴-۸ ب به صورت کاو (گود شده به داخل) درآید. خم کردن سطح به این روش چند مشخصهٔ آینه و تصویری را که از شیء ایجاد می‌کند تغییر می‌دهد:







شکل ۳۴-۸ (الف) شیء O یک تصویر مجازی I در آینهٔ تخت تشکیل می‌دهد. (ب) اگر آینه طوری خم شود که به صورت **کاو** درآید، تصویر دورتر می‌رود و اندازهٔ تصویر بزرگتر می‌شود. (پ) اگر آینهٔ تخت طوری خم شود که به صورت **کوژ** درآید، تصویر نزدیکتر می‌آید و اندازهٔ آن کوچکتر می‌شود.

۱- *مرکز انحنای* C (مرکز کره که سطح آینه بخشی از آن است) که در فاصلهٔ بینهایت دور از آینهٔ تخت قرار داشت، نزدیکتر آورده شده است ولی هنوز در جلوی آینهٔ کاو قرار دارد.
۲- *میدان دید*- محدوده‌ای که به طرف ناظر بازتابیده می‌شد وسیع بود؛ ولی اکنون کوچکتر است.
۳- تصویر شیء که در جلوی آینه بود در همان فاصله پشت آینه قرار داشت؛ تصویر خیلی دورتر در پشت آینهٔ کاو قرار دارد؛ یعنی، $|i|$ بزرگتر است.
۴- ارتفاع تصویر برابر با ارتفاع شیء بود ولی اکنون ارتفاع تصویر بزرگتر است. به علت همین ویژگی است که بسیاری از آینه‌های مورد استفاده در اصلاح و آرایش کاو ساخته می‌شوند- زیرا تصویر بزرگتری از صورت به دست می‌دهند.

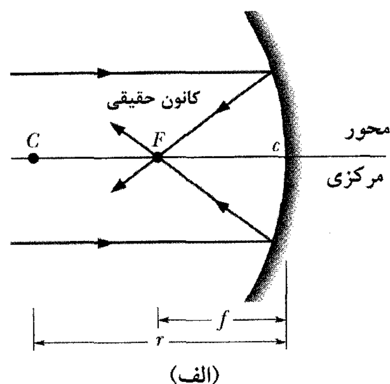
آینهٔ کوژ را می‌توان با خم کردن سطح آینهٔ تخت مانند شکل ۳۴-۷ پ به صورت کوژ خم شده به خارج درآورد. خم کردن سطح به این روش (۱) مرکز انحنای C را به پشت آینه منتقل می‌کند و (۲) میدان دید را افزایش می‌دهد. هم‌چنین (۳) تصویر شیء به آینه نزدیکتر و (۴) اندازهٔ آن کوچکتر می‌شود. آینه‌های نظارتی فروشگاهها برای استفاده از مزیت میدان دید بزرگتر، معمولاً کوژ هستند- تا فضای بیشتری از فروشگاه با یک آینهٔ تنها دیده شود.

کانونهای آینه‌های کروی

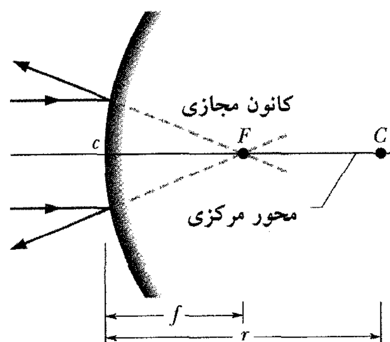
برای آینهٔ تخت، بزرگی فاصلهٔ تصویر I همیشه برابر با بزرگی فاصلهٔ شیء p است. پیش از اینکه ارتباط این دو فاصله را در آینهٔ کروی به دست آوریم، بازتاب نور از شیء O را که در فاصلهٔ بینهایت دور در جلوی یک آینهٔ کروی و روی محور مرکزی آینه قرار دارد بررسی می‌کنیم. این محور از مرکز انحنای C و مرکز آینه c می‌گذرد. به دلیل فاصلهٔ زیاد بین شیء و آینه، موجهای نوری گسترده شده از شیء به هنگام رسیدن به آینه در راستای این محور، موجهای تخت هستند. این بدان معناست که پرتوهای نشان‌دهندهٔ موجهای نور به هنگام رسیدن به آینه همه موازی محور مرکزی‌اند.

هنگامی که این پرتوهای موازی به یک آینهٔ کاو، مانند آینهٔ شکل ۳۴-۹ الف می‌رسند، آنهایی که به محور مرکزی نزدیک‌اند پس از بازتاب از نقطهٔ مشترک F می‌گذرند؛ دو تا از این پرتوهای بازتابیده در شکل نشان داده شده‌اند. اگر در F کاغذی (کوچک) قرار دهیم، یک تصویر نقطه‌ای از شیء بینهایت دور روی کاغذ ظاهر می‌شود. (این برای هر شیء واقع در بینهایت دور رخ می‌دهد.) نقطهٔ F **نقطهٔ کانونی** (یا **کانون**) آینه نامیده می‌شود. فاصلهٔ این نقطه از مرکز آینه **فاصلهٔ کانونی** f است.

اگر به جای آینهٔ کاو آینهٔ کوژ به کار بریم، درمی‌یابیم که پرتوهای موازی دیگر به طرف یک نقطهٔ مشترک بازتابیده نمی‌شوند، بلکه همانند شکل ۳۴-۹ ب واگرا می‌شوند. با وجود



(الف)



(ب)

شکل ۳۴-۹ (الف) در آینهٔ کاو پرتوهای فرودی نور موازی در کانون حقیقی F، در همان طرفی از آینه که پرتوهای نور قرار دارند، متمرکز می‌شوند. (ب) در آینهٔ کوژ، پرتوهای فرودی نور موازی به نظر می‌رسند که از کانون مجازی F واقع از طرفی از آینه که مقابل پرتوهای نور است واگرا می‌شوند.

این اگر چشم مقداری از نور بازتابیده را قطع کند، چنین به نظر می‌رسد که نور از نقطه‌ای در پشت آینه سرچشمه گرفته است. این چشمه در جایی دیده می‌شود که امتداد پرتوهای بازتابیده از آن نقطهٔ مشترک می‌گذرند (F در شکل ۳۴-۹ ب). این نقطه برای آینهٔ کوژ نقطهٔ کانونی (یا کانون) F است و فاصلهٔ آن از سطح آینه فاصلهٔ کانونی f آینه نامیده می‌شود. اگر کاغذی را در این نقطهٔ کانونی قرار دهیم، تصویر شیء O روی کاغذ تشکیل *نمی‌شود*، پس این نقطهٔ کانونی مانند همان نقطهٔ کانونی در یک آینهٔ کاو نیست.

برای متمایز کردن نقطهٔ کانونی واقعی یک آینهٔ کاو از نقطهٔ کانونی یک آینهٔ کوژ، اولی را **نقطهٔ کانونی** *حقیقی* و دومی را **نقطهٔ کانونی** *مجازی* می‌نامند. افزون بر این، فاصلهٔ کانونی f آینهٔ کاو یک کمیت مثبت و در مورد آینهٔ کوژ یک کمیت منفی در نظر گرفته می‌شود. در مورد هر دوی این آینه‌ها، فاصلهٔ کانونی f با شعاع انحنای r آینه این رابطه را دارد

$$f=\frac{1}{2}r \qquad \text{(آینهٔ کروی)} \quad (۳۴-۳)$$

که سازگار با علامتها برای فاصلهٔ کانونی، r برای آینهٔ کاو یک کمیت مثبت و برای آینهٔ کوژ یک کمیت منفی است.

۵-۳۴ تصویر در آینه‌های کروی

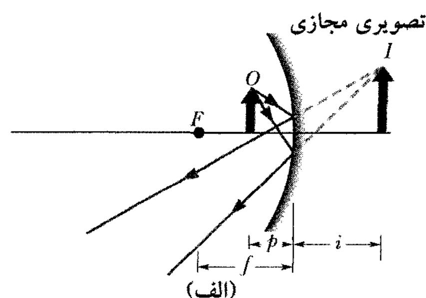
وقتی نقطهٔ کانونی در آینهٔ کروی تعریف شد، می‌توان رابطهٔ بین فاصلهٔ تصویر i و فاصلهٔ شیء p را برای آینه‌های کاو و کوژ به دست آورد. با قرار دادن شیء O در فاصلهٔ کانونی آینهٔ کاو یعنی بین آینه و نقطهٔ کانونی F آن موضوع را شروع می‌کنیم (شکل ۳۴-۱۰الف). در این صورت ناظر می‌تواند یک تصویر مجازی از O در آینه ببیند: تصویر در پشت آینه به نظر می‌رسد و همان سمتگیری شیء را دارد.

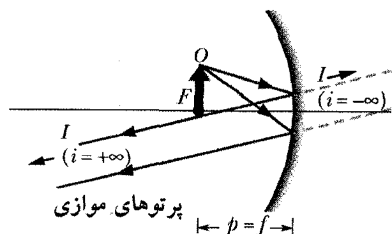
حال اگر شیء را از آینه دور کنیم تا به نقطهٔ کانونی برسد، تصویر در پشت آینه دورتر و دورتر می‌شود، و وقتی شیء به نقطهٔ کانونی رسید، تصویر در بینهایت است، (شکل ۳۴-۱۰ب). در این صورت تصویر مبهم و غیر قابل درک می‌شود چون نه پرتوهایی که از آینه بازتابیده شده‌اند و نه امتداد آنها در پشت آینه برای تشکیل تصویر O یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

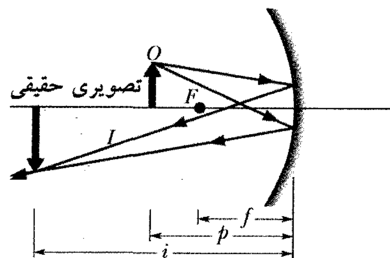
حال اگر شیء به *خارج از نقطهٔ کانونی* حرکت کند- یعنی دورتر از نقطهٔ کانونی نسبت به آینه- پرتوهای بازتابیده همگرا می‌شوند و تصویر وارونه‌ای از شیء O (شکل ۳۴-۱۰پ) در جلوی آینه تشکیل می‌شود. وقتی شیء از F دورتر شود، تصویر از بینهایت به داخل حرکت می‌کند. اگر کاغذی را در محل تصویر بگیریم، تصویر روی کاغذ نشان داده می‌شود- گفته می‌شود که تصویر به وسیلهٔ آینه روی کاغذ *کانونی شده* است. (فعل «کانونی شدن» که در اینجا به معنی ایجاد تصویر است با اسم «کانون» که اسم دیگری برای نقطهٔ کانونی است تفاوت دارد.) چون این تصویر در واقع روی یک سطح ظاهر می‌شود، یک تصویر حقیقی است- پرتوها در واقع بدون توجه به اینکه ناظری وجود دارد یا نه، برای ایجاد تصویر یکدیگر را قطع می‌کنند. فاصلهٔ تصویر i برای یک تصویر حقیقی بر خلاف یک تصویر مجازی، مثبت است. همچنین می‌توان دید:

> تصویرهای حقیقی در همان طرفی از آینه که شیء وجود دارد و تصویرهای مجازی در طرف دیگر تشکیل می‌شوند.

همانطور که در بخش ۳۴-۹ اثبات خواهیم کرد، هرگاه پرتوهای نور که از شیء می‌آیند فقط زاویه‌های کوچکی با محور مرکزی یک آینهٔ کروی بسازند، یک معادلهٔ ساده فاصلهٔ شیء p فاصلهٔ تصویر i و فاصلهٔ کانونی f را به هم ارتباط می‌دهد.







شکل ۳۴-۱۰ (الف) شیء O در فاصلهٔ کانونی یک آینه کاو و تصویر مجازی آن I. (ب) شیء در نقطهٔ کانونی F. (پ) شیء در خارج فاصلهٔ کانونی و تصویر حقیقی I.

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f} \qquad \text{(۳۴-۴) (آینهٔ کروی)}$$

ما در شکلهایی نظیر شکل ۳۴-۱۰ زاویه‌ها را چنین کوچک در نظر می‌گیریم، ولی برای روشنی پرتوها با زاویه‌هایی بزرگتر از اندازهٔ واقعی رسم شده‌اند. با این فرض معادلهٔ ۳۴-۴ برای هر آینهٔ کاو، کوژ یا تخت برقرار است. برای آینهٔ کوژ یا تخت، بدون توجه به مکان شیء روی محور مرکزی، فقط تصویر مجازی تشکیل می‌شود. همانطور که در مثالی از آینهٔ کاو در شکل ۳۴-۸ پ نشان داده شده، همواره تصویر در طرف مقابل آینه از شیء واقع است و همان سمتگیری شیء را دارد.

اندازهٔ شیء یا تصویر که عمود بر محور مرکزی آینه در نظر گرفته می‌شود، *ارتفاع* شیء یا تصویر نامیده می‌شود. h را ارتفاع شیء و h' را ارتفاع تصویر در نظر می‌گیریم. نسبت h/h' را **بزرگنمایی خطی** m می‌نامند که به وسیلهٔ آینه ایجاد شده است. بنابر قرارداد، هرگاه سمتگیری تصویر مانند شیء باشد، علامت بزرگنمایی خطی همواره با علامت مثبت و هرگاه سمتگیری تصویر مخالف شیء باشد علامت آن منفی در نظر گرفته می‌شود. به این دلیل فرمول m را به این صورت می‌نویسیم

$$|m|=\frac{h'}{h} \qquad \text{(۳۴-۵) (بزرگنمایی خطی)}$$

به زودی اثبات می‌کنیم که بزرگنمایی خطی را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$m=-\frac{i}{p} \qquad \text{(۳۴-۶) (بزرگنمایی خطی)}$$

برای آینهٔ تخت که در آن $i=-p$ است، داریم $m=+1$. بزرگنمایی ۱ بدان معناست که تصویر همان بزرگی شیء را دارد. علامت مثبت بدان معناست که سمتگیری تصویر و شیء

یکسان است. در مورد آینهٔ کاو شکل ۳۴-۱۰پ، $m=-1/5$ است.

معادله‌های ۳۴-۳ تا ۳۴-۶ برای تمام آینه‌های تخت، آینه‌های کروی کاو و آینه‌های کروی کوژ برقرار است. افزون بر این

جدول ۳۴-۱

ساماندهی آینه‌ها

نوع آینه	محل شیء	تصویر	علامت
		محل. نوع. سمتگیری	f r. m
تخت	در هر کجا		
کاو	داخل F		
	خارج F		
کوژ	در هر کجا		

معادله‌ها، برای کسب اطلاعات بیشتر دربارهٔ این آینه‌ها می‌توانید جدول ۳۴-۱ را پر کنید. در مورد مکان تصویر توجه کنید که آیا تصویر و شیء در *یک طرف* آینه قرار دارند یا در *دو طرف* آینه‌اند. در مورد نوع تصویر، توجه کنید که آیا تصویر *حقیقی* است یا *مجازی*. در مورد سمتگیری تصویر، توجه کنید که آیا تصویر همان سمتگیری شیء را دارد یا *وارونه* است. در مورد علامت، علامت کمیت را بنویسید و اگر علامت کمیتی مبهم باشد علامت $\pm$ را قرار دهید. برای حل مسائل و تمرینها به این ساماندهی نیاز خواهید داشت.

تعیین تصویر با استفاده از رسم پرتوها

شکلهای ۳۴-۱۱ الف و ب شیء O را در مقابل یک آینهٔ کاو نشان می‌دهد. می‌توانیم به طور نموداری محل تصویر هر نقطهٔ خارج از محور شیء را با رسم یک نمودار پرتوی با هر دو پرتو از چهار پرتو خاصی که از آن نقطه می‌گذرد، تعیین کنیم.

۱- پرتوی که در آغاز با محور مرکزی موازی باشد، پس از بازتاب از نقطهٔ کانونی F می‌گذرد (پرتو ۱ در شکل ۳۴-۱۱الف)

۲- پرتوی که پس از گذشتن از نقطهٔ کانونی از آینه بازتاب کند، موازی با محور مرکزی حرکت می‌کند (پرتو ۲ در شکل ۳۴-۱۰الف).

۳- پرتوی که پس از گذشتن از مرکز انحنای C از آینه بازتاب کند، در راستای خود حرکت می‌کند (پرتو ۳ در شکل ۳۴-۱۰ب).

۴- پرتوی که از نقطهٔ برخوردش c با محور مرکزی از آینه بازتاب کند به طور متقارن نسبت به این محور بازتابیده می‌شود (پرتو ۴ در شکل ۳۴-۱۱ب)

تصویر نقطه در محل تقاطع دو پرتو خاصی که انتخاب کرده‌ایم قرار دارد. بنابراین می‌توان تصویر شیء را با معین کردن تصویرهای دو یا چند نقطه خارج از محور پیدا کرد. برای اعمال این قاعده‌ها در مورد آینه‌های کوژ، مانند شکلهای ۳۴-۱۱پ و ت، این توصیفها نیاز به اندکی تغییر دارند.

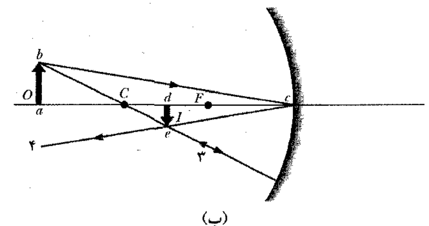
اثبات معادلهٔ ۳۴-۶

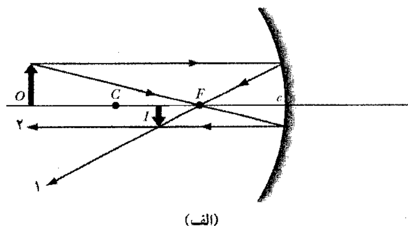
اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم معادلهٔ ۳۴-۶ $(m=-i/p)$، عبارت مربوط به بزرگنمایی خطی شیء را که در آینه بازتابیده شده است به دست آوریم. پرتو ۴ را در شکل ۳۴-۱۱ ب در نظر می‌گیریم. این پرتو از نقطهٔ c بازتابیده شده است به صورتی که پرتوهای فرودی و بازتابیده با محور آینه در این نقطه زاویه‌های مساوی می‌سازند.

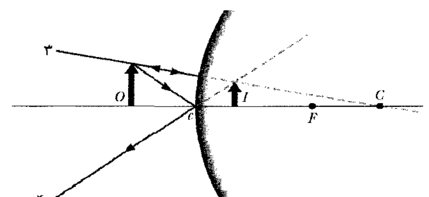
دو مثلث قائم‌الزاویهٔ abc , edc در شکل متشابه‌اند (دارای زاویه‌های یکسانی هستند)، پس می‌توان نوشت

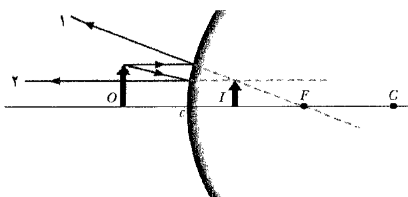
$$\frac{de}{ab}=\frac{cd}{ca}$$

کمیت سمت چپ (بدون در نظر گرفتن علامت) بزرگنمایی خطی m حاصل از آینه است. چون تصویر وارونه با بزرگنمایی









شکل ۳۴-۱۱ (الف و ب) چهار پرتو که برای یافتن تصویر یک شیء در آینهٔ کاو می‌توان از آنها استفاده کرد. برای محل نشان داده شدهٔ شیء، تصویر حقیقی، وارونه و کوچکتر از شیء است. (پ و ت) چهار پرتو مشابه برای یک آینهٔ کوژ. در مورد آینهٔ کوژ تصویر همیشه مجازی، هم‌جهت با شیء و کوچکتر از آن است. [در (پ) پرتو ۲ در ابتدا به طرف نقطهٔ کانونی F است. در (ت) پرتو ۳ در ابتدا به سمت مرکز انحنای C است.]

منفی مشخص می‌شود، این را با $-m$ نمایش می‌دهیم. ولی $cd=i$ و $ca=p$، پس خواهیم داشت

$$m=-\frac{i}{p} \qquad \text{(۳۴-۷) (بزرگنمایی)}$$

که همان رابطه‌ای است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

✔ **نکتهٔ وارسی ۲** شیئی که روی محور مرکزی یک آینهٔ کروی قرار دارد دارای بزرگنمایی $m=-4$ است. آیا تصویر (الف) حقیقی است یا مجازی، (ب) مستقیم است یا وارونه و (پ) در همان طرفی است که شیء قرار دارد یا در پشت آینه است؟

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۴-۱

رتیلی به ارتفاع h به طور محتاطانه در مقابل یک آینهٔ کروی که فاصلهٔ کانونی آن دارای مقدار مطلق $|f|=40\,cm$ است قرار دارد. سمتگیری تصویر ایجاد شده با رتیل یکی است و ارتفاع آن $h'=0/20h$ است.

(الف) آیا تصویر حقیقی است یا مجازی و آیا در جلوی آینه قرار دارد یا در پشت آن؟ (ب) آیا آینه کاو است یا کوژ، فاصلهٔ کانونی f چقدر است و علامت آن چیست؟

استدلال: چون تصویر همان سمتگیری رتیل (شیء) را دارد لذا باید مجازی و در پشت آینه باشد. (اگر جدول ۳۴-۱ را پر کرده باشید این را به آسانی می‌توانید ببینید.)

(ب) آیا آینه کاو است یا کوژ، فاصلهٔ کانونی f چقدر است و علامت آن چیست؟

نکتهٔ کلیدی از نوع تصویر *نمی‌توانیم* نوع آینه را مشخص کنیم چون هر دو نوع آینه می‌توانند تصویر مجازی ایجاد کنند. به همین ترتیب، از علامت فاصلهٔ کانونی f همانطور که از معادله‌های ۳۴-۳ و ۳۴-۴ به دست آمد نمی‌توانیم نوع آینه را مشخص کنیم چون اطلاعات کافی نداریم که از کدام معادله استفاده کنیم. با وجود این، می‌توانیم از اطلاعات مربوط به بزرگنمایی استفاده کنیم.

محاسبه‌ها: می‌دانیم که نسبت ارتفاع تصویر h' به ارتفاع شیء h برابر ۰/۲۰ است. بنابراین، از معادلهٔ ۳۴-۵ داریم

$$|m|=\frac{h'}{h}=0/20$$

چون شیء و تصویر یک سمتگیری دارند، m باید مثبت باشد: $m=+0/20$. با قرار دادن این در معادلهٔ ۳۴-۶ و حل آن، مثلاً، برای i به دست می‌دهد.

$$i=-0/20\,p$$

که برای پیدا کردن f کمکی نمی‌کند. ولی اگر در معادلهٔ ۳۴-۴ قرار دهیم مفید خواهد بود. از این معادله داریم

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{i}+\frac{1}{p}=-\frac{1}{0/20\,p}+\frac{1}{p}=\frac{1}{p}(-5+1)$$

که به دست دهد

$$f=-\frac{p}{4}$$

اکنون چون p مثبت است، f باید منفی باشد که بدین معنی است که آینه کوژ است و

$$f=-40\,cm \qquad \text{(پاسخ)}$$

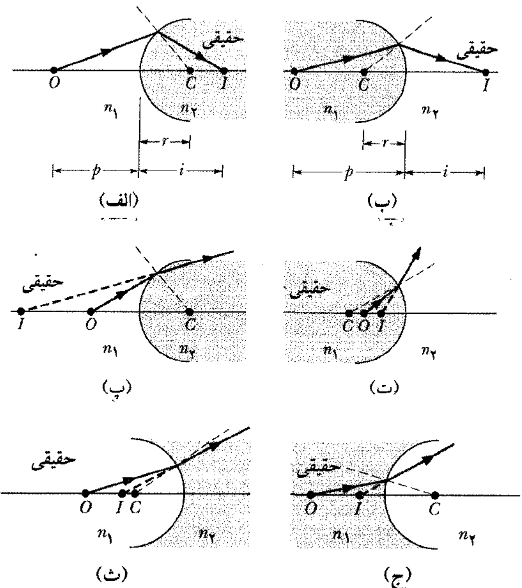
۳۴-۶ سطحهای شکنندهٔ کروی

اکنون پس از تصویرهای تشکیل شده به وسیلهٔ بازتابها، به تصویرهای تشکیل شده به وسیلهٔ شکست از سطحهای مواد شفاف مانند شیشه می‌پردازیم. فقط سطحهای کروی به شعاع انحنای r و مرکز انحنای C را در نظر می‌گیریم. نور به وسیلهٔ یک شیء نقطه‌ای O در محیطی با ضریب شکست n_1 گسیل و از یک سطح کروی به داخل محیطی با ضریب شکست n_2 شکسته می‌شود.

به چگونگی تشکیل تصویر حقیقی (بدون نیاز به ناظر) یا تصویر مجازی (با فرض اینکه ناظر در مسیر پرتوها قرار دارد) پس از شکست پرتوهای نور در سطح خواهیم پرداخت. پاسخ به مقدارهای نسبی n_1 و n_2 و به هندسهٔ وضعیت بستگی دارد.

شش نتیجهٔ ممکن در شکل ۳۴-۱۲ نشان داده شده است. در هر قسمت از شکل، محیطی که ضریب شکست بیشتری دارد با سایه نمایش داده شده است و شیء O همواره در محیط با ضریب شکست n_1 در سمت چپ سطح شکننده قرار دارد. در هر قسمت یک پرتو نماینده که در سطح شکسته می‌شود نشان داده شده است. (این پرتو و پرتوی که در راستای محور مرکزی می‌تابد برای تعیین محل تصویر در هر مورد کافی است.)

در نقطهٔ شکست هر پرتو، عمود بر سطح شکننده یک خط شعاعی است که از مرکز انحنای C می‌گذرد. به دلیل شکست، اگر پرتو وارد محیطی با ضریب شکست بزرگتر شود به خط عمود نزدیک و اگر وارد محیطی با ضریب شکست کوچکتر شود از خط عمود دور می‌شود. اگر پرتو شکسته در راستای محور مرکزی باشد، این پرتو و پرتوهای دیگر (رسم نشده‌اند) روی این محور یک تصویر حقیقی تشکیل می‌دهند. اگر پرتو شکسته از محور مرکزی دور شود این پرتو نمی‌تواند یک تصویر حقیقی تشکیل دهد، ولی امتداد آن به عقب و پرتوهای شکستهٔ دیگر می‌توانند یک تصویر مجازی تشکیل دهند، مشروط بر آنکه تعدادی از پرتوها (مانند آینه‌ها) به چشم ناظر برسند.



شکل ۳۴-۱۲ شش راه ممکن که در آن به وسیلهٔ شکست از یک سطح کروی به شعاع r و مرکز انحنای C تصویر تشکیل می‌شود. این سطح محیط با ضریب شکست n_1 را از محیط با ضریب شکست n_2 جدا می‌کند. شیء نقطه‌ای O همواره در محیط n_1 در سمت چپ سطح قرار دارد. ماده با ضریب شکست کمتر بدون سایه است (تصور کنید این ماده مانند هوا و مادهٔ دیگر مانند شیشه باشد.) در (الف) و (ب) تصویرهای حقیقی تشکیل می‌شود؛ در چهار وضعیت دیگر تصویرها مجازی‌اند.

در قسمتهای (الف) و (ب) شکل ۳۴-۱۲ تصویرهای حقیقی I (در فاصلهٔ تصویری i) تشکیل شده‌اند که در آنها جهت شکست پرتوها به طرف محور مرکزی است. تصویرهای مجازی در قسمتهای پ و ت تشکیل شده‌اند، که در آنها شکست پرتوها در جهت *دور شدن* از محور مرکزی است. توجه کنید که در این چهار قسمت، وقتی شیء از سطح شکست‌دهنده دور است، تصویر حقیقی تشکیل می‌شود و وقتی که شیء به سطح شکست‌دهنده نزدیکتر است، تصویر مجازی تشکیل می‌شود. در وضعیتهای آخر (شکل ۳۴-۱۲ث و ج) پرتو شکسته همواره از محور مرکزی دور می‌شود و بدون توجه به فاصلهٔ شیء همواره تصویر مجازی تشکیل می‌شود.

به تفاوت مهم زیر از تصویرهای بازتابیده توجه کنید:

> تصویرهای حقیقی در طرف مقابل با شیء در یک سطح شکست‌دهنده تشکیل می‌شوند ولی تصویرهای مجازی در همان طرف شیء تشکیل می‌شوند.

در بخش ۳۴-۹ (برای پرتوهای نوری که فقط زاویه‌های کوچک با محور مرکزی می‌سازند) نشان خواهیم داد که

$$\frac{n_1}{p}+\frac{n_2}{i}=\frac{n_2-n_1}{r} \qquad (۳۴\text{-}۸)$$

درست مانند آینه‌ها، برای تصویر حقیقی فاصلهٔ شیئی p مثبت و فاصلهٔ تصویری I مثبت و برای تصویر مجازی منفی است. با وجود این، برای اینکه علامتها در معادلهٔ ۳۴-۸ درست باشند، قاعدهٔ زیر را برای علامت شعاع انحنای r به کار می‌بریم:

> هرگاه شیئی مقابل یک سطح شکست‌دهنده کوژ قرار گیرد، شعاع انحنای r مثبت است و هرگاه مقابل سطح کاو باشد، r منفی است.

توجه کنید: این درست عکس قرارداد علامتها برای آینه‌هاست.

> ✔ ***نکتهٔ وارسی ۳*** یک زنبور در مقابل یک سطح شکنندهٔ کروی یک مجسمهٔ شیشه‌ای پر می‌زند. (الف) کدامیک از وضعیتهای کلی شکل ۳۴-۱۱ مشابه این وضعیت است؟ (ب) آیا تصویر ایجاد شده به وسیلهٔ این سطح حقیقی است یا مجازی و آیا در همان طرف زنبور است یا در طرف مقابل آن؟

مسئلهٔ نمونه ۳۴-۲

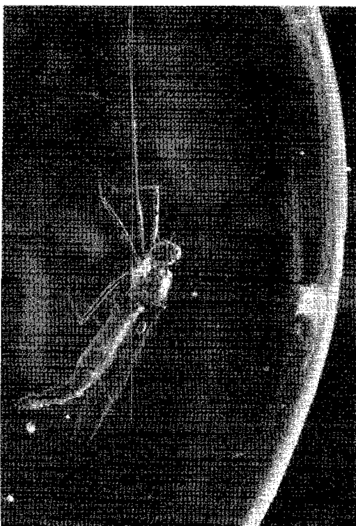
یک پشهٔ مربوط به دوران ژوراسیک در تکه‌ای کهربا با ضریب شکست ۱/۶ کشف شده است. یک سطح این کهربا کروی شکل و کوژ و شعاع انحنای آن ۳/۰ mm است. (شکل ۳۴-۱۳). سر این پشه روی محور مرکزی آن سطح قرار دارد و وقتی در راستای این محور به آن نگاه شود به نظر می‌رسد که ۵/۰ mm در کهربا فرو رفته است. سر پشه در چه فاصله‌ای واقع شده است؟

نکتهٔ کلیدی مشاهده می‌شود سر پشه ۵/۰ mm در داخل کهربا قرار دارد چون پرتوهای نوری که مشاهده می‌شوند از سطح کوژ کهربا شکست یافته‌اند. فاصلهٔ تصویری I بنابر رابطهٔ ۳۴-۸ با فاصلهٔ شیئی p تفاوت دارد. برای به کار بردن این معادله جهت به دست آوردن فاصلهٔ شیء، ابتدا به نکته‌های زیر توجه می‌کنیم:

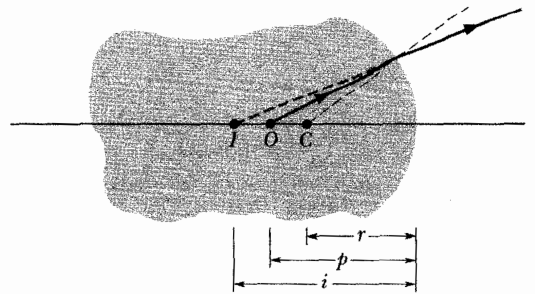
۱- چون شیء (سر پشه) و تصویر آن در یک طرف سطح شکننده قرار دارند، تصویر باید مجازی باشد و بنابراین

$$i=-۵/۰\,\text{mm}$$

۲- چون شیء همواره در محیط با ضریب شکست n_1 قرار دارد، باید داشته باشیم $n_2=۱/۰$, $n_1=۱/۶$



این حشره تقریباً ۲۵ میلیون سال در کهربا مدفون شده است. چون پشه را از میان یک سطح شکنندهٔ خمیده می‌نگریم، تصویری که می‌بینیم بر حشره منطبق نیست، (شکل ۳۴-۱۱ ت).



شکل ۳۴-۱۳ یک قطعه کهربا با پشه‌ای از دوران ژوراسیک که سر آن در نقطهٔ O قرار دارد. سطح شکست‌دهندهٔ کروی در انتهای راست، با مرکز انحنای C، برای ناظری که پرتوهای ناشی از شیء در O را نگاه می‌کند تصویر I را تشکیل می‌دهد.

۳- چون شیء در مقابل یک سطح شکنندهٔ کوژ قرار دارد، شعاع انحنای r منفی است و در نتیجه $r = -۳/۰\,\text{mm}$ است.

محاسبه‌ها: با جایگزینی اینها در معادلهٔ ۳۴-۸ داریم

$$\frac{n_۱}{p} + \frac{n_۲}{i} = \frac{n_۲ - n_۱}{r}$$

که به دست می‌دهد

$$\frac{۱/۶}{p} + \frac{۱/۰}{-۵/۰\,\text{mm}} = \frac{۱/۰ - ۱/۶}{-۳/۰\,\text{mm}}$$

و

$$p = ۴/۰\,\text{mm} \qquad \text{(پاسخ)}$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۴-۳

شکل ۳۴-۱۴ برش عمودی از یک چشم نوعی ماهی را نشان می‌دهد که با یک نیمه چشم در داخل آب و نیمهٔ دیگر چشم در بیرون، با یک نوار رنگدانه‌ای که دو نیمه را در سطح آب از هم جدا می‌کند، مشغول شناست. جلو چشم (قرنیه) یک سطح کروی کوژ شکست‌دهنده با شعاع $r = ۱/۹۵\text{mm}$ و ضریب شکست $n_۲ = ۱/۳۳۵$ قرار دارد. شکست در قرنیه اولین مرحله در کانونی کردن چشم از تصویر حقیقی به پشت چشم (شبکیه) است، جایی که فرایند دیدن شروع می‌شود. اگر قرنیه با حشره‌ای (برای عصرانه) در فاصلهٔ شیئی $p = ۰/۲۰\text{m}$ روبه‌رو شود، فاصلهٔ تصویر i که شکست برای قرنیه در هوا $(n_۱ = ۱/۰۰۰)$ و در آب $(n_۱ = ۱/۳۳۳)$ اتفاق می‌افتد چقدر است؟

نکته‌های کلیدی (۱) چون شیء و تصویر آن در جهت‌های مخالف سطح شکست‌دهنده هستند و طرف کوژ به طرف شیء است، وضعیت شبیه شکل ۳۴-۱۲ الف (در مورد تصویر حقیقی) یا شکل ۳۴-۱۲ پ (در مورد تصویر مجازی) است.
(۲) فاصلهٔ تصویر و شیء با رابطهٔ ۳۴-۸ به هم مربوط‌اند.

محاسبه‌ها: حل معادلهٔ ۳۴-۸ برحسب i به دست می‌دهد،

$$i = \frac{n_۲}{\frac{n_۲ - n_۱}{r} - \frac{n_۱}{p}}$$

قرار دادن مقدارهای داده شده و با استفاده از ضریب شکست $n_۱ = ۱/۰۰۰$ برای هوا داریم:

$$i = \frac{۱/۳۳۵}{\frac{۱/۳۳۵ - ۱/۰۰۰}{۰/۰۰۱۹۵} - \frac{۱/۰۰۰}{۰/۲۰}}$$

$$= ۸/۰۰\text{mm} \qquad \text{(پاسخ)}$$

با تکرار محاسبه ولی با استفاده از ضریب شکست $n_۱ = ۱/۳۳۳$ برای آب داریم

$$i = \frac{۱/۳۳۵}{\frac{۱/۳۳۵ - ۱/۳۳۳}{۰/۰۰۱۹۵} - \frac{۱/۳۳۳}{۰/۲۰}}$$

$$= -۰/۲۳۷\text{m} \qquad \text{(پاسخ)}$$



شکل ۳۴-۱۴ مقطع چشم این نوع ماهی

پس از اینکه نور از قرنیه شکست می‌یابد، سپس توسط یک عدسی شکسته می‌شود که تصویر حقیقی نهایی را روی شبکیه ایجاد می‌کند. (عملکرد عدسی در بخش بعدی بحث می‌شود.) پاسخ اول ما مثبت است. (به طوری که نیاز است یک تصویر حقیقی را نشان می‌دهد) و تقریباً دو برابر قطر چشم است. پس نقش عدسی در کانونی کردن نور در شبکیه در تعدیل آن است چون شکست زیادی در قرنیه به وجود می‌آید. پاسخ دوم ما کاملاً متفاوت است؛ این منفی است (نشان‌دهندهٔ یک تصویر مجازی) و خیلی بزرگتر. پس برای قرار دادن یک تصویر حقیقی روی شبکیه توسط عدسی کانونی کردن خیلی بیشتری مورد نیاز است. برای تعدیل کانونی کردن نور از هوا و کانونی کردن خیلی بیشتر نور از آب، عدسی چشم این ماهی شکل تخم مرغی دارد با انحنای بیشتر در نیمهٔ پایینی نسبت به نیمهٔ بالا.

۳۴-۷ عدسیهای نازک

عدسی جسم شفافی است با دو سطح شکست‌دهنده که محورهای آنها بر هم منطبق است. محور مرکزی مشترک، محور مرکزی عدسی است. هرگاه عدسی در هوا قرار داشته باشد، نور از هوا به درون عدسی می‌شکند و پس از عبور از آن دوباره به هوا شکسته می‌شود. هر شکست می‌تواند جهت حرکت نور را تغییر دهد.

یک عدسی که باعث شود پرتوهای نور موازی با محور مرکزی همگرا شوند (به طور معقول) **عدسی همگرا** نامیده می‌شود. ولی اگر عدسی موجب شود که این پرتوها واگرا شوند، عدسی را **عدسی واگرا** می‌گویند. هرگاه شیء در جلوی عدسی، از هر نوع آن، قرار گیرد، پرتوهای نور از شیء که

توسط عدسی به داخل و به خارج آن شکسته می‌شوند می‌توانند تصویر شیء را به وجود آورند.

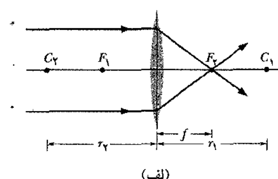
فقط مورد خاص **عدسی نازک** را بررسی خواهیم کرد- در این عدسی کلفت‌ترین قسمت در مقایسه با فاصلهٔ شیء p فاصلهٔ تصویر I و شعاع انحناهای r_1 و r_2 دو سطح عدسی، نازک است. همچنین فقط پرتوهایی را در نظر می‌گیریم که با محور مرکزی زاویهٔ کوچک می‌سازند (این زاویه‌ها در شکلها بزرگ نشان داده شده‌اند). در بخش ۳۴-۹، اثبات خواهیم کرد که فاصلهٔ کانونی عدسی نازک برای چنین پرتوهایی f است. افزون بر این، I , p با رابطهٔ زیر به یکدیگر مربوط‌اند.

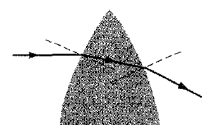
$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{i}$$ (۳۴-۹) (عدسی نازک)

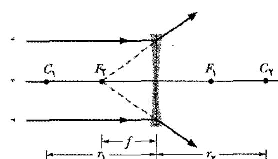
که شکل یکسانی با معادلهٔ آینه‌ها دارد. همچنین ثابت خواهیم کرد که هرگاه عدسی نازکی با ضریب شکست n در هوا قرار بگیرد، فاصلهٔ کانونی f با رابطهٔ زیر داده می‌شود.

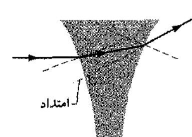
$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$ (۳۴-۱۰) (عدسی نازک در هوا)

که اغلب *معادلهٔ عدسی‌سازان* نامیده می‌شود. در اینجا r_1 به شعاع انحنای سطح نزدیکتر عدسی به شیء و r_2 شعاع سطح دیگر است. علامت این شعاعها با قاعده‌های بخش ۳۴-۶ برای شعاعهای سطح شکست‌دهندهٔ کروی به دست می‌آید. اگر عدسی در محیطی غیر از هوا قرار گیرد (مانند روغن ذرت) که ضریب شکست محیط n است، n را در معادلهٔ ۳۴-۱۰ با محیط n/n جایگزین می‌کنیم. اساس معادله‌های ۳۴-۹ و ۳۴-۱۰ را به خاطر بسپارید:









شکل ۳۴-۱۵ (الف) پرتوهای موازی با محور مرکزی یک عدسی همگرا در نقطهٔ کانونی حقیقی F_2 توسط عدسی همگرا می‌شوند. عدسی نازکتر از چیزی است که رسم شده است، پهنای آن به صورت خط قائمی است که از آن می‌گذرد. همهٔ پرتوهایی که در این خط مرکزی خم می‌شوند را در نظر می‌گیریم. (ب) بزرگ‌شدهٔ قسمت بالایی عدسی قسمت (الف)، عمود بر سطحها با خطچین نشان داده شده است. توجه کنید که هر دو شکست پرتو در سطحها، پرتو را به طرف پایین، به طرف محور مرکزی خم می‌کند. (پ) همان پرتوهای موازی توسط یک عدسی واگرا، واگرا می‌شوند. امتداد پرتوهای واگرا از نقطهٔ کانونی مجازی F_2 می‌گذرند. (ت) بزرگ‌شدهٔ قسمت بالایی عدسی قسمت (پ). توجه کنید که هر دو شکست پرتو در سطحها، پرتو را به طرف بالا، دور از محور مرکزی خم می‌کند.

> عدسی به این دلیل تصویری از شیء ایجاد می‌کند که می‌تواند پرتوهای نور را خم کند، ولی در صورتی می‌تواند پرتوهای نور را خم کند که ضریب شکست آن با ضریب شکست محیط تفاوت داشته باشد.

شکل ۳۴-۱۵ الف یک عدسی نازک با سطحهای شکست‌دهندهٔ کوژ را نشان می‌دهد. هرگاه پرتوهایی که موازی با محور مرکزی عدسی هستند از آن بگذرند، مانند شکل ۳۴-۱۵ ب که بزرگ شدهٔ عدسی است دو بار شکسته می‌شوند. این دو بار شکسته‌شدن موجب می‌شود که پرتوها همگرا شوند و از یک نقطهٔ مشترک F_2 در فاصلهٔ کانونی f از مرکز عدسی بگذرند. از این‌رو این یک عدسی همگراست و افزون بر این یک نقطهٔ کانونی حقیقی (یا کانون) در F_2 وجود دارد (چون پرتوها در واقع از این نقطه می‌گذرند) و فاصلهٔ کانونی مربوط به آن f است. هرگاه پرتوها موازی با محور مرکزی و از جهت مقابل به عدسی بتابند، نقطهٔ کانونی دیگری در F_1 در طرف دیگر عدسی پیدا می‌کنیم. برای یک عدسی نازک، این دو نقطهٔ کانونی در فاصلهٔ یکسانی از عدسی قرار دارند.

چون نقطه‌های کانونی یک عدسی همگرا حقیقی‌اند، درست مانند کانون حقیقی یک آینهٔ کاو، فاصله‌های کانونی f مربوط به آن را مثبت در نظر می‌گیریم. ولی علامتها در نورشناسی ممکن است پیچیده باشد، پس بهتر این است که آن را در معادلهٔ ۳۴-۱۰ بررسی کنیم. طرف سمت چپ این معادله هرگاه f مثبت باشد، مثبت است؛ طرف راست چطور؟ جمله به جمله آن را بررسی می‌کنیم. چون ضریب شکست n شیشه یا هر مادهٔ دیگر بزرگتر از ۱ است، جملهٔ $(n-1)$ باید مثبت باشد. چون چشمهٔ نور (که شیء است) در سمت چپ است و مقابل طرف کوژ سمت چپ عدسی قرار دارد، شعاع انحنای r_1 این طرف بنابر قاعدهٔ علامت سطحهای شکست‌دهنده باید مثبت باشد.



با متمرکز کردن نور خورشید به وسیلهٔ یک عدسی همگرای ساخته شده از یخ شفاف روی روزنامه آتش روشن می‌شود. عدسی با ذوب کردن دو طرف تکه‌ای یخ صاف در ظرف کم‌عمقی (که ته آن منحنی شکل است) به شکل کوژ ساخته می‌شود.

همچنین چون شیء در مقابل طرف کاو و سمت راست عدسی قرار دارد، شعاع r_2 این طرف بنابر آن قاعده باید منفی باشد.

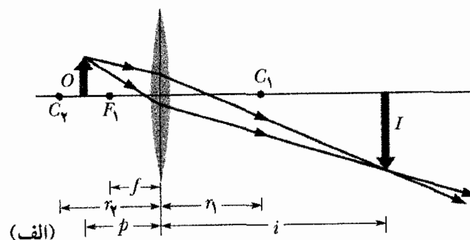
پس جملهٔ $\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$ مثبت و کل طرف راست معادلهٔ ۳۴-۱۰ مثبت است و همهٔ علامتها سازگارند.

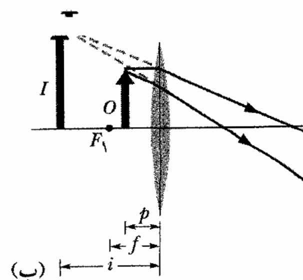
شکل ۳۴-۱۵ پ یک عدسی نازک را با طرفهای کاو نشان می‌دهد. وقتی پرتوهای موازی با محور مرکزی عدسی از این عدسی عبور کنند، همانطور که در شکل ۳۴-۱۵ ت بزرگ‌شدهٔ آن نشان داده شده است دو بار شکسته می‌شوند، این پرتوها *واگرا* می‌شوند و از هیچ نقطهٔ مشترکی نمی‌گذرند و در نتیجه این یک عدسی واگراست. با وجود این، امتداد پرتوها از نقطهٔ مشترک F_2 در فاصلهٔ f از مرکز عدسی می‌گذرند. از این رو عدسی دارای یک نقطهٔ کانونی *مجازی* در F_2 است. (اگر این پرتوهای واگرا به چشم برسند یک لکهٔ نورانی در F_2 مشاهده خواهد شد، و مانند این است که چشمهٔ نور است.) کانون مجازی دیگری در طرف مقابل عدسی در F_1 است و به طور متقارن از عدسی نازک قرار دارد. چون نقطه‌های کانونی یک عدسی نازک قرار دارد. چون نقطه‌های کانونی یک عدسی واگرا مجازی‌اند، فاصلهٔ کانونی f را منفی در نظر می‌گیریم.

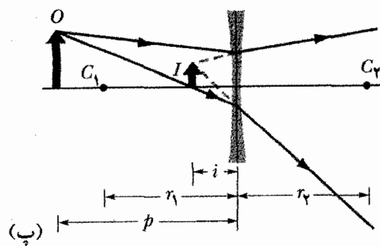
تصویر در عدسیهای نازک

اکنون انواع تصویرهای تشکیل شده به وسیلهٔ عدسیهای همگرا و واگرا را بررسی می‌کنیم. شکل ۳۴-۱۶ الف شیء O را خارج از نقطهٔ کانونی F_1 یک عدسی همگرا نشان می‌دهد. دو پرتو رسم شده در شکل نشان می‌دهند که عدسی یک تصویر حقیقی و وارونهٔ I از شیء را در طرف مقابل شیء تشکیل می‌دهد.

هرگاه شیء، مانند شکل ۳۴-۱۶ ب، در فاصلهٔ کانونی F_1 واقع باشد، عدسی یک تصویر مجازی I در همان طرفی که شیء واقع است و با همان سمتگیری تشکیل می‌دهد. از این رو، عدسی همگرا بسته به اینکه شیء در خارج یا داخل فاصلهٔ کانونی باشد، به ترتیب یک تصویر حقیقی یا یک تصویر مجازی تشکیل می‌دهد.







شکل ۳۴-۱۶ (الف) از شیء O که در خارج فاصلهٔ کانونی F_1 قرار دارد یک تصویر حقیقی و وارونهٔ I به وسیلهٔ یک عدسی همگرا تشکیل شده است. (ب) هرگاه O داخل فاصلهٔ کانونی واقع باشد، تصویر I مجازی و سمتگیری آن با O یکسان است. (پ) عدسی واگرا تصویر مجازی I را با سمتگیری یکسان با شیء O تشکیل می‌دهد. چه O داخل یا خارج فاصلهٔ کانونی عدسی باشد.

شکل ۳۴-۱۶ پ شیء O را در جلوی یک عدسی واگرا نشان می‌دهد، بدون در نظر گرفتن فاصلهٔ شیء (صرفنظر از اینکه آیا O داخل یا خارج فاصلهٔ کانونی مجازی است)، این عدسی یک تصویر مجازی به دست می‌دهد که در همان طرف شیء نسبت به عدسی قرار دارد و همان سمتگیری را دارد.

مانند آینه‌ها، هرگاه تصویر حقیقی باشد فاصلهٔ تصویر I مثبت و هرگاه تصویر مجازی باشد این فاصله منفی در نظر گرفته می‌شود. ولی، محل تصویرهای حقیقی و مجازی در عدسیها برعکس آینه‌هاست:

> تصویرهای حقیقی در طرفی از عدسی تشکیل می‌شوند که مخالف شیء است و تصویرهای مجازی در همان طرف شیء نسبت به عدسی تشکیل می‌شوند.

بزرگنمایی خطی m حاصل از عدسیهای همگرا و واگرا مانند آینه‌ها با معادله‌های ۳۴-۵ و ۳۴-۶ داده می‌شوند.

شما باید اطلاعات زیادی از این بخش به دست آورید و برای انجام این امر باید جدول ۳۴-۲ را برای *عدسیهای متقارن* (هر دو طرف کاو یا هر دو طرف کوژ) نازک پر کنید. در زیر محل تصویر توجه کنید که آیا تصویر در *همان* طرفی از عدسی که شیء قرار دارد واقع است یا در طرف *مقابل*. در زیر نوع تصویر توجه کنید که آیا تصویر *حقیقی* است یا *مجازی*. در زیر سمتگیری تصویر توجه کنید که آیا سمتگیری تصویر *مانند* شیء است یا *وارونه* است.

جدول ۳۴-۲

سامانْدهی عدسیهای نازک

نوع عدسی	محل جسم	تصویر: محل. نوع. سمتگیری	علامت: f	علامت: i	علامت: m
همگرا	داخل F				
	خارج F				
واگرا	در هر کجا				

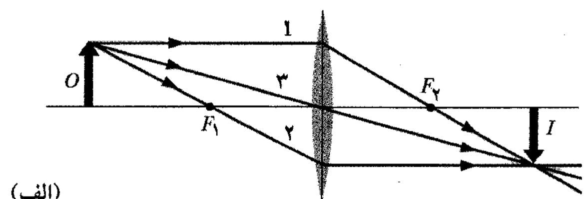
تدبیرهای حل مسئله

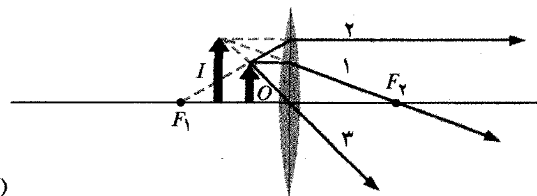
تدبیر ۱: علامتهای دردسرساز در آینه‌ها و عدسیها

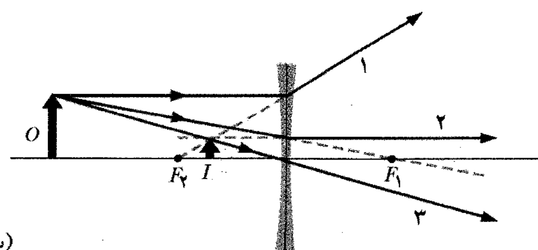
دقت کنید: فاصلهٔ کانونی f یک آینه با سطح کوژ منفی است، درست برعکس یک عدسی با سطحهای کوژ. همین‌طور فاصلهٔ کانونی f یک آینه با سطح کاو مثبت است، درست برعکس یک عدسی با سطحهای کاو و ویژگیهای گیج‌کنندهٔ عدسیها و آینه‌ها اغلب اشتباه می‌شوند که یک امر معمولی است.

تعیین محل تصویر شیء گسترده به وسیلهٔ رسم پرتوها

شکل ۳۴-۱۷ الف شیء O را در خارج از فاصلهٔ کانونی F_1 یک عدسی همگرا نشان می‌دهد. محل تصویر هر نقطه خارج از محور برای چنین شیئی (مانند نوک پیکان در شکل ۳۴-۱۷







شکل ۳۴-۱۷ سه پرتو خاص برای تعیین محل تصویر تشکیل شده در یک عدسی نازک به کار می‌رود، بسته به اینکه شیء O (الف) خارج، یا (ب) داخل فاصلهٔ کانونی یک عدسی همگرا یا (ب) در هر جایی مقابل یک عدسی واگرا قرار گرفته باشد.

الف) را می‌توان با ترسیم یک نمودار پرتوی با هر یک از دو پرتو از سه پرتو خاصی که از آن نقطه می‌گذرند به دست آورد. این پرتوهای خاص، از میان کلیهٔ پرتوهایی که برای تشکیل تصویر از عدسی می‌گذرند به صورت زیر انتخاب شده‌اند:

۱- یک پرتو که موازی با محور مرکزی عدسی باشد از نقطهٔ کانونی F_2 می‌گذرد (پرتو ۱ در شکل ۴۳-۱۷ الف).

۲- یک پرتو که از نقطهٔ کانونی F_1 بگذرد موازی با محور مرکزی از عدسی خارج می‌شود (پرتو ۲ در شکل ۳۴-۱۷الف).

۳- یک پرتو که از مرکز عدسی بگذرد بدون هیچ تغییر جهتی از آن عبور می‌کند (پرتو ۳ در شکل ۳۴-۱۷ الف)، زیرا این پرتو با دو سطح عدسی برخورد می‌کند که تقریباً موازی‌اند.

تصویر نقطه در جایی واقع است که پرتوها یکدیگر را در طرف دورتر عدسی قطع می‌کنند. تصویر شیء با تعیین تصویرهای دو یا چند نقطه از آن به دست می‌آید.

شکل ۳۴-۱۷ ب نشان می‌دهد که چگونه امتداد سه پرتو خاص برای تعیین محل تصویر شیء واقع در داخل فاصلهٔ کانونی F_1 یک عدسی همگرا به کار می‌رود. توجه کنید که توصیف پرتو ۲ اندکی به اصلاح نیاز دارد (این پرتوی است که امتدادش از نقطهٔ F_1 می‌گذرد).

لازم است که توصیف پرتوهای ۱ و ۲ را اصلاح کنیم تا برای تعیین محل تصویر واقع در (هر جایی) جلوی یک عدسی واگرا مورد استفاده قرار گیرند. برای مثال در شکل ۳۴-۱۷پ، نقطه‌ای را به دست می‌آوریم که پرتو ۳ امتداد به عقب پرتوهای ۱ و ۲ را قطع می‌کند.

دستگاه‌های دو عدسی

هرگاه شیء O در مقابل دستگاهی شامل دو عدسی که محور مرکزی آنها بر هم منطبق است قرار گیرد، می‌توان تصویر نهایی دستگاه (یعنی تصویر ایجاد شده به وسیلهٔ عدسی دورتر از شیء) را مرحله به مرحله تعیین کرد. عدسی نزدیک را عدسی ۱ و عدسی دور را عدسی ۲ در نظر می‌گیریم.

مرحلهٔ ۱- فرض کنیم p_1 فاصلهٔ شیء O از عدسی ۱ باشد. سپس فاصلهٔ i_1 تصویر ایجاد شده به وسیلهٔ عدسی ۱ را با استفاده از معادلهٔ ۳۴-۹ یا با ترسیم پرتوها پیدا می‌کنیم.

مرحلهٔ ۲- حال با نادیده گرفتن عدسی ۱، تصویر تشکیل شده در مرحلهٔ ۱ را به *عنوان شیء* برای عدسی ۲ در نظر می‌گیریم. اگر این شیء جدید در پشت عدسی ۲ واقع شود، فاصلهٔ شیء p_2 برای عدسی ۲ منفی در نظر گرفته می‌شود. (توجه کنید که این نسبت به قاعده‌ای که می‌گوید فاصلهٔ شیء مثبت است یک استثناست، این استثنا از آنجا ناشی می‌شود که شیء در اینجا در طرف مخالف چشمهٔ نور است.) در غیر این صورت p_2 مانند معمول مثبت گرفته می‌شود. پس از آن فاصلهٔ تصویر (نهایی) i_2 را که به وسیلهٔ عدسی ۲ حاصل شده است به کمک معادلهٔ ۳۴-۹ یا با رسم پرتوها پیدا می‌کنیم.

روش مرحله به مرحلهٔ مشابهی را می‌توان برای هر تعداد عدسی یا اگر آینه‌ای به جای عدسی ۲ وجود داشته باشد به کار برد.

بزرگنمایی خطی *کلی* یا *نهایی* M که به وسیلهٔ دستگاه دو عدسی تشکیل می‌شود برابر است با حاصلضرب بزرگنمایی خطی m_1 و بزرگنمایی خطی m_2 که به وسیلهٔ دو عدسی حاصل شده است.

$$M = m_1 m_2 \qquad (۱۱\text{-}۳۴)$$

> ✓ **نکتهٔ وارسی ۴** یک عدسی متقارن نازک وقتی اثر انگشت نسبت به کانون عدسی $1/0\,\text{cm}$ دورتر قرار داشته باشد، از آن تصویری با بزرگنمایی $+0/2$ ایجاد می‌کند. نوع و سمتگیری تصویر و نیز نوع عدسی را پیدا کنید.

مسئلهٔ نمونه ۳۴-۴

شیئی روی محور مرکزی یک عدسی نازک متقارن به فاصلهٔ $20\,\text{cm}$ از آن قرار دارد. بزرگنمایی خطی $m = -0/25$ و ضریب شکست مادهٔ عدسی $1/65$ است.

(الف) نوع تصویر ایجاد شده به وسیلهٔ عدسی و نوع عدسی را پیدا کنید. آیا این شیء داخل فاصلهٔ کانونی است یا خارج آن، تصویر در کدام طرف عدسی تشکیل می‌شود و آیا تصویر وارونه است؟

استدلال: از مقدار داده شدهٔ m می‌توان به اطلاعات زیادی در مورد عدسی و تصویر دست پیدا کرد. با استفاده از آن و معادلهٔ ۳۴-۶ $(m = -i/p)$، می‌بینیم که

$$i = -mp = 0/25p$$

حتی بدون پایان دادن به محاسبه‌ها می‌توان به پرسشها پاسخ داد. چون p مثبت است، I در اینجا باید مثبت باشد. این نشان می‌دهد که تصویر حقیقی است و به معنی این است که عدسی همگرا داریم (تنها عدسیی که می‌تواند تصویر حقیقی ایجاد کند). شیء باید خارج از فاصلهٔ کانونی باشد (تنها راهی که یک تصویر حقیقی می‌تواند تشکیل شود.) همچنین تصویر وارونه است و در طرف مقابل شیء قرار دارد. (به این طریق است که عدسی همگرا تصویر حقیقی تشکیل می‌دهد.)

(ب) بزرگی دو شعاع انحنای عدسی چقدر است؟

نکته‌های کلیدی

۱- چون عدسی متقارن است، r_1 (برای سطح نزدیک شیء) و r_2 دارای بزرگی یکسان هستند.

۲- چون عدسی همگراست و جسم در مقابل سطح کوژ طرف نزدیک قرار دارد پس $r_1 = +r$. به همین ترتیب در مقابل سطح کاو طرف دور قرار دارد و در نتیجه $r_2 = -r$ است.

۳- این شعاعهای انحنا را می‌توان به وسیلهٔ معادلهٔ عدسی‌سازان یعنی معادلهٔ ۳۴-۱۰ (تنها معادله‌ای که شامل شعاعهای انحناست) به فاصلهٔ کانونی f ربط دارد.

۴- با معادلهٔ ۳۴-۹ می‌توان فاصلهٔ کانونی f را به فاصلهٔ شیء p و فاصلهٔ تصویر I ربط داد.

محاسبه‌ها: مقدار p را می‌دانیم ولی I را نمی‌دانیم. بنابراین، نقطهٔ شروع عبارت است از تمام کردن محاسبه‌ها برای I در قسمت (الف)؛ خواهیم داشت

$$i = (0/25)(20\,\text{cm}) = 5/0\,\text{cm}$$

حال معادلهٔ ۳۴-۹ به دست می‌دهد

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{1}{20\,\text{cm}} + \frac{1}{5/0\,\text{cm}}$$

که از آن $f = 4/0\,\text{cm}$ به دست می‌آید. سپس از معادلهٔ ۳۴-۱۰ داریم

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = (n-1)\left(\frac{1}{+r} - \frac{1}{-r}\right)$$

با قرار دادن مقدارهای داده شده، داریم

$$\frac{1}{4/0\,\text{cm}} = (1/65 - 1)\frac{2}{r}$$

که به دست می‌دهد

$$r = (0/65)(2)(4/0\,\text{cm}) = 5/2\,\text{cm} \qquad \text{(پاسخ)}$$

مسئلهٔ نمونه ۳۴-۵ مهارت خود را تقویت کنید

در شکل ۳۴-۱۸ الف شیء O_1 در مقابل دو عدسی نازک متقارن ۱ و ۲ به ترتیب با فاصله‌های کانونی $f_1 = +24\text{cm}$ و $f_2 = +9/0\,\text{cm}$ و به فاصلهٔ $L = 10\,\text{cm}$ از هم قرار دارد: فاصلهٔ شیء از عدسی ۱ برابر با $60\,\text{cm}$ است. دستگاه دو عدسی تصویر شیء را در کجا ایجاد می‌کند؟

نکتهٔ کلیدی می‌توانستیم تصویر ایجاد شده با دستگاه دو عدسی را با دنبال کردن پرتوهای ناشی از شیء که از دو عدسی عبور می‌کنند به دست آوریم. ولی، برای محاسبهٔ مکان تصویر در دستگاه می‌توانیم عدسی به عدسی جلو برویم. از عدسی نزدیکتر به شیء شروع می‌کنیم. تصویری که به دنبال آن هستیم تصویر نهایی است، یعنی تصویر I_2 که به وسیلهٔ عدسی ۲ ایجاد می‌شود.

عدسی ۱. عدسی ۲ را نادیده می‌گیریم و محل تصویری را که به وسیلهٔ عدسی ۱ ایجاد می‌شود با به کار بردن معادلهٔ ۳۴-۹ تنها برای عدسی ۱، به دست می‌آوریم

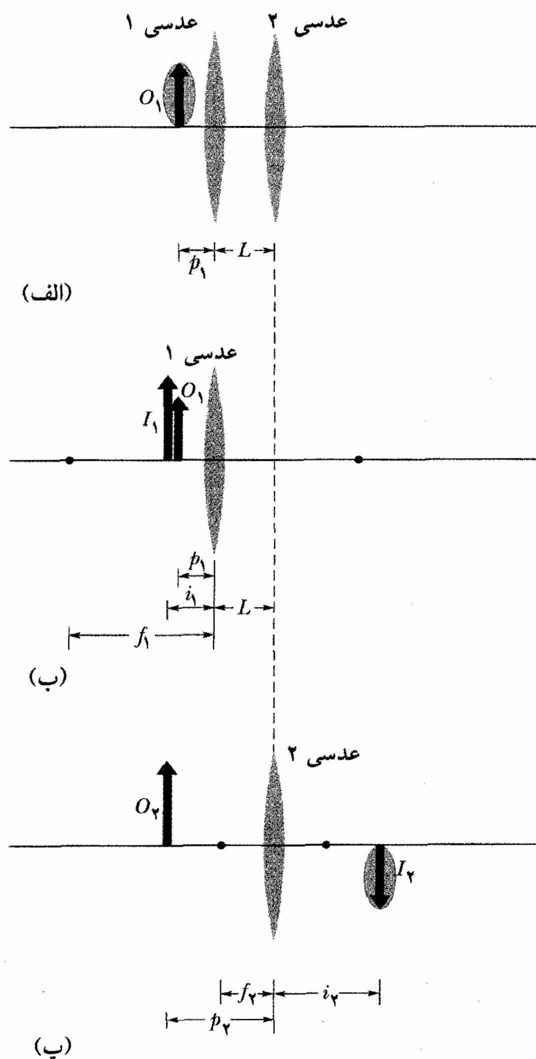
$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{i_1} = \frac{1}{f_1}$$

شیء O_1، $6/0\,\text{cm}$ از عدسی ۱ فاصله دارد؛ پس $p_1 = +6/0\,\text{cm}$ را جایگزین می‌کنیم. مقدار f_1 داده شده را نیز جایگزین می‌کنیم، داریم

$$\frac{1}{+6/0\,\text{cm}} + \frac{1}{i_1} = \frac{1}{+24\text{cm}}$$

که از این $i_1 = -8/0\,\text{cm}$ به دست می‌آید.

این بیانگر این است که فاصلهٔ تصویر I_1 از عدسی ۱ برابر با $8/0\,\text{cm}$ و مجازی است. (می‌شد حدس زد که چون شیء داخل فاصلهٔ کانونی عدسی ۱ یعنی بین عدسی و کانون آن قرار دارد تصویر مجازی است.) چون I_1 مجازی است پس تصویر در همان طرفی از عدسی است که شیء O_1 قرار دارد و همانطور که در شکل ۳۴-۱۸ ب نشان داده شده همان سمتگیری شیء O_1 را دارد.



شکل ۳۴-۱۸ (الف) شیء O_1 در فاصلهٔ p_1 از یک دستگاه دو عدسی که به اندازهٔ L از هم فاصله دارند قرار دارد. پیکان برای مشخص کردن جهت شیء به کار رفته است. (ب) تصویر I_1 تنها به وسیلهٔ عدسی ۱ ایجاد شده است. (پ) تصویر I_1 تنها برای عدسی ۲ به عنوان شیء O_2 است که تصویر نهایی I_2 را ایجاد می‌کند.

عدسی ۲. در مرحلهٔ دوم حل مسئله، می‌توانیم تصویر I_1 را به عنوان شیء O_2 برای دومین عدسی به حساب آوریم و عدسی ۱ را نادیده بگیریم. ابتدا توجه داریم که این شیء O_2 خارج از نقطهٔ کانونی عدسی ۲ قرار دارد. بنابراین، تصویر I_2 که به وسیلهٔ عدسی ۲ ایجاد می‌شود باید حقیقی، وارونه و در طرفی از عدسی واقع باشد که مقابل O_2 است. این را بررسی می‌کنیم.

فاصلهٔ p_2 بین شیء O_2 و عدسی ۲ در شکل ۳۴-۱۸ پ برابر است با

$$p_2 = L + |i_1| = ۱۰\,\text{cm} + ۸/۰\,\text{cm} = ۱۸\text{cm}$$

سپس معادلهٔ ۳۴-۹ را برای عدسی ۲ می‌نویسیم که به دست می‌دهد

$$\frac{۱}{+۱۸\text{cm}} + \frac{۱}{i_2} = \frac{۱}{۹/۰\,\text{cm}}$$

از این رو

$$i_2 = +۱۸\text{cm}$$

علامت مثبت حدس ما را تأیید می‌کند: تصویر I_2 حاصل از عدسی ۲ حقیقی و وارونه است و همانطور که در شکل ۳۴-۱۸ پ نشان داده شده است در طرف مخالف O_2 نسبت به عدسی ۲ قرار دارد.

۳۴-۸ ابزارهای نوری

چشم انسان عضو فوق‌العاده مؤثری است، ولی شعاع عمل آن را می‌توان به وسیلهٔ ابزارهای نوری مانند عینک، ذره‌بین، دستگاههای نمایش سینمایی، دوربینها (از جمله دوربینهای تلویزیونی)، میکروسکوپ و تلسکوپ به روشهای مختلفی گسترش داد. بسیاری از چنین دستگاههایی محدودهٔ دید ما را به وراء نور مرئی گسترش می‌دهند؛ دوربینهای فروسرخ حمل شده با ماهواره و میکروسکوپهای پرتو x تنها دو مثال از این قبیل‌اند. فرمولهای آینه و عدسی نازک را فقط به عنوان تقریبهایی برای اغلب ابزارهای نوری پیشرفته می‌توان به کار برد. عدسیها در میکروسکوپهای آزمایشگاهی نوعی به هیچ عنوان «نازک» نیستند. در بسیاری از ابزارهای نوری عدسیها مرکب هستند، یعنی از چندین جزء تشکیل شده‌اند و سطحهای مرزی به ندرت دقیقاً کروی‌اند. اکنون سه ابزار نوری را با فرض اینکه برای سهولت فرمولهای عدسی نازک را می‌توان به کار برد، شرح می‌دهیم.

ذره‌بین

اگر شیئی در هر جایی از بینهایت تا نقطهٔ معینی به نام **نقطهٔ نزدیک** p_n قرار داشته باشد چشم عادی انسان می‌تواند تصویر دقیقی از آن روی شبکیه (در انتهای چشم) تشکیل دهد. اگر شیء به چشم نزدیکتر شده و در فاصله‌ای کمتر از نقطهٔ نزدیک قرار گیرد، تصویر شبکیه‌ای دریافت شده محو خواهد بود. محل نقطهٔ نزدیک با بالا رفتن سن تغییر می‌کند. همه شنیده‌ایم افرادی مدعی‌اند که به عینک نیاز ندارند ولی روزنامه را در فاصلهٔ بازوی دست خود می‌خوانند؛ نقطهٔ نزدیک آنها کاهش یافته است. برای پیدا کردن نقطهٔ نزدیک، اگر عینک دارید آن را بردارید، یک چشم خود را ببندید و سپس این صفحه را به چشم باز خود نزدیک کنید تا ناواضح شود. در بحث زیر نقطهٔ نزدیک را در ۲۵ سانتی‌متری چشم در نظر می‌گیریم که اندکی بیش از مقدار نوعی برای افراد ۲۰ ساله است.

شکل ۳۴-۱۹ الف شیء O را واقع در نقطهٔ نزدیک p_n یک چشم نشان می‌دهد. اندازهٔ تصویر ایجاد شده روی شبکیه به زاویهٔ θ که شیء میدان دید از چشم را در بر می‌گیرد بستگی دارد. با نزدیک کردن شیء به چشم، مانند ۳۴-۱۹ ب، می‌توان زاویه را افزایش داد، از این رو امکان تمیز دادن جزئیات شیء بیشتر می‌شود. ولی، چون شیء نزدیکتر از نقطهٔ نزدیک است، دیگر **میزان نیست**، یعنی تصویر دیگر وضوح ندارد.

با نگاه کردن به نقطهٔ O به وسیلهٔ یک عدسی همگرا به طوری که O درست داخل نقطهٔ کانونی F_1 عدسی و در فاصلهٔ کانونی f قرار گیرد (شکل ۳۴-۱۹پ) می‌توان وضوح را بهبود بخشید. آنچه که دیده می‌شود تصویر مجازی O است که به وسیلهٔ عدسی ایجاد شده است. این تصویر از نقطهٔ نزدیک دورتر است، و بنابراین چشم آن را به وضوح می‌بیند.

افزون بر این، زاویهٔ θ' در بر گرفته شده به وسیلهٔ تصویر مجازی، از بزرگترین زاویهٔ θ که توسط شیء تنها می‌تواند در بر گرفته شود و هنوز واضح دیده شود بزرگتر است. **بزرگنمایی** زاویه‌ای m_θ (با بزرگنمایی خطی m اشتباه نکنید) آنچه که دیده می‌شود عبارت است از

$$m_\theta = \theta'/\theta$$

به عبارتی، بزرگنمایی زاویه‌ای یک ذره‌بین عبارت است از مقایسهٔ زاویهٔ در بر گرفته شده به وسیلهٔ تصویری که عدسی ایجاد می‌کند و زاویهٔ در بر گرفته شده به وسیلهٔ شیء در وقتی که به نقطهٔ نزدیک ناظر حرکت کرده باشد.

از شکل ۳۴-۱۹ با فرض اینکه O در نقطهٔ کانونی عدسی بوده و تقریب $\tan\theta = \theta$ و $\tan\theta' = \theta'$ برای زاویه‌های کوچک برقرار باشد، داریم

$$\theta \approx h/۲۵\,\text{cm}\ ,\ \theta' \approx h/f$$

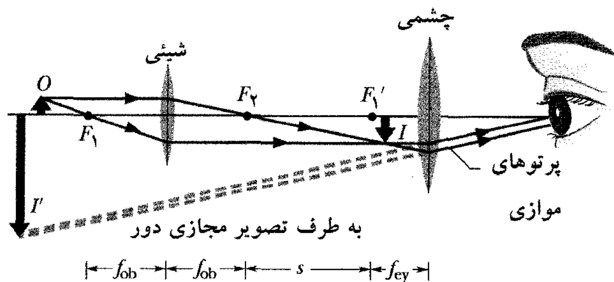
در نتیجه خواهیم داشت

$$m_\theta \approx \frac{۲۵\text{cm}}{f} \qquad \text{(ذره‌بین)} \qquad (۱۲\text{-}۳۴)$$

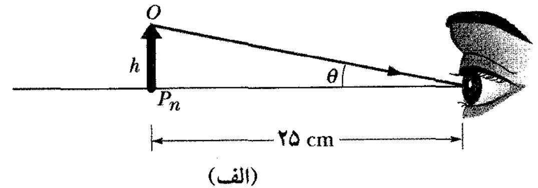
میکروسکوپ مرکب

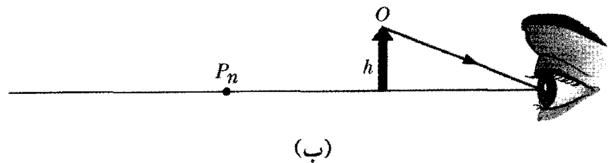
شکل ۳۴-۲۰ صورتی از یک میکروسکوپ مرکب با عدسی نازک را نشان می‌دهد. این ابزار شامل یک **شیئی** (عدسی جلو) به فاصلهٔ کانونی f_{ob} و یک **چشمی** (عدسی نزدیک چشم) به فاصلهٔ کانونی f_{ey} است. از این وسیله برای دیدن اشیای کوچکی که خیلی به شیء نزدیک باشند استفاده می‌شود.

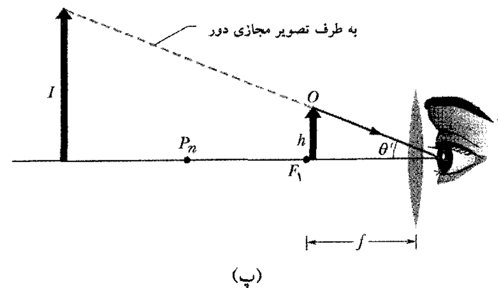
شیء O که باید دیده شود درست خارج اولین نقطهٔ کانونی f_1 شیئی، یعنی نزدیک به F_1 که فاصلهٔ آن از عدسی تقریباً p'' است و فاصلهٔ کانونی آن را f_{ob} در نظر می‌گیریم، قرار داده می‌شود. فاصلهٔ بین عدسیها به صورتی تنظیم می‌شود که تصویر حقیقی، بزرگ شده و وارونهٔ ایجاد شده به وسیلهٔ چشمی درست داخل اولین نقطهٔ کانونی F'_1 چشمی قرار گیرد. **طول لولهٔ** s نشان داده شده در شکل ۳۴-۲۰ در واقع نسبت به f_{ob} بزرگ است و می‌توان فاصلهٔ I بین شیء و تصویر I را با طول s تقریباً برابر گرفت.



شکل ۳۴-۲۰ نمایشی از یک میکروسکوپ مرکب با عدسی نازک (که در مقیاس واقعی نیست). شیئی یک تصویر حقیقی I از شیء O درست داخل نقطهٔ کانونی F'_1 چشمی تشکیل می‌دهد. سپس تصویر I برای چشمی به عنوان شیء عمل می‌کند و یک تصویر نهایی مجازی I' ایجاد می‌کند که توسط ناظر دیده می‌شود. فاصلهٔ کانونی شیئی f_{ob}، فاصلهٔ کانونی چشمی f_{ey} و s طول لوله است.







شکل ۳۴-۱۹ (الف) شیء O به ارتفاع h در نقطهٔ نزدیک چشم است و زاویهٔ θ را در میدان دید در بر می‌گیرد. (ب) با نزدیکتر شدن شیء زاویه افزایش می‌یابد ولی حالا ناظر نمی‌تواند شیء را واضح ببیند. (پ) یک عدسی همگرا بین شیء و چشم قرار داده می‌شود به طوری که شیء درست داخل نقطهٔ کانونی F_1 عدسی است. تصویر ایجاد شده به وسیلهٔ عدسی برای واضح دیده شدن خیلی دور است و تصویر زاویهٔ بزرگتر θ' را نسبت به شیء O در (الف) در بر می‌گیرد.

از معادلهٔ ۳۴-۶ و با استفاده از تقریب به کار رفته برای p و I می‌توان بزرگنمایی خطی ایجاد شده به وسیلهٔ چشمی را به صورت زیر نوشت

$$m = -\frac{i}{p} = -\frac{s}{f_{ob}} \qquad (۱۳-۳۴)$$

چون تصویر I درست داخل نقطهٔ کانونی F'_1 چشمی قرار دارد، چشمی همانند یک ذره‌بین عمل می‌کند و ناظر تصویر نهایی (مجازی، وارونه) I' را از آن می‌بیند. بزرگنمایی کلی این دستگاه عبارت است از حاصلضرب بزرگنمایی خطی m که به وسیلهٔ شیئی ایجاد شده است و با معادلهٔ ۳۴-۱۳ داده می‌شود، در بزرگنمایی زاویه‌ای m_θ که به وسیلهٔ چشمی ایجاد شده است و با معادلهٔ ۳۴-۱۲ داده می‌شود؛ یعنی

$$M = mm_\theta = -\frac{s}{f_{ob}}\frac{۲۵\text{cm}}{f_{ey}} \quad \text{(میکروسکوپ)} \qquad (۱۴-۳۴)$$

تلسکوپ شکستی

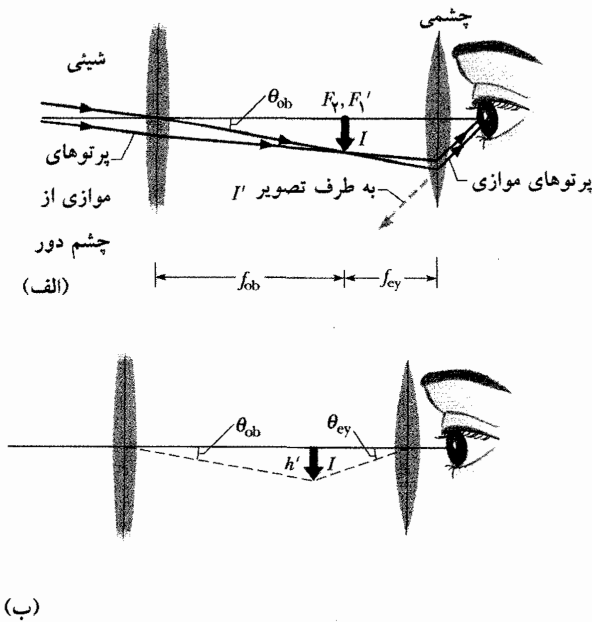
تلسکوپ در شکلهای مختلفی وجود دارد. شکلی که در اینجا توصیف می‌کنیم تلسکوپ شکستی ساده است که شامل یک شیئی و یک چشمی است که هر دو در شکل ۳۴-۲۱ با عدسیهای ساده نشان داده شده‌اند، اگرچه در عمل، هر عدسی نظیر بیشتر میکروسکوپها در واقع یک دستگاه عدسی مرکب است.

آرایشهای عدسی در تلسکوپها و میکروسکوپها مشابه‌اند، ولی تلسکوپ را برای دیدن اجسام بزرگ مانند کهکشانها، ستارگان و سیاره‌ها در فاصله‌های دور طراحی می‌کنند در حالی که میکروسکوپها برای هدف مخالفی طراحی می‌شوند. این اختلاف مستلزم آن است که در تلسکوپ شکل ۳۴-۲۱ نقطهٔ کانونی دوم شیئی F_2 بر نقطهٔ کانونی اول چشمی F'_1 منطبق باشد، در حالی که در میکروسکوپ شکل ۳۴-۲۰ این نقطه‌ها به اندازهٔ طول s لوله از یکدیگر فاصله دارند.

در شکل ۳۴-۲۱ الف پرتوهای موازی از یک شیء دور به شیئی برخورد می‌کنند و زاویهٔ θ_{ob} را با محور تلسکوپ تشکیل می‌دهند به طوری که در نقطهٔ کانونی مشترک F_2 و F'_1 یک تصویر حقیقی وارونهٔ I تشکیل می‌شود. این تصویر I برای چشمی به عنوان شیء عمل می‌کند و ناظر تصویر دور و مجازی (هنوز وارونه) I' را از آن می‌بیند. پرتوهای ایجاد کنندهٔ تصویر با محور تلسکوپ زاویهٔ θ_{ey} می‌سازند.

بزرگنمایی زاویه‌ای m_θ تلسکوپ θ_{ey}/θ_{ob} است. از شکل ۳۴-۲۱ ب برای پرتوهای نزدیک محور مرکزی می‌توان نوشت $\theta_{ob} = h'/f_{ob}$ و $\theta_{ey} \approx h'/f_{ey}$ که به دست می‌دهد

$$m_\theta = -\frac{f_{ob}}{f_{ey}} \quad \text{(تلسکوپ)} \qquad (۱۵-۳۴)$$



شکل ۳۴-۲۱ (الف) نمایشی از یک تلسکوپ شکستی با عدسی نازک. شیئی یک تصویر حقیقی I از یک چشمهٔ نور دور (شیء)، با پرتوهای نوری تقریباً موازی، ایجاد می‌کند. (فرض می‌شود که یک انتهای شیء روی محور مرکزی قرار دارد.) تصویر I که در نقطه‌های کانونی مشترک F_2 و F'_1 تشکیل می‌شود. به عنوان شیء برای چشمی است که تصویر مجازی نهایی I' را در فاصلهٔ خیلی دور از ناظر ایجاد می‌کند. فاصلهٔ کانونی شیئی f_{ob} و فاصلهٔ کانونی چشمی f_{ey} است. (ب) ارتفاع تصویر I برابر h' است و نسبت به شیئی زاویهٔ θ_{ob} و نسبت به چشمی زاویهٔ θ_{ey} می‌سازد.

که در آن علامت منفی نشان می‌دهد که I' وارونه است. به عبارتی بزرگنمایی زاویه‌ای تلسکوپ مقایسه‌ای است بین زاویهٔ ایجاد شده به وسیلهٔ تصویر به وجود آمده به وسیلهٔ تلکسوپ و زاویهٔ ایجاد شده به وسیلهٔ تصویر به وجود آمده به وسیلهٔ تلسکوپ و زاویهٔ ایجاد شده به وسیلهٔ شیء دور که بدون تلسکوپ دیده می‌شود.

بزرگنمایی فقط یکی از عوامل طراحی یک تلسکوپ نجومی است و در واقع به راحتی می‌توان به آن دست یافت. یک تلسکوپ خوب به **توان جمع‌آوری نور** نیاز دارد که میزان روشنی تصویر را نشان می‌دهد. این در مورد دیدن اجسام کم نور مانند کهکشانهای دور مهم است و این کار با ساخت شیئی با قطری تا حد امکان بزرگ انجام می‌شود. یک تلسکوپ همچنین به **توان تفکیک** نیاز دارد که عبارت است از توانایی برای تمیز دادن بین دو جسم دور (مانند ستارگان) که فاصلهٔ زاویه‌ای آنها کوچک باشد. **میدان دید** عامل مهم دیگری در طراحی است. تلسکوپی که برای دیدن کهاکشانها (که میدان دید خیلی کوچکی دارند) طراحی می‌شود با تلسکوپی که برای ردیابی شهابها (که در میدان دید وسیعی حرکت می‌کنند) طراحی می‌شود تفاوت زیادی دارد.

طراح تلسکوپ همچنین باید فرق بین عدسیهای واقعی و عدسیهای نازک آرمانی را که دربارهٔ آنها بحث کردیم در نظر بگیرد. یک عدسی واقعی با سطحهای کروی تصویرهای دقیقی تشکیل نمی‌دهد، این عیب را **ابیراهی کروی** می‌نامند. چون شکست در دو سطح یک عدسی واقعی به طول موج نیز بستگی دارد، یک عدسی واقعی نور با طول موجهای مختلف را در یک نقطه متمرکز نمی‌کند، این عیب را **ابیراهی رنگی** می‌نامند.

این بحث کوتاه عوامل مربوط به طراحی تلسکوپهای نجومی را تمام نمی‌کند – عوامل بسیار دیگری هم وجود دارند. در مورد هر ابزار نوری دیگر با کارایی بالا باید چنین مسائلی مورد توجه قرار گیرند.

۳۴-۹ اثبات سه فرمول

فرمول آینهٔ کروی (معادلهٔ ۳۴-۴)

شکل ۳۴-۲۲ یک شیء نقطه‌ای O را واقع بر محور مرکزی آینهٔ کروی کاو خارج از مرکز انحنای C نشان می‌دهد. پرتوی از O که با محور زاویهٔ α می‌سازد، پس از بازتاب از آینه در نقطهٔ a محور را در I قطع می‌کند. پرتوی نیز که از O در راستای محور می‌تابد پس از بازتاب از نقطهٔ c، در راستای خود بر می‌گردد و از نقطهٔ I می‌گذرد. بنابراین، I تصویر O است، این یک تصویر **حقیقی** است زیرا نور در واقع از آنجا می‌گذرد. حال فاصلهٔ تصویری I را پیدا می‌کنیم.

از قضیهٔ مثلثاتی مفیدی که بیان می‌کند زاویهٔ خارجی در مثلث برابر است با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیر مجاور استفاده می‌کنیم. با اعمال این قضیه بر مثلثهای OaC و OaI در شکل ۳۴-۲۲ خواهیم داشت

$$\beta = \alpha + \theta \quad \text{و} \quad \gamma = \alpha + 2\theta$$

اگر زاویهٔ θ را بین این دو معادله حذف کنیم، خواهیم داشت

$$\alpha + \gamma = 2\beta \qquad (۳۴\text{-}۱۶)$$

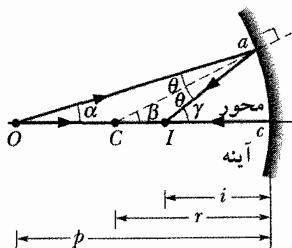
زاویه‌های α، β و γ را می‌توان به صورت زیر برحسب رادیان نوشت

$$\alpha \approx \frac{\widehat{ac}}{cO} = \frac{\widehat{ac}}{p} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{\widehat{ac}}{cC} = \frac{\widehat{ac}}{r}$$

و

$$\gamma \approx \frac{\widehat{ac}}{cI} = \frac{\widehat{ac}}{i} \qquad (۳۴\text{-}۱۷)$$

نمادهای بالای حروف به معنی «قوس» است. تنها معادلهٔ مربوط به β دقیق است، زیرا مرکز انحنای $\widehat{ac}$ در C قرار دارد. ولی معادله‌های مربوط به α و γ در صورتی تقریباً درست‌اند که این زاویه‌ها به قدر کافی کوچک باشند. (برای پرتوهای نزدیک به محور مرکزی). با قرار دادن معادله‌های ۳۴-۱۷ در معادلهٔ ۳۴-۱۶ و با استفاده از معادلهٔ ۳۴-۳ برای جایگذاری $2f$ به جای r و حذف $\widehat{ac}$، دقیقاً به معادلهٔ ۳۴-۴ می‌رسیم، که می‌خواستیم اثبات کنیم.



شکل ۳۴-۲۲ آینهٔ کروی کاو به وسیلهٔ بازتاب پرتوهای نور از یک شیء نقطه‌ای O تصویر نقطه‌ای و حقیقی I را تشکیل می‌دهد.

فرمول سطح شکننده (معادلهٔ ۳۴-۸)

پرتوی فرودی که از شیء نقطه‌ای O در شکل ۳۴-۲۳ به نقطهٔ a از سطح شکنندهٔ کروی برخورد می‌کند، مطابق معادلهٔ ۲۹-۴۴ (جلد دوم) شکسته می‌شود

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

اگر α کوچک باشد، θ_1 و θ_2 نیز کوچک خواهند بود و می‌توانیم خود این زاویه‌ها را به جای سینوس بنویسیم. بنابراین، معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$n_1\theta_1 \approx n_2\theta_2 \qquad (۳۴\text{-}۱۸)$$

دوباره از این واقعیت استفاده می‌کنیم که یک زاویهٔ خارجی مثلث برابر با مجموع دو زاویهٔ مجاور دیگر است. با استفاده از این در مثلثهای COa و ICa خواهیم داشت

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad \text{و} \quad \beta = \theta_2 + \gamma \qquad (۳۴\text{-}۱۹)$$

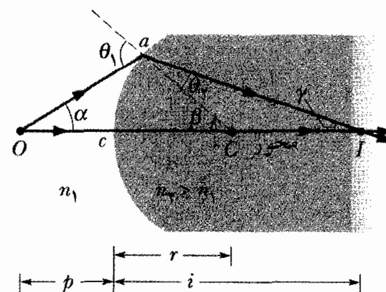
اگر از معادله‌های ۳۴-۱۹ برای حذف θ_1 و θ_2 در معادلهٔ ۳۴-۱۸ استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta \qquad (۳۴\text{-}۲۰)$$

زاویه‌های α، β و γ برحسب رادیان به صورت زیرند:

$$\alpha \approx \frac{\widehat{ac}}{p} \;;\; \beta = \frac{\widehat{ac}}{r} \;;\; \gamma \approx \frac{\widehat{ac}}{i} \qquad (۳۴\text{-}۲۱)$$

فقط معادلهٔ دوم دقیق است. دو معادلهٔ دیگر تقریبی‌اند زیرا I و O مرکز دایره‌هایی نیستند که قوس آنها ac باشد. با وجود این، به ازای α به قدر کافی کوچک (برای پرتوهای نزدیک به محور) عدم دقت معادله‌های ۳۴-۲۱ ناچیز است. قرار دادن معادله‌های ۳۴-۲۱ در معادلهٔ ۳۴-۲۰ به معادلهٔ ۳۴-۸ می‌انجامد که می‌خواستیم ثابت کنیم.



شکل ۳۴-۲۳ تصویر نقطه‌ای حقیقی I از شیء نقطه‌ای O به وسیلهٔ شکست در یک سطح کوژ کروی بین دو محیط تشکیل شده است.

فرمولهای عدسی نازک (معادله‌های ۳۴-۹ و۳۴-۱۰)

قصد ما این است که هر سطح عدسی را به عنوان یک سطح شکنندهٔ مجزا در نظر بگیریم و تصویر تشکیل شده توسط سطح اول را به منزلهٔ شیء برای سطح دوم مورد استفاده قرار دهیم.

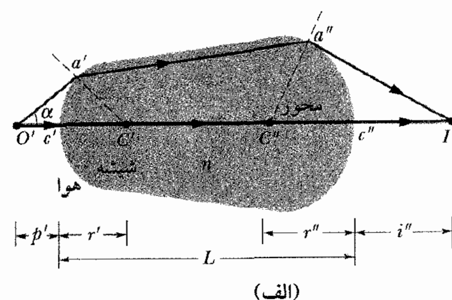
با یک «عدسی» شیشه‌ای کلفت به طول L در شکل ۳۴-۲۲ الف شروع می‌کنیم که سطحهای شکست‌دهندهٔ چپ و راست آن دارای شعاعهای r' و r'' هستند. شیء نقطه‌ای O' مانند آنچه که نشان داده شده است در نزدیکی طرف چپ سطح قرار دارد. پرتوی که از O' در راستای محور مرکزی می‌تابد به هنگام ورود یا خروج از عدسی انحرافی پیدا نمی‌کند.

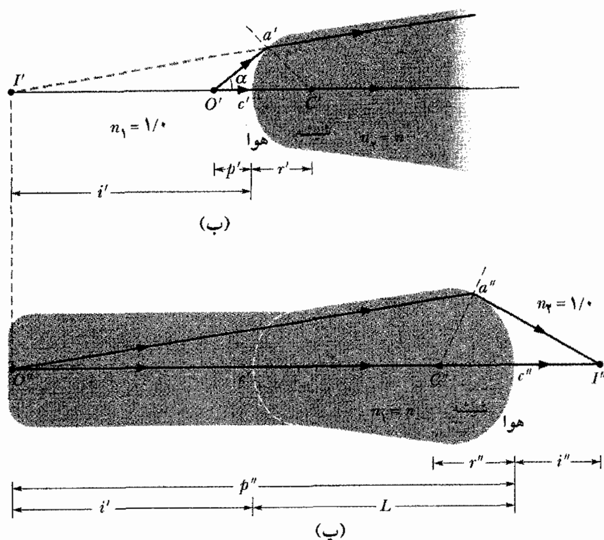
پرتو دوم که با زاویهٔ α نسبت به محور مرکزی از O' می‌تابد در نقطهٔ a' سطح طرف چپ را قطع می‌کند، شکسته می‌شود و سپس سطح دوم را (راست) در نقطهٔ a'' قطع می‌کند. این پرتو دوباره شکسته می‌شود و محور را در I'' که محل تلاقی دو پرتو آمده از O' است قطع می‌کند که تصویر نقطهٔ O' پس از شکست در دو سطح است.

شکل ۳۴-۲۴ ب نشان می‌دهد که سطح اول (چپ) نیز یک تصویر مجازی از O' در I' تشکیل می‌دهد. از معادلهٔ ۳۴-۸ برای یافتن محل I' استفاده می‌کنیم.

$$\frac{n_1}{p}+\frac{n_2}{i}=\frac{n_2-n_1}{r}$$

با قرار دادن $n_1=1$ برای هوا و $n_2=n$ برای شیشهٔ عدسی و با توجه به اینکه فاصلهٔ تصویر منفی است (یعنی در شکل ۳۴-۲۴ ب $i=-i'$ است)، خواهیم داشت





شکل ۳۴-۲۴ (الف) دو پرتو تابیده از شیء نقطه‌ای O' پس از شکست از دو سطح کروی یک عدسی تصویر حقیقی I'' را تشکیل می‌دهند. شیء مقابل سطح کوژ عدسی در طرف چپ عدسی و یک سطح کاو در سمت راست قرار دارد. پرتوی که از نقطه‌های a' و a'' می‌گذرد در واقع نزدیک محور مرکزی عدسی است. (ب) طرف چپ و (پ) طرف راست عدسی در (الف) جداگانه نشان داده شده‌اند.

$$\frac{1}{p'}+\frac{n}{i'}=\frac{n-1}{r'} \qquad (۳۴\text{-}۲۲)$$

در این معادله i' یک عدد مثبت است زیرا علامت منفی را متناسب با یک تصویر مجازی وارد کرده‌ایم.

شکل ۳۴-۲۴ پ دوباره سطح دوم را نشان می‌دهد. به جز اینکه اگر ناظری در نقطهٔ a'' از وجود سطح اول آگاه نباشد، او فکر خواهد کرد که نوری که به آن نقطه می‌خورد در شکل ۳۴-۲۴ب از نقطهٔ I' سرچشمه گرفته است و اینکه ناحیهٔ چپ سطح به صورتی که نشان داده شده با شیشه پر شده است. بنابراین، تصویر (مجازی) I' تشکیل شده به وسیلهٔ سطح اول به صورت شیء واقعی O'' برای سطح دوم است. فاصلهٔ این جسم از سطح دوم عبارت است از

$$p''=i'+L \qquad (۳۴\text{-}۲۳)$$

برای به کار بردن معادلهٔ ۳۴-۸ بر سطح دوم، باید قرار دهیم $n_1=n$ و $n_2=1$، زیرا شیء حالا عملاً داخل شیشه قرار دارد. اگر با معادلهٔ ۳۴-۲۳ جایگزین کنیم، معادلهٔ ۳۴-۸ به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{n}{i'+L}+\frac{1}{i''}=\frac{1-n}{r''} \qquad (۳۴\text{-}۲۴)$$

اکنون فرض می‌کنیم که ضخامت L «عدسی» در شکل ۳۴-۲۲ الف در مقایسه با کمیتهای خطی دیگر (مانند p'، r',i'',p'',i' و r'') چنان کوچک است که می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد. در همه جا از این *تقریب عدسی نازک* پیروی می‌کنیم. با قرار دادن $L=\circ$ در معادلهٔ ۳۴-۲۴ و ترتیب دوبارهٔ طرف راست خواهیم داشت

$$\frac{n}{i'}+\frac{1}{i''}=-\frac{n-1}{r''} \qquad (۳۴-۲۵)$$

با جمع کردن معادله‌های ۳۴-۲۲ و ۳۴-۲۵ داریم

$$\frac{1}{p'}+\frac{1}{i''}=(n-1)\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right)$$

سرانجام اگر فاصلهٔ اولیهٔ شیء را با p و فاصلهٔ نهایی تصویر را با I نمایش دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{i}=(n-1)\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right) \qquad (۳۴-۲۶)$$

که با اندکی تغییر در نمادها همان معادله‌های ۳۴-۹ و ۳۴-۱۰ است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

بازنگری و خلاصهٔ درس

تصویرهای حقیقی و مجازی *تصویر* عبارت است از باز تولید یک شیء از طریق نور. اگر تصویر بتواند روی سطحی تشکیل شود، آن را *تصویر حقیقی* می‌گویند و حتی اگر ناظر وجود نداشته باشد این تصویر وجود دارد. اگر تصویر به دستگاه بینایی ناظر نیاز داشته باشد آن را *تصویر مجازی* می‌گویند.

تشکیل تصویر *آینه‌های کروی، سطحهای شکنندهٔ کروی و عدسیهای نازک* می‌توانند تصویرهایی را از یک چشمهٔ نوری- یک شیء- با تغییر جهت دادن پرتوهای ناشی از چشمه تشکیل دهند. تصویر در جایی تشکیل می‌شود که پرتوهای تغییر جهت یافته یکدیگر را قطع می‌کنند. (که تصویر حقیقی تشکیل می‌شود) یا جایی که امتداد پرتوها رو به عقب یکدیگر را قطع می‌کنند (که تصویر مجازی تشکیل می‌شود). اگر پرتوها در آینهٔ کروی، سطح شکننده یا عدسی نازک به اندازهٔ کافی به محور مرکزی نزدیک باشند، بین *فاصلهٔ جسم* p (که مثبت است) و *فاصلهٔ تصویر* I (که برای تصویرهای حقیقی مثبت و برای تصویرهای مجازی منفی است) رابطه‌های زیر برقرار است:

۱- آینهٔ کروی:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}=\frac{2}{r} \qquad (۳۴-۳ \text{ و } ۳۴-۴)$$

که در آن f فاصلهٔ کانونی آینه و r شعاع انحنای آن است. آینهٔ تخت حالت خاصی است که در آن $r\to\infty$، به طوری که $p=-i$. تصویرهای حقیقی در طرفی از آینه که شیء در آنجا واقع است تشکیل می‌شود و تصویرهای مجازی در طرف مقابل تشکیل می‌شوند.

۲- سطح شکست‌دهندهٔ کروی:

$$\frac{n_1}{p}+\frac{n_2}{i}=\frac{n_2-n_1}{r} \quad (\text{یک سطح}) \qquad (۳۴-۸)$$

که در آن n_1 ضریب شکست ماده‌ای است که شیء در آن واقع است، n_2 ضریب شکست ماده‌ای است که در طرف دیگر سطح شکننده قرار دارد و r شعاع انحنای سطح است. هرگاه شیء در مقابل سطح شکنندهٔ کوژ قرار داشته باشد، شعاع r مثبت است. هرگاه در مقابل سطح کاو قرار بگیرد، r منفی است. تصویرهای حقیقی در طرفی از سطح شکننده تشکیل می‌شوند که در طرف مقابل شیء است و تصویرهای مجازی در همان طرف شیء تشکیل می‌شوند.

۳- عدسی نازک:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \qquad (۳۴-۹ \text{ و } ۳۴-۱۰)$$

که در آن f فاصلهٔ کانونی عدسی، n ضریب شکست عدسی و r_1 و r_2 شعاعهای انحنای دو طرف عدسی هستند، که سطحهای کروی‌اند. سطح کوژ عدسی که مقابل شیء باشد دارای شعاع انحنای مثبت، و سطح کاو عدسی که مقابل شیء باشد دارای شعاع انحنای منفی است. تصویرهای حقیقی در طرفی از عدسی تشکیل می‌شوند.

۳- عدسی نازک:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \qquad (۳۴-۹ \text{ و } ۳۴-۱۰)$$

که در آن f فاصلهٔ کانونی عدسی، n ضریب شکست عدسی و r_1 و r_2 شعاعهای انحنای دو طرف عدسی هستند، که سطحهای کروی‌اند. سطح کوژ عدسی که مقابل شیء باشد دارای شعاع انحنای مثبت، و سطح کاو عدسی که مقابل شیء باشد دارای شعاع انحنای منفی است. تصویرهای حقیقی در طرفی از عدسی تشکیل می‌شوند که طرف مقابل شیء است و تصویرهای مجازی در همان طرف شیء تشکیل می‌شوند.

بزرگنمایی خطی بزرگنمایی خطی m ایجاد شده توسط آینهٔ کروی یا عدسی نازک عبارت است از

$$m=-\frac{i}{p} \qquad (۳۴-۶)$$

بزرگی m با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$|m|=\frac{h'}{h}$$

که در آن h و h' به ترتیب ارتفاع (عمود بر محور مرکزی) شیء و تصویر است.

ابزارهای نوری سه ابزار نوری که بینایی انسان را توسعه می‌دهند عبارت از:

۱- ذره‌بین که *بزرگنمایی زاویه‌ای* m_θ را ایجاد می‌کند و عبارت است از

$$m_\theta=\frac{25\text{cm}}{f} \qquad (۳۴-۱۲)$$

که در آن f فاصلهٔ کانونی ذره‌بین است.

۲- میکروسکوپ مرکب که بزرگنمایی کلی M را ایجاد می‌کند و عبارت است از

$$M=mm_\theta=-\frac{s}{f_{ob}}\frac{25\text{cm}}{f_{ey}} \qquad (۳۴-۱۴)$$

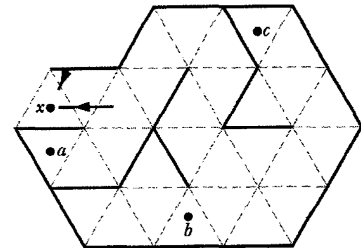
که در آن m بزرگنمایی خطی ایجاد شده به وسیلهٔ شیء، m_θ بزرگنمایی زاویه‌ای ایجاد شده به وسیلهٔ چشمی، s طول لوله و f_{ob} و f_{ey} به ترتیب فاصله‌های کانونی شیئی و چشمی است.

۳- تلسکوپ شکستی که بزرگنمایی زاویه‌ای m_θ زیر را ایجاد می‌کند.

$$m_\theta = -\frac{f_{ob}}{f_{ey}} \qquad (۱۵-۳۴)$$

پرسشها

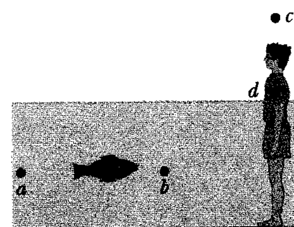
۱ شکل ۳۴-۲۵ دید از بالای یک هزارتوی آینه‌ای را نشان می‌دهد که بر پایهٔ مثلثهایی متساوی الاضلاع روی کف تشکیل شده است. کلیهٔ دیواره‌های هزارتو با آینه پوشانده شده‌اند. اگر در ورودی x بایستید (الف) کدامیک از اجسام a، b و c که در هزارتو مخفی‌اند در امتداد دالانهای مجازی حاصل از ادامهٔ ورودی x دیده می‌شوند؟ (ب) هر جسم چند بار در یک دالان دیده می‌شود؟ و (پ) در انتهای دور دالان چند بار؟



شکل ۳۴-۲۵ پرسش ۱

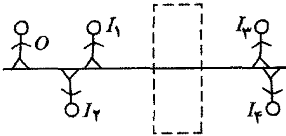
۲- پنگوئنی در امتداد محور مرکزی یک آینهٔ کاو از نقطهٔ کانونی تا فاصله‌ای عملاً در بینهایت راه می‌رود. (الف) تصویر چگونه حرکت می‌کند؟ (ب) آیا ارتفاع تصویر به طور پیوسته زیاد می‌شود، به طور پیوسته کم می‌شود یا به روش پیچیده‌ای تغییر می‌کند؟

۳- شکل ۳۴-۲۶ یک ماهی و یک ماهیگیر را در آب نشان می‌دهد. (الف) آیا ماهیگیر ماهی را در نقطهٔ a می‌بیند یا در نقطهٔ b ؟ (ب) آیا ماهی چشمهای ماهیگیر را در نقطهٔ c می‌بیند یا نقطهٔ d ؟



شکل ۳۴-۲۶ پرسش ۳

۴- در شکل ۳۴-۲۷ آدمک O جلوی یک آینهٔ کروی که در ناحیهٔ مشخص شده قرار دارد، واقع است؛ محور مرکزی که از آینه می‌گذرد نشان داده شده است. چهار آدمک I_1 تا I_4 بیانگر محل کلی و سمتگیری برای تصویری است که ممکن است آینه ایجاد کند. (شکلها کلی رسم شده‌اند و ارتفاع و فاصلهٔ آنها از آینه بدون مقیاس است). (الف) کدام آدمک نمی‌تواند نمایش تصویر باشد؟ از تصویرهای ممکن (ب) کدامیک مربوط به یک آینهٔ کاو است؟ (پ) کدامیک مربوط به یک آینهٔ کوژ است؟ (ت) کدامیک مجازی است؟ و (ث) کدامیک دارای بزرگنمایی منفی است؟



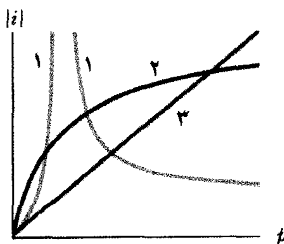
شکل ۳۴-۲۷ پرسش ۴ و ۸

۵- شکل ۳۴-۲۸ چهار عدسی نازک را نشان می‌دهد که همه از یک ماده ساخته شده‌اند و کنارهٔ آنها یا تخت است، یا دارای شعاع انحنایی به بزرگی ۱۰cm هستند. بدون محاسبه عدسیها را به ترتیب بزرگی فاصلهٔ کانونی آنها مرتب کنید.



شکل ۳۴-۲۸ پرسش ۵

۶- جسمی که روی مرکز یک آینهٔ کاو واقع است سپس روی محور مرکزی تا فاصلهٔ ۵/۰m از آینه به آن نزدیک می‌شود. در حین حرکت، فاصلهٔ $|i|$ بین آینه و تصویر ایجاد شده، اندازه‌گیری می‌شود. سپس همین کار با یک آینهٔ کوژ و آینهٔ تخت تکرار می‌شود. شکل ۳۴-۲۹ نتایج را برحسب فاصلهٔ جسم p به دست می‌دهد. کدام منحنی مربوط به کدام آینه است؟ (منحنی ۱ دارای دو قسمت است.)

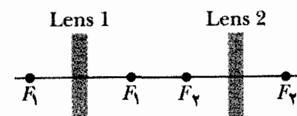


شکل ۳۴-۲۹ پرسش ۶ و ۱۰

۷- وقتی که رکس در فیلم پارک ژوراسیک جیپی را تعقیب می‌کند یک تصویر بازتابیده از رکس را در آینهٔ کناری می‌بینیم که در آن (از باب شوخی) نوشته شده است: «اجسام در آینه، نزدیکتر از موقعیتی هستند که دیده می‌شوند». آیا آینه تخت است یا کوژ یا کاو؟

۸- در شکل ۳۴-۲۷، آدمک O در مقابل یک عدسی متقارن نازک که در ناحیهٔ نشان داده شده قرار دارد، واقع است؛ محور مرکزی که از عدسی عبور می‌کند، نشان داده شده است. چهار آدمک I_1 تا I_4 محل کلی و سمتگیری برای تصویری است که م ممکن است آینه ایجاد کند. (شکلها کلی رسم شده‌اند و ارتفاع و فاصلهٔ آنها از آینه بدون مقیاس است.) (الف) کدام آدمک نمی‌تواند نمایش تصویر باشد؟ از تصویرهای ممکن (ب) کدامیک مربوط به یک عدسی همگراست؟ (پ) کدامیک مربوط به یک عدسی واگراست؟ (ت) کدامیک مجازی است؟ و (ث) کدامیک دارای بزرگنمایی منفی است؟

۹- جدول زیر جزئیات شش تغییر در آرایش دو عدسی نازک است که در شکل ۳۴-۳۰ نشان داده شده‌اند. (F_1 و F_2 نقطه‌های کانونی عدسیهای ۱ و ۲ هستند.) مانند شکل ۳۴-۱۶ شیء در فاصلهٔ p_1 از طرف چپ عدسی ۱ قرار دارد. (الف) بدون محاسبه، برای کدام تغییر می‌توان گفت که تصویر نهایی (ناشی از عدسی ۲) در طرف چپ عدسی ۲ است یا طرف راست و آیا همان سمتگیری شیء را دارد یا نه؟ (ب) برای آن تغییرات «آسان» محل تصویر را به صورت «چپ» یا «راست» و سمتگیری را به صورت «همان» یا «وارونه» به دست دهید.



شکل ۳۴-۳۰ پرسش ۹

تغییر	عدسی ۱	عدسی ۲	
۱	همگرا	همگرا	$p_1 < f_1$
۲	همگرا	همگرا	$p_1 > f_1$
۳	واگرا	همگرا	$p_1 < f_1$
۴	واگرا	همگرا	$p_1 > f_1$
۵	واگرا	واگرا	$p_1 < f_1$
۶	واگرا	واگرا	$p_1 > f_1$

۱۰- جسمی روی مرکز یک عدسی همگرا واقع است و سپس در امتداد محور مرکزی حرکت می‌کند تا در فاصلهٔ $5/0\,m$ از عدسی قرار گیرد. در حین حرکت، مسافت $|i|$ را بین عدسی و تصویری که ایجاد می‌کند اندازه می‌گیریم. این کار مجدداً برای یک عدسی واگرا تکرار می‌شود. کدام منحنی در شکل ۳۴-۲۶ بهترین نتیجه را برای $|i|$ برحسب مسافت جسم p برای این عدسیها به دست می‌دهد؟ (منحنی ۱ شامل دو قسمت است. منحنی ۳ خط مستقیم است.)

مسئله‌ها

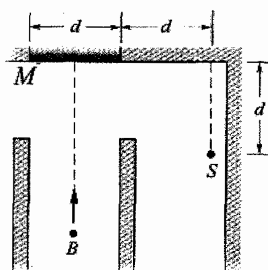
GO مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
•-••• تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است

بخش ۳۴-۳ آینهٔ تخت

•۱- ذره‌ای تقریباً در سطح چشم در فاصلهٔ $10\,cm$ از یک آینهٔ تخت قرار دارد، شما در پشت آن در فاصلهٔ $30\,cm$ از آینه قرار دارید. فاصلهٔ بین چشمهای شما و مکان ظاهری تصویر ذره در آینه چقدر است؟ **ILW**

•۲- با دوربین عکاسی تصویر یک مرغ مگس خوار را در آینهٔ تختی نگاه می‌کنیم. دوربین در فاصلهٔ $4/30\,m$ در جلوی آینه قرار دارد. پرنده در فاصلهٔ $5/00\,m$ از سمت راست شما و $3/30\,m$ از آینه و در سطح دوربین قرار دارد. فاصلهٔ بین دوربین و مکان ظاهری تصویر پرنده در آینه چقدر است؟

••۳- شکل ۳۴-۳۱ دید از بالای یک راهرو را نشان می‌دهد که در یک انتهای آن آینهٔ تخت M قرار دارد. سارق B دزدکی در امتداد راهرو مستقیماً به طرف مرکز آینه حرکت می‌کند. اگر $d = 3/0\,m$ باشد، وقتی نگهبان S می‌تواند ابتدا سارق را در آینه ببینید، او در چه فاصله‌ای از آینه قرار دارد؟

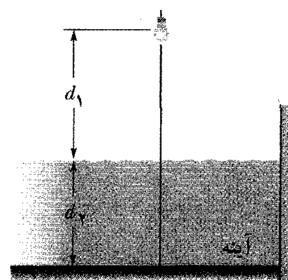


شکل ۳۴-۳۱ مسئلهٔ ۳

••۴- در شکل ۳۴-۳۲، یک چشمهٔ نقطه‌ای نور S در فاصلهٔ d در مقابل پردهٔ مشاهدهٔ A قرار دارد و در نقطهٔ P (هم سطح با S) شدت نور I_p است. سپس یک آینهٔ تخت M را در فاصلهٔ d در پشت S قرار می‌دهیم. به خاطر وجود آینه، شدت I_p چند برابر می‌شود؟

شکل ۳۴-۳۲ مسئلهٔ ۴

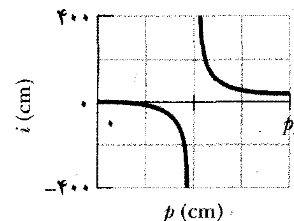
●●●۵- شکل ۳۴-۳۳ لامپ کوچکی را نشان می‌دهد که $d_1 = ۲۵۰\,cm$ بالاتر از سطح آب یک استخر شنا آویزان است و عمق استخر $d_2 = ۲۰۰\,cm$ است. یک آینهٔ بزرگ در کف استخر قرار دارد. تصویر لامپ در چه فاصله‌ای از زیر سطح آینه قرار دارد؟ (راهنمایی: نموداری از دو پرتو مانند نمودار شکل ۳۴-۳ رسم کنید و خم شدن پرتوهای نور بر اثر شکست را در نظر بگیرید. فرض کنید که پرتوها به محور عمودی که از لامپ می‌گذرد نزدیک است و بتوانید از تقریب زاویهٔ کوچک $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$ استفاده کنید.) SSM WWW



شکل ۳۴-۳۳ مسئلهٔ ۵

بخش ۳۴-۵ تصویر در آینه‌های کروی

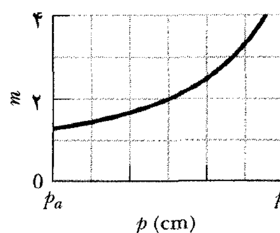
●۶- شیئی در مرکز آینهٔ کروی قرار داده شده و سپس به اندازهٔ ۷۰ cm در امتداد محور مرکزی از آن دور می‌شود در حالی که فاصلهٔ تصویر i اندازه‌گیری می‌شود. شکل ۳۴-۳۴، i را برحسب فاصلهٔ شیء p تا $p_s = ۴۰\,cm$ را به دست می‌دهد. وقتی شیء روی محور مرکزی است و ۷۰ cm از آینه فاصله دارد، فاصلهٔ تصویر چقدر است؟



شکل ۳۴-۳۴ مسئلهٔ ۶

●۷- شعاع انحنای یک آینهٔ کاو ریش تراشی ۳۵/۰ cm است. این آینه به صورتی در دست گرفته شده است که تصویر (مستقیم) صورت شخص ۲/۵۰ برابر بزرگتر دیده می‌شود. فاصلهٔ آینه از صورت چقدر است؟

●۸- شیئی در امتداد محور مرکزی یک آینهٔ کروی حرکت می‌کند در حالی که بزرگنمایی خطی m آن اندازه‌گیری می‌شود. شکل ۳۴-۳۵، m را برحسب فاصلهٔ شیء p برای محدوده‌ای از $p_a = ۲/۰\,cm$ تا $p_b = ۸/۰\,cm$ به دست می‌دهد. وقتی شیء در فاصلهٔ ۱۴/۰ cm از آینه قرار دارد، بزرگنمایی آن چقدر است؟



شکل ۳۴-۳۵ مسئلهٔ ۸

●●۹ تا ۱۶- *آینه‌های کروی*. شیء O روی محور مرکزی یک آینهٔ کروی قرار دارد. برای این وضعیت، هر مسئله در جدول ۳۴-۳ فاصلهٔ شیء p_s (برحسب سانتی‌متر)، نوع آینه و سپس فاصلهٔ (برحسب سانتی‌متر و بدون درنظر گرفتن علامت درست) بین نقطهٔ کانونی و آینه را به دست می‌دهد. مطلوب است محاسبهٔ (الف) شعاع انحنای r (شامل علامت)، (ب) فاصلهٔ تصویر i، و (پ) بزرگنمایی خطی m . همچنین، معین کنید که آیا تصویر (ت) حقیقی است *(R)* یا مجازی *(V)*، (ث) نسبت به شیء O، وارونه است *(I)* یا وارونه نیست *(NI)*، و (ج) در *همان* طرف آینه که شیء O واقع است قرار دارد یا در طرف *مقابل* است؟ SSM ۹، ۱۱، ۱۳ GO ۱۰

جدول ۳۴-۳

مسئله‌های ۹ الی ۱۶: آینه‌های کروی: به فرض مسئله‌ها نگاه کنید.

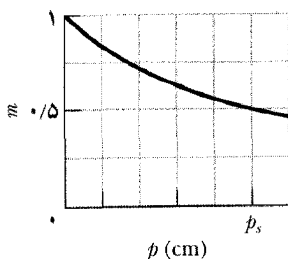
مسئلهٔ	p	آینه	(الف) r	(ب) i	(پ) m	(ت) R/V	(ث) I/NI	(ج) طرف
۹	+۱۲	کاو، ۱۸						
۱۰	+۲۴	کاو، ۳۶						
۱۱	+۱۸	کاو، ۱۲						
۱۲	+۱۵	کاو، ۱۰						
۱۳	+۱۰	کوژ، ۸/۰						
۱۴	+۱۷	کوژ، ۱۴						
۱۵	+۸/۰	کوژ، ۱۰						
۱۶	+۲۲	کوژ، ۳۵						

●●۱۷- (الف) نقطهٔ روشنی با تندی v_0 به طرف یک آینهٔ کروی با شعاع انحنای r و در امتداد محور مرکزی آینه حرکت می‌کند. نشان دهید که تصویر این نقطه با تندی زیر حرکت می‌کند

$$v_I = -\left(\frac{r}{2p-r}\right)^2 v_0$$

که در آن p فاصلهٔ نقطهٔ روشن از آینه در یک لحظهٔ معین است. اکنون فرض کنید که آینه کاو و $r = ۱۵\,cm$ و $v_0 = ۵۰\,cm/s$ باشد. تندی تصویر v_I را وقتی که (ب) $p = ۳۰\,cm$ (خیلی دور از نقطهٔ کانونی)، (پ) $p = ۸/۰\,cm$ (درست نزدیک خارج از نقطهٔ کانونی)، و (ت) $p = ۱۰\,cm$ (خیلی نزدیک به آینه) باشد پیدا کنید.

●●۱۸- شکل ۳۴-۳۶ بزرگنمایی خطی m شیئی را برحسب فاصلهٔ شیء p از یک آینهٔ کروی وقتی که شیء در امتداد محور مرکزی آینه برای محدوده‌ای از مقدارهای p نشان می‌دهد. مقیاس افقی با $p_s = ۱۰/۰\,cm$ مشخص شده است. وقتی شیء در فاصلهٔ ۲۱cm از آینه قرار دارد، بزرگنمایی آن چقدر است؟



شکل ۳۴-۳۶ مسئلهٔ ۱۸

۱۹●● الی ۳۱- *بیشتر در مورد آینه‌ها.* شیء O روی محور مرکزی یک آینهٔ کروی یا تخت قرار دارد. برای این وضعیت، هر مسئله در جدول ۳۴-۴ مربوط است به (الف) نوع آینه، (ب) فاصلهٔ کانونی f (پ) شعاع انحنای r (ت) فاصلهٔ شیء p (ث) فاصلهٔ تصویر i و (ج) بزرگنمایی خطی m. (تمام فاصله‌ها بر حسب سانتی‌متر است.) همچنین هر مسئله به این اشاره دارد که آیا تصویر شیء O حقیقی (R) یا مجازی (V) است، (ح) نسبت به شیء وارونه (I) است یا وارونه نیست (NI)، و (خ) در *همان* طرف شیء O است یا در طرف *مقابل* است. جاهای خالی را در جدول پر کنید. جایی که فقط علامت ذکر نشده، پاسخ همراه با علامت ذکر شود. SSM ۲۷، ۲۹، GO ۲۶

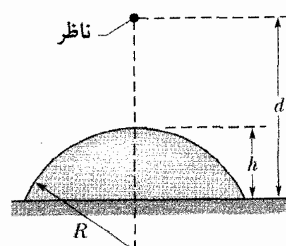
جدول ۳۴-۴

مسئله‌های ۱۹ الی ۳۱: بیشتر در مورد آینه‌ها. به فرضهای مسئله‌ها نگاه کنید.

	(الف)	(ب)	(پ)	(ت)	(ث)	(ج)	(چ)	(ح)	(خ)
مسئلهٔ	نوع	f	r	p	i	m	R/V	I/NI	طرف
۱۹	کاو	۲۰		+۱۰					
۲۰				+۶۰		−۰/۵۰			
۲۱			−۴۰		−۱۰				
۲۲				+۱۰		+۱/۰			
۲۳		+۲۰		+۳۰					
۲۴				+۲۴		۰/۵۰		I	
۲۵		−۳۰			−۱۵				
۲۶		۲۰				+۱/۰			
۲۷	کوژ		۴۰		۴/۰				
۲۸				+۴۰		−۰/۷۰			
۲۹		۳۰				+۰/۲۰			
۳۰		۲۰		+۶۰					همان
۳۱				+۳۰		۰/۴۰		I	

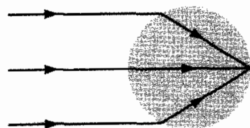
بخش ۳۴-۶ سطحهای شکست‌دهندهٔ کروی

۳۲●- کره‌ای شیشه‌ای دارای شعاع $R = ۵/۰\,\text{cm}$ و ضریب شکست ۱/۶ است. صفحه‌ای به فاصلهٔ ۲/۰ cm از مرکز کره آن را قطع می‌کند و در نتیجه $h = ۳/۰\,\text{cm}$ باقی می‌ماند. قسمت باقیمانده را روی میزی قرار می‌دهیم و ناظری درست در بالای آن و به فاصلهٔ $d = ۸/۰\,\text{cm}$ از میز به آن نگاه می‌کند (شکل ۳۴-۳۷). وقتی ناظر به میز نگاه کند آن را در چه فاصله‌ای می‌بیند؟



شکل ۳۴-۳۷ مسئلهٔ ۳۲

۳۳●- در شکل ۳۴-۳۸، باریکه‌ای از پرتوهای موازی از لیزری بر یک کرهٔ شفاف توپر با ضریب شکست n فرود می‌آید. (الف) اگر یک تصویر نقطه‌ای در پشت کره ایجاد شود، ضریب شکست کره چقدر است؟ (ب) در صورت وجود، چه ضریب شکستی یک تصویر نقطه ای در مرکز کره ایجاد می‌کند؟



شکل ۳۴-۳۸ مسئلهٔ ۳۳

۳۴● الی ۴۰- *سطحهای شکست دهندهٔ کروی.* شیء O روی محور مرکزی یک سطح شکست *دهندهٔ* کروی قرار دارد. برای این وضعیت، هر مسئله در جدول ۳۴-۵ مربوط است به ضریب شکست n_1 محیطی که شیء در آن قرار دارد. (الف) ضریب شکست n_2 در طرف دیگر سطح شکننده، (ب) فاصلهٔ شیء p، (پ) شعاع انحنای r سطح، و (ت) فاصلهٔ تصویر i. (تمام فاصله‌ها بر حسب سانتی‌متر است.) اطلاعات داده نشده را تکمیل کنید، شامل اینکه آیا تصویر (ث) حقیقی است *(R)* یا مجازی *(V)* و (ج) در *همان* طرف سطح است که شیء O واقع است یا در طرف مقابل؟ SSM ۳۵، ۳۷ GO ۳۹

جدول ۳۴-۵

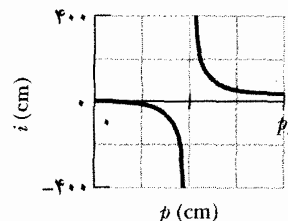
مسئله‌های ۳۴ الی ۴۰: سطحهای شکنندهٔ کروی. به فرضهای مسئله‌ها نگاه کنید.

		(الف)	(ب)	(پ)	(ت)	(ث)	(ج)
مسئلهٔ	n_1	n_2	p	r	i	R/V	طرف
۳۴	۱/۰	۱/۵		+۳۰	+۶۰۰		
۳۵	۱/۰	۱/۵	+۱۰		−۱۳		
۳۶	۱/۰	۱/۵	+۱۰	+۳۰			
۳۷	۱/۵	۱/۰	+۷۰	+۳۰			
۳۸	۱/۵		+۱۰۰	−۳۰	+۶۰۰		
۳۹	۱/۵	۱/۰	+۱۰		−۶/۰		
۴۰	۱/۵	۱/۰		−۳۰	−۷/۵		

بخش ۳۴-۷ عدسیهای نازک

۴۱●- یک عدسی دو کوژ از شیشه‌ای با ضریب شکست ۱/۵ ساخته شده است. شعاع انحنای یک طرف دو برابر شعاع انحنای طرف دیگر و فاصلهٔ کانونی آن ۶۰ mm است. شعاع انحنای (الف) کوچکتر و (ب) بزرگتر چقدر است؟ **SSM WWW**

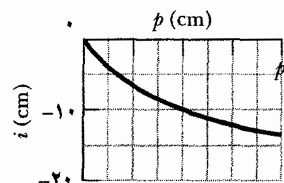
۴۲●- شیئی در مرکز یک عدسی نازک قرار دارد و سپس در حالی‌که فاصلهٔ تصویر i اندازه‌گیری می‌شود، شیء در امتداد محور مرکزی از عدسی دور می‌شود. شکل ۳۴-۳۹، فاصلهٔ i را برحسب فاصلهٔ شیء p تا $p_s = ۶۰\,\text{cm}$ به دست می‌دهد. وقتی $p = ۱۰۰\,\text{cm}$ است فاصلهٔ تصویر چقدر است؟



شکل ۳۴-۳۹ مسئلهٔ ۴۲

•۴۳- با یک عدسی که فاصلهٔ کانونی آن ۲۰/۰m است تصویر خورشید را روی پرده ایجاد می‌کنیم. قطر تصویر چقدر است (برای داده‌های مورد نیاز دربارهٔ خورشید به پیوست پ نگاه کنید.)

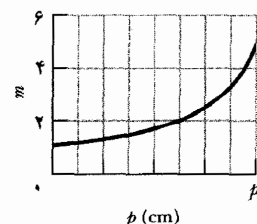
•۴۴- شیئی روی مرکز یک عدسی نازک قرار دارد و سپس در حالی‌که فاصلهٔ تصویر i اندازه‌گیری می‌شود شیء در امتداد محور مرکزی تا فاصلهٔ ۷۰cm از عدسی دور می‌شود. شکل ۳۴-۴۰ فاصلهٔ i را برحسب فاصلهٔ شیء p تا $p_s = ۴۰$cm به دست می‌دهد. وقتی $p = ۷۰$ cm است فاصلهٔ تصویر چقدر است؟



شکل ۳۴-۴۰ مسئله ۴۴

•۴۵- یک دوربین فیلمبرداری با یک عدسی (تنها) به فاصلهٔ کانونی ۷۵mm از شخصی به بلندی ۱۸۰cm از فاصلهٔ ۲۷m عکس می‌گیرد. بلندی تصویر شخص در فیلم چقدر است؟

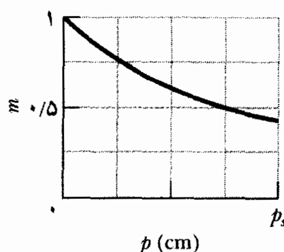
•۴۶- شیئی در امتداد محور مرکزی یک عدسی حرکت می‌کند در حالی‌که بزرگنمایی خطی m آن اندازه‌گیری می‌شود. شکل ۳۴-۴۱ مقدار m را برحسب فاصلهٔ شیء p تا $p_s = ۸/۰$cm به دست می‌دهد. وقتی شیء در فاصلهٔ ۱۴/۰cm از عدسی قرار دارد، بزرگنمایی آن چقدر است؟



شکل ۳۴-۴۱ مسئلهٔ ۴۶

•۴۷- یک اسلاید روشن شده در فاصلهٔ ۴۴cm از پرده قرار دارد. در چه فاصله‌ای از اسلاید باید یک عدسی به فاصلهٔ کانونی ۱۱cm را قرار داد (بین اسلاید و پرده) تا تصویر اسلاید روی پرده تشکیل شود؟ SSM

•۴۸- شکل ۳۴-۴۲ بزرگنمایی خطی m شیئی را برحسب فاصلهٔ شیء p از عدسی وقتی که شیء در امتداد محور مرکزی در محدوده‌ای از مقدارهای p تا $p_s = ۸/۰$cm حرکت می‌کند به دست می‌دهد. وقتی شیء در فاصلهٔ ۳۵cm از عدسی قرار دارد بزرگنمایی آن چقدر است؟



شکل ۳۴-۴۲ مسئلهٔ ۴۸

•۴۹- یک عدسی از شیشه‌ای با ضریب شکست ۱/۵ ساخته شده است. یک طرف عدسی تخت و طرف دیگر آن کوژ با شعاع انحنای ۲۰ cm است. (الف) فاصلهٔ کانونی عدسی چقدر است؟ (ب) اگر شیء در فاصلهٔ ۴۰cm از عدسی قرار داشته باشد، تصویر در کجا تشکیل می‌شود؟

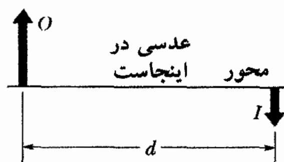
••۵۰ الی ۵۷- *عدسیهای نازک.* شیء O روی محور مرکزی یک عدسی نازک متقارن قرار دارد. برای این وضعیت، هر مسئله در جدول ۳۴-۶ فاصلهٔ شیء p (برحسب سانتی‌متر)، نوع عدسی (حرف C را برای عدسی همگرا و حرف D را برای عدسی واگرا به کار ببرید)، و فاصلهٔ بین نقطهٔ کانونی و عدسی را (برحسب سانتی‌متر و بدون درنظر گرفتن علامت مناسب) به دست می‌دهد. مطلوب است (الف) فاصلهٔ تصویر i ، (ب) بزرگنمایی خطی m شیء با ذکر علامت. همچنین، معین کنید که آیا تصویر (پ) حقیقی است *(R)* یا مجازی *(V)* ، (ت) نسبت به شیء O ، وارونه *(I)* است یا وارونه نیست *(NI)* ، و (ث) در *همان* طرف عدسی که شیء O واقع است قرار دارد یا در طرف *مقابل*؟ SSM ۵۱، ۵۵ GO ۵۷

جدول ۳۴-۶

مسئله‌های ۵۰ الی ۵۷. عدسیهای نازک. به فرضهای مسئله‌ها نگاه کنید.

مسئلهٔ	p	عدسی	(الف) i	(ب) m	(پ) R/V	(ت) I/NI	(ث) طرف
۵۰	+۱۰	۶/۰,D					
۵۱	+۸/۰	۱۲,D					
۵۲	+۱۶	۴/۰,C					
۵۳	+۱۲	۱۶,C					
۵۴	+۱۲	۳۱,D					
۵۵	+۴۵	۲۰,C					
۵۶	+۲۵	۳۵,C					
۵۷	+۲۲	۱۴,D					

●●۵۸- در شکل ۳۴-۴۳، تصویر حقیقی و وارونهٔ I از شیء O توسط یک عدسی معین (نشان داده نشده است) تشکیل شده است، فاصلهٔ تصویر تا شیء $d = ۴۰/۰ \mathrm{cm}$ است که در امتداد محور مرکزی عدسی اندازه‌گیری شده است. بزرگی تصویر نصف شیء است. (الف) چه نوع عدسی برای ایجاد تصویر به کار رفته است؟ (ب) فاصلهٔ شیء و عدسی چقدر است؟ (پ) فاصلهٔ کانونی عدسی چقدر است؟



شکل ۳۴-۴۳ مسئلهٔ ۵۸

●●۵۹ الی ۶۸- *عدسیهایی با شعاعهای داده شده.* شیء O روی محور مرکزی در مقابل یک عدسی نازک قرار دارد. برای این وضعیت، هر مسئله در جدول ۳۴-۷ فاصلهٔ شیء p، ضریب شکست n عدسی، شعاع $r_۱$ سطح نزدیکتر به عدسی و شعاع $r_۲$ سطح دورتر به عدسی را به دست می‌دهد. (تمام فاصله‌ها بر حسب سانتی‌مترند.) مطلوب است (الف) فاصلهٔ تصویر i و (ب) بزرگنمایی خطی m شیء با ذکر علامت. همچنین معین کنید که آیا تصویر (پ) حقیقی است *(R)* یا مجازی *(V)*، (ت) نسبت به شیء O، وارونه *(I)* است یا وارونه نیست *(NI)*، و (ث) در همان طرفی از عدسی که شیء O واقع است، قرار دارد یا در *طرف مقابل*؟ SSM ۶۱ GO ۶۲

جدول ۳۴-۷

مسئله‌های ۵۹ الی ۶۸: عدسیهایی با شعاعهای داده شده. به فرضهای مسئله‌ها نگاه کنید.

			(الف)	(ب)	(پ)	(ت)	(ث)
مسئلهٔ	p	n	$r_۱$	$r_۲$	i	m	R/V	I/NI	طرف

مسئلهٔ	p	n	$r_۱$	$r_۲$	i (الف)	m (ب)	R/V (پ)	I/NI (ت)	طرف (ث)
۵۹	+۳۵	۱/۷۰	+۴۲	+۳۳					
۶۰	+۲۹	۱/۶۵	+۳۵	∞					
۶۱	+۷۵	۱/۵۵	+۳۰	−۴۲					
۶۲	+۱۸	۱/۶۰	−۲۷	+۲۴					
۶۳	+۶۰	۱/۵۰	+۳۵	−۳۵					
۶۴	+۶/۰	۱/۷۰	+۱۰	−۱۲					
۶۵	+۲۴	۱/۵۰	−۱۵	−۲۵					
۶۸	+۱۰	۱/۵۰	−۳۰	−۶۰					
۶۷	+۱۰	۱/۵۰	−۳۰	+۳۰					
۶۶	+۱۰	۱/۵۰	+۳۰	−۳۰					

●●۶۹ الی ۷۹- بیشتر در مورد *عدسیها.* شیء O روی محور مرکزی یک عدسی نازک متقارن قرار دارد. برای این وضعیت، هر مسئله در جدول ۳۴-۸ بیانگر (الف) نوع عدسی، همگرا *(C)* یا واگرا *(D)* بودن، (ب) فاصلهٔ کانونی f، (پ) فاصلهٔ شیء p، (ت) فاصلهٔ تصویر i، و (ث) بزرگنمایی خطی m است (تمام فاصله‌ها بر حسب سانتی‌مترند.) همچنین این جدول بیانگر این است که آیا تصویر (ج) حقیقی است *(R)* یا مجازی *(V)*، (چ) نسبت به شیء O وارونه *(I)* است یا وارونه نیست، (ح) در *همان* طرف عدسی که شیء O واقع است قرار دارد یا در طرف *مقابل*. جاهای خالی در جدول را پر کنید، شامل مقدار m وقتی که فقط نامساوی داده شده باشد. جایی که فقط علامت مشخص نشده، پاسخ با علامت باشد. SSM ۷۵، ۷۹ GO ۷۸

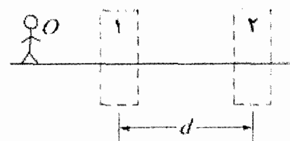
جدول ۳۴-۸

مسئله‌های ۶۹ الی ۷۹: بیشتر در مورد عدسیها. به فرضهای مسئله‌ها نگاه کنید.

مسئلهٔ	نوع (الف)	f (ب)	p (پ)	i (ت)	m (ث)	R/V (ج)	I/NI (چ)	طرف (ح)
۶۹			+۱۶		+۱/۲۵			
۷۰			+۱۶		−۰/۲۵			
۷۱		۲۰	+۸/۰		>۱/۰			
۷۲		۲۰	+۸/۰		<۱/۰		NI	
۷۳		+۱۰	+۵/۰					
۷۴		۱۰	+۵/۰		>۱/۰			
۷۵			+۱۶		+۰/۲۵			
۷۶	C	۱۰	+۲۰					
۷۷			+۱۰		−۰/۵۰			
۷۸			+۱۰		۰/۵۰		NI	
۷۹		۱۰	+۵/۰		۰<۱/۰			همان

●●۸۰ الی ۸۷- *دستگاه دو عدسی.* در شکل ۳۴-۴۴ آدمک O (شیء) روی محور مرکزی مشترک یک دستگاه دو عدسی نازک متقارن که در ناحیه‌های مشخص شده واقع‌اند، قرار دارد. عدسی ۱ در ناحیهٔ نزدیک به O قرار دارد که در فاصلهٔ شیء $p_۱$ است. عدسی ۲ در ناحیهٔ دورتر و در فاصلهٔ d قرار دارد. هر مسئله در جدول ۳۴-۹ بیانگر ترکیب متفاوت عدسیها و فاصله‌های مختلف است که برحسب سانتی‌متر داده شده‌اند. نوع عدسی با C برای عدسی همگرا و با D برای عدسی واگرا مشخص شده‌اند؛ عدد پس از C یا D فاصلهٔ بین عدسی و یکی از نقطه‌های کانونی آن است. (علامت درست فاصلهٔ کانونی داده نشده است).

مطلوب است (الف) فاصلهٔ تصویر $i_۲$ برای تصویر ایجاد شده به وسیلهٔ عدسی ۲ (تصویر نهایی ایجاد شده به وسیلهٔ دستگاه) و (ب) بزرگنمایی خطی کلی M با ذکر علامت. همچنین، تعیین کنید که آیا تصویر نهایی (پ) حقیقی است *(R)* یا مجازی *(V)*، (ت) نسبت به شیء O، وارونه *(I)* است یا وارونه نیست *(NI)*، و (ث) در *همان* طرف عدسی ۲ قرار دارد که شیء O واقع است یا در طرف *مقابل*. SSM WWW ۸۱ GO ۸۷



شکل ۳۴-۴۴ مسئلهٔ ۸۰ تا ۸۷

جدول ۳۴-۹

مسئله‌های ۸۰ الی ۸۷: دستگاه دو عدسی. به فرضهای مسئله‌ها نگاه کنید.

مسئلهٔ	p_1	عدسی ۱	d	عدسی ۲	i_2 (الف)	M (ب)	R/V (پ)	I/NI (ت)	طرف (ث)
۸۰	+۸/۰	D,۶/۰	۱۲	C,۶/۰					
۸۱	+۲۰	C,۹/۰	۸/۰	C,۵/۰					
۸۲	+۱۲	C,۸/۰	۳۲	C,۶/۰					
۸۳	+۱۲	C,۸/۰	۳۰	D,۸/۰					
۸۴	+۱۰	C,۱۵	۱۰	C,۸/۰					
۸۵	+۲۰	D,۱۲	۱۰	D,۸/۰					
۸۶	+۱۵	C,۱۲	۶۷	C,۱۰					
۸۷	+۴/۰	C,۶/۰	۸/۰	D,۶/۰					

بخش ۳۴-۸ ابزارهای نوری

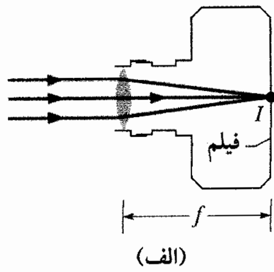
•۸۸- اگر بزرگنمایی زاویه‌ای یک تلسکوپ نجومی ۳۶ و قطر شیئی آن ۷۵mm باشد، کمینهٔ قطر چشمی مورد نیاز برای جمع‌آوری پرتوهای نوری که از یک چشمهٔ نقطه‌ای دور واقع روی محور تلسکوپ وارد شیئی می‌شوند چقدر است؟

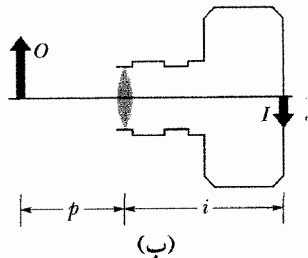
•۸۹- در یک میکروسکوپ از نوع نشان داده شده در شکل ۳۴-۲۰، فاصلهٔ کانونی شیئی ۴/۰۰cm و فاصلهٔ کانونی چشمی ۸/۰۰cm است. فاصلهٔ بین عدسیها ۲۵/۰cm است. (الف) طول لولهٔ s چقدر است؟ (ب) اگر تصویر I در شکل ۳۴-۱۸ درست داخل نقطهٔ کانونی F_1' واقع باشد، فاصلهٔ شیء از شیئی چقدر است؟ سپس مطلوب است تعیین (پ) بزرگنمایی خطی m شیئی، (ت) بزرگنمایی زاویه‌ای چشمی m_θ، و (ث) بزرگنمایی کلی M میکروسکوپ. SSM

••۹۰- در میکروسکوپ معینی، فاصلهٔ شیء از شیئی ۱۰/۰mm است. فاصلهٔ عدسیها ۳۰۰mm و فاصلهٔ تصویر میانی از چشمی ۵۰/۰mm است. بزرگنمایی کلی ایجاد شده به وسیله دستگاه چقدر است؟

••۹۱- شخصی با نقطهٔ نزدیک P_n برابر ۲۵cm با ذره‌بین ساده‌ای با فاصلهٔ کانونی ۱۰cm که در نزدیکی چشم قرار دارد به جسمی نگاه می‌کند. وقتی جسم در جایی قرار دارد که تصویر آن (الف) در P_n و (ب) در بینهایت به نظر می‌رسد، بزرگنمایی زاویه‌ای آن چقدر است؟

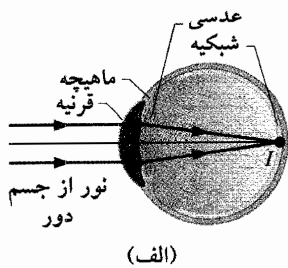
••۹۲- شکل ۳۴-۴۵ الف ساختار اصلی یک دوربین عکاسی را نشان می‌دهد. برای تشکیل تصویری روی فیلم واقع در پشت دوربین یک عدسی به عقب و جلو حرکت داده می‌شود. در یک دوربین معین، با فاصلهٔ i بین عدسی و فیلم برابر با $f=5/0\,cm$، پرتوهای موازی نور از یک شیء خیلی دور O در یک تصویر نقطه‌ای، همانطور که نشان داده شده، روی فیلم همگرا می‌شود. اکنون شیء به فاصلهٔ نزدیکتر $p=100\,cm$ آورده می‌شود و فاصلهٔ عدسی- فیلم به صورتی تنظیم می‌شود که یک تصویر حقیقی و وارونه روی فیلم تشکیل شود (شکل ۳۴-۴۵ ب). (الف) اکنون فاصلهٔ عدسی- فیلم i چقدر است؟ (ب) فاصلهٔ عدسی- فیلم i چقدر تغییر کرده است؟

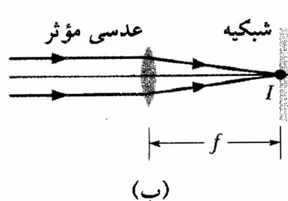


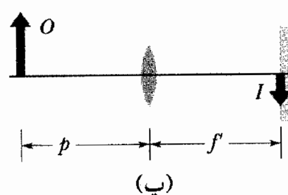


شکل ۳۴-۴۵ مسئلهٔ ۹۲

••۹۳- شکل ۳۴-۴۶ الف ساختار اصلی چشم انسان را نشان می‌دهد. نور از قرنیه وارد و پس از شکسته شدن در چشم به وسیلهٔ یک عدسی که شکل آن (در نتیجه توانایی آن برای تمرکز نور) به وسیلهٔ ماهیچه‌ها کنترل می‌شود هدایت می‌گردد. می‌توان قرنیه و عدسی چشم را به عنوان یک عدسی نازک مؤثر تنها در نظر گرفت، (شکل ۳۴-۴۶ ب). یک چشم «عادی» می‌تواند پرتوهای موازی نور از یک شیء دور O را بر نقطه‌ای واقع در شبکیه در پشت چشم متمرکز کند، که در آنجا پردازش اطلاعات بینایی شروع می‌شود. وقتی شیء به چشم نزدیک شود، ماهیچه‌ها شکل عدسی را تغییر می‌دهند به طوری که پرتوها یک تصویر وارونهٔ حقیقی روی شبکیه تشکیل می‌دهند (شکل ۳۴-۴۶). (الف) فرض کنید که برای پرتوهای موازی شکلهای ۳۴-۴۶الف و ب، فاصلهٔ کانونی f عدسی نازک مؤثر چشم برابر ۲/۵۰cm است. برای شیئی در فاصلهٔ $p=40/0\,cm$، فاصلهٔ کانونی f' عدسی مؤثر چقدر باید باشد تا شیء واضح دیده شود؟ (ب) برای ایجاد فاصلهٔ کانونی f' آیا ماهیچه‌های چشم باید شعاعهای انحنای عدسی چشم را افزایش دهند یا کاهش؟ SSM



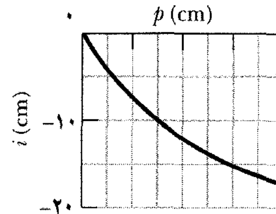




شکل ۳۴-۴۶ مسئلهٔ ۹۳

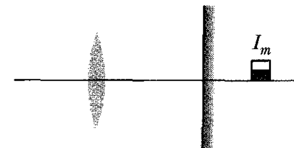
مسئله‌های اضافی

۹۴- شیئی روی مرکز یک آینهٔ کروی قرار دارد و سپس در حالی‌که فاصلهٔ تصویر i را اندازه می‌گیریم ۷۰cm در امتداد محور مرکزی از آن دور می‌شود. شکل ۳۴-۴۷مقدار i را برحسب فاصلهٔ شیء p تا $p_s = ۴۰\,cm$ به دست می‌دهد. وقتی شیء در ۷۰ سانتی‌متری آینه است فاصلهٔ تصویر چقدر است؟



شکل ۳۴-۴۷مسئلهٔ ۹۴

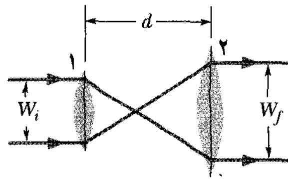
۹۵- در شکل ۳۴-۴۸ جعبه‌ای در سمت چپ روی محور مرکزی یک عدسی همگرا قرار دارد. تصویر I_m جعبه که در آینهٔ تخت تشکیل می‌شود ۴/۰۰cm «درون» آینه قرار دارد. فاصلهٔ بین عدسی و آینه ۱۰/۰cm و فاصلهٔ کانونی عدسی ۲/۰۰cm است. (الف) فاصلهٔ بین جعبه و عدسی چقدر است؟ نور بازتابیده از آینه به عقب برمی‌گردد و از عدسی می‌گذرد که تصویر نهایی جعبه را ایجاد می‌کند. (ب) فاصلهٔ بین عدسی و این تصویر نهایی چقدر است؟



شکل ۳۴-۴۸ مسئلهٔ ۹۵

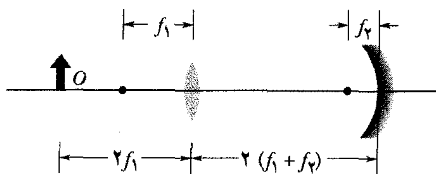
۹۶- دو آینهٔ تخت به طور موازی و به فاصلهٔ ۴۰cm از هم قرار دارند. یک شیء در فاصلهٔ ۱۰cm از یکی از آینه‌ها قرار داده می‌شود. مطلوب است تعیین (الف) کوچکترین، (ب) دومین کوچکترین، (پ) سومین کوچکترین (دو بار رخ می‌دهد)، و (ت) چهارمین کوچکترین فاصلهٔ بین شیء و تصویر آن.

۹۷- شکل ۳۴-۴۹ یک *باریکه گستر* را نشان می‌دهد که از دو عدسی هم محور همگرا با فاصله‌های کانونی f_1 و f_2 که در فاصلهٔ $f_1 + f_2$ از یکدیگر قرار دارند تشکیل شده است. این وسیله می‌تواند در حین اینکه پرتوهای نور لیزر را موازی محور مرکزی که از عدسیها می‌گذرد حفظ کند، قطر باریکه را افزایش دهد. فرض کنید یک باریکهٔ لیزر یکنواخت به پهنای $W_i = ۲/۵mm$ و شدت $I_i = ۹/۰\,kW/m^2$ وارد یک باریکه گستر که در آن $f_1 = ۱۲/۵cm$ و $f_2 = ۳۰/۰\,cm$ است، می‌شود. (الف) W_f و (ب) I_f باریکه‌ای که از باریکه گستر خارج می‌شود چقدر است؟ (پ) اگر عدسی ۱ با یک عدسی واگرا با فاصلهٔ کانونی $f_1 = -۲۶/۰\,cm$ جایگزین شود، مقدار d باریکه گستر چقدر باید باشد؟



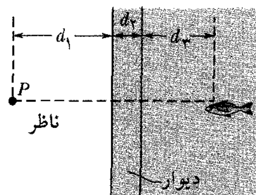
شکل ۳۴-۴۹ مسئلهٔ ۹۷

۹۸- در شکل ۳۴-۵۰، یک شیء در فاصله‌ای از یک عدسی همگرا واقع است که دو برابر فاصلهٔ کانونی f_1 عدسی است. در طرف دیگر عدسی آینهٔ کاوی به فاصلهٔ کانونی f_2 قرار دارد که فاصلهٔ آن از عدسی $۲(f_1 + f_2)$ است. نور از شیء به سمت راست می‌تابد و پس از عبور از عدسی به آینه می‌رسد و در آنجا بازتاب می‌کند و به طرف چپ می‌رود و پس از عبور از عدسی تصویر نهایی از شیء را تشکیل می‌دهد. (الف) فاصلهٔ بین عدسی و تصویر نهایی و (ب) بزرگنمایی خطی کلی M شیء چقدر است؟ آیا تصویر (پ) حقیقی است یا مجازی (اگر مجازی باشد لازم است شخصی از عدسی به آینه نگاه کند)، (ت) طرف چپ عدسی واقع است یا راست آن، و (ث) نسبت به شیء وارونه است یا وارونه نیست؟



شکل ۳۴-۵۰ مسئلهٔ ۹۸

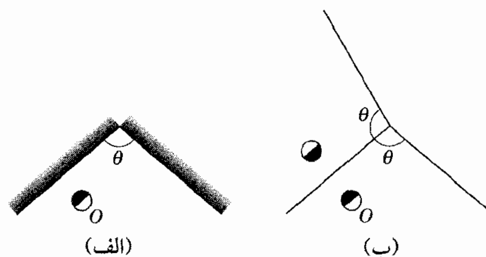
۹۹- در شکل ۳۴-۵۱ ناظری در نقطهٔ P از میان دیوارهٔ شیشه‌ای ظرف آب به یک ماهی نگاه می‌کند. ناظر و ماهی هم سطح هستند؛ ضریب شکست شیشه ۸/۵ و ضریب شکست آب ۴/۳ است. فاصله‌ها برابرند با $d_1 = ۸/۰\,cm$ ، $d_2 = ۳/۰\,cm$ و $d_3 = ۶/۸\,cm$. (الف) برای ماهی، ناظر در چه فاصله‌ای به نظر می‌رسد؟ (راهنمایی: ناظر یک شیء است. نور از شیء از سطح بیرونی دیواره عبور می‌کند و این سطح مانند سطح شکننده عمل می‌کند. تصویر حاصل از این سطح را به دست آورید. سپس این تصویر را به عنوان شیء برای سطح داخلی دیواره که مانند سطح شکنندهٔ دیگری عمل می‌کند، در نظر بگیرید. تصویر حاصل از این سطح را به دست آورید، در نتیجه پاسخ به دست می‌آید.) (ب) برای ناظر ماهی در چه فاصله‌ای به نظر می‌رسد؟



شکل ۳۴-۵۱ مسئلهٔ ۹۹

۱۰۰- شکل ۳۴-۵۲ الف نمای از بالای دو آینهٔ تخت قائم را نشان می‌دهد که شیء O در بین آنها قرار دارد. اگر به آینه‌ها نگاه کنیم، چندین تصویر از O دیده می‌شود. با رسم بازتاب در هر آینه، مشابه کاری که در شکل ۳۴-۵۲ ب برای آینهٔ طرف

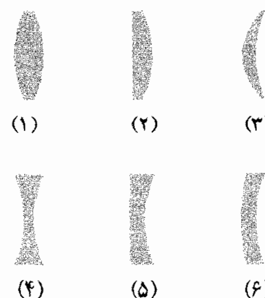
چپ صورت گرفته است، می‌توان تصویرها را در ناحیهٔ زاویه‌ای بین آینه‌ها به دست آورد. سپس بازتاب هر بازتاب را رسم می‌کنیم. این کار را در آینهٔ سمت چپ و سمت راست ادامه می‌دهیم تا بازتابها در پشت آینه‌ها تلاقی یا همپوشانی کنند. سپس می‌توانیم تعداد تصویرهای O را بشماریم. اگر θ برابر با (الف) $90°$، (ب) $45°$، و (پ) $60°$ باشد، چند تصویر O را می‌توانید ببینید؟ (ت) اگر $\theta = 120°$ باشد، مطلوب است (ث) کمترین و (ج) بیشترین تعداد تصویری که با توجه به موقعیت مکانی خود و مکان O می‌توانید ببینید. (چ) در هر وضعیت، محل تصویرها و سمتگیری آنها را، همانند شکل ۳۴-۵۲ ب، رسم کنید.



شکل ۳۴-۵۲ مسئلهٔ ۱۰۰

۱۰۱- یک شیء نقطه‌ای ۱۰ cm از یک آینهٔ تخت فاصله دارد و چشم ناظر (با قطر قرنیه برابر ۵/۰ mm) در فاصلهٔ ۲۰ cm قرار دارد. فرض کنید چشم و شیء روی یک خط عمود بر سطح آینه قرار دارند، در مشاهدهٔ بازتاب نقطه چه مساحتی از آینه به کار می‌رود، (شکل ۳۴-۴ را در نظر بگیرید.)

۱۰۲- از قرصهایی از شیشهٔ تخت ($n = 1/5$) با استفاده از یک ماشین تراش که می‌تواند سطحها را با شعاع انحنای ۴۰ cm یا ۶۰ cm بتراشد، عدسیهای نشان داده شده در شکل ۳۴-۵۳ را می‌تراشیم. در یک عدسی که این یا آن شعاع مناسب باشد، شعاع ۴۰ cm را انتخاب می‌کنیم. سپس هر عدسی را جلوی نور خورشید می‌گیریم تا تصویری از خورشید تشکیل شود. مطلوب است تعیین (الف) فاصلهٔ کانونی f و (ب) نوع تصویر (حقیقی یا مجازی) برای عدسی ۱ (دو کوژ)، (پ) f و (ت) نوع تصویر برای عدسی ۲ (کوژ – تخت)، (ث) f و (ج) نوع تصویر برای عدسی ۳ (کوژ هلالی)، (چ) f و (ح) نوع تصویر برای عدسی ۴ (دو کاو)، (خ) f و (د) نوع عدسی ۵ (کاو – تخت)، (ذ) f و (ر) نوع عدسی ۶ (کاو هلالی).



شکل ۳۴-۵۳ مسئلهٔ ۱۰۲

۱۰۳- فرمول $\frac{1}{p}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}$ را شکل *گاؤسی* فرمول عدسی نازک می‌نامند. شکل دیگر این فرمول، به نام شکل *نیوتونی*، با در نظر گرفتن فاصلهٔ x شیء تا نقطهٔ کانونی اول و فاصلهٔ x' تصویر از نقطهٔ کانونی دوم به دست می‌آید. نشان دهید که شکل نیوتونی فرمول عدسی نازک به صورت زیر است

$$xx' = f^2$$ SSM

۱۰۴- نشان دهید که فاصلهٔ بین شیء و تصویر حقیقی آن که به وسیلهٔ یک عدسی همگرای نازک ایجاد می‌شود، همیشه بزرگتر یا مساوی چهار برابر فاصلهٔ کانونی عدسی است.

۱۰۵- دو عدسی نازک با فاصله‌های کانونی f_1 و f_2 با هم در تماس‌اند. نشان دهید که آنها معادل با یک عدسی نازک تنها هستند که فاصلهٔ کانونی آن برابر است با

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$$ SSM

۱۰۶- فاصلهٔ یک شیء روشن و پرده‌ای مقدار ثابت D است. (الف) نشان دهید که یک عدسی همگرا با فاصلهٔ کانونی f واقع میان شیء و پرده، یک تصویر حقیقی برای دو مکان عدسی روی پرده تشکیل می‌دهد که فاصلهٔ بین دو مکان با رابطهٔ زیر داده می‌شود

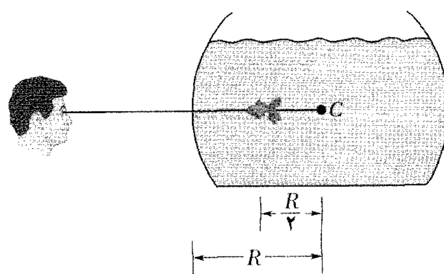
$$d = \sqrt{D(D-4f)}$$

(ب) نشان دهید که نسبت بزرگیهای دو تصویر برای این دو مکان عدسی عبارت است از

$$\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2$$

۱۰۷- حشره‌ای به بلندی H در مقابل عدسی ۱ روی محور مرکزی آن می‌نشیند. عدسی تصویر حشره را در فاصلهٔ $d = 20\text{cm}$ تشکیل می‌دهد؛ سمتگیری تصویر مانند سمتگیری حشره و بلندی آن $H_I = 2/0\text{H}$ است. (الف) فاصلهٔ کانونی f_1 عدسی و (ب) فاصلهٔ شیء p_1 حشره چقدر است؟ سپس حشره عدسی ۱ را ترک می‌کند و مقابل عدسی ۲ می‌نشیند که این بار هم تصویر در همان فاصلهٔ $d = 20\text{cm}$ تشکیل می‌شود و سمتگیری تصویر هم مانند سمتگیری حشره است ولی حالا $H_I = 0/5\text{H}$ است. (پ) f_2 و (ت) p_2 چقدرند؟ SSM

۱۰۸- یک ماهی در یک ظرف کروی به شعاع R هم سطح با مرکز C ظرف و در فاصلهٔ $R/2$ از شیشه قرار دارد (شکل ۳۴-۵۴). برای شخصی که در امتداد خطی شامل ماهی و مرکز نگاه می‌کند و ماهی در طرف نزدیک مرکز است بزرگنمایی ماهی که به وسیلهٔ آب داخل ظرف حاصل می‌شود چقدر است؟ ضریب شکست آب ۱/۳۳ است. از دیوارهٔ شیشه‌ای ظرف چشم‌پوشی کنید. فرض کنید که شخص با یک چشم نگاه می‌کند. (*راهنمایی:* معادلهٔ ۳۴-۵ برقرار است ولی معادلهٔ ۳۴-۶ برقرار نیست. لازم است که با نمودار پرتو برای این وضعیت کار کنید و فرض کنید که پرتوها به خط دید ناظر نزدیک‌اند، یعنی انحراف آنها از این خط ناچیز است.)



شکل ۳۴-۵۴ مسئلهٔ ۱۰۸

۱۰۹- شیئی به بلندی ۱/۰cm در مقابل یک دستگاه دو عدسی قرار داده شده است. عدسی ۱ (عدسی نزدیکتر به شیء) دارای فاصلهٔ کانونی $f_۱=-۱۵\text{cm}$، عدسی ۲ دارای $f_۲=۱۲\text{cm}$ و فاصلهٔ دو عدسی $d=۱۲\text{cm}$ است. برای تصویر حاصل از عدسی ۲، مطلوب است تعیین (الف) فاصلهٔ تصویر $i_۲$ (با ذکر علامت)، (ب) ارتفاع تصویر، (پ) نوع تصویر (حقیقی یا مجازی)، و سمتگیری تصویر (نسبت به شیء وارونه است یا وارونه نیست).

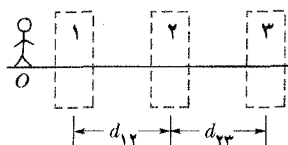
۱۱۰- شیئی در فاصلهٔ ۴۰cm در مقابل یک دستگاه دو عدسی قرار داده شده است. عدسی ۱ (عدسی نزدیکتر به شیء) دارای فاصلهٔ کانونی $f_۱=+۲۰\text{cm}$، عدسی ۲ دارای $f_۲=-۱۵\text{cm}$ و فاصلهٔ دو عدسی $d=۱۲\text{cm}$ است. برای تصویر حاصل از عدسی ۲، مطلوبَ است تعیین (الف) فاصلهٔ تصویر $i_۲$ (با ذکر علامت)، (ب) سمتگیری تصویر (نسبت به شیء وارونه است یا وارونه نیست)، و (پ) نوع تصویر (حقیقی یا مجازی). (ت) بزرگنمایی خطی خالص چقدر است؟

۱۱۱- سکه‌ای در فاصلهٔ ۲۰cm در مقابل یک دستگاه دو عدسی قرار داده شده است. عدسی ۱ (عدسی نزدیکتر به سکه) دارای فاصلهٔ کانونی $f_۱=+۱۰\text{cm}$، عدسی ۲ دارای $f_۲=۱۲/۵\text{cm}$ و فاصلهٔ دو عدسی $d=۳۰\text{cm}$ است. برای تصویر حاصل از عدسی ۲، مطلوب است تعیین (الف) فاصلهٔ تصویر $i_۲$ (با ذکر علامت)، (ب) بزرگنمایی خطی کلی، (پ) نوع تصویر (حقیقی یا مجازی)، و (ت) سمتگیری تصویر (نسبت به سکه وارونه است یا وارونه نیست).

۱۱۲- شیئی به فاصلهٔ ۲۰cm در سمت چپ یک عدسی همگرای نازک با فاصلهٔ کانونی ۳۰cm قرار دارد. (الف) فاصلهٔ تصویر i چقدر است؟ (ب) نموداری با پرتوها رسم کنید که مکان تصویر را نشان دهد.

۱۱۳ تا ۱۱۸- *دستگاه سه عدسی.* در شکل ۳۴-۵۵ آدمک O (شیء) روی محور مرکزی مشترک سه عدسی نازک متقارن قرار دارد که عدسیها در سه ناحیهٔ نشان داده شده واقع‌اند. عدسی ۱ در ناحیهٔ نزدیک به O قرار دارد که در فاصلهٔ شیء $p_۱$ واقع است. عدسی ۲ در ناحیهٔ میانی در فاصلهٔ $d_{۱۲}$ از عدسی ۱ قرار دارد. عدسی ۳ در ناحیهٔ دورتر در فاصلهٔ $d_{۲۳}$ از عدسی ۲ واقع است. هر مسئله در جدول ۳۴-۱۰ بیانگر ترکیب متفاوتی از عدسیها و در فاصله‌های مختلف است که برحسب سانتی‌متر داده شده‌اند. نوع عدسی با C برای همگرا و با D برای واگرا نشان داده شده است؛ عددهایی که پس از C یا D قید شده‌اند بیانگر فاصلهٔ بین عدسی و هر کدام از نقطه‌های کانونی است (علامت مناسب فاصلهٔ کانونی مشخص نشده است).

مطلوب است (الف) فاصلهٔ تصویر $i_۳$ برای تصویر (نهایی) حاصل از عدسی ۳ (تصویر نهایی که به وسیلهٔ دستگاه ایجاد شده است) و (ب) بزرگنمایی خطی کلی M برای دستگاه با ذکر علامت. همچنین تعیین کنید که آیا تصویر نهایی (پ) حقیقی (R) است یا مجازی (V)، (ت) نسبت به O وارونه (I) است یا وارونه نیست (NI)، و (ث) در همان طرف عدسی ۳ واقع است که جسم O قرار دارد یا در طرف مقابل؟ ۱۱۳



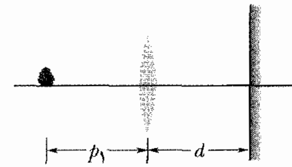
شکل ۳۴-۵۵ مسئله‌های ۱۱۳ تا ۱۱۸

جدول ۳۴-۱۰

مسئله‌های ۱۱۳ الی ۱۱۸: دستگاه سه - عدسی. به فرضهای مسئله‌ها نگاه کنید.

	$p_۱$	عدسی ۱	$d_{۱۲}$	عدسی ۲	$d_{۲۳}$	عدسی ۳	(الف) $i_۳$	(ب) M	(پ) R/V	(ت) I/NI	(ث) طرف
۱۱۳	+۱۲	C, ۸/۰	۲۸	C, ۶۰	۸/۰	C, ۶/۰					
۱۱۴	+۴/۰	D, ۶/۰	۹/۶	C, ۶۰	۱۴	C, ۴/۰					
۱۱۵	+۱۸	C, ۶/۰	۱۵	C, ۳۰	۱۱	C, ۳/۰					
۱۱۶	+۴/۰	C, ۶/۰	۸/۰	D, ۴/۰	۵/۷	D, ۱۲					
۱۱۷	+۸/۰	D, ۸/۰	۸/۰	D, ۱۶	۵/۱	C, ۸/۰					
۱۱۸	+۲/۰	C, ۶۰	۱۵	C, ۶۰	۱۹	C, ۵/۰					

۱۱۹- در شکل ۳۴-۵۶ یک میوهٔ کاج در فاصلهٔ $p_1=1/0\,m$ در مقابل یک عدسی با فاصلهٔ کانونی $f_1=0/50\,m$ قرار دارد و یک آینهٔ تخت در فاصلهٔ $d=2/0\,m$ از آن و در پشت عدسی واقع است. نور از میوهٔ کاج به طرف راست از عدسی می‌گذرد و به وسیلهٔ آینه بازتاب می‌کند و پس از عبور از عدسی به طرف چپ تصویر نهایی از میوهٔ کاج را تشکیل می‌دهد. (الف) فاصلهٔ بین عدسی و این تصویر و (ب) بزرگنمایی خطی کلی میوهٔ کاج چقدر است؟ آیا تصویر (پ) حقیقی است یا مجازی (اگر مجازی باشد لازم است شخصی از میان عدسی به آینه نگاه کند)، (ت) سمت چپ عدسی قرار دارد یا سمت راست، و (ث) نسبت به میوهٔ کاج وارونه است یا وارونه نیست؟



شکل ۳۴-۵۶ مسئلهٔ ۱۱۹

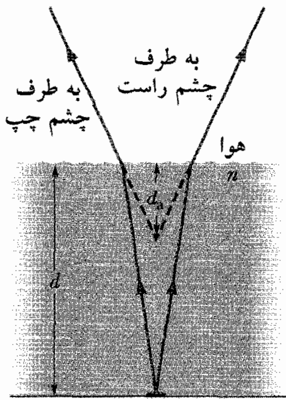
۱۲۰- انتهای یک میلهٔ شیشه‌ای دراز $(n=1/5)$ به صورت سطح کوژ با شعاع $6/0\,cm$ است. شیئی در هوا روی محور میله به فاصلهٔ $10\,cm$ از انتهای کوژ واقع است. (الف) فاصلهٔ بین شیء و تصویری که به وسیلهٔ میله تشکیل می‌شود چقدر است؟ (ب) در چه محدوده‌ای از فاصله‌ها از انتهای میله باید شیء را قرار داد تا اینکه تصویر مجازی به دست آید؟

۱۲۱- یک شیء راست کوتاه به طول L روی محور مرکزی یک آینهٔ کروی و به فاصلهٔ p از آینه قرار دارد. (الف) نشان دهید که تصویر آن در آینه دارای طول L' است که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$L'=L\left(\frac{f}{p-f}\right)^2$$

(*راهنمایی:* محل دو انتهای شیء را مشخص کنید.) (ب) نشان دهید که *بزرگنمایی طولی* $m'(=L'/L)$ برابر با m^2 است که در آن m بزرگنمایی خطی است.

۱۲۲- به سکه‌ای که در ته استخری از مایع با عمق d و ضریب شکست n قرار دارد نگاه می‌کنید (شکل ۳۴-۵۷). چون با دو چشم نگاه می‌کنید، کدام چشم پرتوهای نور مختلف از سکه را می‌بینند، سکه در جایی دیده می‌شود که امتداد پرتوها در عمق d_a به هم می‌رسند نه d. با فرض اینکه پرتوهای دیده شده در شکل ۳۴-۵۷ به محور قائمی که از سکه می‌گذرد نزدیک‌اند، نشان دهید که $d_a=d/n$. (*راهنمایی:* از تقریب زاویهٔ کوچک $\sin\theta\approx\tan\theta\approx\theta$ استفاده کنید.)



شکل ۳۴-۵۷ مسئلهٔ ۱۲۲

۱۲۳- ثابت کنید که اگر آینهٔ تختی به مقدار زاویهٔ α بچرخد، پرتو بازتابیده به اندازهٔ 2α خواهد چرخید. نشان دهید که این نتیجه برای $\alpha=45^\circ$ منطقی است.

۱۲۴- شیئی در فاصلهٔ $30/0\,cm$ از یک آینهٔ کروی و روی محور مرکزی آینه قرار دارد. آینه تصویری وارونه با بزرگنمایی خطی قدر مطلق $0/500$ ایجاد می‌کند. فاصلهٔ کانونی آینه چقدر است؟

۱۲۵- یک آینهٔ کاو دارای شعاع انحنای $24\,cm$ است. اگر تصویر تشکیل شده (الف) مجازی و سه برابر بزرگی شیء باشد، (ب) حقیقی و سه برابر بزرگی شیء باشد و (پ) حقیقی و یک سوم بزرگی شیء باشد، شیء در چه فاصله‌ای از آینه قرار داشته است؟

۱۲۶- یک دانهٔ فلفل در مقابل یک عدسی قرار دارد. بزرگنمایی خطی دانه برابر $+0/300$ است. قدر مطلق فاصلهٔ کانونی عدسی برابر $40/0\,cm$ است. تصویر در چه فاصله‌ای از عدسی قرار دارد؟

۱۲۷- اگر تصویر به وسیلهٔ پرتوهایی که فقط زاویه‌های کوچک با محور مرکزی می‌سازند تشکیل شود، معادلهٔ $\frac{1}{p}+\frac{1}{i}=\frac{2}{r}$ برای آینه‌های کروی به طور تقریبی معتبر است. در واقع، بسیاری از زاویه‌ها بزرگ‌اند و این باعث محوشدن اندک تصویر می‌شود. میزان این را می‌توانید پیدا کنید. به شکل ۳۴-۲۲ نگاه کنید و پرتوی را در نظر بگیرید که از یک چشمهٔ نقطه‌ای (شیء) روی محور مرکزی می‌آید و با محور زاویهٔ α می‌سازد.

نخست، نقطهٔ تقاطع پرتو با آینه را پیدا کنید. اگر مختصات این نقطه x و y باشند و مبدأ در مرکز انحنا باشد، در این صورت $y=(x+p-r)\tan\alpha$ و $x^2+y^2=r^2$ ، که در آن p فاصلهٔ شیء و r شعاع انحنای آینه است. سپس، برای یافتن زاویهٔ β در نقطهٔ تقاطع از $\tan\beta=y/x$ استفاده کنید و پس از آن برای پیداکردن مقدار γ از $\alpha+\gamma=2\beta$ بهره بگیرید. سرانجام، برای پیداکردن فاصلهٔ تصویر i از رابطهٔ $\tan\gamma=y/(x+i-r)$ استفاده کنید.

(الف) فرض کنید که $r = ۱۲\,\text{cm}$ و $p = ۲۰\,\text{cm}$ باشد. به ازای هر مقدار α داده شده در زیر، موقعیت تصویر را پیدا کنید، یعنی، وضعیت نقطه‌ای را که پرتو بازتابیده محور مرکزی را قطع می‌کند: ۰/۵۰۰ ، ۰/۱۰۰ ، ۰/۰۱۰۰ رادیان. نتیجه را با مقدار به دست آمده از معادلهٔ $\frac{۱}{p}+\frac{۱}{i}=\frac{۲}{r}$ مقایسه کنید. (ب) محاسبه‌ها را به ازای $p = ۴/۰۰\,\text{cm}$ تکرار کنید.

۱۲۸- یک فنجان کوچک چای سبز روی محور مرکزی یک آینهٔ کروی قرار دارد. بزرگنمایی خطی فنجان برابر ۰/۲۵۰ و فاصلهٔ بین آینه و نقطهٔ کانونی آن برابر ۲/۰۰cm است. (الف) فاصلهٔ بین آینه و تصویری که ایجاد می‌کند چقدر است؟ (ب) آیا فاصلهٔ کانونی مثبت است یا منفی؟ (پ) تصویر حقیقی است یا مجازی؟

۱۲۹- لایه‌ای از آب $(n = ۱/۳۳)$ به ضخامت ۲۰mm روی لایه‌ای از کربن تترا کلراید $(n = ۱/۴۶)$ به ضخامت ۴۰mm در داخل مخزنی شناور است. سکه‌ای در ته مخزن قرار دارد. سکه در چه عمقی زیر سطح بالایی آب به نظر خواهد رسید؟ (*راهنمایی:* نتیجه و فرضهای مسئلهٔ ۱۲۲ را به کار ببرید و از نمودار پرتو برای این وضعیت استفاده کنید.)

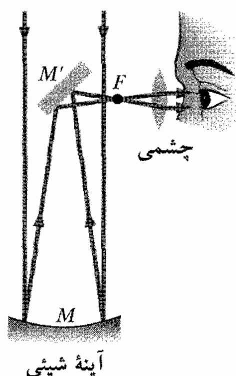
۱۳۰- یک هزارپا در ۱/۰ متری جلوی سطح نزدیک یک کرهٔ شفاف به قطر ۰/۷۰m قرار دارد. (الف) تصویر هزارپا در چه فاصله‌ای از سطح به نظر می‌رسد؟ (ب) اگر بلندی هزارپا ۲/۰mm باشد، بلندی تصویر چقدر است؟ (پ) آیا تصویر وارونه است؟

۱۳۱- (الف) نشان دهید که اگر شیء O در شکل ۳۴-۹ پ از نقطهٔ کانونی F_1 به طرف چشم ناظر حرکت کند، تصویر از بینهایت حرکت می‌کند و زاویهٔ θ' (و در نتیجه بزرگنمایی زاویه‌ای m_θ) افزایش می‌یابد. (ب) اگر این فرایند را ادامه دهید وقتی m_θ دارای بیشینه مقدار قابل استفاده باشد (می‌توانید باز هم θ_m را افزایش دهید ولی تصویر دیگر واضح نخواهد بود) تصویر در کجا قرار دارد؟ (پ) نشان دهید مقدار بیشینهٔ قابل استفادهٔ θ_m برابر $1+(۲۵\,\text{cm})/f$ و نیز (ت) نشان دهید که در این وضعیت بزرگنمایی زاویه‌ای با بزرگنمایی خطی برابر است.

۱۳۲- ایزاک نیوتون اطمینان داشت (که معلوم شد اشتباه است) که ابیراهی رنگی یک خاصیت ذاتی برای تلسکوپهای شکستی است و تلسکوپ بازتابی را اختراع کرد که در شکل ۳۴-۵۸ نشان داده شده است. او دومین طرح تلسکوپ خود را با توان بزرگنمایی ۳۸ به شورای سلطنتی انگلستان ارائه داد که هنوز هم در آنجا نگهداری می‌شود. در شکل ۳۴-۵۸ نور فرودی تقریباً موازی محور تلسکوپ روی آینهٔ شیئی تلسکوپ M فرود می‌آید. پرتوها پس از بازتاب از یک آینه کوچک M' (شکل بدون مقیاس رسم شده است) یک تصویر حقیقی و وارونه را در *صفحهٔ کانونی* (صفحه‌ای که عمود بر خط دید و در نقطهٔ کانونی F قرار دارد) تشکیل می‌دهند. سپس این تصویر با چشمی دیده می‌شود. (الف) نشان دهید که بزرگنمایی زاویه‌ای θ_m دستگاه با رابطهٔ ۳۴-۱۵ داده می‌شود

$$m_\theta = -f_{\text{ob}} / f_{\text{ey}}$$

که در آن f_{ob} فاصلهٔ کانونی آینهٔ شیئی و f_{ey} فاصلهٔ کانونی چشمی است. (ب) آینهٔ ۲۰۰ اینچی در تلسکوپ بازتابی در کوه پالومار کالیفرنیا دارای فاصلهٔ کانونی ۱۶/۸m است. وقتی شیء یک خط‌کش و در فاصلهٔ ۲ کیلومتری باشد بزرگی تصویر آن را که به وسیلهٔ این آینه ایجاد می‌شود حدس بزنید. پرتوهای فرودی را موازی در نظر بگیرید. (پ) آینهٔ یک تلسکوپ بازتابی نجومی دیگر دارای شعاع انحنای مؤثر ۱۰m است («مؤثر» از این نظر که چنین آینه‌هایی به جای کروی به صورت سهمی تراشیده می‌شوند تا عیب ابیراهی کروی از بین برود.) فاصلهٔ کانونی چشمی باید چقدر باشد تا بزرگنمایی زاویه‌ای ۲۰۰ به دست آید؟



شکل ۳۴-۵۸ مسئلهٔ ۱۳۲

۱۳۳- یک باریکهٔ نازک پرتوهای نور از سمت چپ به کره‌ای شیشه‌ای و به سوی مرکز آن فرود می‌آید (کره یک عدسی است ولی به طور مسلم عدسی *نازک* نیست.) با تقریب زاویهٔ فرود را °۰ در نظر بگیرید و فرض کنید که ضریب شکست شیشه $n < ۲/۰$ است. (الف) فاصلهٔ بین تصویر حاصل از کره و سمت راست کره بر حسب n و شعاع کره r چقدر است؟ (ب) آیا تصویر در سمت چپ آن طرف است یا راست آن؟

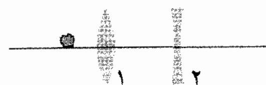
(*راهنمایی:* برای تعیین مکان تصویری که به وسیلهٔ شکست در سمت چپ کره حاصل می‌شود معادلهٔ ۳۴-۸ را به کار ببرید و سپس این تصویر را به عنوان شیء برای شکست در سمت راست کره به کار ببرید و مکان نهایی تصویر را به دست آورید. در دومین شکست، آیا فاصلهٔ شیء p مثبت است یا منفی؟)

۱۳۴- بازتاب کنندهٔ گوشه‌ای، که در بسیاری کاربردهای نوری و میکروموجی و موارد دیگر به کار می‌رود شامل سه آینه تخت است که به هم متصل‌اند و تشکیل گوشهٔ یک مکعب را می‌دهند. این وسیله دارای خاصیت زیر است: پرتو فرودی پس از سه بازتاب و درست در جهت معکوس برمی‌گردد. این نتیجه را ثابت کنید.

۱۳۵- شیئی در فاصلهٔ ۴/۰۰cm در مقابل یک عدسی همگرا قرار دارد. بزرگنمایی شیء ۲/۰۰- است. فاصلهٔ کانونی عدسی چقدر است؟

۱۳۶- ملخی روی نقطه‌ای واقع بر محور اصلی یک آینهٔ کروی می‌جهد. قدر مطلق بزرگی فاصلهٔ کانونی آینه برابر ۴۰/۰cm ، و بزرگنمایی خطی تصویر حاصل شده از آینه برابر ۰/۲۰۰+ است. (الف) آیا آینه کوژ است یا کاو؟ (ب) ملخ در چه فاصله‌ای از آینه قرار دارد؟

۱۳۷- در شکل ۳۴-۵۹ یک دانهٔ شن در فاصلهٔ ۳/۰۰cm از عدسی نازک ۱ روی محور مرکزی دو عدسی متقارن قرار دارد. فاصلهٔ دو عدسی از یکدیگر ۸/۰۰cm و برای هر دو عدسی فاصلهٔ بین نقطهٔ کانونی و عدسی برابر ۴/۰۰cm است. (الف) فاصلهٔ بین عدسی ۲ و تصویری که از دانهٔ شن تشکیل می‌دهد چقدر است؟ آیا این تصویر (ب) طرف چپ عدسی ۲ است یا طرف راست، (پ) حقیقی است یا مجازی و (ت) نسبت به دانهٔ شن وارونه است یا وارونه نیست؟



شکل ۳۴-۵۹ مسئلهٔ ۱۳۷

۳۵ تداخل



چگونه مرکبهای تغییردهندهٔ رنـــگ، رنگهـــا را تغییـــر می‌دهند؟

پاسخ در همین فصل.

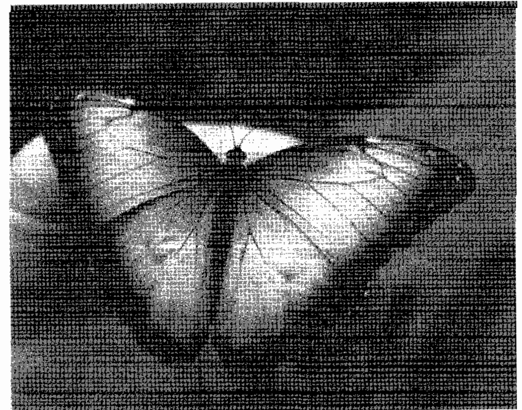
دولتها در سراسر جهان اقداماتی امنیتی را برای جلوگیری از جعل اسکناس توسط کسانی که به طور سریع از آخرین فناوری استفاده می‌کنند به عمل می‌آورند. بعضی از معیارهای امنیتی که اکنون برای ناکام گذاشتن جعل اسکناس به کار می‌روند عبارت‌اند از نخ امنیتی و علامت چاپ در متن اسکناس (که هر دو اینها در مقابل نور دیده می‌شوند) و میکروچاپ (که نقطه‌های بسیار کوچکی هستند که با پویشگر دیده می‌شوند). قسمتی که جعل آن احتمالاً مشکل است تغییر ته‌رنگی است که از جابه‌جایی رنگ مرکبها حاصل می‌شود، مثلاً «۲۰» در گوشهٔ پایین یک اسکناس ۲۰ دلاری رنگی جابه‌جا شونده دارد. اگر به طور مستقیم به پایین عدد نگاه کنید، قرمز یا قرمز مایل به زرد به نظر می‌رسد. اگر اسکناس را کج کنید و به طور مایل به آن نگاه کنید، رنگ تمایل به سبز پیدا می‌کند. ماشین کپی فقط از یک جهت می‌تواند کپی بگیرد و بنابراین، این جابه‌جایی در رنگ را که در موقع تغییر زاویهٔ دید مشاهده می‌شود نمی‌تواند کپی کند.

۱-۳۵ فیزیک چیست؟

یکی از هدفهای عمدهٔ فیزیک درک طبیعت نور است. رسیدن به این هدف دشوار بوده است (و تاکنون به طور کامل حاصل نشده است) چون نور پیچیده است. با وجود این، پیچیدگی بدان معناست که نور کاربردهای زیادی دارد، و برخی از مهمترین کاربردهای آن با تداخل موجهای نوری — تداخل اپتیکی مرتبط است.

طبیعت تداخل نور را برای رنگ‌آمیزی بسیار به کار برده است. مثلاً بالهای پروانهٔ *مورفو*[1]، قهوه‌ای کدر بی‌روحی است که می‌توان در سطح زیر بال آن را دید، ولی در سطح بالایی با ایجاد رنگ آبی به دلیل تداخل نور بازتابیده از سطح، رنگ قهوه‌ای محو می‌شود (شکل ۳۵-۱). افزون بر این، در سطح بالایی تغییر رنگ وجود دارد؛ و اگر زاویهٔ دید را عوض کنیم یا اگر بال حرکت کند، رنگ تغییر می‌کند. همین تغییر رنگ در مرکبها، در بسیاری از اسکناسها برای مقابله با جعل‌کنندگان مورد استفاده قرار می‌گیرد. زیرا ماشینهای کپی آنها می‌تواند فقط از یک زاویه کپی بگیرد و در نتیجه نمی‌توانند از تغییر رنگ ایجاد شده با تغییر زاویهٔ دید کپی بگیرند.

پیش از پرداختن به تغییر رنگ در بالهای پروانه و رنگهای اسکناس، نخست باید دربارهٔ اساس فیزیکی تداخل نور بحث کنیم. این بدان معناست که باید ساده‌سازی نور هندسی را کنار بگذاریم (که در آن نور را به صورت پرتو توصیف می‌کنیم) و به طبیعت موجی نور بپردازیم.



شکل ۳۵-۱ رنگ آبی در سطح بالایی بال پروانهٔ مورفو به دلیل تداخل نور و تغییر در رنگ است که با تغییر زاویهٔ دید حاصل می‌شود.

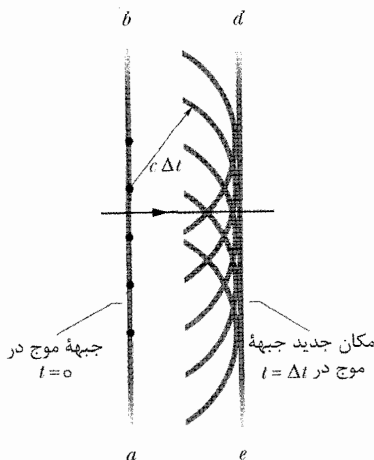
۲-۳۵ نور به عنوان یک موج

اولین شخصی که نظریهٔ متقاعدکنندهٔ موجی بودن نور را توسعه داد فیزیکدان هلندی به نام کریستین هویگنس[2] در سال ۱۶۷۸/۱۰۵۷ بود. این نظریه اگرچه نسبت به نظریهٔ الکترومغناطیسی ماکسول خیلی جامع نبود، ولی نظریهٔ هویگنس از نظر ریاضی ساده‌تر بود و اکنون نیز مفید است. امتیاز بزرگ آن این است که قانونهای بازتاب و شکست را برحسب موجها در نظر گرفته و مفهوم فیزیکی به ضریب شکست داده است.

نظریهٔ موجی هویگنس بر ساختاری هندسی استوار است که اگر وضعیت فعلی موج را بدانیم می‌توان گفت که در لحظهٔ معینی در آینده یک جبههٔ موج معین در کجا قرار دارد. این ساختار بر **اصل هویگنس** استوار است که عبارت است از:

> تمام نقطه‌ها روی یک جبههٔ موج به عنوان یک چشمهٔ نقطه‌ای موجکهای کروی بعدی عمل می‌کنند. پس از زمان t وضعیت جدید جبههٔ موج عبارت است از سطحی مماس بر این موجکهای بعدی.

مثال ساده‌ای وجود دارد. در سمت چپ شکل ۳۵-۲، مکان فعلی یک جبههٔ موج تخت که در خلأ به طرف راست حرکت می‌کند با صفحهٔ ab عمود بر صفحهٔ کاغذ نشان داده شده است. جبههٔ موج در لحظهٔ Δt پس از آن در کجاست؟ چندین نقطه در صفحهٔ ab (نقطه‌های سیاه) را در نظر می‌گیریم که به عنوان چشمه‌های موجکهای کروی بعدی خواهند بود که در $t=0$ گسیل شده‌اند. در لحظهٔ Δt، شعاع تمام این موجکهای کروی به $c\Delta t$ خواهد رسید، که c تندی نور در خلأ است. صفحهٔ de را در لحظهٔ Δt مماس بر این موجکها رسم می‌کنیم. این صفحه جبههٔ موج تخت را در لحظهٔ Δt نمایش می‌دهد؛ این با صفحهٔ ab موازی است و در فاصلهٔ عمودی $c\Delta t$ از آن قرار دارد.



شکل ۳۵-۲ انتشار یک موج تخت در خلأ به گونه‌ای که توسط اصل هویگنس توصیف شده است.

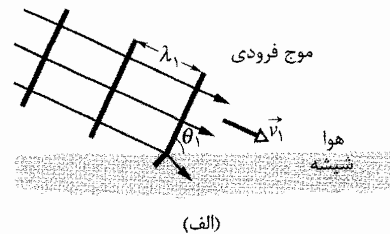
قانون شکست

اکنون با استفاده از اصل هویگنس قانون شکست، **معادلهٔ ۲۹-۴۰** (قانون اسنل) را به دست می‌آوریم. شکل ۳۵-۳ سه مرحله را در شکست چندین جبههٔ موج در یک صفحهٔ تخت بین هوا (محیط ۱) و شیشه (محیط ۲) نشان می‌دهد. به طور اختیاری

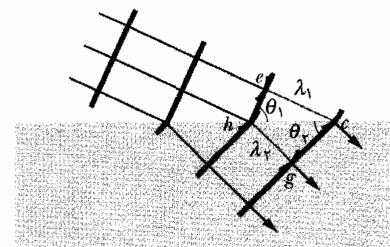
1 Morpho
2 Christian Huygens

جبهه‌های موجی را که با یکدیگر به اندازهٔ λ_1، طول موج در محیط ۱ تفاوت دارند، در باریکهٔ نور فرودی اختیار می‌کنیم. فرض می‌کنیم تندی نور در هوا v_1 و در شیشه v_2 باشد و نیز فرض می‌کنیم که $v_2 < v_1$ باشد که در واقع نیز چنین است.

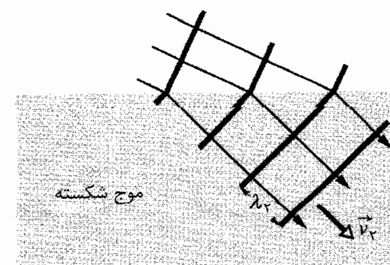
زاویهٔ θ_1 در شکل ۳۵-۳ الف زاویهٔ بین جبههٔ موج و سطح جدایی است؛ مقدار آن با زاویهٔ بین عمود بر جبههٔ موج (یعنی پرتو فرودی) و عمود بر سطح جدایی برابر است. بنابراین، θ_1، زاویهٔ تابش است.



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۳۵-۳ شکست موج تخت در سطح جدایی هوا-شیشه، به گونه‌ای که اصل هویگنس تصویر می‌کند. طول موج در شیشه کوچکتر از مقدار آن در هواست. جهت ساده‌سازی موج شکسته نشان داده نشده است. شکلهای (الف) تا (پ) سه مرحلهٔ متوالی شکست را نشان می‌دهند.

وقتی موج داخل شیشه می‌شود، یک موجک هویگنس در نقطهٔ e در شکل ۳۵-۳ ب، تا نقطهٔ c به فاصلهٔ λ_1 از نقطهٔ e گسترش می‌یابد. فاصلهٔ زمانی مورد نیاز برای این گسترش عبارت است از این فاصله تقسیم بر تندی موجک یا λ_1/v_1. اکنون توجه می‌کنیم که در همین فاصلهٔ زمانی، یک موجک هویگنس از نقطهٔ h تا نقطهٔ g، با تندی کمتر v_2 و با طول موج λ_2 گسترش خواهد یافت. بنابراین، این فاصلهٔ زمانی نیز باید برابر با λ_2/v_2 باشد. با مساوی قرار دادن این زمانهای حرکت خواهیم داشت

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{v_1}{v_2} \qquad (۳۵-۱)$$

که نشان می‌دهد طول موج نور در دو محیط با تندیهای نور در این محیطها متناسب است.

بنابر اصل هویگنس جبههٔ موج شکسته باید بر کمان به شعاع λ_2 به مرکز h مثلاً در نقطهٔ g مماس باشد. جبههٔ موج شکسته همچنین باید بر کمان به شعاع λ_1 به مرکز e مثلاً در c مماس باشد. بنابراین، جبههٔ موج شکسته باید در جهت نشان داده شده در شکل باشد. توجه کنید که θ_2، زاویهٔ بین جبههٔ موج شکسته و سطح جدایی است که در واقع زاویهٔ شکست است.

در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ hce و hcg در شکل ۳۵-۳ ب می‌توان نوشت

$$\sin\theta_1=\frac{\lambda_1}{hc} \quad (\text{مثلث } hce)$$

و

$$\sin\theta_2=\frac{\lambda_2}{hc} \quad (\text{مثلث } hcg)$$

با تقسیم این دو معادله بر یکدیگر و با استفاده از معادلهٔ ۳۵-۱ خواهیم داشت

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{v_1}{v_2} \qquad (۳۵-۲)$$

ضریب شکست n برای هر محیط را به صورت نسبت تندی نور در خلأ به تندی نور v در آن محیط تعریف می‌کنیم. پس

$$n=\frac{c}{v} \qquad (\text{ضریب شکست}) \qquad (۳۵-۳)$$

به خصوص، برای دو محیط مورد نظر داریم

$$n_1=\frac{c}{v_1} \quad \text{و} \quad n_2=\frac{c}{v_2} \qquad (۳۵-۴)$$

اگر معادله‌های ۳۵-۲ و ۳۵-۴ را ترکیب کنیم، خواهیم داشت

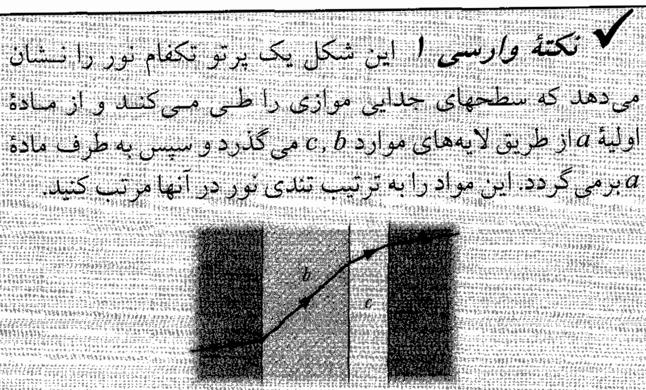
$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{c/n_1}{c/n_2}=\frac{n_2}{n_1} \qquad (۳۵-۵)$$

یا

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2 \qquad (\text{قانون شکست}) \qquad (۳۵-۶)$$

که در فصل ۲۹ (جلد ۲) تعریف شده بود.

نکتهٔ وارسی ۱ این شکل یک پرتو تکفام نور را نشان می‌دهد که سطحهای جدایی موازی را طی می‌کند و از مادهٔ اولیهٔ a از طریق لایه‌های مواد b، c می‌گذرد و سپس به طرف مادهٔ a برمی‌گردد. این مواد را به ترتیب تندی نور در آنها مرتب کنید.



طول موج و ضریب شکست

تاکنون دیدیم که طول موج نور به هنگام تغییر تندی نور وقتی در سطح جدایی از یک محیط به محیط دیگر وارد شود، تغییر می‌کند. افزون بر این، تندی نور در هر محیطی بنابر معادلهٔ ۳۵-۳ به ضریب شکست محیط محیط بستگی دارد. بنابراین، طول موج نور در هر محیطی به ضریب شکست محیط بستگی دارد. نور تکفام به طول موج λ و تندی c در خلأ و طول موج λ_n و تندی v در محیطی با ضریب شکست n را در نظر می‌گیریم. معادلهٔ ۳۵-۱ را اکنون می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\lambda_n = \lambda \frac{v}{c} \qquad (۳۵\text{-}۷)$$

با استفاده از معادلهٔ ۳۵-۳ و قرار دادن $1/n$ به جای v/c، خواهیم داشت

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} \qquad (۳۵\text{-}۸)$$

این معادله طول موج نور را در هر محیطی به طول موج آن در خلأ ارتباط می‌دهد. این بدان معناست که هر قدر ضریب شکست محیطی بزرگتر باشد، طول موج نور در آن محیط کوچکتر است.

دربارهٔ بسامد نور چگونه است؟ بسامد نور در محیطی با ضریب شکست n را f_n در نظر می‌گیریم. بنابراین، از رابطهٔ کلی معادلهٔ ۳۲-۱۳ $(v = \lambda f)$ می‌توان نوشت

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n}$$

با قرار دادن معادله‌های ۳۵-۳ و ۳۵-۸ خواهیم داشت

$$f_n \frac{c/n}{\lambda/n} = \frac{c}{\lambda} = f$$

که در آن f بسامد نور در خلأ است. بنابراین، اگرچه تندی و طول موج نور در محیط با مقدار آن در خلأ تفاوت دارد، *ولی بسامد نور در آن محیط با مقدار آن در خلأ یکسان است.*

این واقعیت که طول موج بنابر معادلهٔ ۳۵-۸ به ضریب شکست بستگی دارد در موقعیتهای معینی که مرتبط با تداخل موجهای نوری باشد اهمیت دارد. مثلاً، در شکل ۳۴-۴ *موجهای پرتوها* (یعنی موجهایی که با پرتوها نمایش داده می‌شوند) طول موج λ یکسان دارند و در هوا $(n \approx 1)$ در آغاز همفازند. یکی از موجها در محیط ۱ با ضریب شکست n_1 طول L را طی می‌کند. موج دیگر در محیط ۲ با ضریب شکست n_2 همان طول L را طی می‌کند. وقتی این موجها از دو محیط می‌گذرند دارای طول موج یکسان- طول موج λ در هوا هستند. با وجود این، چون طول موجهای آنها در دو محیط متفاوت است، این دو موج دیگر همفاز نخواهند بود.

> ☜ اگر دو موج نوری از دو محیط که ضریب شکستهای مختلفی دارند بگذرند، اختلاف فاز بین آنها تغییر می‌کند.

به صورتی که به زودی بحث خواهیم کرد، این تغییر در اختلاف فاز می‌تواند تعیین کند که اگر موجهای نوری به نقطهٔ مشترکی برسند آنها چگونه تداخل می‌کنند.

برای یافتن اختلاف فاز جدید آنها برحسب طول موجها، نخست تعداد طول موجهای N_1 را در طول مسیر L در محیط ۱ پیدا می‌کنیم. از معادلهٔ ۳۵-۸ طول موج در محیط ۱ عبارت است از $\lambda_{n_1} = \lambda/n_1$، پس

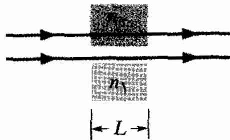
$$N_1 = \frac{L}{\lambda_{n_1}} = \frac{Ln_1}{\lambda} \qquad (۳۵\text{-}۹)$$

به همین ترتیب، تعداد طول موجهای N_2 را که در طول مسیر L در محیط ۲ وجود دارند پیدا می‌کنیم، که طول موج در آنجا $\lambda_{n_2} = \lambda/n$ است.

$$N_2 = \frac{L}{\lambda_{n_2}} = \frac{Ln_2}{\lambda} \qquad (۳۵\text{-}۱۰)$$

برای یافتن اختلاف فاز جدید بین موجها، مقدار کوچکتر N_1 و N_2 را از مقدار بزرگتر کم می‌کنیم. با فرض $n_2 > n_1$، خواهیم داشت

$$N_2 - N_1 = \frac{Ln_2}{\lambda} - \frac{Ln_1}{\lambda} = \frac{L}{\lambda}(n_2 - n_1) \qquad (۳۵\text{-}۱۱)$$



شکل ۳۵-۴ دو پرتو نوری از دو محیط با ضریب شکستهای مختلف می‌گذرند

فرض کنید از معادلهٔ ۳۵-۱۱ معلوم شود که موجها اکنون اختلاف فازی برابر با ۴۵/۶ طول موج دارند. این معادل با این است که در آغاز موجها را همفاز در نظر بگیریم و یکی از آنها به اندازهٔ ۴۵/۶ طول موج جابه‌جا شود. ولی جابه‌جایی به اندازهٔ یک عدد صحیح از طول موجها (مانند ۴۵) باعث همفازی موجها می‌شود؛ پس فقط کسر اعشاری (در اینجا ۰/۶) است که مهم است. اختلاف فاز ۴۵/۶ طول موج معادل با یک *اختلاف فاز مؤثر* به اندازهٔ ۰/۶ طول موج است.

اختلاف فاز ۰/۵ طول موج، دو موج را دقیقاً در فاز مقابل قرار می‌دهد. اگر دامنهٔ موجها با هم مساوی و در یک نقطهٔ مشترک به هم برسند، این موجها تداخل کاملاً ویرانگر خواهند داشت که در آن نقطهٔ تاریکی ایجاد می‌کنند. در عوض، با اختلاف فاز ۰/۰ یا ۱/۰ طول موج، موجها تداخل کاملاً سازنده ایجاد خواهند کرد که موجب روشن بودن در نقطهٔ مشترک است. اختلاف فاز ۰/۶ طول موج وضعیت میانه است ولی به تداخل سازنده نزدیک‌تر است، و موجها یک نقطهٔ تقریباً روشن ایجاد خواهند کرد.

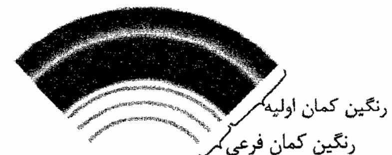
همانطور که قبلاً دیدیم، اختلاف فاز را برحسب رادیان یا درجه نیز می‌توان بیان کرد. اختلاف فاز یک طول موج معادل با اختلاف فاز 2πrad یا $360°$ است.

✔ **نکتهٔ وارسی ۲** موجهای نوری پرتوها در شکل ۳۵-۴ دارای طول موج و دامنهٔ یکسان هستند و در ابتدا همفازند. (الف) اگر ۷/۶۰ طول موج در طول مادهٔ بالایی و ۵/۵۰ طول موج در مادهٔ پایینی جا گرفته باشد، کدام ماده دارای ضریب شکست بزرگتری است؟ (ب) اگر پرتوها اندکی زاویه پیدا کنند به طوری که به همان نقطه روی پردهٔ دور برسند، آیا تداخل در آنجا بیشترین روشنی ممکن، روشنی میانه، روشنایی میانهٔ تاریک یا تاریک را خواهد داشت؟

رنگین‌کمان و تداخل نوری

در بخش ۲۹-۸ (جلد دوم) دربارهٔ اینکه چگونه رنگهای نور خورشید به هنگام حرکت در قطره‌های باران در حال سقوط به رنگین‌کمان تفکیک می‌شوند بحث کردیم. وضعیت ساده‌شده‌ای را در نظر گرفتیم که در آن یک پرتو تنها از نور سفید وارد یک قطرهٔ باران می‌شود. در واقع، موجهای نوری در راستای وجهی که مقابل خورشید است از داخل قطره می‌گذرند. در اینجا دربارهٔ جزئیات اینکه این موجها چگونه از قطره می‌گذرند و سپس خارج می‌شوند بحث نمی‌کنیم ولی می‌توانیم ببینیم که بخشهای مختلف موج ورودی در داخل قطره مسیرهای مختلفی را می‌پیمایند. بنابراین، ملاحظه می‌کنیم که موجها از قطره با فازهای مختلفی خارج می‌شوند. پس، می‌توان دید که در زاویه‌هایی نور خروجی همفاز خواهد بود و تداخل سازنده حاصل خواهد شد. رنگین‌کمان نتیجهٔ چنین تداخل سازنده‌ای است. برای مثال، رنگ قرمز از هر قطرهٔ باران در جهتی که آن قسمت رنگین‌کمان را می‌بینیم به طور همفاز خارج می‌شوند.

اگر بتوانیم به دقت زیر رنگین‌کمان اولیه را نگاه کنیم، می‌توانیم کمانهای رنگی محوتری را ملاحظه کنیم که *رنگین‌کمان فرعی* نامیده می‌شود (شکل ۳۵-۵). (آنها را شاید در تصویر اول فصل ۲۹ (جلد دوم) دیده باشید.) مانند کمانهای اصلی، رنگین‌کمان فرعی ناشی از موجهایی است که از هر قطره تقریباً به طور همفاز خارج می‌شوند و با یکدیگر تداخل سازنده ایجاد می‌کنند. اگر بتوانید به دقت بالای یک رنگین‌کمان فرعی را نگاه کنید حتی رنگین‌کمانهای فرعی بیشتری (اما محوتر) خواهید دید. به خاطر داشته باشید که دو نوع رنگین‌کمان و همهٔ مجموعهٔ رنگین‌کمانهای فرعی که به طور طبیعی اتفاق می‌افتند مثالهایی از تداخل نوری هستند و به طور طبیعی شواهدی هستند که نشان می‌دهند نور از موجهایی تشکیل شده است.



شکل ۳۵-۵ رنگین‌کمان اولیه و رنگین‌کمان فرعی زیر آن که ناشی از تداخل نوری هستند.

مسئلهٔ نمونه ۳۵-۱

در شکل ۳۵-۴، دو موج نوری با پرتوهایی با طول موج ۵۵۰/۰ nm پیش از وارد شدن به محیط ۱ و ۲ نشان داده شده‌اند. دامنهٔ آنها برابر و همفازند. محیط ۱ فقط هوا و محیط ۲ لایهٔ پلاستیکی شفافی با ضریب شکست ۱/۶۰۰ و ضخامت ۲/۶۰۰μm است.

(الف) اختلاف فاز موجهای خارج شده برحسب طول موج، رادیان و درجه چقدر است؟ اختلاف فاز مؤثر آنها (برحسب طول موج) چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی اگر دو موج نوری از دو محیط مختلف با ضریب شکستهای مختلف بگذرند، اختلاف فاز آنها تغییر می‌کند. دلیل آن این است که طول موجهای آنها در محیطهای مختلف متفاوت است. با شمارش تعداد طول موجهایی که در داخل هر محیط قرار می‌گیرند و سپس با کم کردن تعداد آنها تغییر در اختلاف فاز را می‌توان محاسبه کرد.

محاسبه‌ها: وقتی طول مسیر موجها در دو محیط یکسان باشند، معادلهٔ ۳۵-۱۱ نتیجه را به دست می‌دهد. در اینجا $n_1 = ۱/۰۰۰$ (برای هوا)، $n_2 = ۱/۶۰۰$، $L = ۲/۶۰۰\mu m$ و $\lambda = ۵۵۰/۰\,nm$ است. بنابراین، از معادلهٔ ۳۵-۱۱ خواهیم داشت

$$N_2 - N_1 = \frac{L}{\lambda}(n_2 - n_1)$$
$$= \frac{۲/۶۰۰ \times ۱۰^{-۶}\, m}{۵/۵۰۰ \times ۱۰^{-۷}\, m}(۱/۶۰۰ - ۱/۰۰۰)$$
$$= ۲/۸۴$$ (پاسخ)

پس، اختلاف فاز موجهای خارج شده ۲/۸۴ طول موج است. چون یک طول موج معادل با $2\pi rad$ یا $۳۶۰°$ است، می‌توان نشان داد که این اختلاف فاز معادل است با

(پاسخ) $۱۷/۸ rad \approx ۱۰۲۰°$

اختلاف فاز مؤثر عبارت است از بخش اعشاری اختلاف واقعی که *برحسب طول موج بیان* می‌شود. بنابراین، داریم

(پاسخ) طول موج ۰/۸۴ = اختلاف فاز مؤثر

می‌توان نشان داد که این معادل با ۵/۳rad یعنی حدود ۳۰۰° است. توجه: اختلاف فاز مؤثر را با در نظر گرفتن قسمت اعشاری اختلاف فاز واقعی که برحسب رادیان یا درجه بیان می‌شود پیدا نکردیم. مثلاً ۰/۸rad را از اختلاف فاز واقعی ۱۷/۸rad پیدا *نمی‌کنیم*.

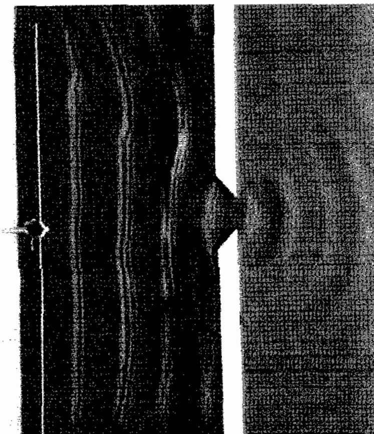
(ب) اگر پرتوهای موجها اندکی زاویه پیدا کنند به طوری که موجها در صفحهٔ مشاهدهٔ دور به یک نقطه برسند، موجها چه نوع تداخلی در این نقطه ایجاد می‌کنند؟

استدلال: نیاز داریم اختلاف فاز مؤثر موجها را با اختلاف فازهایی که انواع حدی تداخل به دست می‌دهند، مقایسه کنیم. در اینجا اختلاف فاز مؤثر ۰/۸۴ طول موج است که بین ۰/۵ طول موج (برای تداخل کاملاً ویرانگر یا تاریکترین نتیجهٔ ممکن) و ۱/۰ طول موج (برای تداخل کاملاً ویرانگر یا تاریکترین نتیجهٔ ممکن) و ۱/۰ طول موج (برای تداخل کاملاً

سازنده یا روشنترین نتیجهٔ ممکن) ولی نزدیک به ۱/۰ طول موج قرار دارد. بنابراین، کاملاً سازنده نزدیکتر است- اینها لکهٔ نسبتاً روشنی ایجاد می‌کنند.

۳۵-۳ پراش

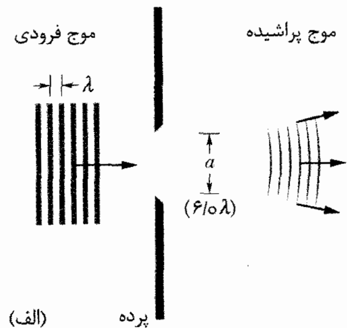
در بخش بعدی آزمایشی را توضیح خواهیم داد که نخست اثبات خواهد کرد که نور یک موج است. جهت آمادگی برای آن بحث، نظریهٔ **پراش** موجها را معرفی می‌کنیم، پدیده‌ای که کاملتر آن را در فصل ۳۶ مورد بحث قرار خواهیم داد. اساس آن چنین است: اگر موجی به مانعی برخورد کند که دارای گشودگی از مرتبهٔ بزرگی طول موج باشد، بخشی از موج که از این گشودگی می‌گذرد ناحیه‌ای خارج از مانع را روشن خواهد کرد (گسترده می‌شود)- *پراشیده* خواهد شد. این روشن شدن با گسترده شدن موجکها در ساختار هویگنس در شکل ۳۵-۲ مطابقت دارد. پراش نه فقط در مورد موجهای نوری بلکه در مورد همهٔ انواع موج رخ می‌دهد؛ شکل ۳۵-۶ پراش موجهای آب را که در سطح آب در یک مخزن کم‌عمق حرکت می‌کنند نشان می‌دهد.

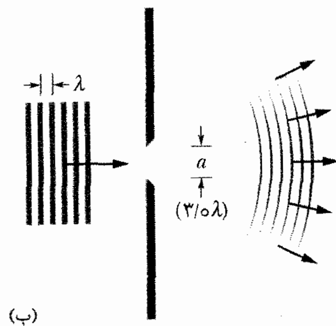


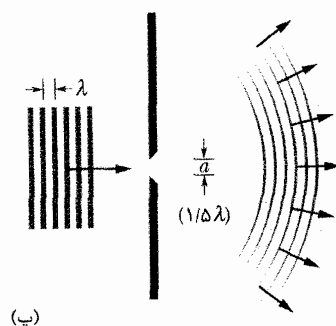
شکل ۳۵-۶ موجها توسط یک جسم نوسان‌کننده در سمت چپ ایجاد شده‌اند. وقتی اینها از چپ به راست حرکت کنند، با گذشتن از یک روزنه در مانعی در سطح آب گسترده می‌شوند.

شکل ۳۵-۷ الف وضعیت طرحواری را برای یک موج تخت فرودی با طول موج λ نشان می‌دهد که به شکافی به پهنای $a=۶/۰\,\lambda$ برخورد می‌کند و در جهت داخل و بیرون صفحهٔ کاغذ گسترده می‌شود. قسمتی از موج که از شکاف می‌گذرد به سمت دور پخش می‌شود. شکلهای ۳۵-۷ ب $(a=۳/۰\,\lambda)$ و ۳۵-۷ پ $(a=۱/۵\lambda)$ ویژگی اصلی پراش را نشان می‌دهند: هر چقدر شکاف باریکتر باشد، پراش بیشتر است.

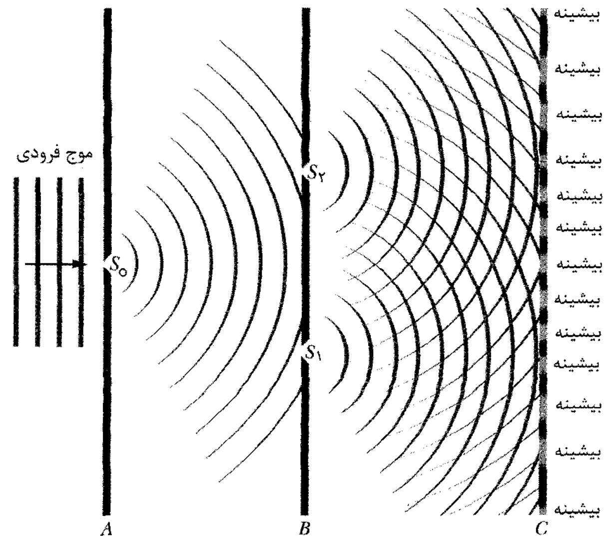
پراش نورشناسی هندسی را که در آن موج الکترومغناطیسی با یک پرتو نمایش داده می‌شود، محدود می‌کند. اگر در واقع برای تشکیل یک پرتو با فرستادن نور به یک شکاف باریک یا رشته‌ای از شکافهای باریک تلاش کنیم، پراش همیشه تلاش ما را با شکست روبه‌رو خواهد ساخت، زیرا پراش همواره موجب گسترده شدن نور می‌شود. در واقع، با باریکتر کردن شکافها (به امید ایجاد باریکه‌ای نازکتر)، گستردگی زیادتر خواهد شد. بنابراین، نورشناسی هندسی فقط زمانی برقرار است که شکافها یا وسایل دیگری که ممکن است در مسیر نور قرار داده شوند ابعادی قابل مقایسه با طول موج نور یا کوچکتر از آن نداشته باشند.







شکل ۳۵-۷ پراش به طور طرحوار نشان داده شده است. به ازای یک طول موج مشخص λ، با کوچک شدن پهنای شکاف a پراش برجسته‌تر خواهد بود. این شکلها مواردی را برای (الف) پهنای شکاف $a=۶/۰\lambda$، (ب) پهنای شکاف $a=۳/۰\lambda$ و (پ) پهنای شکاف $a=۱/۵\lambda$ نشان می‌دهند. در هر سه مورد پرده و طول شکاف به داخل و خارج صفحهٔ کاغذ، عمود بر آن ادامه دارد.



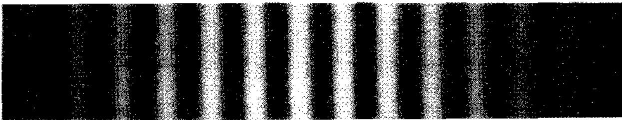
شکل ۳۵-۸ در آزمایش تداخل یانگ، نور تکفام فرودی توسط شکاف S پراشیده می‌شود، که پس از آن به عنوان یک چشمهٔ نقطه‌ای نور عمل می‌کند و جبهه‌های موج به شکل نیم‌دایره را گسیل می‌دارد. وقتی این نور به پردهٔ B می‌رسد، توسط شکافهای S_1 و S_2 پراشیده می‌شود که پس از آن به عنوان دو چشمهٔ نوری نقطه‌ای عمل می‌کنند. موجهای نوری پس از عبور شکافهای S_1 و S_2 همپوشانی کرده و تداخل می‌کنند، که حاصل آن یک نقش بیشینه و کمینهٔ تداخلی روی پردهٔ مشاهدهٔ C است. این شکل مقطع آن است؛ پرده‌ها، شکافها و نقش تداخلی به داخل و بیرون صفحهٔ کاغذ ادامه دارند. بین پرده‌های B , C جبهه‌های موج نیم‌دایره‌ای به مرکز S_2 موجهایی را نشان می‌دهند که گویی فقط S_2 باز بوده است. همچنین نیم‌دایره‌هایی که مرکز آنها S_1 است موجهایی را نشان می‌دهند که گویی فقط S_1 باز بوده است.

۳۵-۴ آزمایش تداخلی یانگ

در سال ۱۱۸۰/۱۸۰۱ توماس یانگ[1]، برخلاف نظر بیشتر دانشمندان دیگر در آن زمان ثابت کرد که نور یک موج است. او همچنین نشان داد که نور مانند موجهای روی آب، موجهای صوتی و همهٔ انواع دیگر موجها تداخل می‌کند. افزون بر این، او توانست متوسط طول موج نور خورشید را اندازه بگیرد، این مقدار که برابر با ۵۷۰ nm بود به مقدار مورد پذیرش جدید ۵۵۵nm خیلی نزدیک است. در اینجا آزمایش یانگ را به عنوان مثالی از تداخل موجهای نوری بررسی می‌کنیم.

شکل ۳۵-۸ آرایش اصلی آزمایش یانگ را نشان می‌دهد. نور از یک چشمهٔ تکفام دور شکاف S_0 را روی پردهٔ A روشن می‌کند. سپس نور خروجی از طریق پراش، دو شکاف S_1 و S_2 را روی پردهٔ B روشن می‌کند. پراش نور به وسیلهٔ این دو شکاف، موجهای دایره‌ای همپوشانی کرده‌ای را به ناحیهٔ بعد از پردهٔ B می‌فرستند، که در آنجا موجهای یک شکاف با موجهای شکاف دیگر تداخل می‌کنند.

«عکس فوری» شکل ۳۵-۸ تداخل موجهای همپوشانی‌کننده را نشان می‌دهد. البته، شاهدی مبتنی بر تداخل وجود ندارد مگر اینکه پردهٔ مشاهدهٔ C را که نور را قطع می‌کند قرار دهیم. در این صورت نقطه‌های تداخلی بیشینه ردیفهای روشن به نام *نوارهای روشن* یا *فریزهای روشن*، یا (به بیان ضعیفتر) *بیشینه‌هایی*- را تشکیل می‌دهند که در امتداد پرده (به داخل و بیرون صفحهٔ کاغذ در شکل ۳۵-۸) امتداد دارند. ناحیه‌های تاریک- به نام *نوارهای تاریک* یا *فریزهای تاریک*، یا (به بیان ضعیفتر) *کمینه‌ها*- از تداخل کاملاً ویرانگر نتیجه می‌شوند و بین جفت فریزهای روشن مجاور دیده می‌شوند. (*بیشینه‌ها* و *کمینه‌ها* بیشتر به مرکز یک نوار اشاره دارند). نقش فریزهای روشن و تاریک روی پرده **نقش تداخلی** نامیده می‌شود. شکل ۳۵-۹ عکس بخشی از نقش تداخلی است که توسط ناظری که در سمت چپ پرده C در آرایش شکل ۳۵-۸ ایستاده باشد دیده می‌شود.



شکل ۳۵-۹ عکسی از نقش تداخلی به وجود آمده توسط آرایش نشان داده شده در شکل ۳۵-۸ (این عکس نمای جلویی بخشی از پردهٔ C است.) بیشینه‌ها و کمینه‌های متوالی فریز نامیده می‌شوند (چون اینها خطهای تزئینی را تداعی می‌کنند که گاه در لباس و قالیچه به کار می‌روند).

محل فریزها

موجهای نوری فریزهایی را در *آزمایش تداخلی دو شکاف یانگ*، که به این نام، نامیده می‌شود، ایجاد می‌کنند، ولی چگونه می‌توان محل این فریزها را به طور دقیق تعیین کرد؟ برای پاسخ به این، آرایش شکل ۳۵-۱۰ الف را در نظر می‌گیریم. در اینجا موج تختی از نور تکفام بر دو شکاف S_1 و S_2 روی پردهٔ B می‌تابد؛ نور از شکافها پراشیده می‌شو و روی پردهٔ C یک نقش پراش ایجاد می‌کند. محور مرکزی را از نقطهٔ وسط بین شکافها تا C به عنوان مرجع رسم می‌کنیم. سپس برای بحث، نقطهٔ اختیاری P را با زاویهٔ θ نسبت به محور مرکزی روی پرده در نظر می‌گیریم. در این نقطه موج مربوط به پرتو r_1 از شکاف پایین و موج مربوط به پرتو r_2 از شکاف بالا یکدیگر را قطع می‌کنند.

این موجها وقتی که از دو شکاف می‌گذرند همفازند زیرا در آنجا اینها قسمتهایی از یک موج فرودی هستند. ولی، وقتی آنها از شکافها گذشتند، این دو موج باید مسیرهای متفاوتی را تا

1 Thomas Young

رسیدن به P طی کنند. وضعیت مشابهی را در بخش ۳۳-۵ با موجهای صوتی دیدیم و نتیجه گرفتیم که

> اگر دو موج مسیرهای با طولهای متفاوتی را طی کنند، اختلاف فاز بین دو موج تغییر می‌کند.

تغییر در اختلاف فاز ناشی از *اختلاف راه* ΔL در مسیرهایی است که موجها طی می‌کنند. دو موج را که در آغاز دقیقاً همفازند در نظر می‌گیریم که مسیرهایی را با اختلاف راه ΔL طی می‌کنند، و سپس از یک نقطهٔ مشترک می‌گذرند. اگر ΔL صفر یا مضرب صحیحی از طول موجها باشد، این موجها در نقطهٔ مشترک دقیقاً به طور همفاز به هم می‌رسند و در آنجا به طور کامل تداخل سازنده می‌کنند. اگر این در مورد موجها با پرتوهای r_1 و r_2 در شکل ۳۵-۱۰ صحیح باشد، در این صورت نقطهٔ P بخشی از یک فریز روشن است. ولی اگر ΔL مضرب فردی از نصف یک طول موج باشد، این موجها دقیقاً به طور ناهمفاز به نقطهٔ مشترک می‌رسند و در آنجا به طور کامل تداخل ویرانگر می‌کنند. اگر این در مورد موجها با پرتوهای r_1 و r_2 صحیح باشد، آنگاه نقطهٔ P بخشی از یک فریز تاریک خواهد بود. (البته وضعیتهای میانه‌ای از تداخل خواهیم داشت، پس در نقطهٔ P روشنایی میانه هم وجود خواهد داشت).

بنابراین،

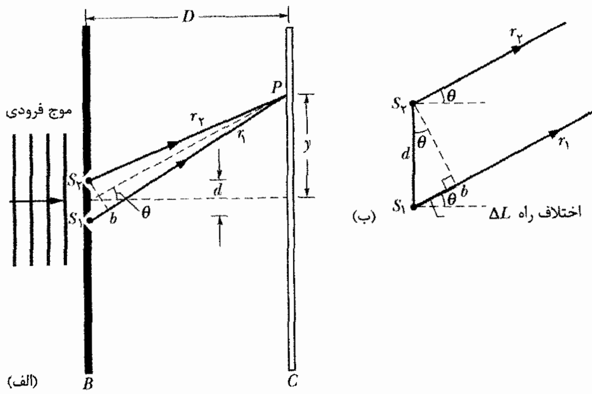
> آنچه که در یک آزمایش دو شکاف تداخلی یانگ در نقطه‌ای روی پردهٔ مشاهده دیده می‌شود با اختلاف راه ΔL پرتوهایی که به آن نقطه می‌رسند تعیین می‌شود.

موقعیت هر فریز روشن و فریز تاریک را با زاویهٔ θ نسبت به محور مرکزی آن فریز می‌توان مشخص کرد. برای یافتن θ، باید رابطهٔ آن را با ΔL پیدا کنیم. این کار را با پیدا کردن نقطهٔ b در امتداد پرتو r_1 در شکل ۳۵-۱۰ الف شروع می‌کنیم به طوری که طول مسیر از b تا P با طول مسیر از S_2 تا P مساوی باشد. آنگاه اختلاف راه ΔL بین دو پرتو عبارت است از فاصلهٔ S_1 تا b

رابطهٔ بین فاصلهٔ S_1 تا b و زاویهٔ θ پیچیده است، ولی اگر فاصلهٔ D شکافها تا پرده خیلی بزرگتر از فاصلهٔ d شکافها باشد، این رابطه به طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌شود. آنگاه می‌توان پرتوهای r_1 و r_2 را موازی با یکدیگر و زاویهٔ آنها را نسبت به محور مرکزی θ در نظر گرفت (شکل ۳۵-۱۰ ب). همچنین می‌توان مثلث حاصل از S_1، S_2 و b را یک مثلث قائم‌الزاویه در نظر گرفت و زاویهٔ داخل این مثلث در S_2 را تقریباً θ فرض کرد. بنابراین، در این مثلث $\sin\theta = \Delta L/d$ و در نتیجه

$$\Delta L = d\sin\theta \quad \text{(اختلاف راه)} \qquad (۱۲\text{-}۳۵)$$

برای فریز روشن دیدیم که ΔL باید صفر یا مضرب صحیحی از طول موجها باشد. با استفاده از معادلهٔ ۳۵-۱۲ این الزام را می‌توان به صورت زیر نوشت



شکل ۳۵-۱۰ (الف) موجهای شکافهای S_1 و S_2 (که به داخل و خارج از صفحهٔ کاغذ امتداد دارند) در نقطهٔ اختیاری P روی پردهٔ C در فاصلهٔ y از محور مرکزی ترکیب می‌شوند. زاویهٔ θ موقعیت مناسبی را برای P به دست می‌دهد. (ب) به ازای $D>>d$، پرتوهای r_1 و r_2 تقریباً موازی‌اند و با زاویهٔ θ نسبت به محور مرکزی قرار دارند.

$$\Delta L = d\sin\theta = (\lambda)(\text{مضرب صحیحی}) \qquad (۱۳\text{-}۳۵)$$

یا به صورت

$$d\sin\theta = m\lambda \quad m = ۰,۱,۲,\cdots \text{ به ازای } \text{(فریزهای روشن - بیشینه)} \qquad (۱۴\text{-}۳۵)$$

در مورد فریزهای تاریک، ΔL باید مضرب فردی از نصف طول موج باشد. دوباره با استفاده از معادلهٔ ۳۵-۱۲، می‌توان این الزام را به صورت زیر نوشت

$$\Delta L = d\sin\theta = (\text{مضرب فرد})\left(\frac{۱}{۲}\lambda\right) \qquad (۱۵\text{-}۳۵)$$

یا به صورت

$$d\sin\theta = \left(m+\frac{۱}{۲}\right)\lambda \quad m = ۰,۱,۲,\ldots \text{ به ازای } \text{(فریزهای تاریک - کمینه)} \qquad (۱۶\text{-}۳۵)$$

با معادله‌های ۳۵-۱۴ و ۳۵-۱۶ می‌توان زاویهٔ θ تا هر فریز و در نتیجه مکان آن فریز را پیدا کرد؛ افزون بر این، می‌توان از مقدارهای m برای مشخص کردن فریزها استفاده کرد. در مورد مقدار $m=۰$، معادلهٔ ۳۵-۱۴ حاکی از آن است که یک فریز روشن در $\theta=۰$ و در نتیجه روی محور مرکزی قرار دارد. این *بیشینهٔ مرکزی* نقطه‌ای است که در آن موجهای فرودی از دو شکاف اختلاف راه $\Delta L = ۰$ و در نتیجه اختلاف فاز صفر دارند.

مثلاً به ازای $m=۲$، فریزهای *روشن* در زاویهٔ

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{۲\lambda}{d}\right)$$

بالا و زیر محور مرکزی قرار دارند. موجها در این دو فریز با $\Delta L = ۲\lambda$ و با اختلاف فاز دو طول موج از دو شکاف می‌رسند. گفته می‌شود این دو فریز، *فریزهای روشن مرتبهٔ دو* (به معنای $m=۲$) یا *بیشینهٔ دوم* (بیشینهٔ دوم در هر طرف بیشینهٔ مرکزی) هستند، یا به عنوان فریزهای روشن دوم از بیشینهٔ مرکزی توصیف می‌شوند.

به ازای $m=۱$ معادلهٔ ۳۵-۱۶ حاکی از آن است که فریزهای تاریک با زاویهٔ

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{۱/۵\lambda}{d}\right)$$

بالا و زیر محور مرکزی قرار دارند. موجها در این دو فریز با $\Delta L = ۱/۵\lambda$ و با اختلاف فاز ۱/۵ طول موج از دو شکاف می‌رسند. این فریزها را *فریزهای تاریک مرتبهٔ دوم* یا *کمینهٔ دوم* می‌نامند. چون اینها فریز تاریک دوم نسبت به محور مرکزی هستند. (فریزهای تاریک اول، یا کمینهٔ اول، در محل‌هایی هستند که در آنجا در معادلهٔ ۳۵-۱۶، $m = ۰$ است.)

معادله‌های ۳۵-۱۴ و ۳۵-۱۶ را برای وضعیت $D >> d$ به دست آوردیم. ولی، اگر یک عدسی همگرا بین شکافها به طرف کانون عدسی حرکت دهیم نیز این معادله‌ها برقرارند. (در این صورت گفته می‌شود که صفحهٔ مشاهده در *صفحهٔ کانونی* عدسی؛ یعنی در صفحهٔ عمود بر محور مرکزی در کانون است.) یک خاصیت عدسی همگرا این است که تمام پرتوهایی را که با هم موازی هستند در یک نقطه در صفحهٔ کانونی خود متمرکز می‌کند. بنابراین، پرتوهایی که حالا به هر نقطهٔ صفحه (در صفحهٔ کانونی) می‌رسند، وقتی شکافها را ترک می‌کنند دقیقاً (نه تقریباً) موازی هستند. اینها شبیه پرتوهای موازی اولیه در شکل ۳۴-۱۵ الف هستند که توسط عدسی به یک نقطه (کانون) متوجه می‌شوند.

✓ **نکتهٔ *وارسی* ۳** در شکل ۳۵-۱۰ الف، ΔL (برحسب مضربی از طول موج) و اختلاف فاز (برحسب طول موج) برای دو پرتو چقدر است در صورتی که نقطهٔ P (الف) یک بیشینهٔ سوم و (ب) یک کمینهٔ سوم باشد؟

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵-۲

درشکل ۳۵-۱۰ الف فاصلهٔ بین بیشینه های مجاور در نزدیک مرکز نقش تداخلی روی پردهٔ C چقدر است؟ طول موج λ نور برابر با ۵۴۶nm، فاصلهٔ d شکافها برابر با ۰/۱۲mm و فاصلهٔ D شکاف تا صفحهٔ مشاهده برابر با ۵۵cm است. فرض کنید که θ در شکل ۳۵-۱۰ به اندازه‌ای کوچک است که تقریب $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$ را می‌توان نوشت که در آن θ برحسب رادیان است.

نکته‌های کلیدی

(۱) ابتدا یک بیشینهٔ با مقدار کم m را در نظر می‌گیریم تا تضمین شود که در نزدیکی مرکز نقش قرار دارد. بنابراین، از هندسهٔ شکل ۳۵-۱۰ الف، بیشینهٔ فاصلهٔ عمودی y_m از مرکز این نقش با این رابطه به زاویهٔ θ از محور مرکزی مرتبط است

$$\tan\theta \approx \theta = \frac{y_m}{D} \qquad (۲)$$

از معادلهٔ ۳۵-۱۴، این زاویه به ازای m امین بیشینه با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\sin\theta \approx \theta = \frac{m\lambda}{d}$$

اگر این دو عبارت را برای زاویهٔ θ مساوی یکدیگر قرار دهیم و برحسب y_m حل کنیم خواهیم داشت

$$y_m = \frac{m\lambda D}{d} \qquad (۳۵\text{-}۱۸)$$

در مورد بیشینهٔ بعدی وقتی از مرکز نقش فاصله بگیریم، داریم

$$y_{m+۱} = \frac{(m+۱)\lambda D}{d} \qquad (۳۵\text{-}۱۸)$$

فاصلهٔ بین این بیشینه‌های مجاور با کم کردن معادلهٔ ۳۵-۱۷ از معادلهٔ ۳۵-۱۸ به دست می‌آید

$$\Delta y = y_{m+۱} - y_m = \frac{\lambda D}{d}$$
$$= \frac{(۵۴۶\times۱۰^{-۹}\ \text{m})(۵۵\times۱۰^{-۲}\ \text{m})}{۰/۱۲\times۱۰^{-۳}\ \text{m}}$$
$$= ۲/۵۰\times۱۰^{-۳}\ \text{m} \approx ۲/۵\text{mm} \qquad \text{(پاسخ)}$$

تا جایی که d و θ در شکل ۳۵-۱۰ الف کوچک باشند، فاصلهٔ فریزهای تداخلی مستقل از m است؛ یعنی فاصلهٔ فریزها از یکدیگر مساوی‌اند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵-۳

مانند شکل ۳۵-۱۰، نقش تداخلی حاصل از دو شکاف روی صفحه‌ای ایجاد می‌شود؛ نور تکفام و طول موج ۶۰۰nm است. نواری از پلاستیک شفاف با ضریب شکست $n = ۱/۵۰$ روی یکی از شکافها قرار داده می‌شود. وجود این نوار تداخل بین موجهای نوری از دو شکاف را تغییر می‌دهد و موجب می‌شود نقش تداخلی روی صفحه نسبت به نقش اولیه جابه‌جا شود.

شکل ۳۵-۱۱ الف مکانهای اولیهٔ فریز روشن مرکزی $(m = ۰)$ و اولین فریز روشن $(m = ۱)$ بالا و پایین فریز مرکزی را نشان می‌دهد. اثر پلاستیک جابه‌جا کردن نقش به طرف بالاست به طوری که فریز روشن $m = ۱$ به پایین مرکز نقش جابه‌جا می‌شود. آیا پلاستیک باید روی شکاف بالایی (که به طور اختیاری در شکل ۳۵-۱۱ ب کشیده شده است) گذاشته شود یا شکاف پایینی و چه ضخامتی باید داشته باشد؟

نکتهٔ کلیدی تداخل در نقطه‌ای روی پرده به اختلاف فاز پرتوهای نوری که از دو شکاف آمده‌اند، بستگی دارد. پرتوهای نوری در شکافها همفازند، ولی فاز نسبی آنها در ضمن راه تا پرده به دلیل (۱) اختلاف در طول مسیری که طی می‌کنند و (۲) اختلاف در تعداد طول موج‌های داخلی آنها λ_n در موادی که از آن می‌گذرند، تغییر می‌کند. هر دو احتمال را بررسی می‌کنیم.

اختلاف طول مسیر: شکل ۳۵-۱۱ الف پرتوهای r_1 و r_2 را در امتدادی نشان می‌دهد که موجها از دو شکاف برای رسیدن به فریز روشن $m = ۱$ پایین طی می‌کنند. این موجها به طور همفاز از شکافها شروع می‌کنند ولی به فریز با اختلاف فاز دقیقاً یک طول موج می‌رسند. برای به خاطر داشتن این مشخصهٔ اصلی فریز، آن را فریز ۱λ می‌نامیم. اختلاف فاز یک طول موج ناشی از اختلاف راه یک طول موج بین پرتوهایی است که به فریز می‌رسند؛ یعنی در امتداد پرتو r_2 نسبت به امتداد پرتو r_1 فقط یک طول موج بیشتر است.

شکل ۳۵-۱۱ ب فریز 1λ را نشان می‌دهد که با نوار پلاستیکی روی شکاف بالایی تا مرکز نقش جابه‌جا شده است (هنوز نمی‌دانیم که پلاستیک روی شکاف بالایی بوده یا روی شکاف پایینی). شکل هم‌چنین سمتگیری جدید پرتوهای r_1 و r_2 را برای رسیدن به آن فریز نشان می‌دهد. باز هم باید در امتداد r_2 نسبت به امتداد r_1 یک طول موج بیشتر وجود داشته باشد (چون هنوز هم فریز 1λ را ایجاد می‌کنند)، ولی اکنون اختلاف راه بین این پرتوها صفر است، که از روی هندسهٔ شکل ۳۵-۱۱ ب نیز می‌توان به آن پی برد. ولی حالا r_2 از پلاستیک عبور کرده است.

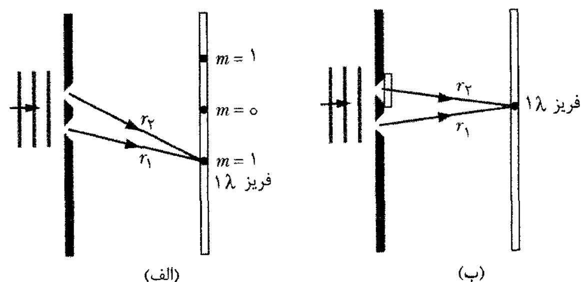
طول موج داخلی: همانطور که با معادلهٔ ۳۵-۸ $(\lambda_n = \lambda/n)$ داده شده است، طول موج λ_n نور در یک ماده با ضریب شکست n از طول موج آن در خلأ کوچکتر است. در اینجا، این بدان معناست که طول موج نور در پلاستیک کوچکتر از مقدار آن در هواست. بنابراین، پرتوی که از پلاستیک می‌گذرد در این امتداد نسبت به پرتوی که فقط از هوا می‌گذرد طول موج بیشتری دارد. پس با گذاشتن پلاستیک روی شکاف بالایی، همانطور که در شکل ۳۵-۱۱ ب رسم شده است، در امتداد پرتو r_2 به یک طول موج اضافی نیاز داریم.

ضخامت: برای تعیین ضخامت لازم L برای پلاستیک، از روش به کار رفته در مسئله نمونه ۳۵-۱ الف استفاده می‌کنیم. مانند آنجا، در اینجا موجهای همفاز اولیه فاصلهٔ مساوی L را در مواد مختلف (پلاستیک و هوا) می‌پیمایند. ولی، در اینجا اختلاف فاز و L لازم را می‌دانیم؛ پس دوباره از معادلهٔ ۳۵-۱۱ استفاده می‌کنیم.

$$N_2 - N_1 = \frac{L}{\lambda}(n_2 - n_1) \qquad (۳۵\text{-}۱۹)$$

می‌دانیم $N_2 - N_1$ برای اختلاف فاز یک طول موج برابر با ۱، ضریب شکست n_2 برای پلاستیک جلوی شکاف بالایی برابر ۱/۵۰، ضریب شکست n_1 برای هوای جلوی شکاف پایینی برابر ۱ و طول موج λ برابر با 600×10^{-9} m است. با حل معادلهٔ ۳۵-۱۹ برای L و قرار دادن مقدارهای عددی خواهیم داشت

$$L = \frac{\lambda(N_2 - N_1)}{n_2 - n_1} = \frac{(600\times10^{-9}\ \text{m})(1)}{1.50 - 1.00} = 1.2\times10^{-6}\ \text{m} \quad \text{(پاسخ)}$$



شکل ۳۵-۱۱ (الف) آرایش تداخل از دو شکاف (بدون مقیاس). مکانهای سه فریز روشن (یا بیشینه) نشان داده شده است. (ب) نواری از پلاستیک شکاف بالایی را پوشانده است. می‌خواهیم فریز 1λ در مرکز نقش باشد.

۳۵-۵ همدوسی

در مورد نقش تداخلی که روی صفحهٔ مشاهدهٔ C در شکل ۳۵-۸ ظاهر می‌شود، موجهای نوری که به هر نقطهٔ P روی صفحه می‌رسند باید دارای اختلاف فازی باشند که نسبت به زمان تغییر نکند. این در مورد شکل ۳۵-۸ برقرار است، چون موجهایی که از شکافهای S_1 و S_2 می‌گذرند بخشهایی از یک موج نوری منفردند که شکافها را روشن می‌کند. چون اختلاف فاز ثابت می‌ماند، گفته می‌شود نور شکافهای S_1 و S_2 کاملاً **همدوس** هستند.

نور مستقیم خورشید به طور جزئی همدوس است؛ یعنی موجهای نور خورشید فقط در صورتی با اختلاف فاز ثابتی به دو نقطه می‌رسند که این دو نقطه به هم خیلی نزدیک باشند. اگر خیلی نزدیک به ناخن خود به نور خورشید نگاه کنید، نقش تداخلی ضعیفی به نام *خالداری* خواهید دید که به نظر می‌آید ناخن با خالهایی پوشیده شده است. به این دلیل این اثر را می‌بینید که موجهای نوری که از نقطه‌های خیلی نزدیک در ناخن پراکنده می‌شود به قدر کافی همدوس هستند و در چشم شما با یکدیگر تداخل می‌کنند. با این وجود در آزمایش دو شکاف، شکافها به اندازه کافی به یکدیگر نزدیک نیستند و در نور مستقیم خورشید، نور در شکافها **ناهمدوس** است. برای اینکه نور همدوس باشد، باید نور خورشید مانند شکل ۳۵-۸، از یک شکاف تنها بگذرد، چون این شکاف کوچک است، نوری که از آن می‌گذرد همدوس است. افزون بر این، کوچک بودن شکاف موجب می‌شود تا نور همدوس بر اثر پراش گسترده شود و هر دو شکاف را روشن کند.

اگر به جای دو شکاف دو چشمهٔ نوری مشابه ولی مستقل تکفام، مانند دو سیم ملتهب ظریف را قرار دهیم، اختلاف فاز بین موجهای گسیل شده توسط چشمه‌ها خیلی سریع و کاتوره‌ای تغییر می‌کند. (این بدان علت است که نوری که به وسیلهٔ تعداد خیلی زیادی اتم در سیمها گسیل می‌شود، در زمان فوق‌العاده کوتاهی — از مرتبهٔ نانوثانیه— به طور کاتوره‌ای و مستقل عمل می‌کند.) در نتیجه، در هر نقطهٔ معین روی صفحهٔ مشاهده، تداخل بین موجهای دو چشمه بین حالت کاملاً سازنده و کاملاً ویرانگر سریع و کاتوره‌ای تغییر می‌کند. چشم (و اغلب آشکار سازهای نوری) نمی‌توانند چنین تغییرهایی را دنبال کنند، و هیچ نقش تداخلی دیده نمی‌شود. فریزها ناپدید می‌شوند و صفحه به طور یکنواخت روشن دیده می‌شود.

لیزر با چشمه‌های نور معمولی از این نظر فرق دارد که اتمها به صورت گروهی نور گسیل می‌کنند و در نتیجه نور همدوس ایجاد می‌شود. افزون بر این، این نور که عملاً تکفام است، در یک باریکهٔ نازک با واگرایی کم گسیل می‌شود و می‌تواند در پهنایی کانونی شود که تقریباً با طول موج نور مطابقت دارد.

۶-۳۵ شدت در تداخل دو شکاف

معادله‌های ۳۵-۱۴ و ۳۵-۱۶ چگونگی تعیین مکان بیشینه‌ها و کمینه‌های نقش تداخلی دو شکاف روی صفحهٔ مشاهدهٔ C شکل ۳۵-۱۰ را برحسب تابعی از زاویهٔ θ بیان می‌کنند. در اینجا می‌خواهیم عبارتی را برای شدت I این فریزها برحسب تابعی از θ به دست آوریم.

نوری که شکافها را ترک می‌کند همفاز است. با وجود این، می‌توان فرض کرد که موجهای نوری که از دو شکاف به نقطهٔ P می‌رسند همفاز نیستند. مؤلفه‌های میدان الکتریکی این موجها در نقطهٔ P همفاز نیستند و به صورت زیر با زمان تغییر می‌کنند.

$$E_1 = E_0 \sin \omega t \qquad (۳۵\text{-}۲۰)$$

و

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + \phi) \qquad (۳۵\text{-}۲۱)$$

که در آن ω بسامد زاویه‌ای موجها و ϕ ثابت فاز موج E_2 است. توجه کنید که دو موج دارای دامنهٔ یکسان E_0 و اختلاف فاز ϕ هستند. چون این اختلاف فاز تغییر نمی‌کند، این موجها همدوس هستند. نشان دهیم که این دو موج در نقطهٔ P ترکیب می‌شوند و شدت I را ایجاد می‌کنند و داریم

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{1}{2}\phi \qquad (۳۵\text{-}۲۲)$$

که در آن

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta \qquad (۳۵\text{-}۲۳)$$

در معادلهٔ ۳۵-۲۲، I_0 شدت نوری است که هرگاه یک شکاف به طور موقت پوشیده باشد از شکاف دیگر به صفحه می‌رسد. فرض می‌کنیم که شکافها در مقایسه با طول موج بقدری باریک‌اند که شدت تک شکاف در سراسر ناحیه‌ای از صفحه که می‌خواهیم فریزها را تعیین کنیم اساساً یکنواخت است.

معادله‌های ۳۵-۲۲ و ۳۵-۲۳ که با هم چگونگی تغییر شدت I نقش فریزها با زاویهٔ θ در شکل ۳۵-۱۰ را نشان می‌دهند، لزوماً حاوی اطلاعاتی دربارهٔ محل بیشینه‌ها و کمینه‌ها هستند. حال ببینیم آیا می‌توانیم از این اطلاعات استفاده کنیم تا معادله‌هایی را دربارهٔ محل فریزها به دست آوریم.

مطالعهٔ معادلهٔ ۳۵-۲۲ نشان می‌دهد که شدت بیشینه زمانی رخ می‌دهد که

$$\frac{1}{2}\phi = m\pi \qquad \text{به ازای } m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (۳۵\text{-}۲۴)$$

اگر این نتیجه را در معادلهٔ ۳۵-۲۳ قرار دهیم، خواهیم داشت

$$2m\pi = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta \qquad \text{به ازای } m = 0, 1, 2, \ldots$$

یا

$$d\sin\theta = m\lambda \qquad \text{(بیشینه) به ازای } m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (۳۵\text{-}۲۵)$$

که دقیقاً معادلهٔ ۳۵-۱۴ است که قبلاً برای مکانهای بیشینه به دست آورده بودیم.

کمینه‌ها در نقش فریزها زمانی رخ می‌دهند که

$$\frac{1}{2}\phi = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad \text{به ازای } m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (۳۵\text{-}۲۶)$$

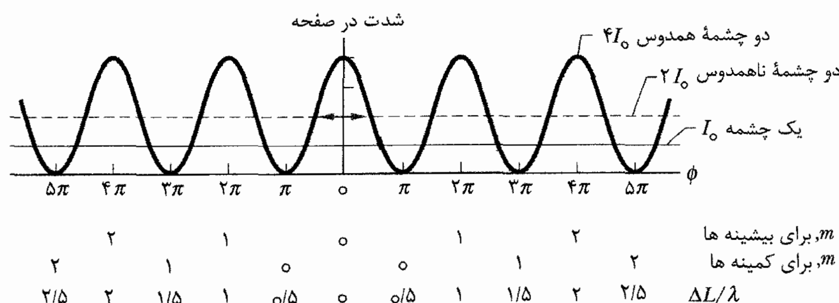
اگر این رابطه را با معادلهٔ ۳۵-۲۳ ترکیب کنیم به معادلهٔ زیر می‌رسیم.

$$d\sin\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad \text{(کمینه) به ازای } m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (۳۵\text{-}۲۷)$$

که درست معادلهٔ ۳۵-۱۶ است، عبارتی که قبلاً برای مکانهای فریز کمینه به دست آورده بودیم.

شکل ۳۵-۱۲، که نمودار معادلهٔ ۳۵-۲۲ است، شدت نقش تداخلی دو شکاف را برحسب تابعی از اختلاف فاز ϕ بین موجها در صفحه نشان می‌دهد. خط توپر افقی I_0، شدت (یکنواخت) روی صفحه است در وقتی که یکی از شکافها پوشیده باشد. توجه کنید که در معادلهٔ ۳۵-۲۲ و نمودار، شدت I از صفر در کمینه‌های فریز تا $4I_0$ در بیشینه‌های فریز تغییر می‌کند.

اگر موجهای دو چشمه (شکافها) *ناهمدوس* باشند، به طوری که هیچ رابطهٔ فازی پایداری بین آنها وجود نداشته باشد، هیچ نقش فریزی وجود ندارد و شدت دارای مقدار یکنواخت $2I_0$ برای همهٔ نقطه‌های روی صفحه است؛ خط‌چین افقی در شکل ۳۵-۱۲ این مقدار یکنواخت را نشان می‌دهد.



شکل ۳۵-۱۲ نمودار معادلهٔ ۳۵-۲۲، که شدت نقش تداخلی دو شکاف را برحسب تابعی از اختلاف فاز بین موجها نشان می‌دهد که از دو شکاف می‌رسند. I_0 شدتی (یکنواخت) است که در صورت پوشیده بودن یکی از شکافها روی صفحه ظاهر می‌شود. متوسط شدت نقش فریز $2I_0$ و شدت بیشینه (برای نور همدوس) $4I_0$ است.

تداخل نمی‌تواند انرژی را ایجاد کند یا از بین ببرد ولی آن را فقط روی صفحه به طور دیگری توزیع می‌کند. بنابراین، شدت متوسط بدون در نظر گرفتن اینکه چشمه‌ها همدوس باشند یا نه، باید همان $2I_0$ باشد. این فوراً از معادلهٔ ۳۵-۲۲ حاصل می‌شود؛ اگر مقدار متوسط تابع مربع کسینوس را $\frac{1}{2}$ قرار دهیم، این معادله به $I_{avg}=2I_0$ تبدیل می‌شود.

اثبات معادله‌های ۳۵-۲۲ و ۳۵-۲۳

مؤلفه‌های میدان الکتریکی E_1 و E_2 را که به ترتیب با معادله‌های ۳۵-۲۰ و ۳۵-۲۱ داده شده‌اند، با روش فازنما که در بخش ۳۲-۱۱ بحث شد ترکیب می‌کنیم. در شکل ۳۵-۱۳ الف، موجها با مؤلفه‌های E_1 و E_2 با فازنماهایی به بزرگی E_0 نمایش داده شده‌اند که حول مبدأ با تندی زاویه‌ای ω می‌چرخند. مقدارهای E_1 و E_2 در هر لحظهٔ تصویرهای فازنماهای مربوط روی محور قائم هستند. شکل ۳۶-۱۳ الف فازنماها و تصویرهای آنها را در یک لحظهٔ اختیاری t نشان می‌دهد. در مطابقت با معادله‌های ۳۵-۲۰ و ۳۵-۲۱، فازنما برای E_1 دارای زاویهٔ چرخش ωt و فازنما برای E_2 دارای زاویهٔ چرخش $\omega t+\phi$ است.

برای ترکیب مؤلفه‌های میدان E_1 و E_2 در نقطهٔ P در شکل ۳۵-۱۰، مانند شکل ۳۵-۱۳ ب فازنماهای آنها را به طور برداری با هم جمع می‌کنیم. بزرگی مجموع برداری عبارت است از بزرگی E موج برایند در نقطهٔ P موجی که ثابت فاز آن β است. برای یافتن بزرگی E در شکل ۳۵-۱۳ ب، ابتدا توجه می‌کنیم که دو زاویهٔ β به دلیل مثلث متساوی‌الساقین مساوی هستند. از این قضیه (دربارهٔ مثلثها) که زاویهٔ خارجی (به طوری که در شکل ۳۵-۱۳ ب نشان داده شده است، در اینجا ϕ) برابر با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیر مجاور (در اینجا مجموع $\beta+\beta$ است)، می‌توان دید که $\beta=\frac{1}{2}\phi$ بنابراین، خواهیم داشت

$$E=2(E_0\cos\beta) \qquad (۳۵-۲۸)$$

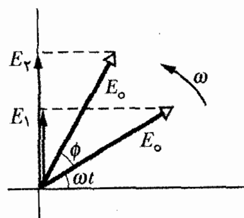
$$=2E_0\cos\frac{1}{2}\phi$$

اگر دو طرف این رابطه را به توان دو برسانیم، خواهیم داشت

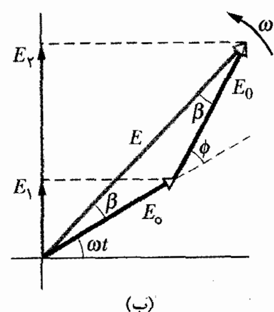
$$E^2=4E_0^2\cos^2\frac{1}{2}\phi \qquad (۳۵-۲۹)$$

اکنون از معادلهٔ ۲۹-۲۴ (جلد دوم) می‌دانیم که شدت یک موج الکترومغناطیسی با مربع بزرگی آن متناسب است. بنابراین، موجهایی که در شکل ۳۵-۱۳ ب می‌خواهیم ترکیب کنیم بزرگی هر یک E_0، شدت هر یک I_0 که متناسب با E_0^2 است، و موج برایند با دامنهٔ E دارای شدت I است که متناسب با E^2 است. بنابراین،

$$\frac{I}{I_0}=\frac{E^2}{E_0^2}$$



(الف)



(ب)

شکل ۳۵-۱۳ (الف) فازنماهای نشان‌دهندهٔ مؤلفه‌های میدان الکتریکی توسط معادله‌های ۳۵-۲۰ و ۳۵-۲۱ در لحظهٔ t. بزرگی هر دو فازنما E_0 است و با تندی زاویه‌ای ω می‌چرخند. اختلاف فاز آنها ϕ است. (ب) مجموع برداری دو فازنما، فازنمای نمایش‌دهندهٔ موج برایند را با بزرگی E و ثابت فاز β به دست می‌دهد.

با قرار دادن معادلهٔ ۳۵-۲۹ در این معادله و ترتیب دوبارهٔ آن خواهیم داشت

$$I=4I_0\cos^2\frac{1}{2}\phi$$

که همان معادلهٔ ۳۵-۲۲ است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

معادلهٔ ۳۵-۲۳ را نیز باید ثابت کنیم که اختلاف فاز ϕ بین موجهایی را به هم ارتباط می دهد که به هر نقطهٔ P روی صفحهٔ مشاهدهٔ شکل ۳۵-۱۰ با زاویهٔ θ که این محل را مشخص می‌کند، به هم می‌رسند.

اختلاف فاز ϕ در معادلهٔ ۳۵-۲۱ به اختلاف راه S_1b در شکل ۳۵-۱۰ ب مربوط است. اگر S_1b برابر با $\frac{1}{2}\lambda$ باشد، آنگاه ϕ برابر با π است؛ اگر S_1b برابر با λ باشد، آنگاه ϕ برابر با 2π است و غیره. این حاکی از آن است که

$$(\text{اختلاف فاز})=\frac{2\pi}{\lambda}(\text{اختلاف راه}) \qquad (۳۵-۳۰)$$

اختلاف راه S_1b در شکل ۳۵-۱۰ ب عبارت است از $d\sin\theta$، به طوری که معادلهٔ ۳۵-۳۰ در مورد اختلاف فاز بین دو موجی که در نقطهٔ P به صفحهٔ مشاهده می‌رسند عبارت است از

$$\phi=\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

که معادلهٔ ۳۵-۲۳ است، معادلهٔ دیگری که با اثبات آن ϕ به زاویهٔ θ در مکانهای P ارتباط پیدا می‌کند.

ترکیب بیش از دو موج

در یک حالت کلی‌تر، می‌خواهیم برایند بیش از دو موج متغیر سینوسی را در یک نقطه پیدا کنیم. صرفنظر از تعداد موجها، راهکار کلی چنین است:

۱- دسته‌ای از فازنماهای نمایش‌دهندهٔ موجهایی را که باید ترکیب شوند در نظر می‌گیریم. آنها را انتها به انتها رسم می‌کنیم، به طوری که رابطه‌های فازی بین فازنماهای مجاور حفظ شود.

۲- مجموع برداری این آرایه را به دست می‌آوریم. طول این جمع برداری دامنهٔ فازنمای برایند را به دست می‌دهد. زاویهٔ بین جمع برداری و فازنمای اول عبارت است از فاز برایند نسبت به این فازنمای اول. تصویر فازنمای جمع برداری روی محور قائم تغییر زمانی موج برایند را به دست می‌دهد.

✔ **نکتهٔ وارسی ۴** هر یک از چهار زوج موج نوری به نقطهٔ معینی روی یک صفحه می‌رسند. موجها طول موج یکسانی دارند. در نقطه‌ای که می‌رسند، دامنه‌ها و اختلاف فازها عبارت‌اند از (الف) $۲E_\circ$، $۶E_\circ$ و πrad؛ (ب) $۳E_\circ$، $۵E_\circ$ و πrad؛ (پ) $۹E_\circ$، $۷E_\circ$ و $۳\pi \text{rad}$؛ (ت) $۲E_\circ$، $۲E_\circ$ و $\circ \text{ rad}$. این چهار زوج را به ترتیب بزرگی شدت نور در نقطه‌ای که می‌رسند مرتب کنید. (راهنمایی: فازنماها را رسم کنید.)

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵-۴

مؤلفه‌های میدان الکتریکی سه موج نوری که در نقطهٔ معینی ترکیب می‌شوند عبارت‌اند از

$$E_۱ = E_\circ \sin \omega t$$
$$E_۲ = E_\circ \sin(\omega t + ۶\circ^\circ)$$
$$E_۳ = E_\circ \sin(\omega t - ۳\circ^\circ)$$

مؤلفه برایند $E(t)$ آنها را در آن نقطه پیدا کنید.

نکتهٔ کلیدی موج برایند عبارت است از

$$E(t) = E_۱(t) + E_۲(t) + E_۳(t)$$

می‌توان روش فازنما را برای پیدا کردن این مجموع به کار برد، و برای محاسبهٔ فازنماها در هر لحظهٔ t آزاد هستیم.

محاسبه‌ها: برای ساده‌سازی حل، $t = \circ$ را انتخاب می‌کنیم، که برای آن فازنماهایی که سه موج را نشان می‌دهند در شکل ۳۵-۱۴ نشان داده شده‌اند. این سه فازنما را می‌توان هم با ماشین حساب با قابلیت جمع برداری یا به طور مؤلفه‌ای با هم جمع کرد. در روش مؤلفه‌ای، ابتدا مجموع مؤلفه‌های افقی آنها را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\sum E_h = E_\circ \cos \circ + E_\circ \cos ۶\circ^\circ + E_\circ \cos(-۳\circ^\circ) = ۲/۳۷E_\circ$$

مجموع مؤلفه‌های عمودی آنها که مقدار E را در $t = \circ$ به دست می‌دهد عبارت است از

$$\sum E_v = E_\circ \sin \circ + E_\circ \sin ۶\circ^\circ + E_\circ \sin(-۳\circ^\circ) = \circ/۳۶۶E_\circ$$

دامنهٔ موج برایند $E(t)$ E_R عبارت است از

$$E_R = \sqrt{(۲/۳۷E_\circ)^۲ + (\circ/۳۶۶E_\circ)^۲} = ۲/۴E_\circ$$

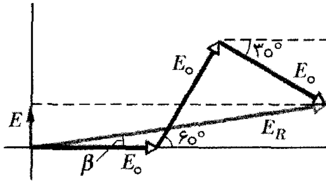
و زاویهٔ فاز β مربوط به فازنمای نمایش‌دهندهٔ $E_۱$ عبارت است از

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\circ/۳۶۶E_\circ}{۲/۳۷E_\circ}\right) = ۸/۸^\circ$$

اکنون برای موج برایند $E(t)$ می‌توان نوشت

$$E = E_R \sin(\omega t + \beta)$$
$$= ۲/۴E_\circ \sin(\omega t + ۸/۸^\circ) \qquad \text{(پاسخ)}$$

در مورد توجیه درست زاویهٔ β به شکل ۳۵-۱۴ دقت کنید: این زاویهٔ ثابت بین E_R و بردار فاز نشان‌دهندهٔ $E_۱$ است به طوری که چهار بردار فاز به صورت مجموعهٔ واحدی حول مبدأ می‌چرخند. زاویهٔ بین E_R و محور افقی در شکل ۳۵-۱۴ مساوی β نمی‌ماند.



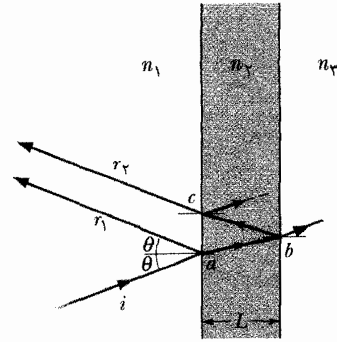
شکل ۳۵-۱۴ سه فازنما، که نمایش دهندهٔ موجها با دامنه‌های مساوی $E_\circ$ و ثابت فاز $\circ^\circ$ و $۶\circ^\circ$ و $-۳\circ^\circ$ هستند در لحظهٔ $t = \circ$ نشان داده شده‌اند. این فازنماها با هم ترکیب می‌شوند و فازنمای برایند با بزرگی E_R را با زاویهٔ β به دست می‌دهند.

۳۵-۷ تداخل در لایه‌های نازک

رنگهایی را که موقع تابیدن نور خورشید به یک حباب صابون یا لکهٔ نفت می‌بینیم ناشی از تداخل موجهای نور بازتابیده از سطحهای جلویی و عقبی یک لایهٔ شفاف نازک است. ضخامت لایهٔ صابون یا نفت نوعاً از مرتبهٔ بزرگی طول موج نور (مرئی) است. (ضخامتهای بزرگتر همدوسی نور مورد نیاز برای ایجاد رنگها به وسیلهٔ تداخل را مختل می‌کنند.)

شکل ۳۵-۱۵ یک لایهٔ نازک شفاف با ضخامت یکنواخت L و ضریب شکست $n_۲$ را نشان می‌دهد که به وسیلهٔ نور با طول موج λ از یک چشمهٔ نقطه‌ای دور روشن شده است. فعلاً فرض می‌کنیم که دو طرف این لایه هوا قرار دارد و در نتیجه در شکل ۳۵-۱۵، $n_۱ = n_۳$ است. برای سادگی همچنین فرض می‌کنیم که پرتوهای نور تقریباً بر لایه عمودند $(\theta \approx \circ)$. می‌خواهیم ببینیم برای ناظری که لایه را تقریباً عمودی نگاه کند لایه روشن است یا تاریک. (چون لایه با نور زیادی روشن شده است، چطور ممکن است تاریک دیده شود؟ این را خواهیم دید.)

نور فرودی، نمایش داده شده با پرتو i، سطح جلویی (چپ) لایه را در نقطهٔ a قطع می‌کند و در آنجا هم بازتابیده و هم شکسته می‌شود. پرتو بازتابیدهٔ $r_۱$ به چشم ناظر می‌رسد. نور شکسته لایه را تا نقطهٔ b در سطح عقبی طی می‌کند، جایی که



شکل ۳۵-۱۵ موجهای نوری که با پرتو نمایش داده شده‌اند بر یک لایهٔ نازک به ضخامت L و ضریب شکست n_2 می‌تابند. پرتوهای r_1 و r_2 موجهای نوری را نشان می‌دهند که به ترتیب به وسیلهٔ سطح جلویی و عقبی لایه بازتابیده شده‌اند. (هر سه پرتو در واقع بر لایه عمودند.) تداخل موجهای r_1 و r_2 با یکدیگر به اختلاف فاز آنها بستگی دارد. ضریب شکست n_1 محیط سمت چپ می‌تواند با ضریب شکست n_3 محیط سمت راست فرق داشته باشد، ولی مثلاً فرض می‌کنیم که هر دو محیط هوا با $n_1 = n_3 = 1/0$ باشند، که کمتر از n_2 است.

هم بازتابیده و هم شکسته می‌شود. نور بازتابیده در b در لایه تا نقطهٔ c برمی‌گردد و در آنجا هم بازتابیده و هم شکسته می‌شود. نور شکسته در c که با پرتو r_2 نمایش داده شده است، به چشم ناظر می‌رسد.

اگر موجهای نوری پرتوهای r_1 و r_2 در چشم دقیقاً همفاز باشند، تداخل بیشینه ایجاد می‌کنند و ناحیهٔ ac روی لایه روشن به نظر می‌رسد. اگر آنها دقیقاً ناهمفاز باشند، تداخل کمینه ایجاد می‌کنند و ناحیهٔ ac تاریک به نظر می‌رسد، حتی *اگر به آن نور تابیده* باشد. اگر اختلاف فاز میانه‌ای وجود داشته باشد، تداخل میانه و روشنایی میانه وجود خواهد داشت.

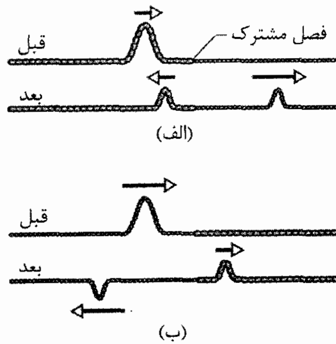
بنابراین، کلید آنچه که ناظر می‌بیند عبارت است از اختلاف فاز موجهای پرتوهای r_1 و r_2. هر دو پرتو از یک پرتو I ناشی شده‌اند، ولی راهی که r_2 طی می‌کند مربوط به نوری است که دو بار عرض لایه (a تا b و b تا c) را می‌پیماید، در حالی که راهی که r_1 طی می‌کند در لایه حرکت نکرده است. چون θ تقریباً صفر است، اختلاف راه بین موجهای r_1 و r_2 تقریباً $2L$ است. ولی، برای پیدا کردن اختلاف فاز بین این موجها، نمی‌توان فقط تعداد طول موجهای λ را که معادل با اختلاف راه $2L$ باشد پیدا کرد. این رویکرد ساده به دو دلیل ناممکن است: (۱) اختلاف راه در محیطی غیر از هوا رخ می‌دهد و (۲) بازتاب وجود دارد که می‌تواند فاز را تغییر دهد.

> اگر یک یا هر دو موج بازتابیده شوند، اختلاف فاز بین آنها می‌تواند تغییر کند.

پیش از ادامهٔ بحث تداخل در لایه‌های نازک، باید دربارهٔ تغییر فاز ایجاد شده توسط بازتابها بحث کنیم.

تغییر فاز در بازتاب

شکست در یک سطح جدایی هرگز باعث تغییر فاز نمی‌شود ولی بسته به ضریب شکستهای دو طرف سطح جدایی بازتاب می‌تواند باعث این کار شود. شکل ۳۵-۱۶ به عنوان مثال با استفاده از تپها در یک ریسمان چگالتر (که در امتداد آن تپ نسبتاً آرام حرکت می‌کند) و یک ریسمان سبکتر (که در امتداد آن تپ نسبتاً تند حرکت می‌کند)، آنچه را که به هنگام ایجاد تغییر فاز رخ می‌دهد نشان می‌دهد.



شکل ۳۵-۱۶ تغییرات فاز وقتی تپی در فصل مشترک بین دو ریسمان کشیده شده با چگالیهای خطی مختلف بازتابیده می‌شود. تندی موج در ریسمان سبکتر بیشتر است. (الف) تپ فرودی در ریسمان چگالتر. (ب) تپ فرودی در ریسمان سبکتر. فقط در اینجا یک تغییر فاز و فقط در موج بازتابیده وجود دارد.

هرگاه تپی که نسبتاً آرام در امتداد ریسمان چگالتر در شکل ۳۵-۱۶ الف حرکت می‌کند به فصل مشترک با ریسمان سبکتر برسد، مقداری از تپ عبور می‌کند و مقداری بدون تغییر در سمتگیری آن بازتابیده می‌شود. در مورد نور این امر متناظر با یک موج فرودی است که در محیط با ضریب شکست بزرگتر n حرکت می‌کند (به یاد بیاورید که n بیشتر به معنای سرعت کمتر است). در این مورد، موج بازتابیده در فصل مشترک تغییر فاز نمی‌یابد؛ یعنی تغییر فاز در بازتاب آن صفر است.

وقتی تپی که خیلی تند در امتداد ریسمان سبکتر در شکل ۳۵-۱۶ ب حرکت می‌کند به فصل مشترک با ریسمان چگالتر برسد، دوباره مقداری از این تپ عبور می‌کند و مقداری باز می‌تابد. تپ عبور کرده همان سمتگیری تپ فرودی را دارد، ولی تپ بازتابیده وارونه می‌شود. در مورد یک موج سینوسی، وضعیت حاکی از تغییر فاز πrad، یا نصف طول موج است. در مورد نور، این وضعیت متناظر با یک موج فرودی است که در محیط با ضریب شکست کمتر (با سرعت بیشتر) حرکت می‌کند. در این مورد، موجی که از فصل مشترک بازتابیده می‌شود، یک تغییر فاز πrad، یا نصف طول موج پیدا می‌کند.

این نتیجه‌ها را در مورد نور برحسب ضریب شکست محیط بازتاب‌دهندهٔ نور خلاصه می‌کنیم.

بازتاب	تغییر فاز در بازتاب
از ضریب شکست کمتر	۰
از ضریب شکست بیشتر	۰/۵ طول موج

این را می‌توان به صورت «بیشتر به معنی نصف» به خاطر سپرد.

معادله‌های تداخل در لایهٔ نازک

در این فصل تاکنون سه روش را دیده‌ایم که در آن اختلاف فاز بین دو موج می‌توانند تغییر کند:

۱- با بازتاب

۲- با حرکت موجها در امتداد مسیرهایی با طولهای متفاوت

۳- با حرکت موجها در محیط‌هایی با ضریب شکستهای متفاوت

هرگاه نور از یک لایهٔ نازک بازتابیده شود، و موجهایی از پرتوهای r_1 و r_2 نشان داده شده در شکل ۳۵-۱۲ حاصل شوند، هر سه مورد بالا وجود دارند. هر یک را جداگانه بررسی می‌کنیم.

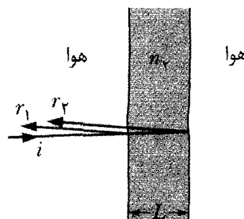
نخست دو بازتاب شکل ۳۵-۱۵ را دوباره بررسی می‌کنیم. در نقطهٔ a در سطح جدایی جلویی، موج فرودی (در هوا) از محیطی که ضریب شکست بزرگتری دارد بازتابیده می‌شود؛ بنابراین، موج بازتابیدهٔ پرتو r_1 دارای تغییر فاز ۰/۵ طول موج است. در نقطهٔ b در سطح جدایی عقبی، موج فرودی از محیطی (هوا) که دارای ضریب شکست کمتری است بازتابیده می‌شود، بنابراین، موج بازتابیده بر اثر بازتاب تغییر فاز پیدا نمی‌کند و در نتیجه برای قسمتی از موج که به صورت پرتو r_1 از لایه خارج می‌شود نیز تغییر فازی وجود ندارد. این اطلاعات در خط اول جدول ۳۵-۱ آمده است، که به طرح سادهٔ شکل ۳۵-۱۷ برای یک لایهٔ نازک در هوا اشاره دارد. تا اینجا به عنوان نتیجهٔ تغییر فاز در بازتاب، موجهای r_1 و r_2 اختلاف فاز ۰/۵ طول موج دارند و بنابراین دقیقاً ناهمفازند.

جدول ۳۵-۱

ساماندهی جدول برای تداخل لایهٔ نازک در هوا (شکل ۳۵-۱۷)[1]

تغییر فاز در بازتاب	r_1	r_2
	۰/۵	۰
اختلاف راه	$2L$	
ضریب شکستی که در آن اختلاف راه به وجود می‌آید		n_2
همفاز:	$2L = \frac{\quad}{2} \times \frac{\lambda}{n_2}$	
ناهمفاز:	$2L = \text{مضرب صحیح} \times \frac{\lambda}{n_2}$	

۱. به ازای $n_2 > n_1$ و $n_2 > n_3$ معتبر است.



شکل ۳۵-۱۷ بازتاب از یک لایهٔ نازک در هوا

اکنون باید اختلاف راه $2L$ را در نظر بگیریم که به علت دوبار عبور پرتو r_2 از لایه به وجود می‌آید، (این اختلاف $2L$ در خط دوم جدول ۳۵-۱ نشان داده شده است.) اگر موجهای r_1 و r_2 دقیقاً همفاز باشند به طوری که تداخل کاملاً سازنده ایجاد کنند، باید طول راه $2L$ یک اختلاف فاز اضافی ۰/۵، ۱/۵، ۲/۵، طول موج را موجب شود. در این صورت فقط اختلاف فاز خالص مضرب صحیحی از طول موجها خواهد بود. بنابراین، برای یک لایهٔ روشن، باید داشته باشیم

(۳۵-۳۱) (موجهای همفاز) $2L = \frac{\text{مضرب فرد}}{2} \times \text{طول موج}$

طول موج مورد نیاز در اینجا عبارت است از طول موج λ_{n2} نور در محیطی که طول راه $2L$ را دارد- یعنی، در محیطی با ضریب شکست n_2. بنابراین، معادلهٔ ۳۵-۳۱ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

(۳۵-۳۲) (موجهای همفاز) $2L = \frac{\text{مضرب فرد}}{2} \times \lambda_{n2}$

حال اگر بخواهیم موجها دقیقاً ناهمفاز باشند به طوری که تداخل کاملاً ویرانگر وجود داشته باشد، طول راه $2L$ یا نباید موجب اختلاف فاز اضافی شود یا اختلاف فاز ۱، ۲، ۳،..... طول موج وجود داشته باشد بنابراین، اختلاف فاز خالص مضرب فردی از نیم‌طول موجها خواهد بود. در مورد یک لایهٔ تاریک باید داشته باشیم

(۳۵-۳۳) $2L = \text{مضرب صحیح} \times \text{طول موج}$

که در آن دوباره طول موج عبارت است از طول موج λ_{n2} در محیطی که طول راه $2L$ را دارد. پس در اینجا خواهیم داشت

(۳۵-۳۴) (موجهای ناهمفاز) $2L = \text{مضرب صحیح} \times \lambda_{n2}$

اینک برای نوشتن طول موج پرتو r_2 در داخل لایه می‌توان معادلهٔ ۳۵-۸ $(\lambda_n = \lambda/n)$ را به صورت زیر نوشت

(۳۵-۳۵) $$\lambda_{n2} = \frac{\lambda}{n_2}$$

که در آن λ طول موج نور فرودی در خلأ (و همچنین تقریباً در هوا) است. با قرار دادن معادلهٔ ۳۵-۳۵ در معادلهٔ ۳۵-۳۲ و قرار دادن «۲/ مضرب فرد» با $\left(m+\frac{1}{2}\right)$ خواهیم داشت

$$2L = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{n_2} \quad \text{به ازای } m = 0,1,2,\ldots$$

(۳۵-۳۶) (بیشینه‌ها ـلایهٔ روشن در هوا)

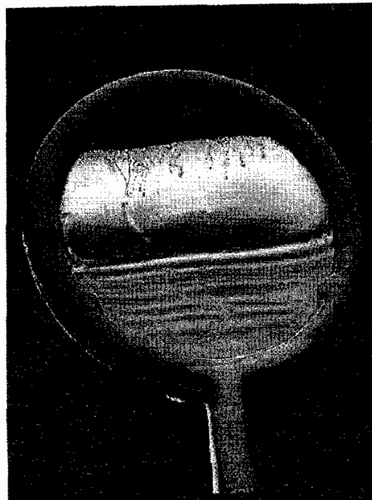
به همین ترتیب با قرار دادن m به جای «مضرب صحیح»، از معادلهٔ ۳۵-۳۴ خواهیم داشت

$$2L = m\frac{\lambda}{n_2} \quad m = 0,1,2,\ldots$$ به ازای (کمینه‌ها – لایهٔ تاریک در هوا) (۳۵-۳۷)

در مورد یک لایه با ضخامت L، از معادله‌های ۳۵-۳۶ و ۳۵-۳۷ پیداست که طول موجهایی که برای آنها لایه به ترتیب روشن و تاریک به نظر می‌رسد، یک طول موج به ازای هر مقدار m است. طول موجهای میانی، روشناییهای میانی را به دست می‌دهند. برای یک طول موج معین λ، از معادله‌های ۳۵-۳۶ و ۳۵-۳۷ پیداست که ضخامت لایه‌هایی که برای آنها نور به ترتیب روشن و تاریک به نظر می‌رسد، یک ضخامت به ازای هر مقدار m است. ضخامتهای میانی، روشناییهای میانی را به دست می‌دهند.

ضخامت لایه خیلی کمتر از λ

وضعیت خاص زمانی حاصل می‌شود که یک لایه به اندازه‌ای نازک باشد که L خیلی کمتر از λ باشد، مثلاً $L < 0/1\lambda$. در این صورت اختلاف راه $2L$ ناچیز و اختلاف فاز بین r_1 و r_2 فقط به واسطهٔ تغییر فاز در بازتاب است. اگر لایهٔ شکل ۳۵-۱۷، که در آن بازتابها موجب یک تغییر فاز ۰/۵ طول موج می‌شوند، دارای ضخامت $L < 0/1\lambda$ باشد، آنگاه r_1 و r_2 دقیقاً ناهمفازند، و در نتیجه بدون توجه به طول موج و حتی شدت نوری که آن را روشن کرده است، لایه تاریک دیده می‌شود. این وضعیت خاص به $m = 0$ در معادلهٔ ۳۵-۳۷ مربوط است. هر ضخامت $L < 0/1\lambda$ را می‌توان به عنوان کمترین ضخامت مشخص شده توسط معادلهٔ ۳۵-۳۷ در نظر گرفت که لایهٔ شکل ۳۵-۱۷ تاریک است. (هر ضخامت مانند این متناظر با $m = 0$ است.) ضخامت بزرگتر بعدی که لایه را تاریک می‌سازد متناظر با $m = 1$ است.



شکل ۳۵-۱۸ بازتاب نور از یک لایهٔ آب صابون که در یک حلقهٔ عمودی باز شده است. قسمت بالایی به اندازه‌ای نازک است که نور بازتابیده در آنجا در تداخل ویرانگر قرار دارد، که آن قسمت را تاریک می‌کند. فریزهای تداخلی رنگی یا نوارها بقیهٔ لایه را آراسته‌اند، ولی با جمع شدن مایع درون لایه وقتی که مایع بتدریج توسط گرانش رو به پایین کشیده می‌شود، از بین می‌روند.

شکل ۳۵-۱۸ یک لایهٔ صابون عمودی را نشان می‌دهد که ضخامت آن از بالا به پایین افزایش می‌یابد، چون گرانش باعث کشیدگی آن می‌شود. نور سفید لایه را روشن می‌کند. ولی، قسمت بالایی آن به اندازه‌ای نازک است که تاریک است. در وسط (که قدری ضخیم‌تر است) فریزها یا نوارهایی می‌بینیم که رنگ آنها عمدتاً به طول موجی بستگی دارد که در آن نور بازتابیده برای یک ضخامت خاص، در تداخل کاملاً سازنده قرار دارد. در پایین لایه (ضخیم‌ترین) فریزها بتدریج باریکتر می‌شوند و رنگها همپوشانی می‌کنند و محو می‌شوند.

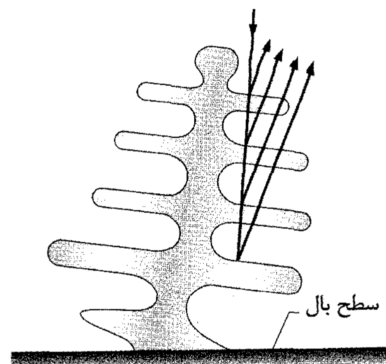
تغییر رنگ توسط پروانه‌ها، مرکبها و رنگها

سطحی که رنگهای ناشی از تداخل لایهٔ نازک را نشان می‌دهد *رنگ به رنگ* نامیده می‌شود چون درجهٔ رنگها وقتی زاویهٔ دید نسبت به سطح تغییر کند، تغییر خواهد کرد. رنگ به رنگ شدن سطح بالایی بال پروانهٔ مورفو ناشی از تداخل نور در لایهٔ نازکی است که از مواد پوسته‌ای و پلکانی شکل روی بال بازتابیده می‌شود (شکل ۳۵-۱۹). این پله‌ها، مانند شاخه‌های پهن و تخت روی ساختار درختی شکلی که عمود بر بال گسترده‌اند قرار گرفته‌اند.

فرض کنید وقتی که نور سفید به طور مستقیم بال را روشن می‌کند به این پله‌ها نگاه کنید. آنگاه نورهای بازتابیده از پله‌ها به طرف شما در ناحیهٔ آبی– سبز طیف مرئی تداخل کاملاً سازنده به وجود می‌آورند. نور در ناحیه‌های زرد و قرمز، در انتهای مقابل طیف ضعیف‌تر است، چون فقط تداخل میانی پیدا می‌کند. بنابراین، سطح بالایی بال آبی – سبز به نظر می‌رسد.

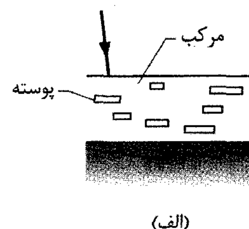
اگر نوری که از بال در جهت دیگری بازتابیده می‌شود به چشم برسد، نور به طور مایل نسبت به پله‌ها حرکت می‌کند. در نتیجه تداخل کاملاً سازنده در طول موجی رخ می‌دهد که با طول موج نوری که به طور مستقیم رو به بالا بازتابیده است قدری فرق دارد. بنابراین، اگر بال در جهت دید شما حرکت کند به طوری که زاویهٔ دید تغییر کند، روشنترین رنگ قدری تغییر می‌کند و رنگ به رنگ شدن بال را به وجود می‌آورد.

تغییر رنگ در مرکب به کار رفته در کاغذ اسکناس تقریباً مانند تغییر رنگ بال یک پروانهٔ مورفو عمل می‌کند. شکل ۳۵-۲۰ الف مقطع لایهٔ مرکب به کار رفته در اسکناس را نشان می‌دهد. رنگ به دلیل پوسته‌های چند لایه‌ای معلق در مرکب تغییر می‌کند. شکل ۳۵-۲۰ ب مقطع یکی از پوسته‌ها را نشان می‌دهد. نوری که به مرکب بالای پوسته نفوذ می‌کند از لایه‌های نازک کروم (Cr)، منیزیوم فلوراید (MgF_2)، و آلومینیوم (Al) می‌گذرد. لایه‌های Cr مانند آینه‌های ضعیفی عمل می‌کنند. لایهٔ Al مانند آینهٔ بهتری عمل می‌کند و لایه‌های MgF_2 مانند لایه‌های صابون عمل می‌کنند. نتیجه این است که نور بازتابیده به بالا از مرز بین لایه‌ها از مرکب می‌گذرد و سپس در چشم ناظر تداخل می‌کند. اینکه کدام رنگ به طور کامل تداخل

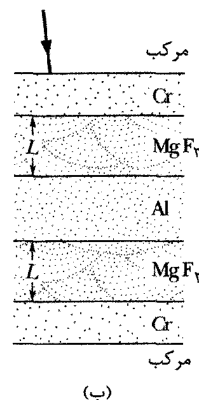


شکل ۳۵-۱۹ ساختار بازتاب‌کننده از بال یک پروانهٔ مورفو به بالا گسترده شده است. بازتاب از سطوح بالایی «پلکان‌های» شفاف بر بال یک تداخل رنگی به دست می‌دهد.

سازنده دارد به ضخامت L لایه‌های MgF_2 بستگی دارد. در آمریکا اسکناسها را با مرکبهای تغییردهندهٔ رنگ چاپ می‌کنند و مقدار L طوری طراحی می‌شود که در مورد نور قرمز یا قرمز-زرد به هنگام مشاهدهٔ مستقیم اسکناس تداخل کاملاً سازنده



(الف)



(ب)

شکل ۳۵-۲۰ (الف) مرکب تغییردهندهٔ رنگ روی کاغذ اسکناس شامل چندین لایهٔ نازک پوسته‌ای معلق در مرکب است. (ب) مقطع یکی از پوسته‌ها. نور از پنج لایه نفوذ می‌کند و روی هر مرز بازتاب پیدا می‌کند. رنگی که از تداخل این موجهای نوری بازتابیده ناشی می‌شود با ضخامت L لایه‌های منیزیوم فلوراید، تعیین می‌شود.

انجام می‌گیرد. وقتی ناظر اسکناس و در نتیجه پوسته‌ها را کج کند، نوری که از پوسته‌ها به ناظر می‌رسد در نور سبز تداخل سازنده می‌کند. بنابراین، با تغییر زاویهٔ دید، ناظر می‌تواند رنگ را تغییر دهد. کشورهای دیگر طرحهای دیگری از پوسته‌های لایهٔ نازک می‌سازند که به تغییرهای مختلفی در رنگهای اسکناس آنها می‌انجامد.

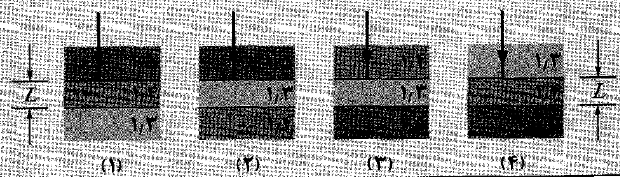
تدبیرهای حل مسئله

تدبیر ۱: معادله‌های لایهٔ نازک

برخی از دانشجویان بر این باورند که برای کلیه وضعیتهای لایهٔ نازک معادلهٔ ۳۵-۳۶ بیشینه‌ها و معادلهٔ ۳۵-۳۷ کمینه‌ها را به دست می‌دهند. این درست نیست. این رابطه‌ها فقط برای وضعیتی که در شکل ۳۵-۱۲، $n_2 > n_1$ و $n_2 > n_3$ و برای وضعیت شکل ۳۵-۱۷ که در آن یک لایهٔ نازک در هوا قرار دارد به دست آمده‌اند.

معادله‌های مناسب برای مقدارهای نسبی دیگر ضریب شکستها را می‌توان با توجه به استدلال این بخش و ایجاد صورت جدیدی از جدول ۳۵-۱ به دست آورد. در هر مورد به معادله‌های ۳۵-۳۶ و ۳۵-۳۷ می‌رسیم ولی بعضی مواقع معادلهٔ ۳۵-۳۶ کمینه‌ها و معادلهٔ ۳۵-۳۷ بیشینه‌ها را به دست می‌دهد. عکس چیزی که در اینجا به دست آوردیم. اینکه کدام معادله کدام وضعیت را به دست می‌دهد به این بستگی دارد که آیا بازتابهای روی دو سطح جدایی تغییر فاز بازتابی یکسانی به دست می‌دهند یا نه.

✔ *نکتهٔ وارسی ۵* شکل چهار وضعیت را نشان می‌دهد که در آن نور به طور عمود از یک لایهٔ نازک به ضخامت L با ضریب شکستهای داده شده باز می‌تابد. (الف) برای کدام وضعیتها بازتاب در سطحهای جدایی لایه موجب یک اختلاف فاز صفر برای دو پرتو بازتابیده می‌شود؟ (ب) اگر اختلاف راه $2L$ موجب یک اختلاف فاز ۰٫۵ طول موج شود، در چه وضعیتهایی لایه تاریک خواهد بود؟



مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵-۵

نور سفید، با شدت یکنواخت در گسترهٔ طول موجهای مرئی از ۴۰۰nm تا ۶۹۰nm به طور عمود بر لایهٔ آب با ضریب شکست $n_2 = ۱/۳۳$ و ضخامت $L = ۳۲۰\,nm$ می‌تابد که در هوا قرار دارد. در چه طول موج λ نور بازتابیده توسط لایه روشنترین وضع را برای ناظر دارد؟

نکتهٔ کلیدی نور بازتابیده از لایه در طول موجهایی، λ روشنترین است که برای آنها پرتوهای بازتابیده با یکدیگر همفاز باشند. معادله‌ای که این طول موجهای λ را به ضخامت L و ضریب شکست n_2 مربوط می‌سازد، بسته به تغییر فاز در

بازتاب برای این لایهٔ خاص معادلهٔ ۳۵-۳۶ یا معادلهٔ ۳۵-۳۷ است.

محاسبه‌ها: برای تعیین اینکه کدام معادله مورد نیاز است، باید جدولی مانند ۳۵-۱ تشکیل دهیم. البته، چون در دو طرف لایهٔ آب، هوا وجود دارد، وضعیت دقیقاً مانند شکل ۳۵-۱۷ و بنابراین، جدول دقیقاً همان جدول ۳۵-۱ است. حال از جدول ۳۵-۱، می‌توان دید که پرتوهای بازتابیده وقتی همفازند (و بنابراین، فیلم روشن خواهد بود) که

$$2L = \frac{\text{مضرب فرد}}{2} \times \frac{\lambda}{n_2}$$

باشد، که به معادلهٔ ۳۵-۳۶ می‌انجامد

$$2L = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{n_2}$$

با حل آن برحسب λ و قرار دادن L و n_2 خواهیم داشت

$$\lambda = \frac{2n_2L}{m+\frac{1}{2}} = \frac{(2)(1/33)(320\,\text{nm})}{m+\frac{1}{2}} = \frac{851\text{nm}}{m+\frac{1}{2}}$$

به ازای $m=0$، $\lambda = 1700\,\text{nm}$ به دست می‌آید، که در ناحیهٔ فروسرخ است. به ازای $m=1$ ، $\lambda = 567\text{nm}$ به دست می‌آید که نور زرد-سبز است که در وسط طیف مرئی قرار دارد. به ازای $m=2$ ، $\lambda = 340\,\text{nm}$ به دست می‌آید، که در ناحیهٔ فرابنفش است. بنابراین، طول موجی که در آن نور توسط ناظر روشنتر دیده خواهد شد عبارت است از

$$\lambda = 567\text{nm} \qquad \text{(پاسخ)}$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵-۶

در شکل ۳۵-۲۱ یک طرف یک عدسی شیشه‌ای با لایهٔ نازکی از منیزیوم فلوراید (MgF_2) پوشش داده شده است تا بازتاب از سطح عدسی کاهش یابد. ضریب شکست MgF_2 برابر با ۱/۳۸ و ضریب شکست شیشه ۱/۵۰ است. کمترین ضخامت پوششی که لازم است تا (از طریق تداخل) بازتابها در وسط طیف مرئی ($\lambda = 550\text{nm}$) حذف شوند چقدر است؟ فرض کنید که نور تقریباً بر سطح عدسی عمود است.

نکتهٔ کلیدی اگر ضخامت L لایه به گونه‌ای باشد که موجهای بازتابیده از سطح جدایی دو لایه دقیقاً ناهمفاز باشند، بازتاب از بین می‌رود. معادله‌ای که L را به طول موج معین λ و ضریب شکست n_2 لایهٔ نازک مربوط می‌کند بسته به تغییر فاز در سطح جدایی می‌تواند معادلهٔ ۳۵-۳۶ یا معادلهٔ ۳۵-۳۷ باشد.

محاسبه‌ها: برای تعیین اینکه کدام معادله مورد نیاز است، جدولی مانند ۳۵-۱ را تشکیل می‌دهیم. در سطح جدایی اول، نور فرودی در هوا قرار دارد که ضریب شکست آن کمتر از ضریب شکست MgF_2 (لایهٔ نازک) است. بنابراین، در جدول ۰/۵ طول موج را زیر r_1 قرار می‌دهیم (این بدان معناست که موجهای مربوط به پرتو r_1 در سطح جدایی به اندازهٔ $0/5\lambda$ تغییر کرده‌اند). در سطح جدایی دوم، نور فرودی در MgF_2 است که ضریب شکست کمتری از شیشه در طرف دیگر سطح جدایی دارد. بنابراین، در جدول ۰/۵ طول موج را زیر r_2 قرار می‌دهیم.

چون هر دو بازتاب تغییر فاز یکسانی را موجب می‌شوند، r_1 و r_2 تمایل دارند. که همفاز باشند. چون می‌خواهیم این موجها *ناهمفاز* باشند، اختلاف راه $2L$ باید مضرب فردی از نیم طول موج باشد.

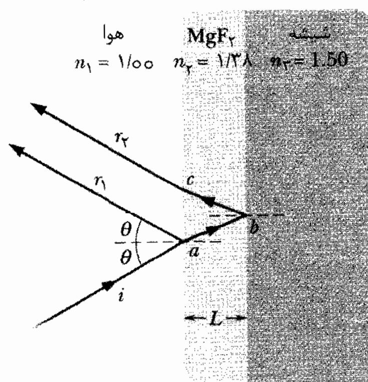
$$2L = \frac{\text{مضرب فرد}}{2} \times \frac{\lambda}{n_2}$$

این به معادلهٔ ۳۵-۳۶ می‌انجامد. حل این معادله برحسب L، ضخامت لایه‌ای که بازتاب را از عدسی و لایه حذف می‌کند به دست می‌دهد

$$L = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2n_2} \qquad m = 0,1,2,\ldots \text{ به ازای} \qquad (۳۵\text{-}۳۸)$$

کمترین ضخامت لایه یعنی کوچکترین مقدار برای L مورد نظر است. پس $m=0$ را انتخاب می‌کنیم که کمترین مقدار ممکن m است. با قرار دادن این و مقدارهای معلوم در معادلهٔ ۳۵-۳۸ خواهیم داشت

$$L = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{550\,\text{nm}}{(4)(1/38)} = 99/6\text{nm} \qquad \text{(پاسخ)}$$



شکل ۳۵-۲۱ بازتابهای ناخواسته از شیشه را می‌توان با پوشش دادن شیشه با یک لایهٔ نازک شفاف منیزیوم فلوراید با ضخامت انتخابی مناسب (در یک طول موج انتخابی) حذف کرد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵-۷ مهارت خود را تقویت کنید

شکل ۳۵-۲۲ الف یک قطعهٔ پلاستیکی شفاف با یک گوهٔ هوا در سمت راست را نشان می‌دهد. (در شکل در ضخامت گوه اغراق شده است.) نور قرمز با طول موج $\lambda = 632/8\text{nm}$ از بالای قطعه به طور مستقیم رو به پایین (با زاویهٔ فرودی ۰°) بر آن می‌تابد. مقداری از نور که وارد پلاستیک می‌شود از سطحهای بالا و پایین گوه به طرف بالا باز می‌تابد، که به عنوان یک لایهٔ نازک (هوا) با ضخامتی که بتدریج و به طور یکنواخت از L_L در انتهای سمت چپ تا L_R در انتهای سمت راست تغییر می‌کند، عمل می‌کنند. (لایه‌های پلاستیکی بالایی و پایینی گوهٔ

هوا بقدری ضخیم‌اند که به صورت لایه‌های نازک عمل می‌کنند.) ناظری که رو به پایین به قطعه نگاه می‌کند نقش تداخلی را که شامل شش فریز تاریک و پنج فریز قرمز روشن در امتداد گوه است می‌بیند. تغییر در ضخامت $\Delta L(=L_R-L_L)$ در امتداد گوه چقدر است؟

نکته کلیدی

(۱) روشنایی در هر نقطه در طول از چپ به راست گوهٔ هوا به علت تداخل موجهای بازتابیده در سطحهای جدایی بالا و پایین گوه است.

(۲) تغییر در روشنایی نقش فریزهای روشن و تاریک به علت تغییر در ضخامت گوه است. در برخی ناحیه‌ها، این ضخامت موجهای بازتابیده را همفاز می‌کند و در نتیجه یک بازتاب روشن ایجاد می‌کند (فریز قرمز روشن). در ناحیه‌های دیگر، این ضخامت موجهای بازتابیده را ناهمفاز می‌کند و در نتیجه هیچ بازتابی ایجاد نمی‌شود (فریز تاریک).

سازماندهی بازتابها: چون ناظر فریز تاریک بیشتری نسبت به فریز روشن می‌بیند، می‌توان فرض کرد که در انتهای چپ و راست گوه فریز تاریک ایجاد می‌شود. بنابراین، نقش تداخلی همان است که در شکل ۳۵-۲۲ ب نشان داده شده است، و برای تعیین تغییر در ضخامت ΔL گوه می‌توان از آن استفاده کرد.

می‌توان بازتاب نور در سطحهای جدایی بالا و پایین گوه را، در هر نقطه‌ای در طول آن، با شکل ۳۵-۲۲ پ، که در آن L ضخامت در آن نقطه است نمایش داد. این شکل را برای انتهای چپ گوه به کار می‌بریم که در آنجا بازتابها یک فریز تاریک به دست می‌دهند.

در مورد فریز تاریک می‌دانیم که موجهای پرتوهای r_1 و r_2 در شکل ۳۵-۲۲ پ باید ناهمفاز باشند. همچنین می‌دانیم که معادله‌ای که ضخامت L لایه را به طول موج λ نور و ضریب شکست n_2 لایه مربوط می‌کند بسته به تغییر فاز در بازتاب معادلهٔ ۳۵-۳۶ یا معادلهٔ ۳۵-۳۷ است. برای تعیین اینکه کدام معادلهٔ فریز تاریک در سمت چپ گوه را به دست می‌دهد، جدولی مانند جدول ۳۵-۱ را تشکیل می‌دهیم.

در سطح جدایی بالایی گوه، نور فرودی در پلاستیک است که ضریب شکست آن بزرگتر از ضریب شکست هوای زیر آن سطح جدایی است. بنابراین، زیر r_1 در جدول ۰ را قرار می‌دهیم. در سطح جدایی پایینی گوه نور فرودی در هوا قرار دارد، که ضریب شکست آن کوچکتر از ضریب شکست پلاستیک زیر آن سطح جدایی است. از این رو، زیر r_2 در جدول ۰/۵ طول موج را قرار می‌دهیم. بنابراین، بازتابها به تنهایی تمایل دارند تا موجهای r_1 و r_2 را ناهمفاز کنند.

بازتابها در سمت چپ: چون موجها در انتهای چپ گوهٔ هوا ناهمفاز هستند، اختلاف راه $2L$ در آن انتهای گوه باید با رابطهٔ زیر داده شود

$$2L = \text{مضرب صحیح} \times \frac{\lambda}{n_2}$$

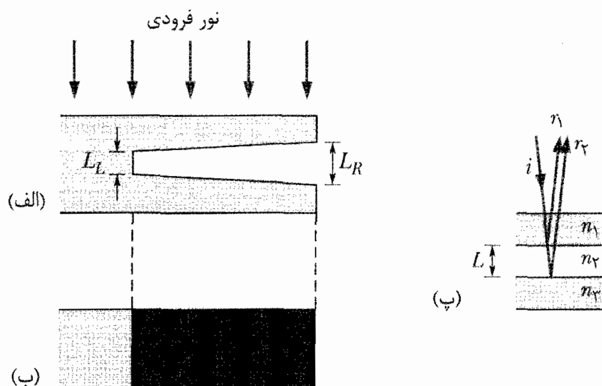
که به معادلهٔ ۳۵-۳۷ می‌انجامد

$$2L = m\frac{\lambda}{n_2} \qquad \text{به ازای} \quad m=0,1,2,\ldots \qquad (۳۵\text{-}۳۹)$$

بازتابها در سمت راست: معادلهٔ ۳۵-۳۹ نه تنها برای انتهای چپ گوه برقرار است بلکه برای هر نقطه در طول گوه که فریز تاریک مشاهده شود از جمله انتهای راست، با مقدار عدد صحیح متفاوت m برای هر فریز برقرار است. کمترین مقدار m به کمترین ضخامت گوه که در آنجا یک فریز تاریک مشاهده می‌شود مربوط است. زیاد شدن تدریجی مقدار m به زیاد شدن تدریجی ضخامت گوه مربوط است که فریز تاریک مشاهده می‌شود. فرض کنیم m_L مقدار m در انتهای چپ باشد. آنگاه، مقدار m در انتهای راست باید m_L+5 باشد، چون از معادلهٔ ۳۵-۲۱ ب، انتهای راست در پنجمین نوار تاریک از انتهای چپ واقع است.

اختلاف ضخامت: می‌خواهیم تغییر ΔL در ضخامت را از انتهای چپ تا انتهای راست گوه پیدا کنیم. برای یافتن آن، ابتدا معادلهٔ ۳۵-۲۹ را دو بار حل می‌کنیم، یک بار برای ضخامت L_L در انتهای چپ و یک بار برای ضخامت L_R در انتهای راست

$$L_L = (m_L)\frac{\lambda}{2n_2}, \quad L_R = (m_L+5)\frac{\lambda}{2n_2} \qquad (۳۵\text{-}۴۰)$$



شکل ۳۵-۲۲ (الف) نور قرمز بر گوهٔ نازکی از هوا در یک طرف قطعهٔ پلاستیکی شفاف می‌تابد. ضخامت گوه در انتهای چپ L_L و در انتهای L_R است. (ب) نمای از بالای قطعه: نقش تداخلی مرکب از شش فریز تاریک و پنج فریز روشن قرمز در ناحیهٔ رویی گوه قرار دارد. (پ) نمایشی از پرتو فرودی i، پرتوهای بازتابیده r_1 و r_2 و ضخامت L گوه در هر جایی در طول گوه.

برای یافتن تغییر در ضخامت ΔL ، L_L را از L_R کم می‌کنیم و مقدارهای معلوم را قرار می‌دهیم، از جمله $n_2 = 1/00$ برای هوای درون گوه.

$$\Delta L = L_R - L_L = \frac{(m_L + ۵)\lambda}{۲n_۲} - \frac{m_L \lambda}{۲n_۲} = \frac{۵}{۲}\frac{\lambda}{n_۲}$$
$$= \frac{۵}{۲}\frac{۶۳۲/۸\times۱۰^{-۹}\ \text{m}}{۱/۰۰}$$
$$= ۱/۵۸\times۱۰^{-۶}\ \text{m}$$ (پاسخ)

۳۵-۸ تداخل‌سنج مایکلسون

تداخل‌سنج وسیله‌ای است برای اندازه‌گیری طول یا تغییر طول به کمک فریزهای تداخلی که با درستی خیلی زیادی به کار می‌رود. شکل اولیهٔ آن را که در سال ۱۸۸۱/۱۲۶۰ توسط مایکلسون[1] طراحی و ساخته شد شرح می‌دهیم.

نوری را در نظر بگیرید که نقطهٔ P را در چشمهٔ گستردهٔ S در شکل ۳۵-۲۳ ترک می‌کند و به *باریکهٔ شکاف* M می‌تابد. باریکه شکاف آینه‌ای است که نصف نور فرودی را عبور و نصف دیگر را بازتاب می‌دهد. در شکل فرض کرده‌ایم که برای ساده شدن ضخامت آینه ناچیز است. بنابراین، در نقطهٔ M نور به دو موج تقسیم می‌شود. یک موج با عبور به طرف آینه $M_۱$ در انتهای یکی از بازوهای وسیله پیش می‌رود؛ موج دیگر با بازتاب به طرف آینهٔ $M_۲$ در انتهای بازوی دیگر پیش می‌رود. این موجها به طور کامل از این آینه‌ها بازتابیده و در امتداد جهتهای فرود بر می‌گردند و سرانجام وارد دوربین T می‌شوند. آنچه که ناظر می‌بیند یک نقش تداخلی از فریزهای خمیده یا تقریباً مستقیم است که مورد اخیر شبیه نوارهای روی یک گورخر است.

اختلاف راه دو موج وقتی دوباره در دوربین با هم ترکیب می‌شوند برابر است با $۲d_۲ - ۲d_۱$، و هر چیزی که این اختلاف راه را تغییر دهد موجب تغییر در فاز بین این دو موج در چشم می‌شود. به عنوان مثال، اگر آینهٔ $M_۲$ به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}\lambda$ حرکت کند، اختلاف راه به اندازهٔ λ تغییر می‌کند و نقش فریز به اندازهٔ یک فریز جابه‌جا می‌شود (مثل اینکه هر نوار تاریک روی گورخر به جای نوار تاریک مجاور حرکت کرده است). به همین ترتیب، با حرکت آینهٔ $M_۲$ به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}\lambda$ جابه‌جایی به اندازهٔ نصف فریز صورت می‌گیرد (هر نوار تیره در گورخر به جای نوار روشن مجاور جابه‌جا می‌شود).

هم‌چنین جابه‌جایی در نقش فریزها را می‌توان با قرار دادن یک مادهٔ شفاف نازک در مسیر نوری یکی از آینه‌ها- مثلاً $M_۱$ انجام داد. اگر ضخامت ماده L و ضریب شکست آن n باشد، آنگاه تعداد طول موجهای موجود در طول مسیر رفت و برگشت از ماده از معادلهٔ ۳۵-۹ عبارت است از

$$N_m = \frac{۲L}{\lambda_n} = \frac{۲Ln}{\lambda} \qquad (۴۱-۳۵)$$

تعداد طول موجها در همین ضخامت $۲L$ پیش از قرار دادن ماده عبارت است از

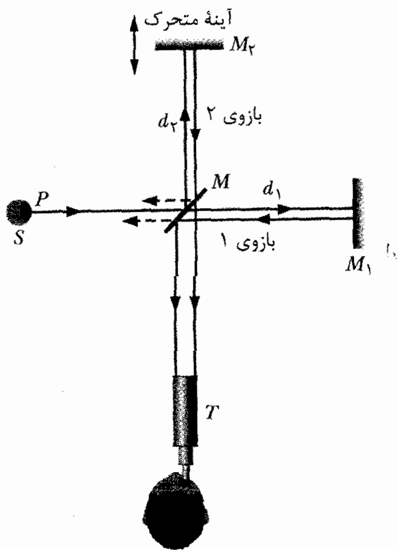
$$N_a = \frac{۲L}{\lambda} \qquad (۴۲-۳۵)$$

هرگاه ماده قرار داده شود، نوری که از آینهٔ $M_۱$ برمی‌گردد تغییر فاز (برحسب طول موج) زیر را پیدا می‌کند.

$$N_m - N_a = \frac{۲Ln}{\lambda} - \frac{۲L}{\lambda} = \frac{۲L}{\lambda}(n-۱) \qquad (۴۳-۳۵)$$

به ازای تغییر فاز برابر با یک طول موج، نقش فریز به اندازهٔ یک فریز جابه‌جا می‌شود. بنابراین، با شمارش تعداد فریزهایی که ماده سبب شده است تا نقش تغییر کند و با قرار دادن این تعداد به جای $N_m - N_a$ در معادلهٔ ۳۵-۴۳، ضخامت L ماده را برحسب λ می‌توان تعیین کرد.

با چنین روشهایی طول اجسام را برحسب طول موج نور می‌توان تعیین کرد. در زمان مایکلسون، استاندارد طول، متر، با توافق بین‌المللی فاصلهٔ بین دو خراش ظریف روی یک میلهٔ فلزی معین بود که در موزهٔ سور[2] در نزدیکی پاریس نگهداری می‌شد. مایکلسون با استفاده از تداخل‌سنج خود توانست نشان دهد که متر استاندارد معادل با ۱۵۵۳۱۶۳/۵ طول موج نور



شکل ۳۵-۲۳ تداخل‌سنج مایکلسون، که مسیر نور تابیده از نقطهٔ P یک چشمهٔ گستردهٔ S را نشان می‌دهد. آینهٔ M نور را به دو باریکه تقسیم می‌کند، که از آینه‌های $M_۱$ و $M_۲$ بازتابیده شده و به طرف M و سپس به دوربین T برمی‌گردند. در دوربین ناظر نقش فریزهای تداخلی را می‌بیند.

قرمز تکفام گسیل شده از یک چشمهٔ حاوی کادمیوم است. برای این اندازه‌گیری دقیق، مایکلسون در سال ۱۹۰۷/۱۲۸۶ جایزهٔ نوبل در فیزیک را دریافت کرد. کار او شالودهٔ اصلاحیهٔ بعدی (در سال ۱۹۶۱) میلهٔ متر به عنوان استاندارد طول و تعریف دوبارهٔ متر برحسب طول موج نور بود. تا سال ۱۹۸۳/۱۳۶۲

1 A.A.Michelson

2 Sevres

حتی این استاندارد طول موج نور بود. تا سال ۱۹۸۳/۱۳۶۲ حتی این استاندارد طول موج برای برآورده کردن الزامات رو به افزایش علم و فناوری به اندازهٔ کافی دقیق نبود و جای خود را به استاندارد جدیدی مبتنی بر مقدار تعریف شده برحسب تندی نور داد.

بازنگری و خلاصهٔ درس

اصل هویگنس گسیل سه‌بعدی موجها، از جمله نور، می‌تواند به وسیلهٔ *اصل هویگنس* پیش‌بینی شود، و حاکی از آن است که تمام نقطه‌ها روی یک چشمهٔ موج، به عنوان چشمه‌های نقطه‌ای موجکهای کروی ثانوی عمل می‌کنند. بعد از زمان t، مکان جدید جبههٔ موج سطحی مماس بر این موجکهای ثانویه است.

قانون شکست را با فرض اینکه ضریب شکست هر محیط $n = c/v$ است می‌توان از اصل هویگنس به دست آورد، که در آن v سرعت نور در محیط و c سرعت نور در خلأ است.

طول موج و ضریب شکست طول موج λ_n نور در یک محیط به ضریب شکست n آن محیط بستگی دارد.

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} \qquad (۳۵-۸)$$

که در آن λ طول موج نور در خلأ است. به دلیل این وابستگی، اختلاف فاز بین دو موج هرگاه از مواد مختلفی با ضریب شکستهای مختلف عبور کنند، می‌تواند تغییر کند.

آزمایش یانگ در *آزمایش تداخل یانگ* نوری که از یک تک شکاف می‌گذرد روی دو شکاف در یک پرده می‌افتد. نوری که از این شکافها عبور می‌کند (توسط پراش) گسترده می‌شود و در ناحیهٔ پشت پرده تداخل رخ می‌دهد. نقش فریز ناشی از تداخل روی صفحهٔ مشاهده تشکیل می‌شود.

شدت نور در هر نقطه روی صفحهٔ مشاهده به اختلاف راه از شکافها تا آن نقطه بستگی دارد. اگر این اختلاف مضرب صحیحی از طول موج باشد، تداخل موجها سازنده است و شدت بیشینه حاصل می‌شود. اگر اختلاف راه مضرب فردی از نصف طول موج باشد، تداخل ویرانگر است و شدت کمینه رخ خواهد داد. شرایط شدت بیشینه و کمینه عبارت‌اند از

$$d\sin\theta = m\lambda\ ,\ m = 0,1,2,\ldots \quad \text{(بیشینه‌ها–فریزهای روشن) به ازای} \qquad (۳۵-۱۴)$$

$$d\sin\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda,\ m = 0,1,2,\ldots \quad \text{(کمینه‌ها– فریزهای تاریک) به ازای} \qquad (۳۵-۱۶)$$

که در آن θ زاویهٔ بین مسیر نور با محور مرکزی و d فاصلهٔ شکافهاست.

همدوسی اگر دو موج نوری که در یک نقطه به هم می‌رسند بخواهند به طور محسوسی تداخل کنند، اختلاف فاز بین آنها نسبت به زمان باید ثابت بماند؛ یعنی موجها باید **همدوس** باشند. هرگاه دو موج همدوس به یک نقطه برسند، شدت حاصل با استفاده از فازنماها به دست می‌آید.

شدت در تداخل دو شکاف در آزمایش یانگ، دو موج، هر یک با شدت I_0 روی صفحهٔ مشاهده موج برایند با شدت I را به وجود می‌آورند که

$$I = 4I_0\cos^2\frac{1}{2}\phi \quad \text{و} \quad \phi = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta \qquad (۳۵-۲۲ \text{ و } ۳۵-۲۳)$$

معادله‌های ۳۵-۱۴ و ۳۵-۱۶ که موقعیت فریزهای بیشینه و کمینه را تعیین می‌کنند در این رابطه منظور شده‌اند.

تداخل لایهٔ نازک هرگاه نور بر یک لایهٔ شفاف نازک بتابد، موجهای نور بازتابیده از سطحهای جلو و عقب تداخل می‌کنند. در مورد تابش تقریباً عمود شرایط طول موج برای شدت بیشینه و کمینهٔ نور بازتابیده از یک لایه در *هوا* عبارت است از

$$2L = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{n_2} \quad m = 0,1,2,\ldots \ \text{به ازای}$$

(۳۵-۳۶) (بیشینه‌ها- لایهٔ روشن در هوا)

$$2L = m\frac{\lambda}{n_2} \quad m = 0,1,2,\ldots \ \text{(کمینه‌ها- لایهٔ تاریک در هوا) به ازای}$$

(۳۵-۳۷)

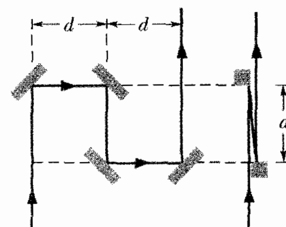
که n_2 ضریب شکست لایه، L ضخامت آن و λ طول موج نور در هواست.

اگر نور فرودی در سطح جدایی بین محیطهایی با ضریب شکستهای مختلف در محیطی با ضریب شکست کوچکتر باشد، بازتاب موجب تغییر فاز πrad یا نصف طول موج در موج بازتابیده می‌شود. در غیر این صورت تغییر فاز ناشی از بازتاب وجود ندارد. شکست در فصل مشترک موجب تغییر فاز نمی‌شود.

تداخل‌سنج مایکلسون در *تداخل‌سنج مایکلسون* یک موج نوری به دو باریکه تقسیم می‌شود که پس از طی مسیرهایی با طولهای مختلف، با یکدیگر ترکیب می‌شوند به طوری که پس از تداخل یک نقش فریز تشکیل می‌دهند. با تغییر طول مسیر یکی از باریکه‌ها، با شمارش تعداد فریزهایی که در نقش فریزها تغییر می‌کنند، می‌توان فاصله‌ها را با درستی زیاد برحسب طول موج نور بیان کرد.

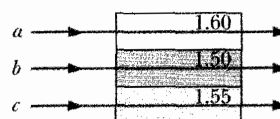
پرسشها

۱- شکل ۳۵-۲۴ دو پرتو نوری را نشان می‌دهد که در آغاز دقیقاً همفازند و از چند صفحهٔ شیشه‌ای بازتاب می‌کنند. از انحراف اندک مسیر نور در آرایش دوم چشم‌پوشی کنید. (الف) اختلاف راه این پرتوها چقدر است؟ (ب) اگر پرتوها در هنگام خروج دقیقاً ناهمفاز باشند، برحسب طول موج λ، اختلاف راه چقدر است؟ و (پ) کمترین مقدار d چقدر باید باشد تا این اختلاف فاز نهایی ایجاد شود؟



شکل ۳۵-۲۴ پرسش ۱

۲- در شکل ۳۵-۲۵ ، سه تپ نوری- a ، b و c- با طول موج یکسان از لایه‌های پلاستیکی با ضریب شکستهای داده شده عبور می‌کنند. این تپها را به ترتیب بزرگی زمان عبور آنها از پلاستیک مرتب کنید.



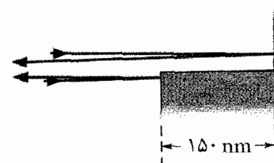
شکل ۳۵-۲۵ پرسش ۲

۳- نور در یک ساختار نانو به طول ۱۵۰۰nm حرکت می‌کند. هرگاه قلهٔ موج در یک انتهای ساختار نانو باشد، اگر طول موج (الف) ۵۰۰nm و (ب) ۱۰۰۰nm باشد، آیا در انتهای دیگر قله وجود دارد یا دره؟

۴- اگر در نقش تداخلی دو شکاف از یک فریز روشن به فریز روشن بعدی حرکت کنید، (الف) آیا اختلاف راه ΔL افزایش می‌یابد یا کاهش و (ب) برحسب طول موج چقدر تغییر می‌کند؟

۵- اگر (الف) فاصلهٔ دو شکاف افزایش یابد، (ب) رنگ نور از قرمز به آبی تغییر کند و (پ) کل دستگاه در روغن مایع آشپزی قرار داده شود، آیا فاصلهٔ فریزها در نقش تداخلی دو شکاف افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغیر می‌ماند؟ (ت) اگر شکافها با نور سفید روشن شوند، در این صورت در هر طرف بیشینه، آیا قلهٔ مؤلفهٔ آبی به بیشینهٔ مرکزی نزدیک است یا قلهٔ مؤلفهٔ قرمز؟

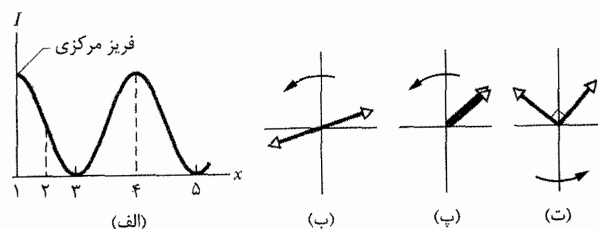
۶- شکل ۳۵-۲۶ دو پرتو نوری با طول موج ۶۰۰nm را نشان می‌دهد که از سطحهای شیشه‌ای به فاصلهٔ ۱۵۰nm بازتابیده شده‌اند. پرتوها در آغاز همفازند. (الف) اختلاف راه پرتوها چقدر است؟ (ب) وقتی این پرتوها ناحیهٔ بازتاب را روشن کنند، آیا این پرتوها دقیقاً همفازند، دقیقاً ناهمفازند یا حالت میانه‌ای دارند؟



شکل ۳۵-۲۶ پرسش ۶

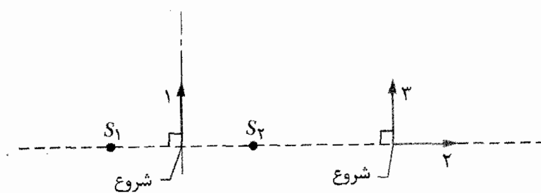
۷- اگر اختلاف راه دو پرتو (الف) $2/2\lambda$ ، (ب) $3/5\lambda$ ، (پ) $1/8\lambda$ و (ت) $1/0\lambda$ باشد، آیا در نقطهٔ P شکل ۳۵-۱۰ تداخل بیشینه، یا کمینه یا تداخل حالت میانهٔ نزدیک به بیشینه یا حالت میانهٔ نزدیک به کمینه وجود دارد؟ برای هر وضعیت مقدار m مربوط به بیشینه یا کمینه را معلوم کنید.

۸- شکل ۳۵-۲۷ الف شدت I را برحسب مکان x روی صفحهٔ مشاهده برای قسمت مرکزی نقش تداخل دو شکاف نشان می‌دهد. قسمتهای دیگر شکل نمودار فازنمای مؤلفه‌های میدان الکتریکی موجهایی را نشان می‌دهد که از دو شکاف به صفحه می‌رسند (مانند شکل ۳۵-۱۳ الف). کدام نقطه‌های شماره‌گذاری شده بهترین انطباق را با کدام نمودار فارنما دارند؟



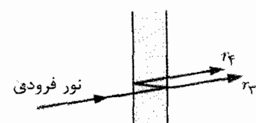
شکل ۳۵-۲۷ پرسش ۸

۹- شکل ۳۵-۲۸ دو چشمهٔ S_1 و S_2 را نشان می‌دهد که موجهایی رادیویی با طول موج λ را در تمام جهتها گسیل می‌کنند. چشمه‌ها دقیقاً همفازند و فاصلهٔ آنها $1/5\lambda$ است. خط‌چین عمودی بر وسط فاصلهٔ بین این چشمه‌ها عمود است. (الف) اگر از نقطهٔ شروع نشان داده شده آغاز کنیم و در طول مسیر ۱ حرکت کنیم، آیا تداخل یک بیشینه در تمام طول مسیر ایجاد می‌کند یا یک کمینه در تمام طول مسیر، یا بیشینه‌ها و کمینه‌های دیگری ایجاد می‌شوند؟ این موضوع را برای (ب) مسیر ۲ و (پ) مسیر ۳ تکرار کنید.



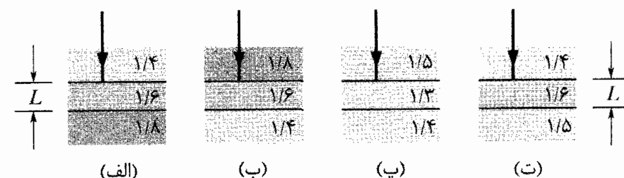
شکل ۳۵-۲۸ پرسش ۹

۱۰- شکل ۳۵-۲۹ عبور نور از یک لایهٔ نازک در هوا را توسط باریکهٔ عمودی (که اندکی به خاطر وضوح در شکل کج نشان داده شده است) نشان می‌دهد. (الف) آیا پرتو r_3 به دلیل بازتاب تغییر فاز یافته است؟ (ب) تغییر فاز پرتو r_4 در بازتاب برحسب طول موج چقدر است؟ (پ) اگر ضخامت لایه L باشد، اختلاف راه بین پرتوهای r_3 و r_4 چقدر است؟



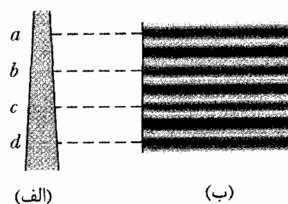
شکل ۳۵-۲۹ پرسش ۱۰

۱۱- شکل ۳۵-۳۰ چهار وضعیت را نشان می‌دهد که در آنها نور به طور عمود از یک لایهٔ نازک به ضخامت L قرار داده شده بین مواد خیلی ضخیمتری بازتاب می‌کند. ضریب شکستها داده شده‌اند. در کدام وضعیتها معادلهٔ ۳۵-۳۶ مطابق با بازتابهایی است که بیشینه‌ها را به دست می‌دهند (یعنی یک لایهٔ روشن)؟



شکل ۳۵-۳۰ پرسش ۱۱

۱۲- شکل ۳۵-۳۱ الف مقطع یک لایهٔ نازک قائم را نشان می‌دهد که پهنای آن به طرف پایین به خاطر گرانش افزایش می‌یابد. شکل ۳۵-۳۱ ب نمای لایه از وجه آن است که چهار فریز (قرمز) تداخلی روشن را نشان می‌دهد که وقتی لایه با نور قرمز به طور عمودی روشن شود حاصل می‌شود. نقطه‌ها روی مقطع مطابق با فریزهای روشن علامت گذاری شده‌اند. برحسب طول موج نور داخل لایه، اختلاف در ضخامت لایه بین (الف) نقطه‌های a و b و (ب) نقطه‌های b و d چقدر است؟



شکل ۳۵-۳۱ پرسش ۱۲

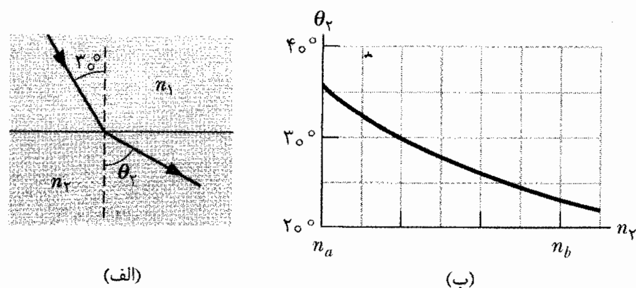
مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس).
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است
●●●: تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

بخش ۳۵-۲ نور به عنوان موج

●۱- تندی نور زرد (از یک لامپ سدیم) در مایع خاصی $1/92\times10^8$ m/s به دست آمده است. ضریب شکست این مایع برای این نور چقدر است؟

●۲- در شکل ۳۵-۳۲ الف، باریکه‌ای از نور در مادهٔ ۱ بر مرزی با زاویهٔ 30° می‌تابد. میزان شکست نور در مادهٔ ۲ به ضریب شکست آن بستگی دارد. شکل ۳۵-۳۲ ب زاویهٔ شکست θ_2 را برحسب n_2 به ازای گستره‌ای از مقدارهای n_2 از $n_a=1/30$ تا $n_b=1/90$ به دست می‌دهد. تندی نور در مادهٔ ۱ چقدر است؟



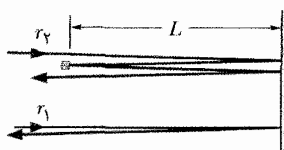
شکل ۳۵-۳۲ مسئلهٔ ۲

●۳- نور در یاقوت برحسب متر بر ثانیه چقدر تندتر از الماس حرکت می‌کند؟ به جدول ۲۹-۱ (جلد دوم) نگاه کنید.

●۴- طول موج نور زرد سدیم در هوا ۵۸۹ nm است. (الف) بسامد آن چقدر است؟ طول موج آن در شیشه‌ای با ضریب شکست ۱/۵۲ چقدر است؟ (پ) از نتایج (الف) و (ب) تندی آن را در شیشه پیدا کنید.

●۵- در شکل ۳۵-۴ فرض کنید که دو موج نوری در هوا با طول موج ۴۰۰nm در آغاز همفازند. یکی از آنها از یک لایهٔ شیشه‌ای با ضریب شکست $n_1=1/60$ و ضخامت L عبور می‌کند. دیگری از یک لایهٔ پلاستیکی با همان ضخامت و ضریب شکست $n_2=1/50$ عبور می‌کند. (الف) اگر این دو موج در هنگام خروج با اختلاف ۵/۶۵ rad عبور کنند، کمترین مقدار L چقدر باید باشد؟ (ب) اگر این دو موج به نقطه‌ای با دامنهٔ یکسان برسند، آیا تداخل آنها کاملاً سازنده است یا کاملاً ویرانگر، میانی ولی نزدیک به کاملاً سازنده است، یا میانی نزدیک به کاملاً ویرانگر؟ **SSM**

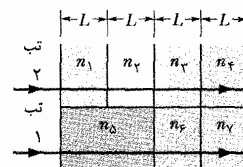
●۶- در شکل ۳۵-۳۳ یک موج نوری در امتداد پرتو r_1 یک بار از یک آینه و یک موج نوری در امتداد پرتو r_2 دو بار از همان آینه و یک بار از آینهٔ کوچکی به فاصلهٔ L از آینهٔ بزرگتر بازتاب می‌کند. (از انحراف اندک پرتوها چشم‌پوشی کنید.) طول موج موجها λ و در آغاز دقیقاً ناهمفازند. (الف) کمترین، (ب) دومین مقدار کمتر و (پ) سومین مقدار کمتر L/λ که باعث می‌شود تا موجهای نهایی دقیقاً همفاز باشند چقدر است؟



شکل ۳۵-۳۳ مسئله‌های ۶ و ۷

●۷- در شکل ۳۵-۳۳، یک موج نوری در امتداد پرتو r_1 یک بار از یک آینه و یک موج نوری در امتداد r_2 دو بار از همان آینه و یک بار از آینهٔ کوچکی واقع در فاصلهٔ L از آینهٔ بزرگتر بازتاب می‌کند. (از انحراف اندک پرتوها چشم‌پوشی کنید.) طول موج موجها ۶۲۰nm و در آغاز همفازند. (الف) کوچکترین مقدار L چقدر باید باشد تا موجهای نوری نهایی دقیقاً ناهمفاز باشند؟ (ب) آینهٔ کوچک به فاصلهٔ اولیهٔ L، چقدر باید از آینهٔ بزرگتر دور شود تا موجهای نهایی دوباره ناهمفاز شوند؟

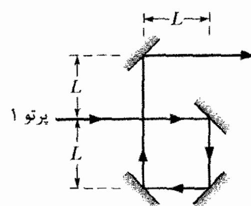
●۸- در شکل ۳۵-۳۴، دو تپ نوری به صورتی که نشان داده شده است از لایه‌های پلاستیکی به ضخامتهای L یا 2L و ضریب شکستهای $n_1 = ۱/۵۵$، $n_2 = ۱/۷۰$، $n_3 = ۱/۶۰$، $n_4 = ۱/۴۵$، $n_5 = ۱/۵۹$، $n_6 = ۱/۶۵$ و $n_7 = ۱/۵۰$ می‌گذرند. (الف) کدام تپ در زمان کمتری از پلاستیک می‌گذرد؟ (ب) چه مضربی از L/c اختلاف در زمانهای عبور تپها را به دست می‌دهد؟

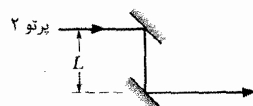


شکل ۳۵-۳۴ مسئلهٔ ۸

●●۹- فرض کنید که دو موج نوری در شکل ۳۵-۴ دارای طول موج $\lambda = ۵۰۰\text{nm}$ در هوا هستند. اگر (الف) $n_1 = ۱/۵۰$، $n_2 = ۱/۶۰$ و $L = ۸/۵۰\,\mu\text{m}$؛ (ب) $n_1 = ۱/۶۲$، $n_2 = ۱/۷۲$ و $L = ۸/۵۰\,\mu\text{m}$ و (پ) $n_1 = ۱/۵۹$، $n_2 = ۱/۷۹$ و $L = ۳/۲۵\,\mu\text{m}$ باشند، اختلاف فاز آنها پس از عبور برحسب طول موج چقدر است؟ (ت) فرض کنید که در هر یک از این سه وضعیت موجها (با دامنهٔ یکسان) به یک نقطهٔ مشترک می‌رسند. این وضعیتها را به ترتیب بزرگی روشناییهایی که موجها در آن نقطهٔ مشترک به وجود می‌آورند مرتب کنید.

●●۱۰- در شکل ۳۵-۳۵ دو پرتو نوری با بازتاب از سطحهای مختلف تخت نشان داده شده مسیرهای مختلفی رامی‌پیمایند. طول موج موجها ۴۲۰/۰nm است و در آغاز همفازند. (الف) کمترین و (ب) دومین کمترین مقدار L که به ازای آنها موجها به هنگام خروج از این ناحیه کاملاً ناهمفاز باشند چقدر است؟

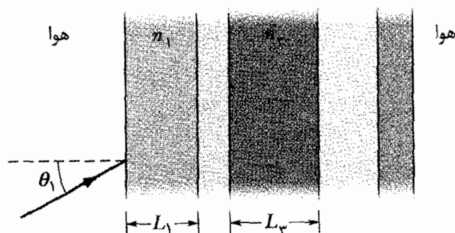




شکل ۳۵-۳۵ مسئله‌های ۱۰ و ۹۴

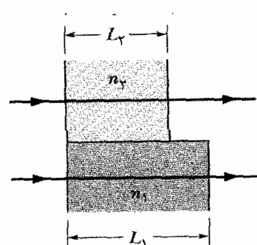
●●۱۱- در شکل ۳۵-۴، فرض کنید که دو موج نوری با طول موج ۶۲۰mn در هوا به اندازهٔ π rad در آغاز ناهمفازند. ضریب شکستهای محیطها عبارت‌اند از $n_1 = ۱/۴۵$، $n_2 = ۱/۶۵$. مطلوب است (الف) کمترین و (ب) دومین مقدار کمتر L را که می‌توان قرار داد تا موجها موقع یک بار عبور از دو محیط دقیقاً همفاز باشند؟

●●۱۲- در شکل ۳۵-۳۶، یک پرتو نوری با زاویهٔ $\theta_1 = ۵۰°$ بر دسته‌ای شامل پنج لایهٔ شفاف با سطحهای موازی می‌تابد. در لایه‌های ۱ و ۳، $L_1 = ۲۰\,\mu\text{m}$، $L_2 = ۲۵\,\mu\text{m}$، $n_1 = ۱/۶$ و $n_2 = ۱/۴۵$ است. (الف) نور در چه زاویه‌ای در طرف راست وارد هوا می‌شود؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا نور لایهٔ ۳ را طی کند؟



شکل ۳۵-۳۶ مسئلهٔ ۱۲

●●۱۳- دو موج نوری در هوا با طول موج $\lambda = ۶۰۰/۰\text{nm}$ در آغاز همفازند. سپس این دو موج از لایه‌های پلاستیکی نشان داده شده در شکل ۳۵-۳۷ با $L_1 = ۴/۰۰\,\mu\text{m}$، $L_2 = ۳/۵۰\,\mu\text{m}$، $n_1 = ۱/۴۰$ و $n_2 = ۱/۶۰$ عبور می‌کنند. (الف) وقتی هر دو از لایه‌ها گذشتند چند طول موج اختلاف فاز دارند؟ (ب) اگر بعداً این موجها با دامنهٔ یکسان به نقطهٔ مشترکی برسند، آیا تداخل آنها کاملاً سازنده است یا کاملاً ویرانگر، میانه ولی نزدیک به کاملاً سازنده یا میانه نزدیک به کاملاً ویرانگر؟ **ILW**

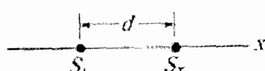


شکل ۳۵-۳۷ مسئلهٔ ۱۳

بخش ۳۵-۴ آزمایش تداخل یانگ

●۱۴- نور سبز تکفام به طول موج ۵۵۰nm دو شکاف موازی باریک به فاصلهٔ ۷/۷۰μm را روشن می‌کند. انحراف زاویه‌ای (θ در شکل ۳۵-۱۰) مرتبهٔ سوم (به ازای $m = ۳$) فریز روشن را (الف) برحسب رادیان و (ب) برحسب درجه محاسبه کنید.

●۱۵- در شکل ۳۵-۳۸ دو چشمهٔ نقطه‌ای با بسامد رادیویی S_1 و S_2 به فاصلهٔ $d = ۲/۰\text{m}$ از هم با $\lambda = ۰/۵۰\text{m}$ به طور همفاز تابش می‌کنند. آشکارسازی روی مسیر دایره‌ای بزرگی در صفحهٔ شامل این دو دور این چشمه‌ها حرکت می‌کند. آشکارساز چند بیشینه را می‌تواند آشکار کند؟ **SSM**



شکل ۳۵-۳۸ مسئله‌های ۱۵ و ۲۴

●۱۶- در آرایش دو شکاف فاصلهٔ شکافها ۱۰۰ برابر طول موج نوری است که از آنها می‌گذرد. (الف) جدایی زاویه‌ای برحسب رادیان بین بیشینهٔ مرکزی و بیشینهٔ مجاور چقدر است؟ (ب) فاصلهٔ بین این بیشینه‌ها روی صفحه‌ای به فاصلهٔ ۵۰/۰cm از شکافها چقدر است؟

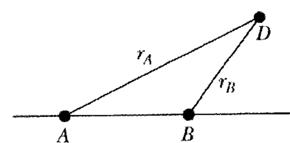
●۱۷- یک آرایش دو شکاف فریزهای تداخلی برای نور سدیم ($\lambda = ۵۸۹\,nm$) ایجاد می‌کند که جدایی زاویه‌ای آنها $۳/۵۰ \times ۱۰^{-۳}$ rad است. به ازای چه طول موجی جدایی زاویه‌ای ۱۰/۰ درصد بیشتر می‌شود؟ **SSM**

●۱۸- در آرایش دو شکاف فریزهایی تداخلی برای نور سدیم ($\lambda = ۵۸۹\,nm$) ایجاد می‌شود که فاصلهٔ زاویه‌ای آنها °۰/۲۰ است. اگر کل آرایش در آب ($n = ۱/۳۳$) فرو برده شود، فاصلهٔ زاویه‌ای فریزها چقدر است؟

●۱۹- فرض کنید که آزمایش یانگ با نور آبی- سبز با طول موج ۵۰۰nm انجام شود. فاصلهٔ شکافها ۱/۲۰mm و صفحهٔ مشاهده در فاصلهٔ ۵/۴۰m از شکافها قرار دارد. فریزهای روشن نزدیک مرکز نقش تداخلی چقدر فاصله دارند؟ **SSM ILW**

●۲۰- در آزمایش دو شکاف شکل ۳۵-۱۰ زاویهٔ θ را °۲۰/۰، فاصلهٔ شکافها را ۴/۲۴μm و طول موج را $\lambda = ۵۰۰\,nm$ در نظر بگیرد. (الف) وقتی موجهای پرتوهای r_1 و r_2 به نقطهٔ P روی صفحهٔ دوری برسند، چند طول موج اختلاف فاز دارند؟ (ب) اختلاف فاز برحسب رادیان چقدر است؟ (پ) محل نقطهٔ P را روی نقش تداخلی چنان تعیین کنید که بیشینه یا کمینه یا نقطه‌ای بین آنها را به دست دهد.

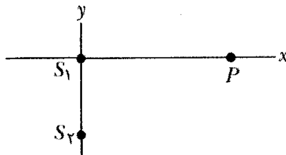
●●۲۱- در شکل ۳۵-۳۹، چشمه‌های A و B موجهای رادیویی برد بلند با طول موج ۴۰۰m گسیل می‌کنند که فاز گسیل شده از چشمهٔ A از چشمهٔ B به اندازهٔ °۹۰ جلوتر است. فاصلهٔ r_A چشمهٔ A تا آشکارساز D به اندازهٔ ۱۰۰m بیشتر از فاصلهٔ متناظر r_B است. اختلاف فاز موجها در D چقدر است؟



شکل ۳۵-۳۹ مسئلهٔ ۲۱

●●۲۲- در آزمایش تداخل دو شکاف از نور خورشید استفاده می‌شود. بیشینهٔ مرتبهٔ چهارم به ازای طول موج ۴۵۰nm در زاویهٔ $\theta = ۹۰°$ رخ می‌دهد. بنابراین، در شرف حذف شدن از نقش قرار دارد زیرا θ در معادلهٔ ۳۵-۱۴ نمی‌توانند از °۹۰ بیشتر شود. (الف) چه گستره‌ای از طول موجهای نور مرئی (از ۴۰۰nm تا ۷۰۰nm) در بیشینهٔ مرتبهٔ سوم وجود ندارند؟ برای حذف همهٔ نور مرئی در بیشینهٔ مرتبهٔ چهارم (ب) آیا فاصلهٔ شکافها باید افزایش یابد یا کاهش و (پ) کمترین تغییر مورد نیاز در فاصله چقدر است؟

●●۲۳- در شکل ۳۵-۴۰، دو چشمهٔ نقطه‌ای همسانگرد نور (S_1, S_2) به فاصلهٔ ۲/۷۰μm در امتداد محور y قرار دارند و به طور همفاز در طول موج ۹۰۰nm و با دامنهٔ یکسان موجهایی گسیل می‌کنند. آشکار ساز نوری دیگری روی محور x در نقطهٔ P در x_P قرار دارد. بیشترین مقدار x_P که در آن نور آشکار شده، به علت تداخل ویرانگر کمینه است، چقدر است؟ GO

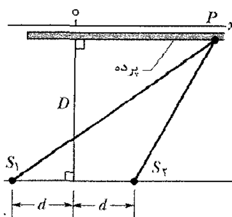


شکل ۳۵-۴۰ مسئله‌های ۲۳ و ۲۸ و ۱۲۲

●●۲۴- در شکل ۳۵-۳۸ دو چشمهٔ نقطه‌ای همسانگرد S_1 و S_2 موجهای نوری مشابهی به طور همفاز با طول موج λ گسیل می‌کنند. این چشمه در فاصلهٔ d روی محور x قرار دارد و یک آشکار ساز نوری روی دایره‌ای به شعاع زیاد دور نقطهٔ وسط آنها می‌چرخد. این آشکارساز ۳۰ نقطه را با شدت صفر آشکار می‌کند که دو نقطهٔ آن روی محور x، یکی در سمت چپ و دیگری در سمت راست چشمه قرار دارند. مقدار d/λ چقدر است؟

●●۲۵- در آزمایش دو شکاف فاصلهٔ بین شکافها ۵/۰mm و فاصلهٔ شکافها از صفحهٔ مشاهده ۱/۰m است. دو نقش تداخلی روی پرده دیده می‌شود: یکی ناشی از نور با طول موج ۴۸۰nm و دیگری ناشی از نور با طول موج ۶۰۰nm. فاصلهٔ بین فریزهای روشن مرتبهٔ سوم ($m = ۳$) دو نقش تداخلی روی صفحهٔ مشاهده چقدر است؟ **SSM**

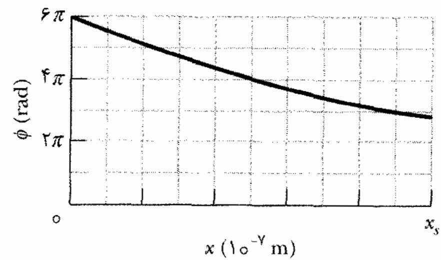
●●۲۶- در شکل ۳۵-۴۱ دو چشمهٔ همسانگرد نقطه‌ای S_1 و S_2 با طول موج λ و دامنهٔ یکسان نور همفاز گسیل می‌کنند. فاصلهٔ چشمه‌ها $2d = ۶/۰۰\lambda$ است. چشمه‌ها روی محوری که موازی با محور x است قرار دارند و می‌توانند در امتداد پردهٔ مشاهده واقع در فاصلهٔ $D = ۲۰/۰\lambda$ حرکت کنند. مبدأ در بین چشمه‌ها روی عمود منصف آنها قرار دارد. شکل دو پرتوی را نشان می‌دهد که به نقطهٔ P روی صفحهٔ مشاهده در x_P می‌رسند. (الف) به ازای چه مقداری از x_P، پرتوها کمینهٔ اختلاف فاز ممکن را خواهند داشت؟ (ب) چه مضربی از λ این اختلاف فاز کمینه را به دست می‌دهد؟ (پ) به ازای چه مقداری از x_P پرتوها اختلاف فاز بیشینهٔ ممکن را خواهند داشت؟ چه مضربی از λ (ت) این اختلاف فاز بیشینه است و (ج) وقتی $x_P = ۶/۰۰\lambda$ باشد، آیا شدت در نقطهٔ P بیشینه است یا کمینه، میانی نزدیک به بیشینه یا میانی نزدیک به کمینه؟



شکل ۳۵-۴۱ مسئلهٔ ۲۶

●●●۲۷- پوستهٔ نازکی از میکا $(n = ۱/۵۸)$ برای پوشاندن یکی از شکافهای آرایش تداخل دو شکاف به کار رفته است. نقطهٔ مرکزی روی صفحهٔ مشاهده توسط هفتمین $(m = ۷)$ فریز روشن قبلی اشغال می‌شود. اگر $\lambda = ۵۵۰\,\text{nm}$ باشد، ضخامت میکا چقدر است؟

●●●۲۸- شکل ۳۵-۴۰ دو چشمهٔ همسانگرد نقطه‌ای $(S_۱, S_۲)$ را نشان می‌دهد که به طور همفاز نوری با طول موج $۴۰۰\,\text{nm}$ و دامنهٔ یکسان گسیل می‌کنند. نقطهٔ آشکارسازی P نشان داده شده روی محور x از چشمهٔ $S_۱$ امتداد یافته است. اختلاف فاز ϕ بین نوری که از دو چشمه به نقطهٔ P می‌رسد، وقتی P در امتداد محور x از $x = ۰$ تا $x = +\infty$ حرکت می‌کند اندازه‌گیری می‌شود. نتیجهٔ به دست آمده تا $x_s = ۱۰ \times ۱۰^{-۷}\,\text{m}$ در شکل ۳۵-۴۲ داده شده است. تا $+\infty$ بیشترین مقدار x چقدر باید باشد تا نوری که از $S_۱$ به P می‌رسد و نوری که از $S_۲$ به P می‌رسد دقیقاً ناهمفاز باشند؟



شکل ۳۵-۴۲ مسئلهٔ ۲۸

بخش ۳۵-۶ شدت در تداخل دو شکاف

●۲۹- دامنه‌های دو موج با بسامد یکسان عبارت‌اند از ۱/۰۰ و ۲/۰۰. در نقطه‌ای که اختلاف فاز آنها $۶۰/۰^\circ$ است این دو موج تداخل می‌کنند. دامنهٔ برایند چقدر است؟ **SSM**

●۳۰- مجموع y کمیتهای زیر را پیدا کنید

$$y_۱ = ۱۰ \sin \omega t \quad \text{و} \quad y_۲ = ۸/۰ \sin(\omega t + ۳۰^\circ)$$

●●۳۱- سه موج الکترومغناطیسی از نقطهٔ معین P در امتداد محور x می‌گذرند. اینها با تغییراتی در دامنه‌هایشان به صورت زیر موازی با محور y قطبیده شده‌اند. برایند آنها را در P پیدا کنید.

$$E_۱ = (۱۰/۰\,\mu\text{V/m}) \sin[(۲/۰ \times ۱۰^{۱۴}\,\text{rad/s})t]$$

$$E_۲ = (۵/۰۰\,\mu\text{V/m}) \sin[(۲/۰ \times ۱۰^{۱۴}\,\text{rad/s})t + ۴۵/۰^\circ]$$

$$E_۳ = (۵/۰۰\,\mu\text{V/m}) \sin[(۲/۰ \times ۱۰^{۱۴}\,\text{rad/s})t - ۴۵/۰^\circ]$$

●●۳۲- در آزمایش دو شکاف شکل ۳۵-۱۰، میدانهای الکتریکی موجهایی که به نقطهٔ P می‌رسند با رابطه‌های زیر داده شده‌اند

$$E_۱ = (۲/۰۰\,\mu\text{V/m}) \sin[(۱/۲۶ \times ۱۰^{۱۵})t]$$

$$E_۲ = (۲/۰۰\,\mu\text{V/m}) \sin[(۱/۲۶ \times ۱۰^{۱۵})t + ۳۹/۶\,\text{rad}]$$

که زمان t برحسب ثانیه است. (الف) دامنهٔ میدان الکتریکی برایند در نقطهٔ P چقدر است؟ (ب) نسبت شدت I_P در نقطهٔ P به شدت I_{cen} در مرکز نقش تداخل چقدر است؟ (پ) محل نقطهٔ P را در نقش تداخلی برای بیشینه‌ها و کمینه‌ها و میان بیشینه‌ها و کمینه‌ها تعیین کنید. در یک نمودار بردار فاز میدان الکتریکی (ت) با چه آهنگی بردارهای فاز نسبت به مبدأ می‌چرخند و (ج) زاویهٔ بین بردارهای فاز چقدر است؟

●●۳۳- با استفاده از روش بردارهای فاز کمیتهای $y_۱ = ۱۰ \sin \omega t$ و $y_۲ = ۱۵ \sin(\omega t + ۳۰^\circ)$ و $y_۳ = ۵/۰ \sin(\omega t - ۴۵^\circ)$ را جمع کنید. **ILW**

●●۳۴- در آزمایش دو شکاف شکل ۳۵-۱۰، صفحهٔ مشاهده در فاصلهٔ $D = ۴/۰۰\,\text{m}$، نقطهٔ P در فاصلهٔ $y = ۲۰/۵\,\text{cm}$ از مرکز نقش قرار دارند و فاصلهٔ دو شکاف $d = ۴/۵۰\,\mu\text{m}$ و طول موج $\lambda = ۵۸۰\,\mu\text{m}$ است. (الف) محل نقطهٔ P را در نقش تداخلی برای بیشینه‌ها یا کمینه‌ها و میان این بیشینه و کمینه‌ها مشخص کنید. (ب) نسبت شدت I_P در نقطهٔ P به شدت I_{cen} در مرکز نقش چقدر است؟

بخش ۳۵-۷ تداخل در لایه‌های نازک

●۳۵- الماس بدل در جواهرهای بدلی، شیشه‌ای با ضریب شکست ۱/۵۰ است. برای اینکه نور زیادی از آنها بازتابیده شود آنها را اغلب با لایه‌ای از سیلیسیوم مونواکسید با ضریب شکست ۲/۰۰ پوشش می‌دهند. کمینهٔ ضخامت پوشش مورد نیاز باید چقدر باشد تا اطمینان یابیم نوری با طول موج $۵۶۰\,\text{nm}$ که با تابش عمود از دو سطح پوشش بازتابیده می‌شوند، تداخل کاملاً سازنده دارند؟

●۳۶- نور سفید رو به پایین بر یک لایهٔ نازک افقی که بین دو ماده قرار گرفته تابانده می‌شود. ضریب شکست مادهٔ بالایی ۱/۸۰ و لایهٔ نازک ۱/۷۰ و مادهٔ پایینی ۱/۵۰ است. ضخامت لایه $۵/۰۰ \times ۱۰^{-۷}\,\text{m}$ است. از طول موجهای مرئی ($۴۰۰\,\mu\text{m}$ تا $۷۰۰\,\mu\text{m}$) که در نگاه ناظری در بالای لایه به تداخل کاملاً سازنده می انجامد، کدامیک (الف) طول موج بلندتر و (ب) طول موج کوتاهتر است؟ سپس ماده و لایه گرم می‌شوند تا اینکه ضخامت لایه زیاد شود. (پ) آیا نوری که به تداخل کاملاً سازنده می‌انجامد به طرف طول موجهای بلندتر جابه‌جا می‌شود یا کوتاهتر؟

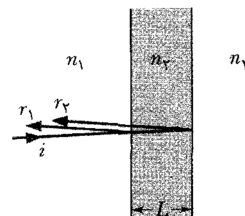
●۳۷- نوری با طول موج $۶۲۴\,\text{nm}$ به طور عمود بر یک لایهٔ صابون $(n = ۱/۳۳)$ که در هوا معلق است می‌تابد. (الف) کمترین و (ب) دومین کمترین ضخامت لایه که در آنها بازتابها از لایه تداخل کاملاً سازنده می‌کنند چقدر است؟ **ILW**

●۳۸- یک لایهٔ صابون به ضخامت $۶۰۰\,\text{nm}$ $(n = ۱/۴۰)$ در هوا با نور سفید به طور عمود بر لایه روشن شده است. در گسترهٔ $۳۰۰\,\text{nm}$ تا $۷۰۰\,\text{nm}$ برای چند طول موج مختلف (الف) تداخل کاملاً سازنده و (ب) تداخل کاملاً ویرانگر در نور باز تابیده، وجود دارد؟

●۳۹- می‌خواهیم شیشهٔ تختی $(n = ۱/۵۰)$ را با مادهٔ شفاف $(n = ۱/۲۵)$ پوشش دهیم به طوری که بازتاب نور با طول موج $\lambda = ۶۰۰\,\text{nm}$ در تداخل حذف شود. کمترین ضخامت پوشش برای این کار چقدر است؟ **SSM**

•••۴۰- یک لایهٔ نازک از استون $(n=1/25)$ صفحهٔ شیشه‌ای ضخیمی را $(n=1/50)$ پوشانده است. نور سفید به طور عمود بر لایه می‌تابد. در بازتاب طول موج ۶۰۰nm در تداخل کاملاً ویرانگر و طول موج $\lambda=700nm$ در تداخل کاملاً سازنده است. ضخامت لایهٔ استون را محاسبه کنید.

•۴۱ تا ۵۲- *بازتاب توسط لایه‌های نازک.* در شکل ۳۵-۴۳، نور به طور عمود بر لایهٔ نازک مادهٔ ۲ که بین ماده‌های (ضخیم) ۱ و ۲ قرار گرفته است می‌تابد. (برای روشنی پرتوها اندکی کج نشان داده شده‌اند.) موجهای مربوط به پرتوهای r_1 و r_2 تداخل می‌کنند، و در اینجا نوعی از تداخل را در نظر می‌گیریم که یا بیشینه *(max)* یا کمینه *(min)* باشد. برای این موقعیت، هر مسئله در جدول ۳۵-۲ به ضریبهای شکست n_1، n_2 و n_3، نوع تداخل، ضخامت لایه نازک L برحسب نانومتر و طول موج λ نور برحسب نانومتر در هوا اشاره دارد. کدام طول موج λ در گسترهٔ مرئی محو می‌شود؟ برای دومین ضخامت کم یا سومین ضخامت کم L به گونه‌ای که نشان داده شده است، کدام طول موج محو می‌شود؟ ۴۱، ۴۷، ۴۳، ۵۱



شکل ۳۵-۴۳ مسئله‌های ۴۱ تا ۵۲

جدول ۳۵-۲

مسئله‌های ۴۱ تا ۵۲: شکست توسط لایه‌های نازک. برای حل مسئله‌ها به جدول نگاه کنید.

	n_1	n_2	n_3	نوع	L	λ
۴۱	۱/۵۰	۱/۳۴	۱/۴۲	min	۳۸۰	
۴۲	۱/۳۲	۱/۷۵	۱/۳۹	max	۳۲۵	
۴۳	۱/۵۵	۱/۶۰	۱/۳۳	max	سوم	۶۱۲
۴۴	۱/۵۵	۱/۶۰	۱/۳۳	max	۲۸۵	
۴۵	۱/۶۰	۱/۴۰	۱/۸۰	min	۲۰۰	
۴۶	۱/۴۰	۱/۴۶	۱/۷۵	min	دوم	۴۸۲
۴۷	۱/۴۰	۱/۴۶	۱/۷۵	min	۲۱۰	
۴۸	۱/۵۰	۱/۳۴	۱/۴۲	max	دوم	۵۸۷
۴۹	۱/۶۸	۱/۵۹	۱/۵۰	min	دوم	۳۴۲
۵۰	۱/۶۸	۱/۵۹	۱/۵۰	min	۴۱۵	
۵۱	۱/۳۲	۱/۷۵	۱/۳۹	max	سوم	۳۸۲
۵۲	۱/۶۰	۱/۴۰	۱/۸۰	max	دوم	۶۳۲

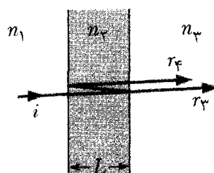
•••۵۳- فرسودگی مخزنی باعث نشت نفت $(n=1/20)$ به داخل آب خلیج فارس می‌شود که لکه‌ای را روی آب $(n=1/30)$ ایجاد می‌کند. (الف) اگر وقتی خورشید در بالای سر شماست از هواپیما به طور مستقیم به ناحیهٔ لکه‌ای که ضخامت آن ۴۶۰nm است نگاه کنید، کدام طول موج(های) نور مرئی به علت تداخل سازنده روشنترین بازتاب را دارد؟ (ب) اگر غواصی باشید که درست در زیر این لکه قرار دارید، کدام طول موج(های) نور مرئی با شدیدترین شدت عبور می‌کند؟ SSM WWW

•••۵۴- یک لایهٔ نازک با ضخامت ۲۷۲/۷nm که دو طرف آن هوا قرار دارد با باریکه‌ای از نور سفید روشن شده است. باریکه عمود بر لایه و مرکب از گسترهٔ کامل طول موجهای طیف مرئی است. در نور بازتابیده از لایه، نور با طول موج ۶۰۰/۰nm تداخل کاملاً سازنده می‌کند. در چه طول موجی نور بازتابیده تداخل کاملاً ویرانگر می‌کند؟ (*راهنمایی:* فرض معقولی را در مورد ضریب شکست در نظر بگیرید.)

•••۵۵- بازتاب عمودی نور سفید فرودی بر یک لایهٔ صابون در هوا بیشینهٔ تداخلی در ۶۰۰nm و کمینه‌ای در ۴۵۰nm دارد و کمینه‌ای بین آنها وجود ندارد. اگر برای لایه $n=1/33$ باشد، و یکنواخت فرض شود، ضخامت لایه چقدر است؟

•••۵۶- موج تختی از نور تکفام به طور عمود بر لایهٔ نازک یکنواختی از روغن که یک صفحهٔ شیشه‌ای را پوشانده است می‌تابد. طول موج چشمه را می‌توان به طور پیوسته تغییر داد. تداخل کاملاً ویرانگر در نور بازتابیده در طول موجهای ۵۰۰nm و ۷۰۰nm مشاهده می‌شود ولی بین آنها طول موجی وجود ندارد. اگر ضریب شکستهای روغن و شیشه به ترتیب ۱/۳۵ و ۱/۵۰ باشد، ضخامت لایهٔ روغن را پیدا کنید.

•••۵۷ تا ۶۸- *عبور از لایه‌های نازک.* در شکل ۳۵-۴۴، نور به طور عمود بر لایهٔ نازکی از مادهٔ ۲ که بین مادهٔ (ضخیم) ۱ و ۲ قرار دارد می‌تابد. (برای روشنی پرتوها اندکی انحراف داده شده‌اند.) بخشی از نور به صورت پرتو r_3 (نور نمی‌تواند در داخل بازتاب داشته باشد) و پرتو r_4 (نور در مادهٔ ۲ دو بار بازتاب دارد) وارد مادهٔ ۳ می‌شود. موجهای مربوط به r_3 و r_4 تداخل می‌کنند، و نوعی از تداخل را در نظر می‌گیریم که بیشینه *(max)* یا کمینه *(min)* باشد. برای این وضعیت، هر یک از مسئله‌های جدول ۳۵-۳ به ضریب شکستهای n_1، n_2 و n_3، نوع تداخل، ضخامت لایهٔ نازک L برحسب نانومتر و طول موج λ برحسب نانومتر که در هوا اندازه‌گیری می‌شود اشاره دارد. کدام طول موج λ در گسترهٔ مرئی محو می‌شود؟ کمترین ضخامت دوم یا سوم L که طول موج محو می‌شود کدام است؟ SSM ۶۳ و GO ۶۱



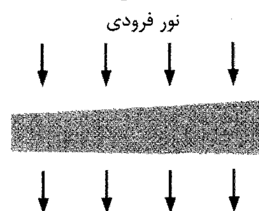
شکل ۳۵-۴۴ مسئله‌های ۵۷ تا ۶۸

جدول ۳۵-۳

مسئله‌های ۵۷ تا ۶۸: عبور از لایه‌های نازک. برای حل مسئله‌ها به جدول نگاه کنید.

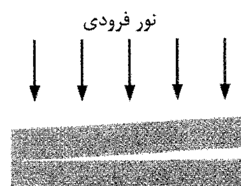
	n_1	n_2	n_3	نوع	L	λ
۵۷	۱/۵۰	۱/۳۴	۱/۴۲	*min*	دوم	۵۸۷
۵۸	۱/۶۸	۱/۵۹	۱/۵۰	*max*	دوم	۳۴۲
۵۹	۱/۴۰	۱/۴۶	۱/۷۵	*max*	دوم	۴۸۲
۶۰	۱/۳۲	۱/۷۵	۱/۳۹	*min*	سوم	۳۸۲
۶۱	۱/۶۰	۱/۴۰	۱/۸۰	*min*	دوم	۶۳۲
۶۲	۱/۵۵	۱/۶۰	۱/۳۳	*min*	سوم	۶۱۲
۶۳	۱/۶۸	۱/۵۹	۱/۵۰	*max*	۴۱۵	
۶۴	۱/۵۰	۱/۳۴	۱/۴۲	*max*	۳۸۰	
۶۵	۱/۳۲	۱/۷۵	۱/۳۹	*min*	۳۲۵	
۶۶	۱/۴۰	۱/۴۶	۱/۷۵	*max*	۲۱۰	
۶۷	۱/۵۵	۱/۶۰	۱/۳۳	*min*	۲۸۵	
۶۸	۱/۶۰	۱/۴۰	۱/۸۰	*max*	۲۰۰	

●●۶۹- در شکل ۳۵-۴۵ نور گسترده‌ای با طول موج ۶۳۰nm با زاویهٔ °۹۰ بر یک لایهٔ نازک گوه‌ای شکل با ضریب شکست ۱/۵۰ می‌تابد. شخصی که نور عبور کرده از لایه را نگاه می‌کند ۱۰ فریز روشن و ۹ فریز تاریک در طول لایه می‌بینند. در این طول ضخامت لایه چقدر تغییر می‌کند؟ GO



شکل ۳۵-۴۵ مسئلهٔ ۶۹

●●۷۰- دو صفحهٔ شیشه‌ای مستطیل شکل $(n=1/60)$ در طول یکی از ضلعها به هم وصل‌اند و در طرف دیگر از یکدیگر فاصله دارند (شکل ۳۵-۴۶). نوری با طول موج ۶۰۰nm به طور عمود بر صفحهٔ بالایی می‌تابد. هوای بین صفحه‌ها به صورت یک لایهٔ نازک عمل می‌کند. نه فریز تاریک و هشت فریز روشن از بالای صفحه دیده می‌شود. اگر فاصلهٔ بین دو صفحه در قسمت ضلعهای فاصله‌دار به ۶۰۰nm برسد، چند فریز تاریک در طول صفحهٔ بالایی دیده می‌شود؟



شکل ۳۵-۴۶ مسئله‌های ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۱۰۶، ۱۰۷ و ۱۱۳

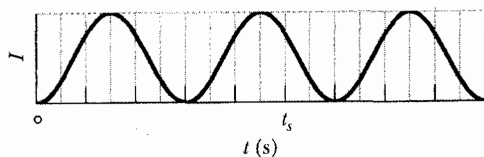
●●۷۱- در شکل ۳۵-۴۶ نور گسترده‌ای با طول موج ۶۸۳nm به طور مستقیم رو به پایین بر صفحهٔ بالایی یک جفت صفحهٔ شیشه‌ای می‌تابد. طول صفحه‌ها ۱۲۰mm است و در انتهای سمت چپ به هم وصل شده‌اند و در سمت راست ۴۸/۰μm از هم فاصله دارند. هوای بین این صفحه‌ها به عنوان یک لایهٔ نازک عمل می‌کند. توسط ناظری که رو به پایین نگاه می‌کند چند فریز روشن دیده می‌شود؟ SSM

●●۷۲- در شکل ۳۵-۴۶، نور گسترده‌ای با طول موج ۶۲۰nm به طور مستقیم رو به پایین از صفحهٔ بالایی جفت صفحهٔ شیشه‌ای که در سمت چپ به هم چسبیده‌اند می‌تابد. هوای بین صفحه‌ها به عنوان یک لایهٔ نازک عمل می‌کند و نقش تداخلی از بالای صفحه‌ها دیده می‌شود. در آغاز، یک فریز تاریک در انتهای چپ، یک فریز روشن در انتهای راست و نه فریز تاریک بین دو فریز انتهایی قرار دارند. سپس صفحه‌ها بتدریج با آهنگ یکسان به یکدیگر نزدیک و زاویهٔ بین آنها کم می‌شود. در نتیجه، فریز سمت راست در هر ۱۵/۰s بین فریز روشن و فریز تاریک تغییر می‌کند. (الف) با چه آهنگی فاصلهٔ بین صفحه‌ها در سمت راست تغییر می‌کند؟ (ب) وقتی در دو انتهای چپ و راست یک فریز تاریک و پنج فریز تاریک بین آنها قرار دارد، فاصلهٔ بین آنها چقدر تغییر می‌کند؟

●●۷۳- در شکل ۳۵-۴۶ دو شیشه از یک طرف به هم وصل‌اند و در طرف دیگر از یکدیگر فاصله دارند. هرگاه نور با طول موج ۵۰۰nm به طور عمود بر شیشه‌ها بتابد، ناظر نقش تداخلی را روی شیشه‌ها می‌بیند که فاصلهٔ فریزهای تاریک آن ۱/۲mm است. زاویهٔ بین شیشه‌ها چقدر است؟

●●۷۴- در شکل ۳۵-۴۶، نور گستردهٔ تکفامی به طور عمود بر دو صفحهٔ شیشه‌ای که در یک انتها روی هم قرار دارند و گوه‌ای از هوا را ایجاد کرده‌اند می‌تابد. ناظری که به نور بازتابیده از گوهٔ هوا، که به صورت یک لایه نازک عمل می‌کند، نگاه می‌کند ۴۰۰۱ فریز تاریک در طول گوه می‌بینند. هرگاه هوای بین صفحه‌ها تخلیه شود، فقط ۴۰۰۰ فریز تاریک دیده می‌شود. تا شش رقم با معنی ضریب شکست هوا را از اطلاعات داده شده به دست آورید.

●●۷۵- شکل ۳۵-۴۷ الف یک عدسی با شعاع R را نشان می‌دهد که روی یک صفحهٔ شیشه‌ای تخت قرار دارد و توسط نور از بالای آن با طول موج λ روشن شده است. شکل ۳۵-۴۷ ب (عکس از بالای عدسی گرفته شده است) نشان می‌دهد که فریزهای تداخلی دایره‌ای شکل (به نام *حلقه‌های نیوتون*) مربوط به ضخامت متغیر d لایهٔ هوای بین عدسی و صفحه، تشکیل می‌شود. شعاعهای r بیشینه‌های تداخل را با فرض $r/R \ll 1$ پیدا کنید. ILW SSM



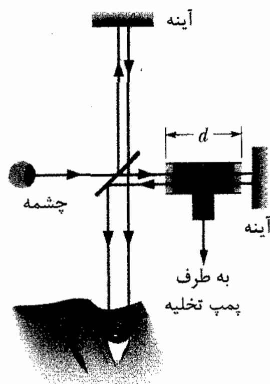
شکل ۳۵-۴۸ مسئلهٔ ۷۸

بخش ۳۵-۸ تداخل سنج مایکلسون

••۷۹- اگر آینهٔ M_2 در تداخل‌سنج مایکلسون (شکل ۳۵-۲۳) به اندازهٔ $0/233\,mm$ حرکت کند، ۷۹۲ فریز روشن به وجود می‌آید. طول موج نوری که نقش فریز را ایجاد می‌کند چقدر است؟ **SSM**

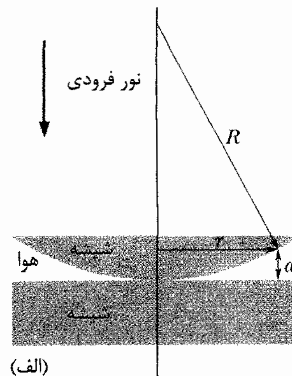
••۸۰- یک لایهٔ نازک با ضریب شکست $n = 1/40$ در یکی از بازوهای تداخل‌سنج مایکلسون عمود بر راه نوری قرار داده شده است. اگر این موجب جابه‌جایی ۷/۰ فریز روشن در نقش ایجاد شده توسط نور با طول موج $589\,nm$ شود، ضخامت لایه چقدر است؟

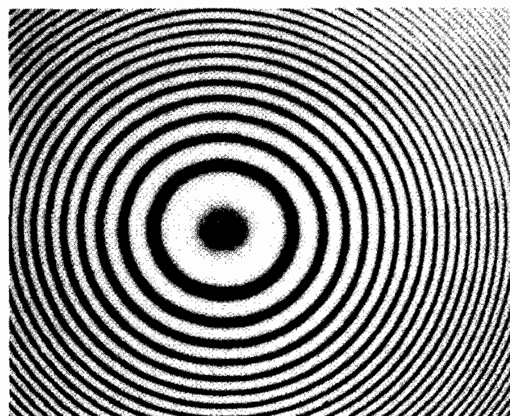
••۸۱- در شکل ۳۵-۴۹، اتاقک هوابندی شده‌ای به طول $d = 5/0\,cm$ در یک بازوی تداخل‌سنج مایکلسون قرار داده شده است. (ضخامت پنجرهٔ شیشه‌ای در دو انتهای اتاقک ناچیز است.) نور با طول موج $\lambda = 500\,nm$ به کار رفته است. تخلیهٔ هوا از اتاقک موجب جابه‌جایی ۶۰ فریز روشن می‌شود. از این اطلاعات ضریب شکست هوا در فشار اتمسفر را با ۶ رقم با معنی به دست آورید. **SSM WWW**



شکل ۳۵-۴۹ مسئلهٔ ۸۱

••۸۲- عنصر سدیم می‌تواند نور را در دو طول موج $\lambda_1 = 589/10\,nm$ و $\lambda_2 = 589/59\,nm$ گسیل کند. نور سدیم در تداخل‌سنج مایکلسون مورد استفاده قرار می‌گیرد (شکل ۳۵-۲۳). اگر جابه‌جایی در نقش فریز برای یک طول موج ۱/۰۰ فریز بیشتر از جابه‌جایی در نقش فریز برای طول موج دیگر باشد، آینهٔ M_2 چقدر باید حرکت داده شود؟





شکل ۳۵-۴۷ مسئله‌های ۷۵ و ۷۷

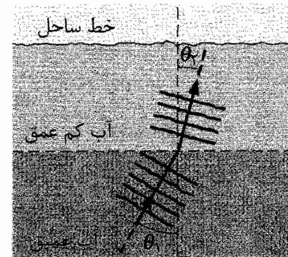
••۷۶- در آزمایش حلقه‌های نیوتون (به مسئلهٔ ۷۵ نگاه کنید) شعاع انحنای R عدسی برابر با $5/0\,m$ و قطر عدسی $20\,mm$ است. (الف) چند حلقهٔ روشن ایجاد شده است؟ فرض کنید که $\lambda = 589\,nm$ است. (ب) اگر این آرایش در آب $(n = 1/33)$ فرو برده شود، چند حلقهٔ روشن ایجاد می‌شود؟

••۷۷- دستگاه حلقه‌های نیوتون برای تعیین شعاع انحنای یک عدسی به کار برده می‌شود. (به شکل ۳۵-۴۷ و مسئلهٔ ۷۵ نگاه کنید.) شعاعهای n ام و $(n+20)$ام حلقهٔ روشن در نور با طول موج $546\,nm$ اندازه‌گیری شده و به ترتیب $0/162\,cm$ و $0/368\,cm$ به دست آمده است. شعاع سطح پایین عدسی را محاسبه کنید.

•••۷۸- لایهٔ نازکی از مایع در یک حلقهٔ دایره‌ای افقی که در دو طرف آن هوا قرار دارد نگهداشته شده است. باریکه‌ای از نور با طول موج $550\,nm$ در جهت عمود بر لایه می‌تابد و شدت I نور بازتابیده را در نظر می‌گیریم. شکل ۳۵-۴۸ شدت I را برحسب تابعی از زمان t به دست می‌دهد. مقیاس افقی با $t_s = 20/0\,s$ مشخص شده است. به علت تبخیر از دو طرف لایه شدت تغییر می‌کند. فرض کنید که لایه تخت است و ضلعهایی موازی به شعاع $1/80\,cm$ دارد و ضریب شکست ۱/۴۰ است. همچنین فرض کنید که حجم لایه با آهنگ ثابتی کاهش می‌یابد. این آهنگ را پیدا کنید.

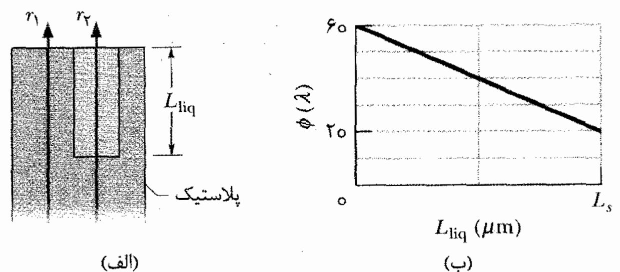
مسئله‌های اضافی

۸۳- همانطور که از بالای شکل ۳۵-۵۰ دیده می‌شود، موجهای اقیانوس با تندی $۴/۰ m/s$ با زاویهٔ $\theta_1 = ۳۰°$ نسبت به عمود به ساحل نزدیک می‌شوند. فرض کنید که عمق آب در فاصلهٔ معینی از ساحل به طور ناگهانی تغییر و تندی موج به $۳/۰ m/s$ افت کند. (الف) در نزدیکی ساحل، زاویهٔ θ_2 بین امتداد حرکت موج و عمود چقدر است؟ (فرض کنید که همان قانون شکست نور برقرار است.) (ب) توضیح دهید که چرا بیشتر موجها عمود بر ساحل حرکت می‌کنند حتی اگر در فاصله‌های بیشتر با زاویه‌های مختلفی حرکت کرده باشند؟



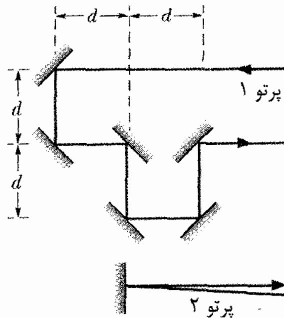
شکل ۳۵-۵۰ مسئلهٔ ۸۳

۸۴- شکل ۳۵-۵۲ الف دو پرتو نوری با طول موج $۴۰۰ nm$ در هوا را نشان می‌دهد که در آغاز وقتی از یک قطعهٔ پلاستیکی به طرف بالا حرکت می‌کنند، همفازند. پرتو r_1 به طور مستقیم به هوا وارد می‌شود. ولی، پیش از اینکه پرتو r_2 وارد هوا شود، از مایعی واقع در یک استوانهٔ توخالی در پلاستیک می‌گذرد. در آغاز L_{liq} ارتفاع مایع برابر با $۴۰/۰ \mu m$ است، ولی سپس مایع شروع به تبخیر می‌کند. فرض کنید ϕ اختلاف فاز بین پرتوهای r_1 و r_2 موقع وارد شدن به هوا باشد. شکل ۳۵-۵۱ ب ϕ را برحسب ارتفاع مایع L_{liq} تا ناپدید شدن نشان می‌دهد که ϕ برحسب طول موج و محور افقی با $L_s = ۴۰/۰۰ \mu m$ مشخص شده است. (الف) ضریب شکست پلاستیک و (ب) ضریب شکست مایع چقدر است؟



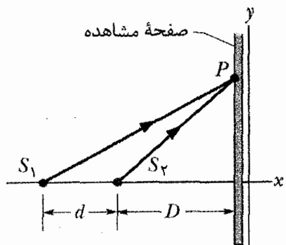
شکل ۳۵-۵۱ مسئلهٔ ۸۴

۸۵- دو پرتو نوری، در آغاز همفازند و با طول موج $۵۰۰ nm$، با بازتاب از آینه‌های مختلف نشان داده شده در شکل ۳۵-۵۲، مسیرهای مختلفی را طی می‌کنند. (چنین بازتابی تغییر فاز ایجاد نمی‌کند.) (الف) کمترین مقدار فاصلهٔ d باید چقدر باشد تا پرتوها موقع خروج از آن ناحیه دقیقاً در فاز مقابل قرار گیرند؟ (از انحراف اندک پرتو ۲ چشم‌پوشی کنید.) (ب) با فرض اینکه تمام وسیله در یک محلول پروتئینی با ضریب شکست ۱/۳۸ فرو برده شود، مسئله را تکرار کنید.



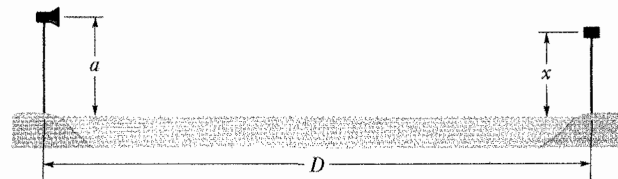
شکل ۳۵-۵۲ مسئلهٔ ۸۵

۸۶- در شکل ۳۵-۵۳ دو چشمهٔ همسانگرد نقطه‌ای S_1 و S_2، با طول موج λ و دامنهٔ یکسان نوری همفاز گسیل می‌کنند. فاصلهٔ این چشمه‌ها روی محور x برابر با $d = ۶/۰۰\lambda$ است. فاصلهٔ صفحهٔ مشاهده تا S_2 برابر $D = ۲۰/۰\lambda$ است و موازی با محور y قرار دارد. شکل دو پرتوی را نشان می‌دهد که به نقطهٔ P با ارتفاع y_P به صفحه می‌رسند. (الف) در چه مقدار y_P اختلاف فاز پرتوها کمینه خواهد بود؟ (ب) چه مضربی از λ اختلاف فاز کمینه را به دست می‌دهد؟ (پ) در چه مقدار y_P اختلاف فاز پرتوها بیشینه خواهد بود؟ چه مضربی از λ (ت) اختلاف فاز بیشینه و (ث) اختلاف فاز را در موقعی که $y_P = d$ است به دست می‌دهد؟ (ج) وقتی $y_d = d$ باشد، آیا شدت برایند در نقطهٔ P بیشینه است یا کمینه، یا میانه ولی نزدیک به بیشینه یا میانه ولی نزدیک به کمینه؟



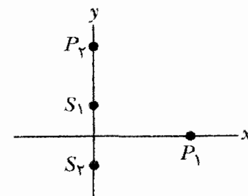
شکل ۳۵-۵۳ مسئلهٔ ۸۶

۸۷- در شکل ۳۵-۵۴، یک فرستندهٔ میکروموج در ارتفاع a بالاتر از سطح آب یک دریاچهٔ بزرگ، میکروموجهایی با طول موج λ را به طرف گیرنده‌ای واقع در ساحل مقابل در فاصلهٔ x بالای سطح آب ارسال می‌کند. میکروموجهای بازتابیده از سطح آب با میکروموجهایی که مستقیماً از فرستنده می‌رسند تداخل می‌کنند. با فرض اینکه پهنای D دریاچه از a و x خیلی بزرگتر و $\lambda \geq a$ است، عبارتی را پیدا کنید که مقدارهای x سیگنالی به دست دهد که در گیرنده بیشینه است. (*راهنمایی:* آیا بازتاب موجب تغییر فاز می‌شود؟) **SSM**



شکل ۳۵-۵۴ مسئلهٔ ۸۷

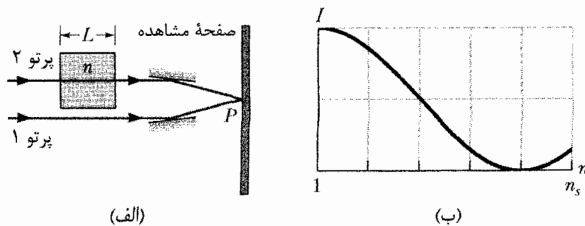
۸۸- در شکل ۳۵-۵۵ دو چشمهٔ همسانگرد نقطه‌ای S_1 و S_2 نوری با طول موج $\lambda = ۴۰۰\text{nm}$ گسیل می‌کنند. چشمهٔ S_1 در $y = ۶۴۰\text{nm}$ و چشمهٔ S_2 در $y = -۶۴۰\text{nm}$ قرار دارند. موجی از S_2 جلوتر از موجی از S_1 با اختلاف فاز $۰/۶۰۰\pi\,\text{rad}$ به نقطهٔ P (در $x = ۷۲۰\text{nm}$) می‌رسد. (الف) چه مضربی از λ اختلاف فاز بین موجهای حاصل از دو چشمه را وقتی که موجها به نقطهٔ P_2 که در $y = ۷۲۰\text{nm}$ واقع است می‌رسند به دست می‌دهد؟ (شکل در مقیاس معینی ترسیم نشده است) (ب) اگر موجها با دامنه‌های مساوی به P_2 برسند، آیا تداخل کاملاً سازنده، کاملاً ویرانگر، میانه ولی به کاملاً سازنده نزدیکتر یا میانه ولی به کاملاً ویرانگر نزدیکتر است؟



شکل ۳۵-۵۵ مسئلهٔ ۸۸

۸۹- یک آرایش دو شکاف فریزهای تداخل روشنی برای نور سدیم (با طول موج ۵۸۹nm) ایجاد می‌کند که فاصلهٔ زاویه‌ای آنها در نزدیکی مرکز نقش °۰/۳۰ است. اگر کل آرایش در آب فرو برده شود که ضریب شکست آن ۱/۳۳ است، فاصلهٔ زاویه‌ای فریزها چقدر خواهد بود؟ **SSM**

۹۰- در شکل ۳۵-۵۶ الف، موجها در امتداد پرتوهای ۱ و ۲ با طول موج λ در هوا، در آغاز همفازند. پرتو r_2 از ماده‌ای به طول L و ضریب شکست n می‌گذرد. سپس پرتوها توسط آینه‌هایی به نقطهٔ مشترک P روی صفحه‌ای بازتابیده می‌شوند. فرض کنید که n بتواند از $n = ۱/۰$ تا $n = ۲/۵$ تغییر کند. هم‌چنین فرض کنید از $n = ۱/۰$ تا $n = n_s = ۱/۵$ شدت I نور در نقطهٔ P مانند شکل ۳۵-۵۶ ب با n تغییر کند. در چه مقدارهایی از n بزرگتر ۱/۴ شدت I (الف) بیشینه و (ب) صفر است؟ (پ) چه مضربی از λ اختلاف فاز بین پرتوها در نقطهٔ P را وقتی $n = ۲/۰$ باشد به دست می‌دهد؟



شکل ۳۵-۵۶ مسئله‌های ۹۰ و ۹۷

۹۱- در نمودار بردار فاز موجها در نقطه‌ای روی صفحهٔ مشاهدهٔ آزمایش دو شکاف در شکل ۳۵-۱۰، در مدت $۲/۵۰ \times ۱۰^{-۱۶}\,\text{s}$ فازنمای موج برایند °۶۰/۰ می‌چرخد. طول موج نور چقدر است؟

۹۲- نور با طول موج $۷۰۰/۰\,\mu\text{m}$ در امتداد مسیری به طول ۲۰۰۰nm فرستاده می‌شود. این مسیر با ماده‌ای با ضریب شکست ۱/۴۰۰ پر می‌شود. این ماده برحسب درجه چقدر تغییر فاز در نور ایجاد می‌کند؟ (الف) تغییر کامل و (ب) تغییر معادلی را که مقدار آن کمتر از °۳۶۰ باشد ارائه دهید.

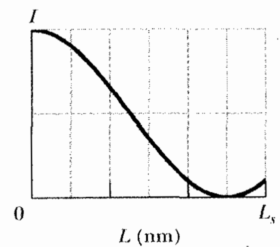
۹۳- دو شکاف موازی با نور تکفام با طول موج ۵۰۰nm روشن می‌شود. یک نقش تداخلی روی صفحهٔ مشاهده در فاصله‌ای از شکافها تشکیل می‌شود، و نوار تاریک چهارم در فاصلهٔ ۱/۶۸cm از نوار روشن مرکزی روی صفحه واقع است. (الف) اختلاف راه مربوط به نوار تاریک چهارم چقدر است؟ (ب) روی صفحهٔ مشاهده فاصلهٔ بین نوار روشن مرکزی و نوار روشن اول در هر طرف نوار مرکزی چقدر است؟ (*راهنمایی:* زاویهٔ نوار چهارم تاریک و زاویهٔ نوار روشن اول به اندازه‌ای کوچک‌اند که $\tan\theta \approx \sin\theta$.) **SSM**

۹۴- در دو آزمایش، نور با بازتاب از سطحهای تخت مختلف در امتداد دو مسیر نشان داده شده در شکل ۳۵-۳۵ فرستاده می‌شوند. در آزمایش اول، پرتوهای ۱ و ۲ در آغاز همفازند و طول موج آنها ۶۲۰/۰nm است. در آزمایش دوم، پرتوهای ۱ و ۲ در آغاز همفازند و طول موج آنها ۴۹۶/۰nm است. کمترین فاصلهٔ L باید چقدر باشد تا موجهای ۶۲۰/۰nm موقع خروج دقیقاً همفاز و موجهای ۴۹۶/۰nm موقع خروج دقیقاً ناهمفاز باشند؟

۹۵- فاصلهٔ شکافهای یک آرایش دو شکافی را پیدا کنید که فریزهای تداخلی به فاصلهٔ ۰/۰۱۸rad از یکدیگر روی صفحه‌ای دور و با نور با طول موج $\lambda = ۵۸۹\text{nm}$ ایجاد می‌کنند.

۹۶- لایهٔ نازکی با ضخامت $۰/۴۱۰\,\mu\text{m}$ در هوا معلق است و با نور سفیدی که به طور عمود بر آن می‌تابد روشن شده است. ضریب شکست لایه ۱/۵۰ است. در چه طول موجی نور مرئی که از دو سطح لایه بازتابیده می‌شود تداخل کاملاً سازنده پیدا می‌کند؟

۹۷- در شکل ۳۵-۵۶ الف، موجهایی که در امتداد پرتوهای r_1 و r_2 هستند در آغاز با طول موج یکسان λ در هوا، همفازند. پرتو ۲ از ماده‌ای به طول L و ضریب شکست n می‌گذرد. سپس پرتوها توسط آینه‌هایی به نقطهٔ مشترک P روی یک صفحه بازتاب می‌کنند. فرض کنید که L بتواند از ۰ تا ۲۴۰۰nm تغییر کند. همچنین فرض کنید که از $L=0$ تا $L_s=900\,nm$ ، شدت I نور در نقطهٔ P برحسب L به صورت شکل ۳۵-۵۷ تغییر می‌کند. در چه مقدارهایی از L بزرگتر از ۹۰۰nm شدت I (الف) بیشینه و (ب) صفر است؟ (پ) چه مضربی از λ اختلاف فاز بین پرتوها را در نقطهٔ P در وقتی که $L=1200\,nm$ باشد به دست می‌دهد؟ **SSM**



شکل ۳۵-۵۷ مسئلهٔ ۹۷

۹۸- عدسی یک دوربین عکاسی با ضریب شکست بزرگتر از ۱/۳۰ با لایهٔ شفاف نازکی با ضریب شکست ۱/۲۵ پوشش داده شده است تا با تداخل، بازتاب نور در طول موج λ که به طور عمود بر عدسی می‌تابد حذف شود. چه مضربی از λ کمینهٔ ضخامت لایهٔ مورد نیاز را به دست می‌دهد؟

۹۹- اگر فاصلهٔ بین کمینه‌های اول و دهم یک نقش تداخلی در دو شکاف ۱۸/۰mm و فاصلهٔ شکافها از یکدیگر ۰/۱۵۰mm و از صفحهٔ مشاهده ۵۰/۰cm باشد، طول موج نور به کار رفته چقدر است؟ **SSM**

۱۰۰- تندی نور با طول موج ۵۵۰nm در کوارتز چقدر است؟ (به شکل ۲۹-۱۸، جلد دوم نگاه کنید.)

۱۰۱- در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵-۶ فرض کنید که پوشش دادن، بازتاب نور با طول موج ۵۵۰nm را در تابش عمود از بین می‌برد. چه درصدی از بازتاب با پوشش دادن در (الف) ۴۵۰nm و (ب) ۶۵۰nm از بین می‌رود؟

۱۰۲- نور لیزر با طول موج ۶۳۲/۸nm از آرایش دو شکاف که در جلوی یک کلاس درس قرار دارد عبور می‌کند، سپس از آینهٔ واقع در فاصلهٔ ۲۰/۰cm در عقب کلاس بازتابیده شده و روی صفحه‌ای در جلوی کلاس نقش تداخلی تشکیل می‌دهد. فاصلهٔ بین فریزهای روشن مجاور ۱۰/۰cm است. (الف) فاصلهٔ شکافها چقدر است؟ (ب) وقتی استاد ورقهٔ سلوفان نازکی را روی یک شکاف قرار دهد و به این وسیله ۲/۵ طول موج طول مسیری را که از سلوفان می‌گذرد افزایش دهد، مرکز نقش در کجا قرار می‌گیرد؟

۱۰۳- نوری با طول موج λ در یک تداخل‌سنج مایکلسون به کار رفته است. مکان آینهٔ متحرک را در نظر می‌گیریم، وقتی بازوها طولهای مساوی $d_2=d_1$ دارند، $x=0$ است. عبارتی برای شدت نور مشاهده شده برحسب تابعی از x بنویسید، I_m را شدت بیشینه در نظر بگیرید. **SSM**

۱۰۴- ورقه‌ای از شیشه با ضریب شکست ۱/۴۰ با لایه‌ای از ماده با ضریب شکست ۱/۵۵ پوشانده شده است تا اینکه نور سبز با طول موج ۵۲۵nm (در هوا) ترجیحاً با تداخل سازنده عبور کند. (الف) ضخامت کمینهٔ لایه‌ای که این نتیجه را به دست دهد چقدر است؟ (ب) چرا قسمتهای دیگر طیف مرئی عبور نمی‌کنند؟ (پ) آیا عبور رنگهای دیگری شدیداً کاهش می‌یابد؟ اگر چنین است. کدام رنگها؟

۱۰۵- یکی از شکافهای آرایش دو شکاف با تیغهٔ شیشه‌ای نازکی با ضریب شکست ۱/۴ و شکاف دیگر با تیغهٔ شیشه‌ای با ضریب شکست ۱/۷ پوشانده شده است. نقطهٔ روی صفحهٔ مشاهده که پیش از قراردادن تیغهٔ شیشه‌ای بیشینهٔ مرکزی بود اکنون با فریز روشن $m=5$ اشغال شده است. با فرض اینکه $\lambda=480\,nm$ و ضخامت تیغه‌ها t است t را پیدا کنید.

۱۰۶- در شکل ۳۵-۴۶ ، دو تیغهٔ شیشه‌ای در یک انتها به یکدیگر وصل‌اند و گوه‌ای از هوا تشکیل می‌دهند که به عنوان یک لایهٔ نازک عمل می‌کند. نور گسترده‌ای با طول موج ۴۸۰nm به طور مستقیم عمود بر تیغهٔ اول می‌تابد. ناظری نور بازتابیده از تیغه‌ها را از روی به صورت یک نقش تداخلی که ناشی از گوهٔ هواست، می‌بیند. در فریز روشن شانزدهم، گوه چقدر از فریز روشن ششم، با شمارش از جایی که تیغه‌ها به هم تماس دارند، ضخیم‌تر است؟

۱۰۷- نور گسترده‌ای با طول موج ۶۰۰nm به طور مستقیم به طرف پایین به تیغهٔ شیشه‌ای $(n=1/50)$ در شکل ۳۵-۴۶ فرستاده می‌شود. این تیغه و تیغه پلاستیکی $(n=1/20)$ گوهٔ نازکی از هوا تشکیل می‌دهند که به صورت یک لایهٔ نازک عمل می‌کند. ناظری که از تیغهٔ بالایی رو به پایین نگاه می‌کند نقش تداخلی نشان داده شده در شکل ۳۵-۵۸ را می‌بینند که در دو طرف انتهایی فریزهای تاریک قرار دارند. (الف) ضخامت گوه در سمت راست چقدر است؟ (ب) اگر به جای هوای بین تیغه‌های گوه آب $(n=1/33)$ قرار داده شود، از نظر ناظر چند فریز تاریک جابه‌جا می‌شود؟

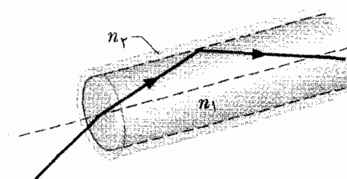


شکل ۳۵-۵۸ مسئلهٔ ۱۰۷

۱۰۸- نور سدیم $(\lambda=589\,nm)$ دو شکاف به فاصلهٔ $d=2/0\,mm$ را روشن می‌کند. فاصلهٔ شکاف تا صفحهٔ مشاهده $D=40\,mm$ است. درصد خطای ایجاد شده بر اثر استفاده از

معادلهٔ ۳۵-۱۴ برای قرار گرفتن فریز روشن $m=10$ روی صفحه به جای استفاده از اختلاف راه دقیق چقدر است؟

۱۰۹- شکل ۳۵-۵۹ یک تار نوری را نشان می‌دهد که مغز پلاستیکی در مرکز آن با ضریب شکست $n_1=1/58$ با یک پوشش پلاستیکی با ضریب شکست $n_2=1/53$ احاطه شده است. نور در امتداد مسیرهای مختلفی در داخل مغز مرکزی می‌تواند حرکت کند که منجر به زمانهای پیمایش مختلفی در تار می‌شود. این در آغاز موجب می‌شود که یک تپ کوتاه نور به هنگام عبور در امتداد تار پراکنده شود که به اتلاف اطلاعات می‌انجامد. نوری را در نظر بگیرید که به طور مستقیم در امتداد محور مرکزی تار حرکت می‌کند و نوری که مکرر با زاویهٔ حد در سطح جدایی مغز- غلاف بازتابیده می‌شود به هنگام حرکت در مغز مرکزی از طرفی به طرف دیگر بازتاب می‌کند. اگر طول تار $300\,m$ باشد، اختلاف در زمانهای حرکت در طول این دو مسیر چقدر است؟



شکل ۳۵-۵۹ مسئلهٔ ۱۰۹

۱۱۰- وقتی الکترونی با تندی بیش از تندی نور در محیطی از آن محیط بگذرد، این الکترون انرژی الکترومغناطیسی تابش می‌کند (*اثر چرنکوف*). کمینهٔ تندیی که الکترون در مایعی با ضریب شکست ۱/۵۴ باید داشته باشد تا بتواند تابش کند چقدر است؟

۱۱۱- چشمه‌های نقطه‌ای S_1 و S_2 در طول موج $400\,nm$ و دامنهٔ یکسان تابش می‌کنند. چشمه‌ها روی محور x به ترتیب در $x=6/5\,\mu m$ و $x=-6/0\,\mu m$ واقع شده‌اند. (الف) در ناحیهٔ بین تابش از S_1 و تابش از S_2 اختلاف فاز را (برحسب رادیان) تعیین کنید. (ب) فرض کنید تیغه‌ای از یک مادهٔ شفاف با ضخامت $1/5\,\mu m$ و ضریب شکست $n=1/5$ بین $x=0$ و $x=1/5\,\mu m$ قرار داده می‌شود. در این صورت بین تابش از S_1 و تابش از S_2 اختلاف فاز در مبدأ (برحسب رادیان) چقدر است؟

۱۱۲- نوار تاریک دوم در یک نقش تداخلی دو شکاف $1/2\,cm$ از بیشینهٔ مرکزی نقش فاصله دارد. فاصلهٔ دو شکاف برابر با ۸۰۰ طول موج نور تکفام فرودی (به طور عمود) بر شکافها است. فاصلهٔ بین صفحهٔ شکافها از صفحهٔ مشاهده چقدر است؟

۱۱۳- در شکل ۳۵-۴۶ دو تیغهٔ شیشه‌ای $(n=1/60)$ گوه‌ای را تشکیل می‌دهند و فضای گوه با مایعی $(n=1/50)$ پر می‌شود. در انتهای چپ دو تیغه به هم متصل‌اند و در انتهای راست فاصلهٔ آنها $580\,nm$ است. نوری با طول موج $580\,nm$ (در هوا) بر مجموعه می‌تابد و ناظری نور برگشته به طرف بالا را می‌بیند. (الف) در انتهای چپ و (ب) در انتهای راست نوار تاریک است یا روشن؟ (پ) چند نوار تاریک در طول صفحه‌ها وجود دارد؟

۱۱۴- لایهٔ نازکی $(n=1/25)$ روی یک تیغهٔ شیشه‌ای $(n=1/40)$ نشانده شده و با نور با طول موج $550\,nm$ (اندازه‌گیری شده در هوا) روشن می‌شود. نور بر صفحه عمود است. کمینهٔ (غیر صفر) ضخامت لایه‌ای که (الف) بیشینهٔ عبور و (ب) بیشینهٔ بازتاب را به نور می‌دهد چقدر است؟

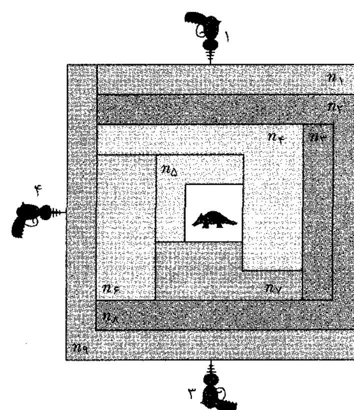
۱۱۵- یک باریکهٔ نوری با طول موج $600\,nm$ در هوا از لایهٔ ۱ $(n_1=1/2)$ با ضخامت $1/0\,\mu m$، سپس از لایهٔ ۲ (هوا) با ضخامت $1/5\,\mu m$ و سرانجام از لایهٔ ۳ $(n_3=1/8)$ با ضخامت $1/0\,\mu m$ می‌گذرد. باریکه به طور عمود بر سطحهای لایه، که موازی با یکدیگرند می‌تابد: (الف) کدام لایه نور را در کمترین زمان عبور می‌دهد و (ب) این کمترین زمان چقدر است؟ (پ) تعداد کل طول موجها (در هر لحظه) که از هر سه لایه عبور می‌کنند چقدر است؟

۱۱۶- دو پرتو نوری که در آغاز همفاز و دارای طول موج $\lambda=6/00\times10^{-7}\,m$ هستند، از لایه‌های پلاستیکی مختلف با ضخامت یکسان $7/00\times10^{-6}\,m$ می‌گذرند. ضریب شکست برای یک لایه ۱/۶۵ و برای لایهٔ دیگر ۱/۴۹ است. (الف) کمترین مضرب λ که اختلاف فاز بین پرتوها را به هنگام خروج به دست می‌دهد چقدر است؟ (ب) اگر سپس این دو پرتو با دامنهٔ یکسان به نقطهٔ مشترکی برسند، آیا تداخل به تاریکی کامل، روشنایی بیشینه، روشنایی میانه ولی نزدیک به تاریکی کامل، یا روشنایی میانه ولی نزدیک به روشنایی بیشینه می‌انجامد؟ اگر در عوض این دو پرتو در آغاز کاملاً ناهمفاز باشند، پاسخها به (پ) قسمت (الف)، و (ت) قسمت (ب) چه خواهد بود؟

۱۱۷- در آزمایش تداخل دو شکاف، فاصلهٔ شکافها $2/00\,\mu m$، طول موج نور $500\,nm$ و فاصلهٔ بین شکافها و صفحهٔ مشاهده $4/00\,m$ است. (الف) زاویهٔ بین فریز مرکزی و فریز سوم روشن چقدر است؟ اگر بسامد نور ۹۰/۰ درصد کاهش یابد، (ب) آیا سومین فریز روشن به طرف مرکز نقش تداخلی حرکت می‌کند یا از مرکز نقش دور می‌شود و (پ) چقدر حرکت می‌کند؟

۱۱۸- یک موج تخت تکفام در هوا به طور عمود بر لایهٔ نازک روغن که یک صفحهٔ شیشه‌ای را پوشانده است می‌تابد. طول موج چشمه به طور پیوسته می‌تواند تغییر کند. برای طول موجهای $500\,nm$ و $700\,nm$ در نور بازتابیده تداخل کاملاً ویرانگر تشکیل می‌شود و در بین آنها هیچ طول موجی وجود ندارد. ضریب شکست شیشه ۱/۵۰ است. نشان دهید که ضریب شکست روغن باید کمتر از ۱/۵۰ باشد.

۱۱۹- شکل ۳۵-۶۰ طرحی از یک بازی را نشان می‌دهد. چهار تفنگ لیزری به طرف مرکز آرایه‌ای از لایه‌های پلاستیکی که جانوری در وسط هدف است نشانه‌روی کرده‌اند. ضریب شکست لایه‌ها عبارت‌اند از $n_1 = ۱/۵۵$ ، $n_2 = ۱/۷۰$ ، $n_3 = ۱/۴۵$ ، $n_4 = ۱/۶۰$ ، $n_5 = ۱/۴۵$ ، $n_6 = ۱/۶۱$ ، $n_7 = ۱/۵۹$ ، $n_8 = ۱/۷۰$ و $n_9 = ۱/۶۰$. ضخامت لایه‌ها به ترتیب شکل ۲/۰۰mm یا ۴/۰۰mm است. زمان حرکت لیزر در لایه‌ها از (الف) تفنگ ۱، (ب) تفنگ ۲، (پ) تفنگ ۳ و (ت) تفنگ ۴ چقدر است؟ (ث) اگر تفنگها به طور همزمان شلیک کنند، کدام لیزر اول به هدف می‌خورد؟



شکل ۳۵-۶۰ مسئلهٔ ۱۱۹

۱۲۰- در شکل ۳۵-۱۰ ، زاویهٔ θ بین دو پرتو ۲۰/۰° ، فاصلهٔ شکافها d برابر با ۵۸/۰۰μm و طول موج λ برابر با ۵۰۰/۹nm است. (الف) چه مضربی از λ اختلاف فاز دو پرتو را وقتی به نقطهٔ مشترکی روی صفحهٔ دوری می‌رسند، به دست می‌دهد؟ (ب) آیا تداخل به تاریکی کامل، روشنایی بیشینه، روشنایی میانهٔ نزدیک به تاریکی کامل یا روشنایی میانهٔ نزدیک به روشنایی بیشینه می‌انجامد؟

۱۲۱- شکافهایی با پهنای نامساوی برای ایجاد نقش تداخلی روی صفحه‌ای دور در آرایش دو شکاف به کار رفته‌اند. اگر فقط شکاف باریک ۱ روشن شود (شکاف پهنتر ۲ پوشیده باشد)، نوری که به مرکز نقش می‌رسد دارای دامنهٔ E_0 و شدت I_0 است. اگر فقط شکاف ۲ روشن شود، دامنهٔ نوری که به مرکز نقش می‌رسد $۲E_0$ است. وقتی هر دو شکاف روشن شوند و نقش تداخلی دو شکاف روی صفحه تشکیل شود، شدت $I(\theta)$ در نقش برحسب تابعی از زاویهٔ θ چقدر است؟ از معادله‌های ۳۵-۲۲ و ۳۵-۲۳ استفاده کنید.

۱۲۲- شکل ۳۵-۴۰ دو چشمهٔ نقطه‌ای S_1 و S_2 را نشان می‌دهد که نوری با طول موج $\lambda = ۵۰۰\text{nm}$ و دامنهٔ یکسان گسیل می‌کنند. این گسیلها همسانگرد و همفازند و فاصلهٔ بین چشمه‌ها $d = ۲/۰۰\mu m$ است. در نقطهٔ P روی محور x ، موج حاصل از S_1 و موج حاصل از S_2 تداخل می‌کنند. وقتی P در فاصلهٔ خیلی دوری $(x \approx \infty)$ قرار دارد، (الف) اختلاف فاز بین موجهای حاصل از S_1 و S_2 و (ب) نوع تداخلی را که ایجاد می‌کنند (تقریباً سازندهٔ کامل یا ویرانگر کامل) چگونه است؟ (پ) وقتی P در امتداد محور x به طرف S_1 حرکت کند، آیا اختلاف فاز بین موجهای حاصل از S_1 و S_2 افزایش می‌یابد یا کاهش؟ (ت) – (س) جدول ۳۵-۴ را در مورد اختلاف فاز معین با تعیین نوع تداخل و مختصهٔ x که تداخل رخ می‌دهد پر کنید.

جدول ۳۵-۴

مسئلهٔ ۱۲۲: قسمتهای (ت) تا (س)

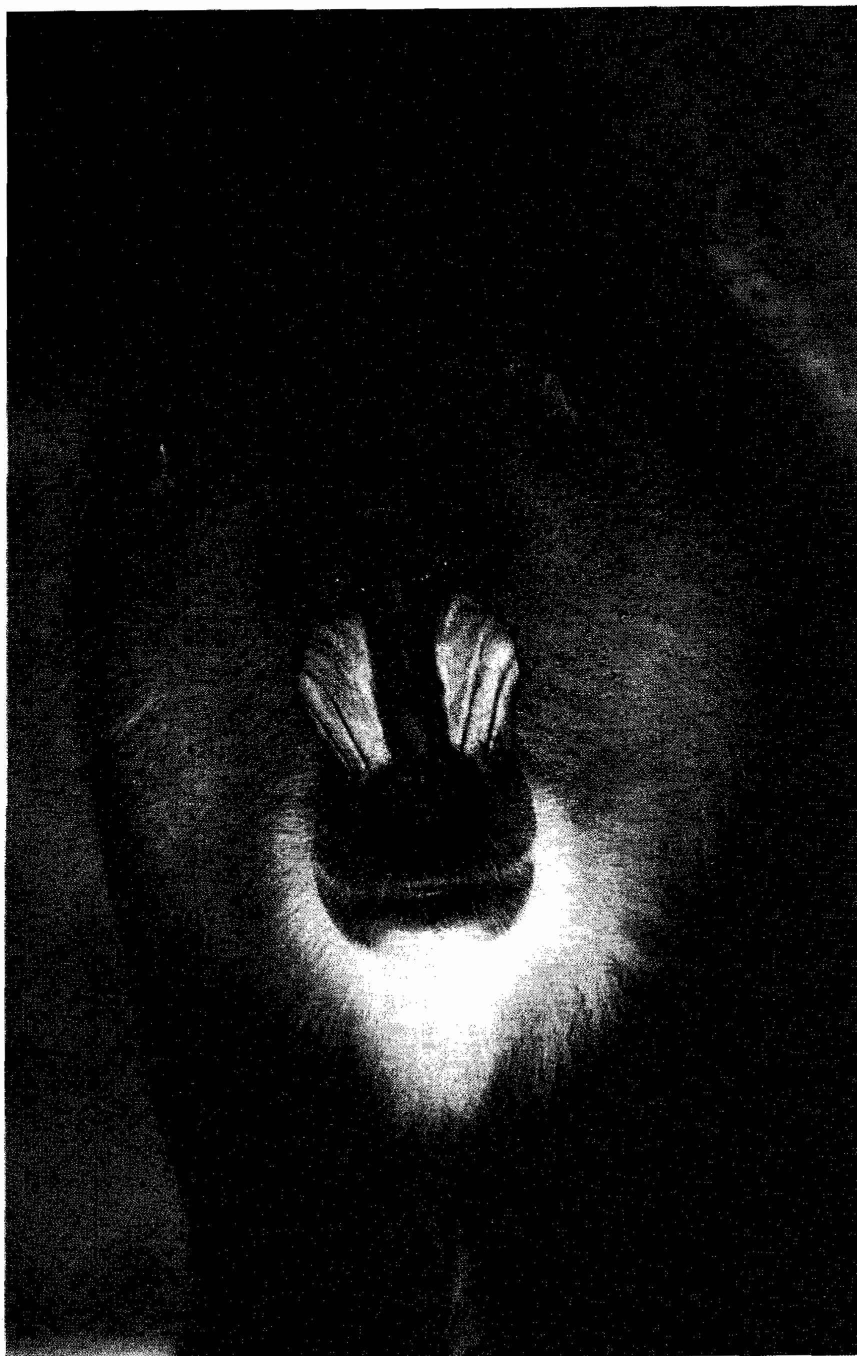
اختلاف فاز	نوع	مکان x
۰	(ت)	(ث)
۰/۵۰۰λ	(ج)	(چ)
۱/۰۰λ	(ح)	(خ)
۱/۵۰λ	(د)	(ذ)
۲/۰۰λ	(ر)	(ز)
۲/۵۰λ	(ژ)	(س)

۱۲۳- (الف) از نتیجهٔ مسئلهٔ ۷۵ استفاده کنید و نشان دهید که در آزمایش حلقه‌های نیوتون، اختلاف در شعاع بین حلقه‌های روشن مجاور (بیشینه‌ها) با فرض $m \gg ۱$ با رابطهٔ

$$\Delta r = r_{m+1} - r_m \approx \frac{۱}{۲}\sqrt{\lambda R / m}$$

داده می‌شود. (ب) اکنون نشان دهید که *مساحت* بین حلقه‌های روشن مجاور با فرض $m \gg ۱$ با $A = \pi \lambda R$ داده می‌شود. توجه کنید که این مساحت مستقل از m است.

۳۶ پراش



بسیاری از سطحها (مانند سطح پیراهن و شلوار) دارای رنگ هستند زیرا مولکولهای رنگی نور مرئی در طول موجهای معینی را جذب می‌کنند. بقیه نور را بازتاب می‌دهند. بعضی سطحها (مانند بالهای پروانهٔ رنگ به رنگ شده) دارای رنگ هستند زیرا تداخل در لایهٔ نازک طول موجهای معینی را حذف و بقیهٔ نورها را بازتابیده می‌کند. ولی پوست آبی و جذاب این میمون نه به علت مولکولهای رنگی است و نه لایه‌های نازک.

چرا صورت این میمون آبی به نظر می‌رسد؟

پاسخ در همین فصل.

۳۶-۱ فیزیک چیست؟

یکی از هدفهای فیزیک در مطالعهٔ نور عبارت است از درک و استفاده از پراش نور وقتی که نور از یک شکاف باریک یا (همانطور که بحث خواهیم کرد) از یک مانع باریک یا لبه‌ای عبور می‌کند. با این پدیده در فصل ۳۵ وقتی گسترده شدن - پراش - نور را از شکافهای آزمایش یانگ بررسی می‌کردیم مواجه شدیم. ولی پراش از یک شکاف معین خیلی پیچیده‌تر از گسترده شدن ساده است، چون نور با خودش تداخل می‌کند و نقش تداخلی به وجود می‌آورد. به دلیل همین پیچیدگی است که نور از موقعیتهای خوبی برای استفادهٔ پربار برخوردار است. اگرچه پراش نور وقتی که از یک شکاف یا مانعی می‌گذرد خیلی علمی به نظر می‌رسد، ولی مهندسان و دانشمندان زیادی از این فیزیک استفاده می‌کنند، و احتمالاً قابلیت کاربردهای جهانی پراش خارج از اندازه است.

پیش از بحث دربارهٔ بعضی از این کاربردها، ابتدا باید دربارهٔ اینکه چرا پراش ناشی از طبیعت موجی نور است بحث کنیم.

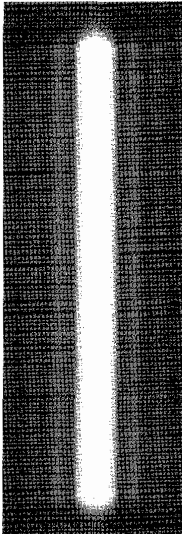
۳۶-۲ پراش و نظریهٔ موجی نور

در فصل ۳۵ پراش را تقریباً به عنوان پهن شدن نور وقتی که از یک شکاف باریک خارج می‌شود تعریف کردیم. ولی چیزی بیش از پهن شدن رخ می‌دهد، چون نور یک نقش تداخلی به نام **نقش پراش** ایجاد می‌کند. برای مثال، وقتی نور تکفام یک چشمهٔ دور (یا یک لیزر) از شکاف باریکی عبور کند و سپس به صفحهٔ مشاهده‌ای برسد، این نور روی صفحه یک نقش پراش شبیه به شکل ۳۶-۱ را ایجاد می‌کند. این نقش شامل یک بیشینهٔ مرکزی پهن و خیلی روشن و تعدادی بیشینه با شدت کمتر و باریکتر (به نام بیشینه‌های ثانوی یا کناری) در دو طرف است. در میان بیشینه‌ها کمینه‌ها قرار دارند.

چنین نقشی از نظر نورشناسی هندسی کاملاً غیر قابل انتظار است. اگر نور روی خط راستی به صورت پرتو حرکت کند، آنگاه شکاف فقط به تعدادی از این پرتوها برای تشکیل تصویر دقیقی از شکاف روی صفحهٔ مشاهده اجازهٔ عبور می‌دهد. مانند فصل ۳۵، باید نتیجه گرفت که نورشناسی هندسی فقط یک تقریب به حساب می‌آید.

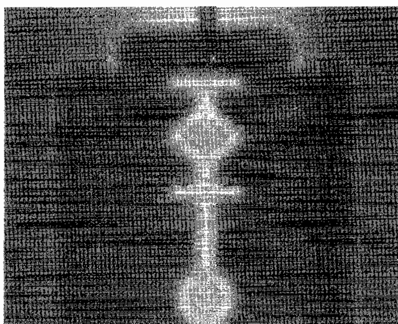
پراش نور فقط به موقعیتهای عبور نور از یک گشودگی باریک (مانند یک شکاف یا روزنه) محدود نمی‌شود. پراش به هنگام عبور نور از یک لبه مانند لبهٔ تیغ در شکل ۳۶-۲ نیز رخ می‌دهد. توجه کنید که خطهای بیشینه و کمینه که تقریباً موازی با لبه‌ها هستند، هم درون تیغ و هم در خارج آن قرار دارند. وقتی نور مثلاً از لبهٔ قائم سمت چپ عبور می‌کند، به چپ و راست گسترده می‌شود و تداخل صورت می‌گیرد و در امتداد لبهٔ چپ نقشی ایجاد می‌کند. بیشترین قسمت این نقش در واقع در داخل سایهٔ تیغ یعنی جایی که اگر نورشناسی هندسی حاکم بود، سایه می‌بود قرار می‌گیرد.

وقتی به آسمان صاف آبی نگاه می‌کنیم و نقطه‌هایی ظریف و ساختارهایی شبیه مو را که در دید شناورند می‌بینیم با نمونه‌ای عمومی از پراش روبه‌رو هستیم. این شکلهای مواج وقتی ایجاد می‌شوند که نور از لبهٔ خرده‌های ظریف مایع زجاجیهٔ چشم، ماده شفافی که بیشتر کرهٔ چشم را پر می‌کند، بگذرد. آنچه شما به هنگام قرارگرفتن یک مواج در میدان دید خود می‌بینید پراش ایجاد شده روی شبکیه توسط یکی از این



شکل ۳۶-۱ این نقش پراش به هنگام عبور نور از یک شکاف باریک افقی و با رسیدن آن به صفحهٔ مشاهده، روی آن ظاهر می‌شود. پراش موجب می‌شود که نور به طور عمود بر کناره‌های دراز شکاف پهن شود. این پهن شدن یک نقش تداخلی ایجاد می‌کند که شامل یک بیشینهٔ مرکزی پهن و بیشینه‌ها و کمینه‌های ثانوی (یا کناری) باریک با شدت کمتر در بین آنهاست.

خرده‌هاست. اگر از روزنهٔ کوچکی در یک ورقه نگاه کنید به طوری که نور وارد شده به چشم شما تقریباً یک موج تخت باشد، بیشینه‌ها و کمینه‌ها را در نقشها تمیز خواهید داد.



شکل ۳۶-۲ نقش پراش ایجاد شده توسط یک تیغ با نور تکفام. به خطهای یک در میان بیشینه و کمینهٔ شدت توجه کنید.

پراش یک اثر موجی است. یعنی این به علت اینکه نور یک موج است رخ می‌دهد و هم‌چنین با انواع دیگر موج نیز رخ می‌دهد. برای مثال، ممکن است پراش را در عملکرد یک بازی فوتبال دیده باشید. وقتی سردسته تشویق کننده‌ها در کنار زمین بازی با صدای هرچه بیشتر در میان طرفداران پر سروصدا فریاد می‌زند، این فریاد به سختی شنیده می‌شود، چون موجهای صوتی به هنگام عبور از گشودگی کوچک دهان تشویق کننده پراشیده می‌شوند. با این پهن شدگی صوتی تعداد کمی از موجهایی که به طرف جلو تشویق کننده حرکت می‌کنند به طرفداران می‌رسد. برای از بین بردن پراش، تشویق کننده از طریق بلندگو تشویق می‌کند. در این صورت موجهای صوتی از گشودگی بزرگتری در انتهای بلندگو خارج می‌شوند. به این ترتیب پهن شدگی کاهش می‌یابد، و صدای بیشتری به جلو تشویق کننده و به طرفداران می‌رسد.

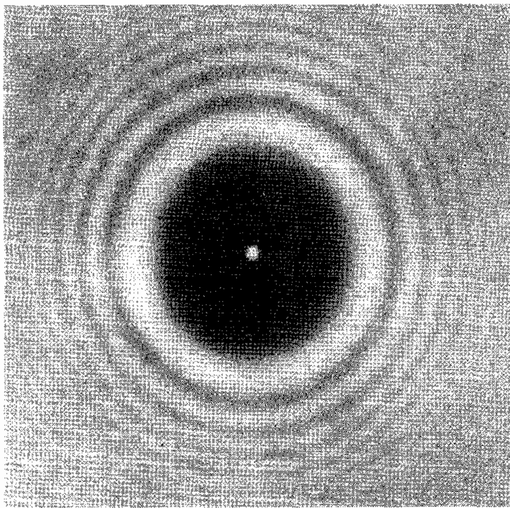
لکهٔ روشن فرنل

پراش توجیه ساده‌ای در نظریهٔ موجی نور دارد. هرچند، این نظریه در اصل در سالهای ۱۶۰۰ توسط هویگنس تکامل یافت و ۱۲۳ سال بعد توسط یانگ برای توضیح تداخل در شکاف به کار رفت، ولی بیشتر به دلیل نظریهٔ نیوتون که مبتنی بر جریانی از ذره‌ها بود، خیلی کند مورد پذیرش قرار گرفت.

دیدگاه نیوتون در مراکز علمی فرانسه در اواخر قرن نوزدهم یک نظریهٔ غالب بود و در این موقع اگوستین فرنل[1] یک مهندس نظامی جوان بود. فرنل، که به نظریهٔ موجی نور معتقد بود، مقاله‌ای به آکادمی علوم فرانسه فرستاد که آزمایشها و توضیحهایی دربارهٔ نظریهٔ موجی او را توصیف می‌کرد.

در سال ۱۸۱۹/۱۱۹۸، در آکادمی علوم که حامیان نیوتون در اکثریت بودند و فکر می‌کردند که با دیدگاه موجی باید مبارزه کنند، جایزه‌ای برای مقاله‌ای دربارهٔ پراش در نظر گرفتند که فرنل برنده آن شد. با وجود این، نظریه پردازان نیوتونی نه نظر خود را عوض کردند و نه سکوت کردند. یکی از این افراد پواسون[2] بود که «نتیجهٔ شگفتی» را خاطرنشان کرد که بنابر آن اگر نظریه‌های فرنل صحیح باشد، در این صورت باید موجهای نوری با عبور از لبهٔ یک کره در ناحیه سایهٔ آن پهن شوند و یک لکهٔ نورانی در مرکز این سایه به وجود آید. کمیتهٔ جایزه آزمایشی از پیش‌بینی پواسون ترتیب داد و معلوم شد که *لکهٔ روشن فرنل* که امروزه به این نام معروف است، واقعاً در آنجا وجود دارد (شکل ۳۶-۳). هیچ چیز به اندازهٔ تأیید تجربی یکی از پیش‌بینیهای غیرمنتظره و غیرشهودی موجب اطمینان در مورد یک نظریه نخواهد شد.

1. Augustin Fresnel
2. S.D. Poisson

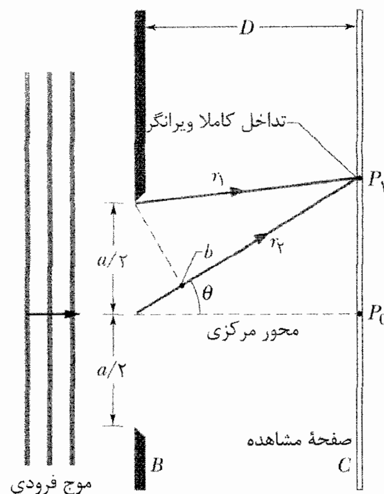


شکل ۳۶-۳ عکسی از نقش پراش یک قرص. به حلقه‌های پراش هم‌مرکز و لکهٔ روشن فرنل در مرکز نقش توجه کنید. این آزمایش با آزمایشی که کمیتهٔ آزمایش کننده نظریهٔ فرنل ترتیب داده بود اساساً یکسان است، چون کره‌ای که آنها به کار برده بودند و قرصی که در اینجا به کار رفته دارای مقطعی با لبهٔ دایره‌ای است.

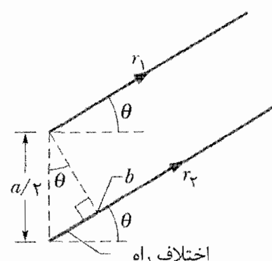
۳۶-۳ پراش توسط یک شکاف: محل کمینه‌ها

اکنون نقش پراش موجهای نوری تخت با طول موج λ را در نظر می‌گیریم که توسط یک شکاف باریک بلند با پهنای a در صفحهٔ کدر B، که مقطع آن در شکل ۳۶-۴ نشان داده شده است، پراشیده می‌شوند. (در این شکل طول شکاف به داخل و بیرون صفحهٔ کاغذ گسترده شده و جبهه‌های موج نزدیک شونده موازی با صفحهٔ B هستند.) وقتی نور پراشیده به صفحهٔ مشاهدهٔ C می‌رسد، موجها از نقطه‌های مختلف داخل شکاف تداخل می‌کنند و یک نقش پراش از فریزهای روشن و تاریک (بیشینه‌ها و کمینه‌های تداخل) روی صفحه به وجود می‌آورند. برای یافتن محل فریزها، باید راهکاری مشابه با راهکار به کار رفته برای پیداکردن محل فریزها در نقش تداخلی دو شکاف به کار بریم. البته، پراش از نظر ریاضی خیلی پیچیده‌تر است و در اینجا باید بتوانیم معادله‌هایی فقط برای فریزهای تاریک پیدا کنیم.

پیش از انجام این کار، با توجه به اینکه موجهای حاصل از تمام نقطه‌های شکاف فاصلهٔ یکسانی را تا مرکز نقش طی می‌کنند و بنابراین، در آنجا همفازند، می‌توان فریز روشن مرکزی را که در شکل ۳۶-۱ دیده می‌شود توجیه کرد. در مورد فریزهای روشن دیگر، فقط می‌توان گفت که اینها تقریباً در وسط فریزهای تاریک مجاور قرار دارند.



شکل ۳۶-۴ موجهای حاصل از نقطه‌های بالایی از دو ناحیه به پهنای $a/۲$ در نقطهٔ p_1 روی صفحهٔ مشاهدهٔ C تداخل ویرانگر دارند.



شکل ۳۶-۵ به ازای $D>>a$ پرتوهای r_1 و $r_۲$ با زاویهٔ θ نسبت به محور مرکزی را می‌توان تقریباً موازی در نظر گرفت.

برای یافتن محل فریزهای تاریک، از روشی هوشمندانه (برای ساده‌سازی) استفاده می‌کنیم و آن اینکه تمام پرتوها را به صورت جفت در نظر می‌گیریم که از شکاف می‌آیند و سپس شرایطی را پیدا می‌کنیم که موجب می‌شود موجکهای پرتوها در هر جفت یکدیگر را از بین ببرند. این روش را در شکل ۳۶-۴ الف برای پیداکردن مکان اولین فریز تاریک در نقطهٔ P_1 به کار می‌بریم. ابتدا شکاف را به دو *ناحیهٔ فرضی* با پهنای $a/۲$ تقسیم می‌کنیم. سپس پرتو نوری r_1 را از نقطهٔ بالایی ناحیهٔ بالا و پرتو نوری $r_۲$ را از نقطهٔ بالایی ناحیهٔ پایین به نقطهٔ P_1 وصل می‌کنیم. یک محور مرکزی از مرکز شکاف تا صفحهٔ مشاهدهٔ C رسم شده و P_1 نسبت به این محور در زاویهٔ θ قرار دارد.

موجکهای جفت پرتو r_1 و $r_۲$ در شکاف همفازند، چون از یک جبههٔ موج که از شکاف در پهنای آن می‌گذرد سرچشمه می‌گیرند. ولی، برای ایجاد فریز تاریک اول اینها وقتی به P_1 می‌رسند باید به اندازهٔ $\lambda/۲$ ناهمفاز باشند؛ این اختلاف فاز به علت اختلاف راهی است که موجک $r_۲$ برای رسیدن به P_1 بیشتر از موجک r_1 می‌پیماید. برای نشان دادن این اختلاف راه، نقطهٔ b را روی پرتو $r_۲$ طوری در نظر می‌گیریم که طول راه از b تا P_1 با طول راه پرتو r_1 برابر باشد. پس اختلاف راه بین دو پرتو عبارت است از فاصله از مرکز شکاف تا b.

مانند شکل ۳۶-۴، هرگاه صفحهٔ مشاهدهٔ C نزدیک صفحهٔ B باشد، از نظر ریاضی توصیف نقش پراش روی C دشوار است. با وجود این، اگر D فاصلهٔ صفحهٔ مشاهده نسبت به پهنای شکاف خیلی بزرگتر باشد، عملیات ریاضی خیلی ساده خواهد شد. در این صورت، پرتوهای r_1 و $r_۲$ را می‌توان تقریباً موازی و زاویه نسبت به محور را θ در نظر گرفت (شکل ۳۶-۵). همچنین مثلث ایجاد شده توسط نقطهٔ b، نقطهٔ بالای شکاف، و نقطهٔ مرکز شکاف را می‌توان تقریباً قائم‌الزاویه در نظر گرفت که θ یکی از زاویه‌های داخلی آن است. اختلاف راه بین پرتوهای r_1 و $r_۲$ (که بازهم فاصلهٔ مرکز شکاف تا نقطه b است) برابر با $(a/۲)\sin\theta$ خواهد بود.

این تحلیل را برای هر جفت پرتو واقع در نقطه‌های متناظر در دو ناحیه (مثلاً در وسط دو ناحیه) که تا نقطهٔ P_1 ادامه دارد می‌توان تکرار کرد. هر جفت پرتو دارای اختلاف راه یکسان $(a/۲)\sin\theta$ خواهد بود. با قراردادن این اختلاف راه مشترک برابر با $\lambda/۲$ (شرط برای فریز تاریک اول)، خواهیم داشت

$$\frac{a}{۲}\sin\theta=\frac{\lambda}{۲}$$

که به دست می‌دهد

$$a\sin\theta=\lambda \qquad \text{(کمینهٔ اول)} \qquad (۳۶\text{-}۱)$$

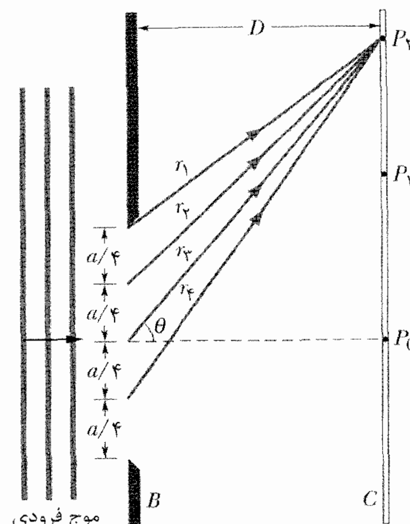
با معلوم بودن پهنای a و طول موج λ، از معادلهٔ ۳۶-۱ زاویهٔ θ فریز تاریک اول در بالا (و بنا به تقارن) در پایین محور مرکزی معلوم می‌شود.

توجه کنید که اگر از $a>\lambda$ شروع کنیم و سپس در حالی که طول موج ثابت است شکاف را باریک کنیم، زاویه‌ای که با آن فریز تاریک اول دیده می‌شود افزایش می‌یابد؛ یعنی با شکاف *باریکتر* پراش *بیشتر* (بیشترشدن پهن شدگی و پهنای نقش) است. وقتی پهنای شکاف را تا طول موج کاهش دهیم (یعنی $a=\lambda$)، زاویهٔ فریزهای تاریک اول ۹۰° می‌شود. چون فریزهای تاریک اول دو لبهٔ فریز روشن مرکزی را نشان می‌دهد، این فریز روشن باید تمام صفحهٔ مشاهده را بپوشاند.

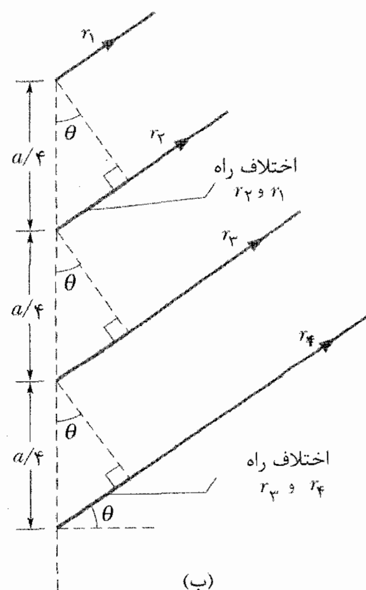
فریزهای تاریک دوم بالا و پایین محور مرکزی را به همان روش فریزهای تاریک اول پیدا می‌کنیم، ولی در این حالت شکاف را به *چهار* ناحیه با پهنای مساوی $a/۴$، همانطور که در شکل ۳۶-۶ الف نشان داده شده است، تقسیم می‌کنیم. حال پرتوهای r_1، $r_۲$، $r_۳$ و $r_۴$ را از نقطه‌های بالایی این ناحیه‌ها تا نقطهٔ $P_۲$ محل فریز تاریک دوم بالای محور مرکزی امتداد می‌دهیم. برای ایجاد این فریز، اختلاف راه بین r_1 و $r_۲$، بین $r_۲$ و $r_۳$ و بین $r_۳$ و $r_۴$ همه باید برابر با $\lambda/۲$ باشد.

برای $D\gg a$، این چهار پرتو را با زاویهٔ θ نسبت به محور مرکزی تقریباً می‌توان موازی در نظر گرفت. برای نمایش اختلاف راه آنها، همانطور که در شکل ۳۶-۶ ب نشان داده شده است، خط عمودی برای جفت پرتو مجاور رسم می‌کنیم تا مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای حاصل شوند که یکی از ضلعهای آنها این

اختلاف راه است. از مثلث قائم الزاویهٔ بالا می‌توان دید که اختلاف راه بین r_1 و r_2 برابر $(a/۴)\sin\theta$ است. به همین ترتیب از مثلث پایینی، اختلاف راه بین r_3 و r_4 نیز $(a/۴)\sin\theta$ است. در واقع اختلاف راه برای هر دو پرتوی که



(الف)



(ب)

شکل ۳۶-۶ (الف) موجهای حاصل از نقطه‌های بالایی چهار ناحیه با پهنای $a/۴$ در نقطهٔ P_2 تداخل ویرانگر دارند. (ب) برای $D>>a$، با زاویهٔ θ نسبت به محور مرکزی، پرتوهای r_1، r_2، r_3 و r_4 را تقریباً می‌توان موازی در نظر گرفت.

از نقطه‌های متناظر در دو ناحیه مجاور سرچشمه می‌گیرند عبارت است از $(a/۴)\sin\theta$. چون در هر مورد اختلاف راه برابر است با $\lambda/۲$، خواهیم داشت

$$\frac{a}{۴}\sin\theta = \frac{\lambda}{۲}$$

که به دست می‌دهد

$$a\sin\theta = ۲\lambda \quad \text{(کمینهٔ دوم)} \quad (۳۶\text{-}۲)$$

حال با تقسیم شکاف به ناحیه‌های بیشتر با پهنای مساوی می‌توان یافتن محل فریزهای تاریک را در نقش پراش ادامه داد. همیشه می‌توان جفت ناحیه‌هایی را پیدا کرد که این ناحیه‌ها (و موجهای آنها) مانند قبل با هم جفت باشند. می‌توان دریافت که فریزهای تاریک بالا و پایین محور مرکزی در مکانهایی واقع‌اند که با معادلهٔ عمومی زیر داده می‌شوند

$$a\sin\theta = m\lambda \;,\; m = ۱,۲,۳,\ldots \quad \text{(فریزهای تاریک کمینه)به ازای} \quad (۳۶\text{-}۳)$$

یادآوری می‌شود که این نتیجه به روش زیر نیز به دست می‌آید. مثلثی مانند یکی از مثلثهای شکل ۳۶-۴ ب رسم کنید که یک ضلع آن پهنای شکاف a باشد، توجه کنید که اختلاف راه بین پرتوهای بالا و پایین برابر با $a\sin\theta$ است. پس از معادلهٔ ۳۶-۳ خواهیم داشت

☜ در آزمایش پراش یک شکاف، هرگاه اختلاف راه $(a\sin\theta)$ بین پرتوهای بالا و پایین برابر با λ، ۲λ، ۳λ و ... باشد، فریزهای تاریک ایجاد می‌شوند.

این ممکن است نادرست به نظر آید، چون موجهای این دو پرتو خاص وقتی اختلاف راه آنها مضرب صحیحی از طول موج باشد، با یکدیگر دقیقاً همفازند. ولی، اینها هنوز بخشی از یک جفت موجی هستند که با یکدیگر دقیقاً ناهمفاز هستند؛ بنابراین، هر موج توسط موج دیگر حذف می‌شود که به تاریک بودن می‌انجامد.

معادله‌های ۳۶-۱ و ۳۶-۲ را با فرض $D\gg a$ به دست آوردیم. ولی، اگر عدسی همگرایی بین شکاف و صفحهٔ مشاهده قرار دهیم و سپس صفحه را به محل صفحهٔ کانونی عدسی منتقل کنیم، بازهم این معادله‌ها برقرارند. عدسی تضمین می‌کند که پرتوهایی که اکنون از شکاف به هر نقطه‌ای از صفحه می‌رسند *دقیقاً* (به جای تقریباً) موازی هستند. اینها شبیه پرتوهای در آغاز موازی شکل ۳۴-۱۵ الف هستند که با یک عدسی همگرا به سمت نقطهٔ کانونی هدایت می‌شوند.

✔ ***نکتهٔ وارسی ۱*** با استفاده از یک شکاف باریک بلند که توسط نور آبی روشن می‌شود نقش پراشی ایجاد می‌کنیم. اگر (الف) نور زرد باشد یا (ب) پهنای شکاف کاهش یابد، آیا نقش از مرکز روشن گسترده می‌شود (بیشینه‌ها و کمینه‌ها از مرکز دور می‌شوند) یا به طرف آن متراکم می‌شود؟

مسئلهٔ نمونه ۳۶-۱

شکافی با پهنای a با نور سفید روشن شده است.

(الف) به ازای چه مقداری از a اولین کمینه برای نور قرمز با طول موج $\lambda = ۶۵۰\,\text{nm}$ در زاویهٔ $\theta = ۱۵^\circ$ تشکیل خواهد شد؟

نکتهٔ کلیدی پراش به طور جداگانه برای هر طول موج در گسترهٔ طول موجهایی که از شکاف می‌گذرند رخ می‌دهد، که مکان کمینه‌ها برای هر طول موج با معادلهٔ ۳۶-۳ ($a\sin\theta = m\lambda$) داده می‌شود.

محاسبه‌ها: وقتی $m = ۱$ قرار داده شود (در مورد اولین کمینه) و مقدارهای معلوم θ و λ جاگذاری شوند، از معادلهٔ ۳۶-۳ خواهیم داشت

$$a = \frac{m\lambda}{\sin\theta} = \frac{(۱)(۶۵۰\,\text{nm})}{\sin ۱۵°} = ۲۵۱۱\,\text{nm} \approx ۲/۵\,\mu\text{m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

برای اینکه نور فرودی بیشتر پهن شود ($±۱۵°$ برای اولین کمینه) شکاف باید خیلی ظریف — در این مورد، فقط چهار برابر طول موج باشد. جهت مقایسه، توجه کنید که قطر موی انسان تقریباً $۱۰۰\mu\text{m}$ است.

(ب) طول موج λ' نوری که اولین بیشینهٔ کناری پراش آن در زاویهٔ $۱۵°$، یعنی بر کمینهٔ اول نور قرمز منطبق باشد، چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی برای هر طول موجی اولین بیشینهٔ کناری تقریباً وسط اولین و دومین کمینه برای آن طول موج قرار دارد.

محاسبه‌ها: مکان اولین و دومین کمینه با قرار دادن به ترتیب $m = ۱$ و $m = ۲$ در معادلهٔ ۳۶-۳ معلوم می‌شود. بنابراین، مکان اولین بیشینهٔ کناری تقریباً با قرار دادن $m = ۱/۵$ به دست می‌آید. پس معادلهٔ ۳۶-۳ خواهد شد

$$a\sin\theta = ۱/۵\lambda'$$

از حل آن برحسب λ' و قرار دادن داده‌های معلوم خواهیم داشت

$$\lambda' = \frac{a\sin\theta}{۱/۵} = \frac{(۲۵۱۱\,\text{nm})(\sin ۱۵°)}{۱/۵} = ۴۳۰\,\text{nm} \qquad \text{(پاسخ)}$$

نور با این طول موج بنفش است. اولین بیشینهٔ کناری برای نور با طول موج $۴۳۰\,\text{nm}$ صرفنظر از پهنای شکاف همیشه بر اولین کمینه برای نور با طول موج $۶۵۰\,\text{nm}$ منطبق است. البته، زاویهٔ θ که این همپوشانی برای آن رخ می‌دهد به پهنای شکاف بستگی دارد. اگر شکاف نسبتاً باریک باشد، زاویه نسبتاً بزرگ خواهد بود و برعکس.

۳۶-۴ شدت پراش تک شکاف، به طور کیفی

در بخش ۳۶-۳ دیدیم که چگونه می‌توان محل کمینه‌ها و بیشینه‌ها را در نقش پراش تک شکاف به دست آورد. اکنون موضوع کلیتری را مطرح می‌کنیم: می‌خواهیم عبارتی را برای شدت I نقش پراش برحسب تابعی از θ، زاویهٔ محل یک نقطه روی صفحهٔ مشاهده به دست آوریم.

برای انجام این کار، شکاف شکل ۳۶-۴ را به N ناحیه با پهنای مساوی Δx آنچنان کوچک تقسیم می‌کنیم که بتوان هر ناحیه را به صورتی فرض کرد که مانند یک چشمهٔ موجکهای هویگنس عمل کند. می‌خواهیم موجکهایی را که به هر نقطهٔ P روی صفحهٔ مشاهده با زاویهٔ θ نسبت به محور مرکزی می‌رسند برهم نهیم تا بتوان دامنهٔ E_θ مؤلفهٔ الکتریکی موج برایند در P را تعیین کرد. در این صورت، شدت نور در P متناسب با مربع این دامنه خواهد بود.

برای پیداکردن E_θ، به رابطه‌های فازی میان موجکهایی که به آن نقطه می‌رسند نیاز داریم. اختلاف فاز بین موجکهای ناحیه‌های مجاور با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$(\text{اختلاف فاز}) = \left(\frac{۲\pi}{\lambda}\right)(\text{اختلاف راه})$$

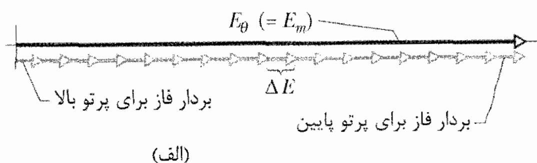
برای نقطهٔ P با زاویهٔ θ، اختلاف راه بین موجکهای حاصل از ناحیه‌های مجاور $\Delta x\sin\theta$ است؛ پس، اختلاف فاز $\Delta\phi$ بین موجکهای حاصل از ناحیه‌های مجاور عبارت است از

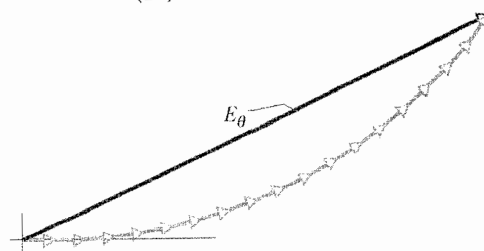
$$\Delta\phi = \left(\frac{۲\pi}{\lambda}\right)(\Delta x\sin\theta) \qquad (۳۶\text{-}۴)$$

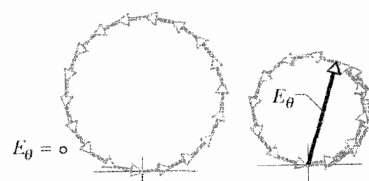
فرض می‌کنیم که موجکهایی که به P می‌رسند همه دارای دامنهٔ یکسان ΔE باشند. برای یافتن دامنهٔ E_θ موج برایند در P، دامنه‌های ΔE فازنماها را با هم جمع می‌کنیم. برای این کار، نموداری از N فازنما رسم می‌کنیم که هر یک متناظر با موجکی است که از یک ناحیه در شکاف حاصل شده است.

در مورد نقطهٔ P_0 در $\theta = ۰$ روی محور مرکزی شکل ۳۶-۴، از معادلهٔ ۳۶-۴ معلوم است که اختلاف فاز $\Delta\phi$ بین موجکها صفر است؛ یعنی تمام موجکها همفاز به آن نقطه می‌رسند. شکل ۳۶-۷ الف مربوط به نمودار فازنماست؛ فازنماهای مجاور، موجکهای حاصل از ناحیه‌های مجاور را نمایش می‌دهند که به صورت اتصال نوک یکی به مبداء دیگری ترتیب یافته‌اند. چون بین موجکها اختلاف فاز صفر است، زاویهٔ بین هر جفت از فازنماهای مجاور صفر است. دامنهٔ E_θ موج خالص در P_0 عبارت است از جمع برداری این فازنماها. این ترتیب فازنماها بیشترین مقدار را برای دامنهٔ E_θ به دست می‌دهد. این مقدار را E_m می‌نامیم، یعنی E_m مقدار E_θ به‌ازای $\theta = ۰$ است.

سپس نقطهٔ P را در نظر می‌گیریم که در زاویهٔ کوچک θ نسبت به محور مرکزی قرار دارد. از معادلهٔ ۳۶-۴ پیداست که اختلاف فاز $\Delta\phi$ بین موجکهای حاصل از ناحیه‌های مجاور دیگر صفر نیست. شکل ۳۶-۷ ب نمودار بردار فاز مربوط را نشان می‌دهد؛ مانند قبل، بردارهای فاز به صورت اتصال انتهای آنها به مبداء دیگری ترتیب یافته‌اند، ولی این بار بین بردارهای فاز مجاور اختلاف فاز $\Delta\phi$ وجود دارد. دامنهٔ E_θ در این نقطه جدید هنوز هم عبارت است از جمع برداری فازنماها، ولی کوچکتر از مورد شکل ۳۶-۷ الف است، و این بدان معناست که شدت نور در این نقطهٔ جدید P کمتر از مقدار آن در نقطهٔ P_0 است.







شکل ۳۶-۷ نمودار بردار فاز برای $N=18$ بردار فاز، متناظر با تقسیم یک شکاف به ۱۸ ناحیه. دامنه‌های برایند E_θ برای (الف) بیشینهٔ مرکزی در $\theta=0$، (ب) نقطه‌ای واقع روی صفحه که با زاویهٔ کوچک θ نسبت به محور مرکزی قرار دارد، (پ) اولین کمینه و (ت) اولین بیشینهٔ کناری.

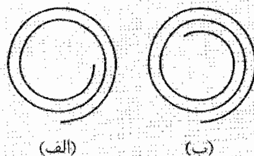
اگر به افزایش θ ادامه دهیم، زاویهٔ $\Delta\phi$ بین فازنماهای مجاور افزایش می‌یابد، و سرانجام زنجیرهٔ فازنماها به طور کامل دور می‌زند به طوری که انتهای فازنمای آخر درست به ابتدای فازنمای اول می‌رسد (شکل ۳۶-۷ پ). بزرگی دامنهٔ E_θ اکنون صفر است، که بدان معناست که شدت نور نیز صفر است. یعنی به اولین کمینه یا فریز تاریک در نقش پراش رسیده‌ایم. اختلاف فاز اولین فازنما و آخرین فازنما 2πrad است، و این بدان معناست که اختلاف راه بین پرتوهای بالا و پایین که از شکاف می‌گذرند برابر با یک طول موج است. به خاطر بیاورید که این وضعیتی است که برای اولین کمینهٔ پراش به دست آوردیم.

اگر هم‌چنان به افزایش θ ادامه دهیم، زاویهٔ $\Delta\phi$ بین فازنماهای مجاور افزایش می‌یابد، و زنجیرهٔ فازنماها شروع به پیچیدن به دور خود می‌کند، و حلقهٔ حاصل کوچک می‌شود. اکنون دامنهٔ E_θ افزایش می‌یابد تا اینکه به یک مقدار بیشینه در آرایش نشان داده شده در شکل ۳۶-۷ ت برسد. این آرایش با اولین بیشینهٔ کناری در نقش پراش متناظر است.

اگر θ را اندکی بیشتر افزایش دهیم، کوچک شدن حلقه، E_θ را کاهش می‌دهد، که بدان معناست که شدت نیز کاهش می‌یابد. وقتی θ به اندازهٔ کافی افزایش یابد، انتهای آخرین بردار فاز دوباره به ابتدای اولین بردار فاز می‌رسد. در این موقع به دومین کمینه رسیده‌ایم.

این روش کیفی را برای تعیین بیشینه‌ها و کمینه‌های نقش پراش می‌توان ادامه داد. اکنون به یک روش کمی برمی‌گردیم.

✔ نکتهٔ وارسی ۲۱ این شکلها نمودارهای بردار فاز را به صورت هموارتری از شکل ۳۶-۶ (با بردارهای فاز بیشتر) نشان می‌دهد، که نمودارهای بردار فاز برای نقطه‌هایی در دو طرف یک بیشینهٔ معین پراش است. (الف) این کدام بیشینه است؟ (ب) مقدار تقریبی m (در معادلهٔ ۳۶-۳) مربوط به این بیشینه چند است؟



۳۶-۵ شدت در پراش تک شکاف، به طور کمی

معادلهٔ ۳۶-۳ نشان می‌دهد که چگونه می‌توان کمینه‌های نقش پراش تک شکاف را روی صفحهٔ مشاهدهٔ C شکل ۳۶-۴ بر حسب تابعی از زاویهٔ θ در این شکل مشخص کرد. در اینجا می‌خواهیم عبارتی را برای شدت $I(\theta)$ این نقش بر حسب تابعی از θ به دست آوریم. در زیر ثابت خواهیم کرد که شدت با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$I(\theta)=I_m\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \qquad (۳۶-۵)$$

که

$$\alpha=\frac{1}{2}\phi=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta \qquad (۳۶-۶)$$

نماد α فقط برای ارتباط مناسب بین زاویهٔ θ که محل نقطه را روی صفحهٔ مشاهده مشخص می‌کند و شدت نور $I(\theta)$ در آن نقطه است. I_m بیشترین مقدار شدت $I(\theta)$ در نقش است و در بیشینهٔ مرکزی (که برای آن $\theta=0$ است) رخ می‌دهد، و ϕ اختلاف فاز (بر حسب رادیان) بین پرتوهای بالایی و پایینی از شکاف با پهنای a است.

مطالعهٔ معادلهٔ ۳۶-۵ نشان می‌دهد که کمینه‌های شدت وقتی پیش می‌آیند که داشته باشیم

$$\alpha=m\pi\ ,\quad \text{به ازای}\ m=1,2,3,\ldots \qquad (۳۶-۷)$$

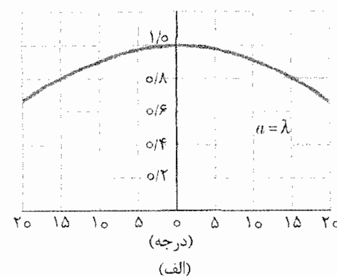
اگر این نتیجه را در معادلهٔ ۳۶-۶ قرار دهیم، خواهیم داشت

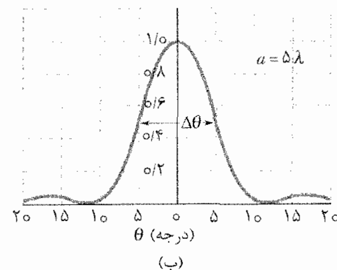
$$m\pi=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\ ,\quad \text{به ازای}\ m=1,2,3,\ldots$$

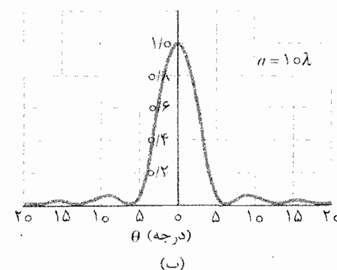
یا

$$a\sin\theta=m\lambda\ ,\ \text{به ازای}\ m=1,2,3,\ldots \quad \text{(کمینه‌ها-فریزهای تاریک)} \qquad (۳۶-۸)$$

که دقیقاً معادلهٔ ۳۶-۳ است، همان عبارتی که برای مکان کمینه‌ها قبلاً به دست آوردیم.





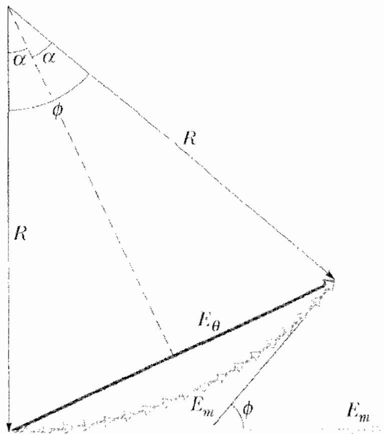


شکل ۳۶-۸ شدت نسبی در پراش تک شکاف به ازای سه مقدار برای نسبت a/λ . پهنتر شدن شکاف باعث باریک شدن بیشینهٔ پراش مرکزی می‌شود.

شکل ۳۶-۸ نمودارهای شدت نقش پراش تک شکاف را نشان می‌دهد که به کمک معادله‌های ۳۶-۵ و ۳۶-۶ به ازای سه پهنای شکاف $a=\lambda$ ، $a=5\lambda$ و $a=10\lambda$ محاسبه شده‌اند. توجه کنید که با افزایش پهنای شکاف (نسبت به طول موج)، پهنای *بیشینهٔ مرکزی پراش* (ناحیهٔ مرکزی تپه‌ای شکل نمودارها) کاهش می‌یابد؛ یعنی نور توسط شکاف کمتر پخش می‌شود. بیشینه‌های دوم نیز با افزایش پهنای شکاف کاهش می‌یابند (و ضعیف می‌شوند). در حدی که پهنای شکاف a خیلی بزرگتر از λ باشد، بیشینه‌های دوم ناشی از شکاف محو می‌شوند؛ آنگاه دیگر پراش تک شکافی نخواهیم داشت (ولی هنوز پراش ناشی از لبه‌های شکاف پهن وجود دارند، که مانند پراشی است که به وسیلهٔ لبه‌های تیغ در شکل ۳۶-۲ ایجاد شده است).

اثبات معادله‌های ۳۶-۵ و ۳۶-۶

قوس بردارهای فاز شکل ۳۶-۹ موجکهایی را نشان می‌دهد که به یک نقطهٔ اختیاری P روی صفحهٔ مشاهدهٔ شکل ۳۶-۴ می‌رسند، که متناظر با یک زاویهٔ مشخص کوچک θ است. دامنهٔ E_θ موج برایند در P جمع برداری این بردارهای فاز است. اگر شکاف شکل ۳۶-۴ را به ناحیه‌هایی بینهایت کوچک با پهنای Δx تقسیم کنیم، قوس بردارهای فاز شکل ۳۶-۹ به قوسی از دایره نزدیک می‌شود، همانطور که در شکل نشان داده شده است شعاع را با R نشان داده‌ایم. طول قوس باید E_m باشد، که دامنه در مرکز نقش پراش است، زیرا اگر قوس را به صورت خط راست دربیاوریم آرایش بردارهای فاز شکل ۳۶-۷ الف به دست می‌آید (در شکل ۳۶-۹ به صورت کمرنگ نشان داده شده است).



شکل ۳۶-۹ ساختار مورد استفاده برای محاسبهٔ شدت در پراش یک شکاف. وضعیت نشان داده شده مطابق با شکل ۳۶-۷ ب است.

زاویهٔ ϕ در قسمت پایین شکل ۳۶-۹ اختلاف فاز بین بردارهای بینهایت کوچک در دو انتهای چپ و راست قوس E_m است. از هندسهٔ شکل معلوم است که ϕ زاویهٔ بین دو شعاع R در شکل ۳۶-۸ است. خط‌چین در این شکل ϕ را نصف می‌کند، بنابراین دو مثلث متساوی‌الساقین درست می‌شود. از هر کدام از مثلثها می‌توان نوشت

$$\sin\frac{1}{2}\phi=\frac{E_\theta}{2R} \qquad (۳۶\text{-}۹)$$

ϕ برحسب رادیان (با در نظر گرفتن E_m به صورت قوس دایره) عبارت است از

$$\phi=\frac{E_m}{R}$$

با حل این معادله برحسب R و قراردادن در معادلهٔ ۳۶-۹ خواهیم داشت

$$E_\theta=\frac{E_m}{\frac{1}{2}\phi}\sin\frac{1}{2}\phi \qquad (۳۶\text{-}۱۰)$$

در بخش ۲۹-۵ (جلد دوم) دیدیم که شدت یک موج الکترومغناطیسی با مربع دامنهٔ میدان الکتریکی آن متناسب است. در اینجا این بدان معناست که شدت I_m (که در مرکز نقش پراش پیش می‌آید) با E_m^2 و شدت $I(\theta)$ در زاویهٔ θ با E_θ^2 متناسب است. بنابراین، می‌توان نوشت

$$\frac{I(\theta)}{I_m} = \frac{E_\theta^2}{E_m^2} \qquad (۳۶-۱۱)$$

با قراردادن E_θ با معادلهٔ ۳۶-۱۰ و سپس با قراردادن $\alpha = \frac{1}{2}\phi$، در معادلهٔ شدت برحسب تابعی از θ به عبارت زیر می‌رسیم

$$I(\theta) = I_m \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

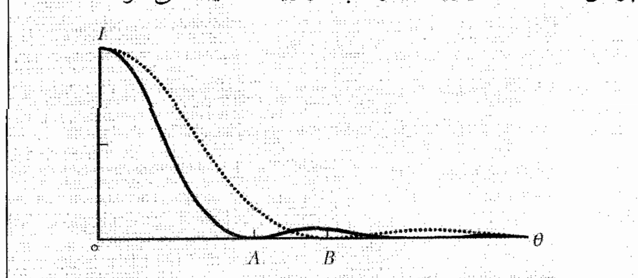
این دقیقاً معادلهٔ ۳۶-۵ است، یکی از دو معادله‌ای که می‌خواستیم ثابت کنیم.

معادلهٔ دومی که می‌خواهیم ثابت کنیم α را به θ مرتبط می‌کند. اختلاف فاز ϕ بین پرتوهای حاصل از بالا و پایین کل شکاف را می‌توان با معادلهٔ ۳۶-۴ به اختلاف راه مرتبط کرد؛ داریم

$$\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(a\sin\theta)$$

که a مجموع پهناهای Δx ناحیه‌های بینهایت کوچک است. ولی، $\phi = 2\alpha$، پس این معادله به معادلهٔ ۳۶-۶ تبدیل می‌شود.

نکتهٔ وارسی ۳ دو طول موج ۶۵۰nm و ۴۳۰nm به طور جداگانه در آزمایش پراش تک شکاف به کار برده شده‌اند. این شکل نتایج را به صورت نمودار شدت I برحسب زاویهٔ θ برای دو نقش پراش نشان می‌دهد. اگر این دو طول موج به طور همزمان مورد استفاده قرار گیرند، چه رنگی در نقش مرکب پراش در (الف) زاویهٔ A و (ب) زاویهٔ B دیده می‌شود؟



مسئلهٔ نمونهٔ ۳۶-۲

شدتهای نخستین سه بیشینهٔ ثانوی (بیشینه‌های کناری) را برحسب شدت بیشینهٔ مرکزی در نقش پراش تک شکاف شکل ۳۶-۱ پیدا کنید.

نکتهٔ کلیدی بیشینه‌های ثانوی تقریباً در وسط کمینه‌ها قرار دارند که وضعیت زاویه‌ای آنها با معادلهٔ ۳۶-۷ ($\alpha = m\pi$) داده می‌شود. پس مکان بیشینه‌های ثانوی (تقریباً) با این رابطه داده می‌شود

$$\alpha = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad , \quad m = 1, 2, 3, \ldots \text{ به ازای}$$

که α برحسب رادیان است. می‌توانیم شدت I در هر نقطه در نقش پراش را از طریق معادلهٔ ۳۶-۵ به شدت بیشینهٔ مرکزی I_m ارتباط دهیم.

محاسبه‌ها: بنابراین، مقدارهای تقریبی α در مورد بیشینهٔ ثانوی را در معادلهٔ ۳۶-۵ قرار می‌دهیم تا شدت نسبی در این بیشینه‌ها به دست آید. خواهیم داشت

$$\frac{I}{I_m} = \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)^2 , m = 1, 2, 3, \ldots \text{ به ازای}$$

اولین بیشینهٔ ثانوی به ازای $m = 1$ رخ می‌دهد، و شدت نسبی آن عبارت است از

$$\frac{I_1}{I_m} = \left(\frac{\sin\left(1+\frac{1}{2}\right)\pi}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)^2 = \left(\frac{\sin 1/5\pi}{1/5\pi}\right)^2$$

$$= 4/50 \times 10^{-2} \approx \%4/5 \qquad \text{(پاسخ)}$$

به ازای $m = 2$ و $m = 3$ خواهیم داشت

$$\frac{I_2}{I_m} = \%1/6 \text{ و } \frac{I_3}{I_m} = \%0/83 \qquad \text{(پاسخ)}$$

بیشینه‌های ثانوی متوالی برحسب شدت به سرعت کاهش می‌یابند. شکل ۳۶-۱ با نوردهی زیاد نمایان شده است.

۳۶-۶ پراش توسط یک روزنهٔ دایره‌ای

در اینجا پراش توسط یک روزنه دایره‌ای - یعنی یک گشودگی دایره‌ای، مانند یک عدسی- را درنظر می‌گیریم که نور می‌تواند از آن عبور کند. شکل ۳۶-۱۰ تصویر تشکیل شده از یک چشمهٔ نور نقطه‌ای دور (مثلاً یک ستاره) را روی یک فیلم عکاسی واقع در صفحهٔ کانونی یک عدسی همگرا نشان می‌دهد. این تصویر مانند آنچه که در نورشناسی هندسی در نظر گرفته می‌شود، یک نقطه نیست، بلکه یک قرص دایره‌ای است که با حلقه‌های ثانوی بتدریج ضعیفتر متوالی احاطه شده است. مقایسه با شکل ۳۶-۱ اندک تردیدی باقی نمی‌گذارد که با یک پدیدهٔ پراش رو به رو هستیم. ولی در اینجا روزنه به جای یک شکاف مستطیل شکل، دایره‌ای به قطر d است.

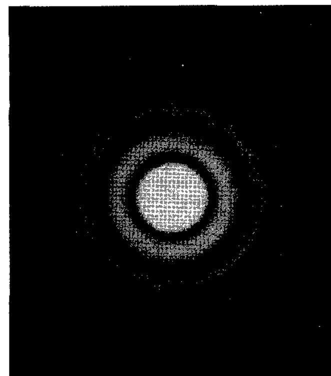
تحلیل (پیچیدهٔ) چنین نقشهایی نشان می‌دهد که اولین کمینه‌ها برای نقش پراش یک روزنهٔ دایره‌ای به قطر d در جایی واقع است که با این رابطه داده می‌شود

$$\sin\theta = 1/22\frac{\lambda}{d} \qquad \text{(اولین کمینه، روزنهٔ دایره‌ای)} \quad (۳۶-۱۲)$$

زاویهٔ θ در اینجا زاویه از محور مرکزی تا نقطه‌ای روی آن کمینه (دایره‌ای) است. با مقایسه با معادلهٔ ۳۶-۱،

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a} \qquad \text{(تک شکاف، اولین کمینه)} \quad (۳۶-۱۳)$$

که محل کمینهٔ اول را برای یک شکاف باریک دراز با پهنای a به دست می‌دهد. اختلاف اصلی ضریب ۱/۲۲ است که به علت شکل دایره‌ای روزنه وارد می‌شود.



شکل ۳۶-۱۰ نقش پراش یک روزنهٔ دایره‌ای. به بیشینهٔ مرکزی و بیشینه‌های دایره‌ای ثانوی توجه کنید. در این شکل بیشینه‌های ثانوی که شدت آنها خیلی کمتر از بیشینهٔ مرکزی است با نوردهی زیاد نمایان شده‌اند.

تفکیک پذیری

این واقعیت که تصویرهای عدسی نقشهای پراش هستند زمانی اهمیت پیدا می‌کند که بخواهیم دو جسم نقطه‌ای دور را که فاصلهٔ زاویه‌ای آنها کوچک است از یکدیگر *تفکیک* (متمایز) کنیم. شکل ۳۶-۱۱، ظاهر دیداری و نقش شدت متناظر دو جسم نقطه‌ای دور (مانند ستاره‌ها) را با فاصلهٔ زاویه‌ای کوچک، در سه حالت مختلف نشان می‌دهد. در شکل ۳۶-۱۱ الف این اجسام به علت پراش تفکیک نشده‌اند؛ یعنی نقشهای پراش آنها (به طور عمده بیشینهٔ مرکزی آنها) چنان همپوشانی کرده‌اند که دو جسم از یک جسم نقطه‌ای تنها نمی‌تواند متمایز شود. در شکل ۳۶-۱۱ ب این اجسام به زحمت از یکدیگر تفکیک شده‌اند و در شکل ۳۶-۱۱ پ آنها کاملاً از هم تفکیک شده‌اند.

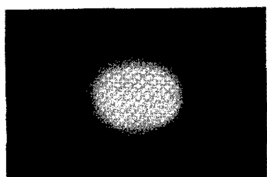
در شکل ۳۶-۱۱ ب فاصلهٔ زاویه‌ای دو چشمهٔ نقطه‌ای به صورتی است که بیشینهٔ مرکزی نقش پراش یک چشمه روی اولین کمینهٔ نقش پراش دیگری قرار گرفته است، این شرط را **معیار ریلی** برای تفکیک‌پذیری می‌گویند. از معادلهٔ ۳۶-۱۲، دو جسمی که توسط این معیار به زحمت تفکیک‌پذیرند باید دارای فاصلهٔ زاویه‌ای θ_R زیر باشند

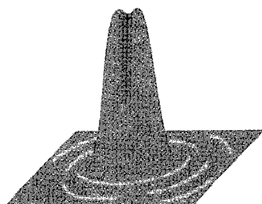
$$\theta_R = \sin^{-1}\frac{1/22\lambda}{d}$$

چون زاویه‌ها کوچک‌اند، به جای $\sin\theta_R$، می‌توان θ_R را بر حسب رادیان قرار داد.

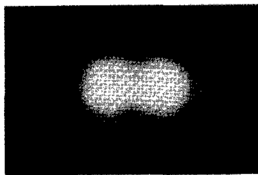
$$\theta_R = 1/22\frac{\lambda}{d} \quad \text{(معیار ریلی)} \qquad (۳۶-۱۴)$$

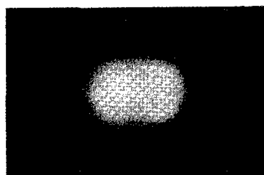
اعمال معیار ریلی برای تفکیک‌پذیری برای دید انسان فقط یک تقریب است. چون تفکیک‌پذیری **دیداری** به عوامل زیادی مانند روشنایی نسبی چشمه‌ها و اطراف آنها، آشفتگی هوای بین چشمه‌ها و ناظر و عملکرد دستگاه بینایی ناظر بستگی دارد.

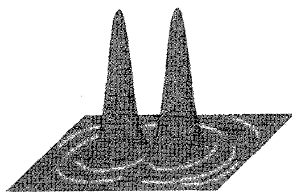


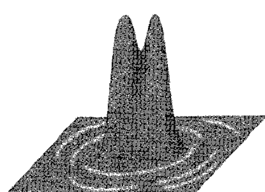


(الف)



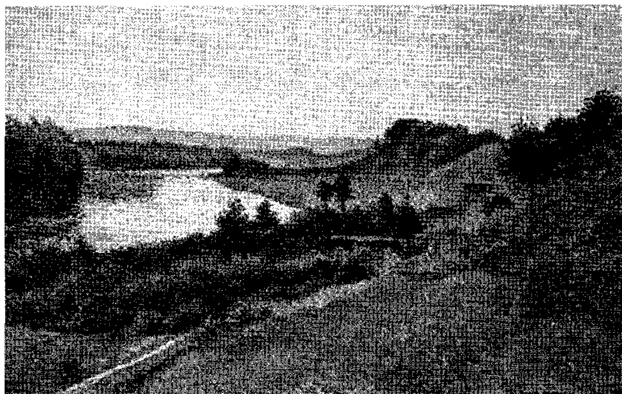






(پ) (ب)

شکل ۳۶-۱۱ در بالا، تصویرهای دو چشمهٔ نقطه‌ای (ستارگان) که توسط یک عدسی همگرا تشکیل شده است. در زیر، نمایشی از شدتهای تصویر. در (الف) فاصلهٔ زاویه‌ای چشمه‌ها به اندازه‌ای کوچک است که قابل تمایز نیستند، در (ب) اینها به طور جزیی قابل تمیزند و در (پ) اینها به وضوح متمایز شده‌اند. معیار ریلی در (ب) از انطباق بیشینهٔ مرکزی یک نقش پراش بر اولین کمینهٔ نقش دیگر حاصل شده است.



شکل ۳۶-۱۲ این نقاشی نقطه به نقطه که کاری از ماکسیمیلین لوس است مرکب از هزاران نقطهٔ رنگی است. با نزدیک بودن بیننده به نقاشی، نقطه‌ها و رنگهای واقعی آنها قابل دیدن هستند. در فاصله‌های عادی دید، این نقطه‌ها غیر قابل تفکیک و بنابراین مخلوط‌اند.

نتایج تجربی نشان می‌دهند که حداقل فاصلهٔ زاویه‌ای که توسط انسان به واقع می‌تواند تفکیک شود معمولاً قدری بیشتر از مقداری است که با معادلهٔ ۳۶-۱۴ داده می‌شود. با وجود این، جهت محاسبه در اینجا، معادلهٔ ۳۶-۱۴ را یک معیار دقیق در نظر خواهیم گرفت. اگر فاصلهٔ زاویه‌ای θ بین چشمه‌ها بیشتر از θ_R باشد، چشمه‌ها را می‌توانیم از نظر دیداری تفکیک کنیم؛ اگر کمتر باشد نمی‌توانیم.

معیار ریلی می‌تواند توهمهای مربوط به رنگ در نقاشی به سبک نقطه به نقطه را توضیح دهد (شکل ۳۶-۱۲). در این سبک، نقاشی نه با ضربه‌های قلم‌مو به روش معمول بلکه با تعداد بی‌شماری از نقطه‌های رنگی کوچک ایجاد می‌شود. یک جنبهٔ مجذوب کنندهٔ نقاشی نقطه به نقطه این است که هرگاه فاصلهٔ خود را نسبت به آن تغییر دهید، رنگها به طرزی ماهرانه و تقریباً ناخودآگاه جابه‌جا می‌شوند. این جابه‌جایی رنگ بسته به اینکه تا چه اندازه بتوانید نقطه‌های رنگی را تفکیک کنید صورت می‌پذیرد. وقتی به اندازهٔ کافی نزدیک نقاشی بایستید، فاصله‌های زاویه‌ای θ نقطه‌های نزدیک بیشتر از θ_R هستند و در نتیجه نقطه‌ها به طور انفرادی دیده می‌شوند. رنگهای اینها رنگهای واقعی هستند که در نقاشی به کار رفته است. ولی، وقتی در فاصله به اندازهٔ کافی دور از نقاشی بایستید، فاصله‌های زاویه‌ای کمتر از θ_R هستند و نقطه‌ها به طور انفرادی نمی‌توانند دیده شوند. رنگهای مخلوط شدهٔ نهایی از گروهی از نقطه‌ها به چشمان شما می‌رسند که موجب می‌شود مغز شما یک رنگ – رنگی را که ممکن است در واقع در گروه وجود نداشته باشد برای آن گروه «بسازد». با این روش، نقاش نقطه به نقطه دستگاه بینایی شما را به کار می‌گیرد تا رنگهایی هنری به وجود آورید.

وقتی بخواهیم از عدسی به جای دستگاه بینایی برای تفکیک اجسام با فاصلهٔ زاویه‌ای کوچک استفاده کنیم، بهتر این است که نقش پراش را تا حد امکان کوچک کنیم. بنابر معادلهٔ ۳۶-۱۴، با افزایش قطر عدسی یا با استفاده از نور با طول موج کوتاهتر می‌توان این کار را انجام داد. به این دلیل اغلب از نور فرابنفش در میکروسکوپها استفاده می‌شود؛ زیرا به علت کوتاه بودن طول موج آن، امکان بررسی جزئیات ظریفتر با آن نسبت به میکروسکوپی که با نور مرئی کار می‌کند بیشتر است.

نکتهٔ وارسی ۴ فرض کنید که به علت پراش توسط مردمک چشم خود دو نقطهٔ قرمز را به زحمت بتوانید تفکیک کنید. اگر روشنایی عادی اطراف شما افزایش یابد به طوری که قطر مردمک چشم شما کم شود، آیا تفکیک‌پذیری نقطه‌ها بهبود می‌یابد یا بدتر می‌شود؟ فقط پراش را در نظر بگیرید. (برای امتحان پاسخ خود آزمایش کنید.)

مسئلهٔ نمونه ۳-۳۶

شکل ۳۶-۱۳ الف نمایشی از نقطه‌های رنگی روی نقاشی به روش نقطه به نقطه را نشان می‌دهد. فرض کنید که فاصلهٔ میانگین مرکز به مرکز نقطه‌ها $D = 2.0\ \text{mm}$ باشد. همچنین فرض کنید که قطر مردمک چشم $d = 1.5\ \text{mm}$ و حداقل فاصلهٔ زاویه‌ای بین نقطه‌ها که بتوان آنها را تمیز داد فقط با معیار ریلی داده می‌شود. کمترین فاصله از نقطه‌ها باید چقدر باشد تا نتوان نقطه‌های روی نقاشی را از هم تمیز داد؟

نکته‌های کلیدی هر دو نقطهٔ مجاور را در نظر می‌گیریم که وقتی نزدیک به نقاشی هستیم بتوان آنها را تمیز داد. وقتی از نقاشی دور می‌شویم، تمایز نقطه‌ها ادامه پیدا می‌کند تا اینکه فاصلهٔ زاویه‌ای θ (از نظر دید) به زاویه‌ای کاهش یابد که با معیار ریلی داده می‌شود:

$$\theta_R = 1.22\frac{\lambda}{d} \qquad (36\text{-}15)$$

محاسبه‌ها: شکل ۳۶-۱۳ ب، فاصلهٔ زاویه‌ای θ نقطه‌ها، فاصلهٔ مرکز تا مرکز آنها D و فاصله از آنها L را نشان می‌دهد. چون D/L کوچک است، زاویهٔ θ نیز کوچک است و با تقریب می‌توانیم بنویسیم:

$$\theta = \frac{D}{L} \qquad (36\text{-}16)$$

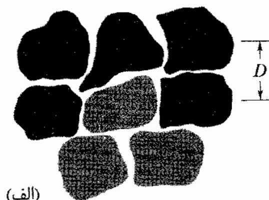
با قرار دادن θ از معادلهٔ ۳۶-۱۶ برابر با θ_R از معادلهٔ ۳۶-۱۵ و حل آن برحسب L خواهیم داشت

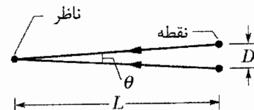
$$L = \frac{Dd}{1.22\lambda} \qquad (36\text{-}17)$$

معادلهٔ ۳۶-۱۷، نشان می‌دهد که L برای λ کوچکتر بزرگتر می‌شود. بنابراین، وقتی از نقاشی دور می‌شویم، نقطه‌های قرمز مجاور (طول موجهای بلند) غیر متمایز می‌شوند پیش از آنکه نقطه‌های مجاور آبی غیر متمایز شوند. برای پیدا کردن کمترین فاصلهٔ L که نقطه‌های رنگی قابل تمیز نباشند، $\lambda = 400\ \text{nm}$ (نور آبی یا بنفش) را در معادلهٔ ۳۶-۱۷ قرار می‌دهیم، داریم

$$L = \frac{(2.0\times10^{-3}\ \text{m})(1.5\times10^{-3}\ \text{m})}{(1.22)(400\times10^{-9}\ \text{m})} = 6.1\ \text{m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

در این فاصله یا بیشتر، رنگی که در هر نقطه روی نقاشی به نظر می‌رسد رنگ مخلوطی است که در واقع ممکن است در آنجا وجود نداشته باشد.





شکل ۳۶-۱۳ (الف) نمایشی از چند نقطه روی یک نقاشی نقطه به نقطه، که فاصلهٔ متوسط مرکز تا مرکز D را نشان می‌دهد. (ب) آرایش فاصلهٔ D بین دو نقطه، فاصلهٔ زاویه‌ای آنها θ و فاصلهٔ دید L.

مسئلهٔ نمونه ۴-۳۶

یک عدسی همگرای دایره‌ای به قطر $d = 32\ \text{mm}$ و فاصلهٔ کانونی $f = 24\ \text{cm}$، تصویرهایی از اجسام نقطه ای دوردست در صفحهٔ کانونی عدسی تشکیل می‌دهد. طول موج $\lambda = 550\ \text{nm}$ است.

(الف) با در نظر گرفتن پراش توسط عدسی، فاصلهٔ زاویه‌ای دو جسم نقطه‌ای دور برای برقراری معیار ریلی چقدر است؟

نکته‌های کلیدی شکل ۳۶-۱۴ دو جسم نقطه‌ای دور P_1 و P_2، عدسی و صفحهٔ مشاهده واقع در صفحهٔ کانونی عدسی را نشان می‌دهد. در سمت راست، نمودارهای شدت نور I برحسب محل روی صفحه برای بیشینهٔ مرکزی تصویرهای تشکیل شده به وسیلهٔ عدسی نیز نشان داده شده است. توجه کنید که فاصلهٔ زاویه‌ای θ_o اجسام با فاصلهٔ زاویه‌ای θ_i تصویرها برابر است. بنابراین، اگر تصویرها در معیار ریلی برای تفکیک‌پذیری صدق کنند، فاصله‌های زاویه‌ای در دو طرف عدسی باید با معادلهٔ ۳۶-۱۴ (با فرض کوچک بودن زاویه‌ها) داده شوند.

محاسبه‌ها: از معادلهٔ ۳۶-۱۴ به دست می‌آوریم

$$\theta_o = \theta_i = \theta_R = 1/22\frac{\lambda}{d}$$

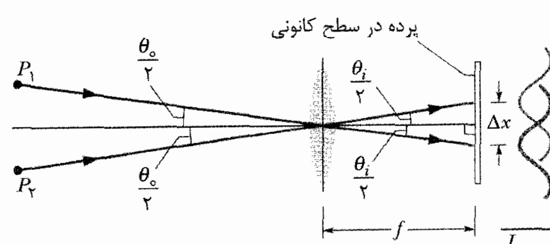
$$= \frac{(1/22)(550\times10^{-9}\ \text{m})}{32\times10^{-3}\ \text{m}} = 2/1\times10^{-5}\ \text{rad} \qquad \text{(پاسخ)}$$

در این فاصلهٔ زاویه‌ای، هر بیشینهٔ مرکزی در دو منحنی شدت شکل ۳۶-۱۴ روی اولیه کمینهٔ منحنی دیگر قرار می‌گیرد.

(ب) فاصلهٔ Δx مرکز *تصویرها* در صفحهٔ کانونی چقدر است؟ (یعنی فاصله قله‌های مرکزی در دو منحنی شدت برحسب مکان چقدر است؟)

محاسبه‌ها: از مثلث بین عدسی و پرده در شکل ۳۶-۱۴، می‌توان دید که $\tan\theta_i/2 = \Delta x/2f$. با ترتیب دوبارهٔ این معادله و تقریب $\tan\theta \approx \theta$ ، خواهیم داشت

$$\Delta x = f\theta_i \qquad (۳۶\text{-}۱۸)$$



شکل ۳۶-۱۴ نور حاصل از دو جسم نقطه‌ای دوردست P_1 و P_2 از یک عدسی همگرا عبور می‌کنند و تصویرهایی روی پردهٔ مشاهده در صفحهٔ کانونی عدسی تشکیل می‌دهند. فقط یک پرتو نمونه از هر جسم نشان داده شده است. این تصویرها نقطه نیستند بلکه نقشهای پراش هستند با شدتهایی که تقریباً در سمت راست رسم شده‌اند. فاصلهٔ زاویه‌ای اجسام θ_o و فاصلهٔ زاویه‌ای تصویرها θ_i است؛ فاصلهٔ بیشینه‌های مرکزی تصویرها Δx است.

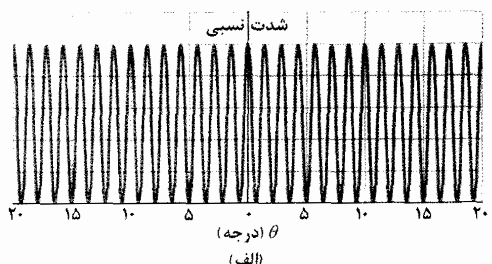
که θ_i برحسب رادیان است. با قراردادن داده‌های معلوم خواهیم داشت

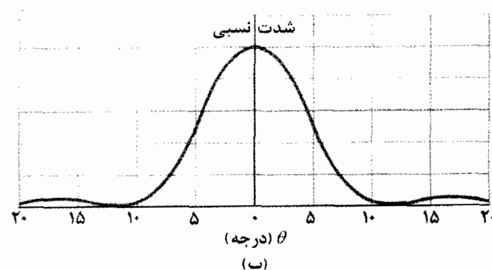
$$\Delta x = (0/24\text{m})(2/1\times10^{-5}\text{rad}) = 5/0\ \mu\text{m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

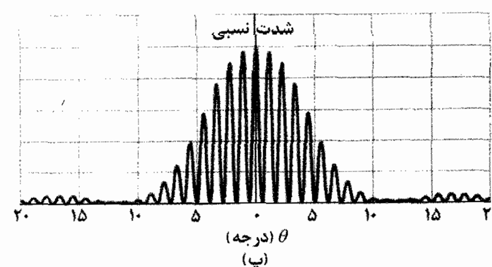
۳۶-۷ پراش با دو شکاف

در آزمایشهای دو شکاف فصل ۳۵، به طور ساده فرض کردیم که شکافها در مقایسه با طول موج نوری که آنها را روشن می‌کند باریک است؛ یعنی $a \ll \lambda$. برای چنین شکافهای باریکی، بیشینهٔ مرکزی نقش پراش هر شکاف تمام صفحهٔ مشاهده را می‌پوشاند. افزون بر این، تداخل نور از دو شکاف فریزهای روشنی ایجاد می‌کند که همگی تقریباً دارای شدت یکسانی هستند. (شکل ۳۵-۱۲).

البته در عمل با نور مرئی شرط $a \ll \lambda$ اغلب برقرار نیست. در مورد شکافهای نسبتاً پهن، تداخل نور از دو شکاف فریزهای







شکل ۳۶-۱۵ (الف) نمودار شدت مورد انتظار در آزمایش تداخل با دو شکاف با شکافهای خیلی باریک. (ب) نمودار شدت برای پراش توسط یک شکاف با پهنای a (خیلی باریک نیست). (پ) نمودار شدت مورد انتظار برای دو شکاف با پهنای a . منحنی (ب) به عنوان پوشی عمل می‌کند که محدودکنندهٔ شدت فریزهای دو شکاف در (الف) است. توجه کنید که اولین کمینه‌های نقش پراش (ب) فریزهای دو شکاف را که در نزدیکی 12° در (پ) رخ می‌دهند از بین می‌برند.

روشنی ایجاد می‌کند که همگی آنها دارای شدت یکسانی نیستند. یعنی، شدت فریزهای ایجاد شده توسط تداخل دو شکاف (همانطور که در فصل ۳۵ بحث شد) توسط پراش نوری که از هر شکاف می‌گذرد (همانطور که در این فصل بحث شد) تغییر می‌کند.

به عنوان مثال، شدت شکل ۳۶-۱۵ الف بر آن دلالت دارد که نقش فریزهای دو شکاف وقتی حاصل می‌شود که شکافها بینهایت باریک باشند (و بنابراین، $a \ll \lambda$)؛ تمام فریزهای روشن تداخلی دارای یک شدت هستند. نمودار شدت شکل ۳۶-۱۵ ب مربوط به یک شکاف واقعی است؛ نقش پراش دارای بیشینهٔ مرکزی گسترده و بیشینه‌های ثانوی ضعیفتر در $\pm 17^\circ$ است. نمودار شکل ۳۶-۱۵ پ نقش تداخلی حاصل را برای دو شکاف واقعی نشان می‌دهد. این نمودار با استفاده از منحنی شکل ۳۶-۱۵ ب به عنوان *پوشی* برای نمودار شدت در شکل ۳۶-۱۵ الف حاصل شده است. مکان فریزها تغییر نکرده‌اند؛ فقط شدت تأثیر پذیرفته است.

شکل ۳۶-۱۶ الف نقش واقعی را نشان می‌دهد که در آن تداخل دو شکاف و پراش دیده می‌شوند. اگر یکی از شکافها پوشانده شود، نقش پراش یک شکاف شکل ۳۶-۱۶ ب حاصل می‌شود. به ارتباط بین شکلهای ۳۶-۱۶ الف و ۳۶-۱۵ پ و بین شکلهای ۳۶-۱۶ ب و ۳۶-۱۵ ب توجه کنید. به هنگام مقایسه این شکلها توجه داشته باشید که شکل ۳۶-۱۶ برای نشان دادن بیشینه‌های ثانوی ضعیف با نوردهی بیشتری نشان داده شده است و دو بیشینهٔ ثانوی (به جای یک بیشینه) نشان داده شده‌اند.

با در نظر گرفتن آثار پراش، شدت نقش تداخلی دو شکاف با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$I(\theta) = I_m (\cos^2 \beta)\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \quad \text{(دو شکاف)} \qquad (۳۶\text{-}۱۹)$$

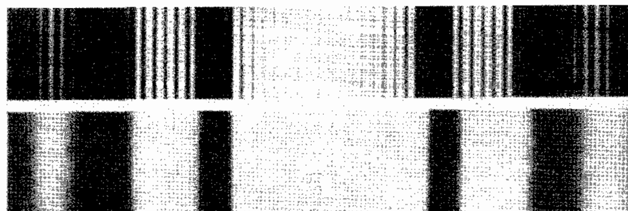
که در آن

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta \qquad (۳۶\text{-}۲۰)$$

و

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta \qquad (۳۶\text{-}۲۱)$$

در اینجا d فاصلهٔ بین مرکزهای شکافها و a پهنای شکاف است. به دقت توجه کنید که طرف راست معادلهٔ ۳۶-۱۹ حاصلضرب I_m و دو عامل دیگر است. (۱) *عامل تداخل* $\cos^2\beta$ که ناشی از تداخل بین دو شکاف به فاصلهٔ d است (که با معادله‌های ۳۵-۲۲ و ۳۵-۲۳ داده شده است). (۲) *عامل پراش* $[(\sin\alpha)/\alpha]^2$ که ناشی از پراش به وسیلهٔ یک شکاف با پهنای a است (که با معادله‌های ۳۶-۵ و ۳۶-۶ داده شده است).



شکل ۳۶-۱۶ (الف) فریزهای تداخلی برای دستگاه دو شکاف؛ با شکل ۳۶-۱۵ پ مقایسه کنید. (ب) نقش پراش یک شکاف؛ با شکل ۳۶-۱۵ ب مقایسه کنید.

این دو عامل را بررسی می‌کنیم. اگر در معادلهٔ ۳۶-۲۱، قرار دهیم $a \to 0$، آنگاه وقتی $\alpha \to 0$، $(\sin\alpha)/\alpha \to 1$. بنابراین، معادلهٔ ۳۶-۱۹ به معادلهٔ توصیف کنندهٔ نقش تداخل برای یک جفت شکاف خیلی باریک با فاصلهٔ d تبدیل می‌شود که چنین نیز باید باشد. به همین ترتیب با قراردادن $d=0$ در معادلهٔ ۳۶-۲۰ از نظر فیزیکی معادل با این است که دو شکاف به یک شکاف با پهنای a تبدیل شود. پس از معادلهٔ ۳۶-۲۰ خواهیم داشت $\beta = 0$ و $\cos^2\beta = 1$. در این حالت معادلهٔ ۳۶-۱۹، همانطور که انتظار می‌رود، به معادله‌ای تبدیل می‌شود که نقش پراش را برای یک شکاف به پهنای a توصیف می‌کند.

نقش دو شکاف که با معادلهٔ ۳۶-۱۹ توصیف می‌شود و در شکل ۳۶-۱۶ الف نشان داده شده است تداخل و پراش را با یک روش مفهومی ترکیب می‌کند. هر دو آثار برهم نهی‌اند، از این نظر که از ترکیب موجها با اختلاف فازهای مختلف در یک نقطه معین حاصل می‌شوند. اگر موجهای ترکیب شده از تعداد کمی از چشمه‌های همدوس حاصل شده باشند، مانند آزمایش دو شکاف با $a \ll \lambda$، فرایند را *تداخل* می‌نامند. اگر موجهای ترکیب شده از یک جبهه موج تنها حاصل شده باشد، مانند آزمایش یک شکاف، فرایند را *پراش* می‌نامند. این تمایز بین تداخل و پراش (که قدری اختیاری است و همیشه بر آن توافق نیست) تمایزی قراردادی است، ولی نباید فراموش کرد که هر دو اثرهای برهم نهی‌اند و معمولاً هر دو به طور همزمان وجود دارند (مانند شکل ۳۶-۱۶ الف).

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۶-۵

در یک آزمایش دو شکاف، طول موج λ چشمهٔ نوری $405\,\text{nm}$ و فاصلهٔ d شکافها برابر با $19/44\,\mu\text{m}$ و پهنای a شکاف $4/050\,\mu\text{m}$ است. تداخل نور از دو شکاف و همچنین پراش نور از هر شکاف را در نظر بگیرید

(الف) چند فریز تداخلی روشن داخل قلهٔ مرکزی پوش پراش وجود دارد؟

نکته‌های کلیدی ابتدا دو ساز و کار اصلی مسئول در نقش پراش ایجاد شده در آزمایش را تحلیل می‌کنیم:

۱. *پراش یک شکاف:* حدود قلهٔ مرکزی عبارت‌اند از اولین کمینه‌ها در نقش پراش ناشی از هر یک از شکافها (به شکل ۳۶-۱۵ نگاه کنید). مکان زاویه‌ای این کمینه‌ها با معادلهٔ ۳۶-۳ $(a\sin\theta = m\lambda)$ داده می‌شود. در اینجا این معادله را به صورت $a\sin\theta = m_1\lambda$ می‌نویسیم، که زیرنویس ۱ به معنای یک شکاف است. در مورد اولین کمینه، در نقش پراش، $m_1 = 1$ قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$a\sin\theta = \lambda \qquad (۳۶\text{-}۲۲)$$

۲. *تداخل دو شکاف:* مکان زاویه‌ای فریزهای روشن دو شکاف در نقش تداخل با معادلهٔ ۳۵-۱۴ داده می‌شوند، که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$d\sin\theta = m_2\lambda\,,\quad m_2 = 0,1,2,\ldots \quad \text{به ازای} \qquad (۳۶\text{-}۲۳)$$

در اینجا زیرنویس ۲ به تداخل دو شکاف اشاره دارد.

محاسبه‌ها: با تقسیم معادلهٔ ۳۶-۲۳ بر معادلهٔ ۳۶-۲۲ و حل آن برحسب $m_۲$ می‌توانیم مکان اولین کمینهٔ پراش را در داخل نقش فریز دو شکاف پیدا کنیم. با انجام این کار و قراردادن داده‌های معلوم، به دست می‌آوریم

$$m_۲ = \frac{d}{a} = \frac{۱۹/۴۴\mu m}{۴/۰۵۰\ \mu m} = ۴/۸$$

این نشان می‌دهد که فریز تداخلی روشن به ازای $m_۲ = ۴$ با کمینهٔ اول نقش پراش یک شکاف مطابقت دارد، ولی فریز $m_۲ = ۵$ مطابقت ندارد. داخل قلهٔ مرکزی پراش فریز مرکزی روشن ($m_۲ = ۰$) و چهار فریز روشن (تا $m_۲ = ۴$) در هر طرف آن داریم. بنابراین، در کل نه فریز روشن نقش تداخلی دو شکاف در داخل قلهٔ مرکزی پوش پراش قرار دارند. فریزهای روشن تداخلی در یک طرف فریز مرکزی روشن پراش در شکل ۳۶-۱۶ نشان داده شده‌اند.

(ب) چند فریز روشن در داخل اولین قله‌های کناری پوش پراش وجود دارد؟

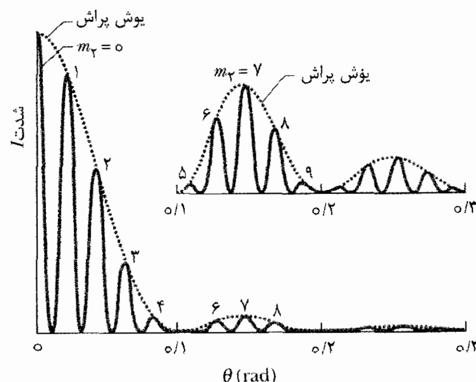
نکته‌های کلیدی حدود بیرونی اولین قله‌های کناری پراش دومین کمینه‌های پراش هستند، که هر یک از آنها در زاویهٔ θ قرار دارند که با $a\sin\theta = m_۱\lambda$ به ازای $m_۱ = ۲$ داده می‌شوند

$$a\sin\theta = ۲\lambda \qquad (۳۶-۲۴)$$

از تقسیم معادلهٔ ۳۶-۲۳ بر معادلهٔ ۳۶-۲۴ خواهیم داشت

$$m_۲ = \frac{۲d}{a} = \frac{(۲)(۱۹/۴۴\mu m)}{۴/۰۵۰\ \mu m} = ۹/۶$$

این حاکی از آن است که کمینهٔ دوم پراش درست قبل از فریز روشن تداخل به ازای $m_۲ = ۱۰$ در معادلهٔ ۳۶-۲۳ رخ می‌دهد. پس داخل اولین قلهٔ کناری پراش، فریزهایی از $m_۲ = ۵$ تا $m_۲ = ۹$ قرار دارند و در نتیجه در کل پنج فریز روشن نقش تداخل دو شکاف (در شکل کناری ۳۶-۱۶ نشان داده شده است) وجود دارد. ولی، اگر فریز روشن $m_۲ = ۵$ که تقریباً با اولین کمینهٔ پراش حذف می‌شود، خیلی تاریک در نظر گرفته شود، آنگاه فقط چهار فریز روشن در اولین قلهٔ پراش کناری وجود دارد.

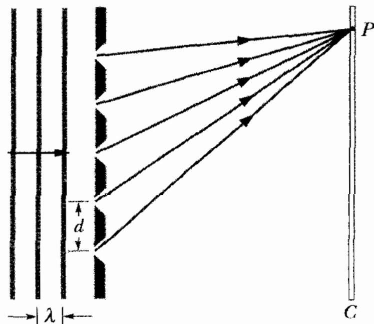


شکل ۳۶-۱۷ یک طرف نمودار شدت برای آزمایش تداخلی دو شکاف. قسمت کناری (که به طور قائم گسترده شده است) نمودار داخل اولین و دومین قلهٔ کناری پوش پراش را نشان می‌دهد.

۳۶-۸ توریهای پراش

یکی از وسایل بسیار مفید در مطالعهٔ نور و اجسامی که نور گسیل و جذب می‌کنند **توری پراش** است. این وسیله تا اندازه‌ای مانند آرایش دو شکاف شکل ۳۵-۱۰ است ولی تعداد زیادتر N شکاف دارد که اغلب *شیار* نامیده می‌شوند که شاید تعداد آنها تا چند هزار شیار در میلی‌متر باشد. یک توری آرمانی که فقط پنج شکاف دارد در شکل ۳۶-۱۸ نمایش داده شده است. هرگاه نور تکفام به شکافها بتابد، فریزهای تداخلی باریکی تشکیل می‌شود که می‌تواند برای تعیین طول موج نور مورد استفاده قرار گیرد. (توریهای پراش را می‌توان سطحهای کدری در نظر گرفت که روی آنها شیارهای موازی نازکی شبیه شکافهای شکل ۳۶-۱۸ آرایش یافته‌اند. بنابراین نور از شیارها پراکنده و برمی‌گردد و به جای عبور از شکافهای باز فریزهای تداخلی تشکیل می‌شود.)

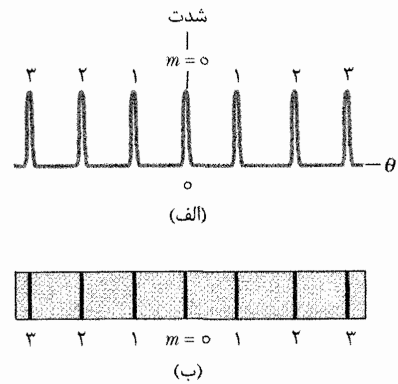
با نور تکفام فرودی بر یک توری پراش، اگر بتدریج تعداد شکافها را از دو به تعداد زیاد N افزایش دهیم، نمودار شدت از نوع نمودار دو شکافی شکل ۳۶-۱۵ پ به یک نمودار خیلی پیچیده‌تر و سپس سرانجام به یک شکل ساده‌ای مانند آنچه که در شکل ۳۶-۱۹ الف نشان داده شده است تغییر می‌کند. نقشی



شکل ۳۶-۱۸ یک توری پراش آرمانی که فقط پنج شیار دارد، یک نقش تداخلی روی صفحهٔ مشاهدهٔ دور C ایجاد می‌کند.

که روی صفحهٔ مشاهده با استفاده از نور قرمز تکفام مثلاً از یک لیزر هلیوم– نئون دیده می‌شود در شکل ۳۶-۱۹ ب نشان داده شده است. بیشینه‌ها اکنون خیلی باریک‌اند (و به همین دلیل *خط* نیز نامیده می‌شوند)؛ آنها به وسیلهٔ ناحیه‌های تاریک نسبتاً پهنی از هم جدا شده‌اند.

می‌توان از روش آشنایی برای پیداکردن محل فریزهای روشن روی صفحهٔ مشاهده استفاده کرد. نخست فرض می‌کنیم که صفحه به اندازهٔ کافی از توری دور باشد به طوری که پرتوهایی که به یک نقطهٔ معین P روی صفحه می‌رسند به هنگام ترک توری موازی باشند (شکل ۳۶-۲۰). سپس از همان استدلال به کار رفته برای تداخل دو شکاف برای هر جفت خط مجاور استفاده می‌کنیم. فاصلهٔ d بین شیارها *فاصلهٔ توری* نامیده



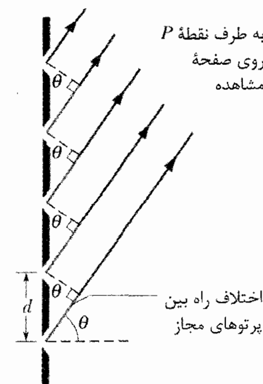
شکل ۳۶-۱۹ (الف) نمودار شدت حاصل شده از یک توری پراش با شیارهای خیلی زیاد شامل قله‌های باریکی است که با مرتبهٔ m آنها نشان داده شده‌اند. (ب) فریزهای روشن متناظر روی صفحهٔ مشاهده خط نامیده می‌شوند و در اینجا نیز با عددهای m نشانه‌گذاری شده‌اند.

می‌شود. (اگر N شیار در پهنای کل W وجود داشته باشد، آنگاه $d=W/N$). اختلاف راه پرتوهای مجاور نیز $d\sin\theta$ است (شکل ۳۶-۲۰)، که θ زاویهٔ محور مرکزی توری (و نقش پراش) و امتداد تا نقطهٔ P است. اگر اختلاف راه بین پرتوهای مجاور مضرب صحیحی از طول موج باشد، یعنی اگر داشته باشیم

$$d\sin\theta = m\lambda \ , \ m=0,1,2,\dots \quad \text{به ازای (بیشینه‌ها – خطها)} \qquad (۳۶-۲۵)$$

یک خط در نقطهٔ P خواهد بود، که λ طول موج نور است. هر عدد صحیح m یک خط را نشان می‌دهد؛ در نتیجه این عددهای صحیح را مانند شکل ۳۶-۱۹، می‌توان برای نشانه‌گذاری خطها به کار برد. این عددهای صحیح *مرتبه* نامیده می‌شوند، و خطها را خط مرتبهٔ صفر (خط مرکزی با $m=0$)، خط مرتبهٔ اول ($m=1$)، خط مرتبهٔ دوم ($m=2$) و غیره می‌نامند.

اگر معادلهٔ ۳۶-۲۵ را به صورت $\theta=\sin^{-1}(m\lambda/d)$ بنویسیم، می‌توان دید که در مورد یک توری پراش معین، زاویه از محور مرکزی تا هر خط (مانند خط مرتبهٔ سوم) به طول موج

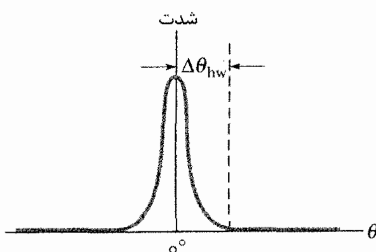


شکل ۳۶-۲۰ پرتوهای حاصل از شیارهای یک توری پراش تا نقطهٔ دور P تقریباً موازی‌اند. اختلاف راه بین هر دو پرتو مجاور $d\sin\theta$ است، که θ به صورتی که نشان داده شده است اندازه‌گیری می‌شود. (شیارها به سمت داخل و خارج صفحهٔ کاغذ ادامه دارند.)

نور به کار رفته بستگی دارد. بنابراین، هرگاه نور با طول موج نامعلوم از یک توری پراش بگذرد، از اندازه‌گیری زاویه‌ها تا خطهای مرتبهٔ بالای به کار رفته در معادلهٔ ۳۶-۲۵ می‌توان برای تعیین طول موج استفاده کرد. حتی نور با چند طول موج نامعلوم را می‌توان متمایز و با این روش شناسایی کرد. این کار را نمی‌توان با آزمایش دو شکاف بخش ۳۵-۴ انجام داد، هر چند که همین معادله و وابستگی طول موج در آنجا نیز به کار رفته بود. در آزمایش دو شکاف، فریزهای روشن ناشی از طول موجهای مختلف با یکدیگر خیلی همپوشانی دارند و نمی‌توانند از یکدیگر تمیز داده شوند.

پهنای خطها

توانایی یک توری برای تفکیک (جداسازی) خطها با طول موجهای مختلف به پهنای خطها بستگی دارد. در اینجا عبارتی را برای *نیم پهنای* خط مرکزی (خطی که برای آن $m=0$ است) و سپس عبارتی برای نیم پهنای خطهای مرتبه‌های بالاتر به دست می‌آوریم. **نیم پهنای** خط مرکزی به صورت زاویهٔ $\Delta\theta_{hw}$ از مرکز خط واقع در $\theta=0$ به بیرون تا جایی در نظر گرفته می‌شود که خط به طور مؤثر تمام شده و تاریکی با اولین کمینه شروع شده است (شکل ۳۶-۲۱). در چنین کمینه‌ای، N پرتو از N شکاف توری یکدیگر را حذف می‌کنند. (البته پهنای واقعی خط مرکزی $2(\Delta\theta_{hw})$ است، ولی پهنای خطها معمولاً از طریق نیم پهناها مقایسه می‌شوند.)



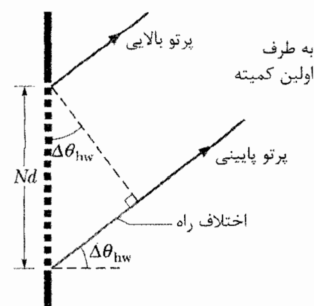
شکل ۳۶-۲۱ نیم پهنای $\Delta\theta_{hw}$ خط مرکزی از مرکز آن خط تا کمینهٔ مجاور روی نمودار شدت بر حسب θ مانند شکل ۳۶-۱۹ الف اندازه‌گیری می‌شود.

در بخش ۳۶-۳ نیز با خنثی شدن پرتوهای خیلی زیادی روبه‌رو شدیم که در آنجا ناشی از پراش از یک تک شکاف بود. معادلهٔ ۳۶-۳ را به دست آوردیم، که به علت مشابهت دو وضعیت، در اینجا نیز برای پیداکردن اولین کمینه می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. معلوم است که اولین کمینه در جایی رخ می‌دهد که اختلاف راه بین پرتوهای بالایی و پایینی برابر با λ باشد. در مورد پراش تک شکاف این اختلاف برابر با $a\sin\theta$ است. در مورد یک توری با N شیار، فاصلهٔ هر شیار از شیار بعدی d و فاصلهٔ بین شیارهای بالایی و پایینی Nd است (شکل ۳۶-۲۲). بنابراین، اختلاف راه بین پرتوهای بالایی و پایینی در اینجا عبارت است از $Nd\sin\Delta\theta_{hw}$. پس، اولین کمینه در جایی رخ می‌دهد که

$$Nd\sin\Delta\theta_{hw}=\lambda \qquad (۳۶-۲۶)$$

چون $\Delta\theta_{hw}$ کوچک است، $\sin\Delta\theta_{hw}=\Delta\theta_{hw}$ (برحسب رادیان). با قراردادن این در معادلهٔ ۳۶-۲۶، نیم پهنای خط مرکزی به صورت زیر به دست می‌آید

$$\Delta\theta_{hw}=\frac{\lambda}{Nd} \quad \text{(نیم پهنای خط مرکزی)} \qquad (۳۶-۲۷)$$



شکل ۳۶-۲۲ فاصلهٔ شیارهای بالایی و پایینی یک توری پراش با N شیار عبارت است از Nd. پرتوهای بالایی و پایینی که از این شیارها می‌گذرند دارای اختلاف راه $Nd\sin\Delta\theta_{hw}$ هستند (برای روشنی بیشتر زاویه خیلی بزرگتر نشان داده شده است.)

بدون اثبات بیان می‌کنیم که نیم پهنای هر خط دیگر به مکان آن نسبت به محور مرکزی بستگی دارد و عبارت است از

$$\Delta\theta_{hw} = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} \quad \text{(نیم پهنای خط در } \theta\text{)} \quad (۳۶\text{-}۲۸)$$

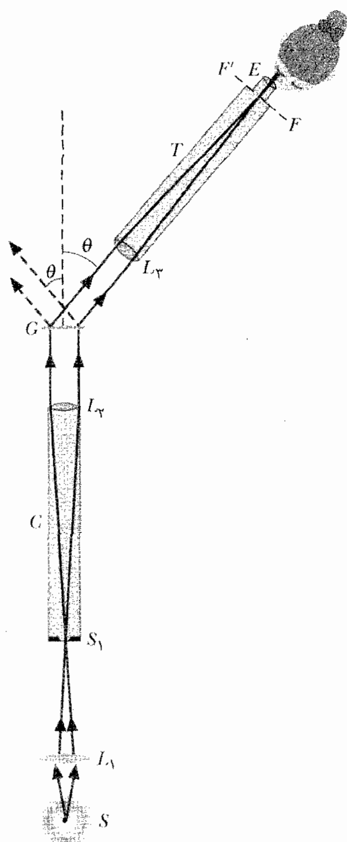
توجه کنید که برای نوری با طول موج معین λ و فاصلهٔ شیارهای d، پهنای خطها با افزایش تعداد N شیارها کاهش می‌یابد. بنابراین، از دو توری پراش، آن توری که مقدار N بزرگتری دارد بهتر می‌تواند طول موجها را تفکیک کند چون خطهای پراش آن باریکترند و در نتیجه همپوشانی کمتری ایجاد می‌کنند.

طیف‌نما با توری

توری‌های پراش به طور وسیعی برای تعیین طول موجهایی که توسط چشمه‌های نوری از لامپها تا ستارگان گسیل می‌شوند به کار می‌روند. شکل ۳۶-۲۳ یک *طیف‌نما با توری* ساده را نشان می‌دهد که در آن یک توری پراش برای این منظور به کار رفته است. نور از چشمهٔ S به وسیلهٔ عدسی L_1 روی شکاف S_1 واقع در صفحهٔ کانونی عدسی L_2 متمرکز می‌شود. نور خارج شده از لوله C (به نام *موازی ساز*) یک موج تخت است و به طور عمود بر توری G می‌تابد، که پس از پراش از آن نقش پراش با مرتبهٔ $m=0$ با زاویهٔ $\theta=0$ ایجاد می‌شود.

نقش پراشی که روی صفحهٔ مشاهده با زاویهٔ θ ظاهر می‌شود با چرخاندن دوربین T در شکل ۳۶-۲۳ به آن زاویه به آسانی دیده می‌شود. عدسی L_3 دوربین نور پراشیده با زاویهٔ θ را (و با زاویهٔ اندکی کمتر و اندکی بیشتر از آن) بر صفحهٔ کانونی FF' در داخل دوربین متمرکز می‌کند. هرگاه از چشمی E نگاه کنیم، می‌توان تصویر بزرگ شده را دید.

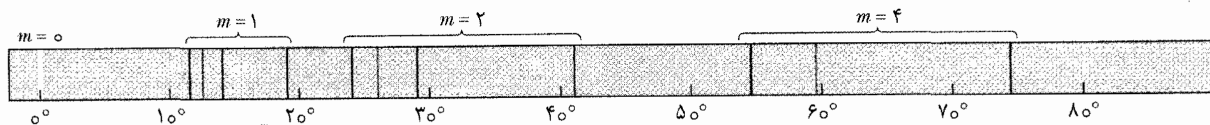
با تغییردادن زاویهٔ θ دوربین، می‌توان تمام نقش پراش را بررسی کرد. برای هر مرتبه غیر از $m=0$، نور اولیه بسته به طول موج (یا رنگ) گسترده می‌شود به طوری که می‌توان با معادلهٔ ۳۶-۲۵ طول موجهای گسیل شده توسط چشمه را تعیین کرد. اگر چشمه طول موجهای گسسته‌ای گسیل کند، آنچه با چرخش افقی دوربین به اندازهٔ زاویهٔ متناظر با مرتبهٔ m می‌بینیم عبارت از یک خط عمودی رنگی برای هر طول موج است. طول موج کوتاهتر با زاویهٔ کوچکتر θ نسبت به طول موج بلندتر خط دیده می‌شود.



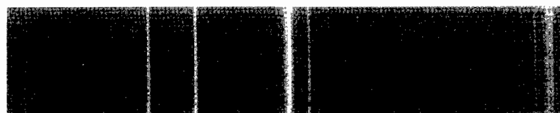
شکل ۳۶-۲۳ یک نوع سادهٔ طیف‌نما با توری که برای تحلیل طول موجهای نور گسیل شده به وسیلهٔ چشمهٔ S به کار رفته است.

برای مثال، نور گسیل شده از لامپ هیدروژن، که محتوی گاز هیدروژن است، در گسترهٔ مرئی چهار طول موج گسسته دارد. اگر مستقیماً به این نور نگاه کنیم، سفید به نظر می‌رسد. ولی، اگر در طیف‌نمای با توری به آن نگاه کنیم، در چندین مرتبه چهار خط رنگی مربوط به این طول موجهای مرئی دیده می‌شوند. (چنین خطهایی *خطهای گسیلی* نام دارند.) در شکل ۳۶-۲۴ چهار مرتبه نشان داده شده است. در مرتبهٔ مرکزی $(m=0)$ خطهای متناظر با هر چهار طول موج برهم نهاده شده‌اند، که یک خط سفید تنها در $\theta=0$ حاصل می‌شود. رنگها در مرتبه‌های بالاتر تفکیک شده‌اند.

به خاطر روشنی بیشتر مرتبهٔ سوم در شکل ۳۶-۲۴ نشان داده نشده است و در واقع با مرتبه‌های دوم و چهارم همپوشانی کرده‌اند. خط قرمز مرتبه چهارم از بین رفته است، زیرا توسط توری به کار رفته در اینجا تشکیل نشده است. یعنی، هرگاه بخواهیم معادلهٔ ۳۶-۲۵ را بر حسب زاویهٔ θ وقتی که $m=4$ است برای طول موج قرمز حل کنیم، معلوم می‌شود که $\sin\theta$ بزرگتر از یک است و این ناممکن است. بنابراین، چهارمین مرتبه برای این توری *ناقص* گفته می‌شود، این برای یک توری با فاصلهٔ بزرگتر d، که در آن پراشیدگی خطها کمتر از شکل ۳۶-۲۴ است ناقص نخواهد بود. شکل ۳۶-۲۵ تصویری از خطهای ایجاد شده به وسیلهٔ نور گسیل شدهٔ مرئی از کادمیوم است.



شکل ۳۶-۲۴ مرتبه‌های صفر، اول، دوم و چهارم خطهای مرئی گسیلی از هیدروژن. توجه کنید که این خطها در زاویه‌های بزرگتر فاصلهٔ بیشتری دارند. (اینها همچنین کمرنگتر و پهنترند هر چند که در اینجا نشان داده نشده‌اند.



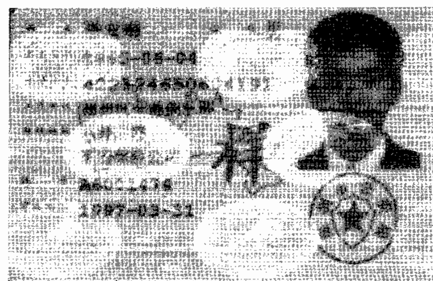
شکل ۳۶-۲۵ خطهای گسیلی مرئی کادمیوم که با یک طیف‌نمای با توری دیده می‌شود.

تصویرهای متغیر نوری

تمام نگارها[1] با پراکنده شدن نور لیزر از یک جسم به درون یک لایهٔ حساس ایجاد می‌شوند. وقتی تمام نگار را ظاهر کنیم با روشن کردن تمام‌نگار با همان نوع نور لیزر می‌توان تصویری از جسم را ایجاد کرد. این تصویرها خیلی جالب‌اند زیرا برخلاف عکسهای معمولی عمق دارند، و می‌توانیم نمای حاصل از جسم را با تغییر دادن زاویه‌ای که با آن به تمام نگار نگاه می‌کنیم، تغییر دهیم.

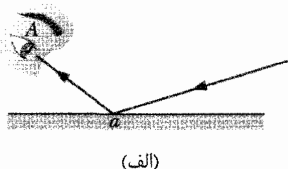
تصور می‌شود که تمام نگارها یک معیار آرمانی ضد جعل برای کارتهای اعتباری و انواع دیگر کارتهای شخصی شود. با وجود این، اینها تعدادی نقص دارند. (۱) وقتی با نور لیزر که همدوس است و در یک جهت می‌تابد نگاه شود یک تصویر تمام نگاری واضحی به نظر می‌رسد. ولی وقتی در نور معمولی یک فروشگاه نگاه می‌شود تصویر تیره به نظر می‌رسد. (چنین نور *پخش شده‌ای* ناهمدوس است و از چند جهت می‌آید.) بنابراین بعید است که فروشنده کارت اعتباری را از خیلی نزدیک بررسی کند و قانونی بودن تمام نگار را ببیند. (۲) تمام‌نگار به آسانی می‌تواند جعل شود چون تصویری از یک جسم واقعی است. جاعل فقط مدلی از آن جسم را می‌سازد، سپس تمام نگار آن را تهیه می‌کند، و سپس آن را به یک کارت اعتباری جعلی می‌چسباند.

اغلب کارتهای اعتباری اکنون حامل *تصویرهای متغیر اپتیکی* (OVG)[2] هستند که تصویر را از طریق پراش نور پخش شده توسط توریهایی که در وسیله قرار داده شده‌اند ایجاد می‌کنند (شکل ۳۶-۲۶).

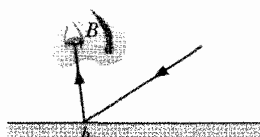


شکل ۳۶-۲۶ یک کارت شناسایی با OVG.

این توریها صدها و حتی هزاران مرتبهٔ مختلف از خود خارج می‌کند. کسی که کارت را نگاه می‌کند تعدادی از این مرتبه‌ها را می‌بیند و نور ترکیب شده یک تصویر مجازی ایجاد می‌کند که بخشی از، مثلاً یک علامت روی کارت اعتباری است. برای مثال، در شکل ۳۶-۲۷ الف، توری واقع در نقطه a وقتی ناظر



(الف)



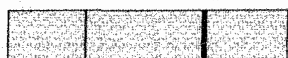
(ب)

شکل ۳۶-۲۷ (الف) توری واقع در نقطهٔ a روی سطح یک وسیلهٔ OVG به ناظری که در جهت A قرار دارد نور می‌فرستد و تصویر مجازی معینی تولید می‌شود. (ب) توری واقع در نقطهٔ b به ناظری که در B قرار دارد نور می‌فرستد و تصویر مجازی متفاوتی ایجاد می‌شود.

در نقطهٔ A است تصویر معینی ایجاد می‌کند، و در شکل ۳۶-۲۷ ب، توری واقع در نقطهٔ b از نظر ناظری که در B قرار دارد تصویر دیگری را ایجاد می‌کند. این تصویرها روشن و واضح هستند چون توریها برای دیدن نور پخش شده طراحی شده‌اند.

طراحی OVG خیلی دشوار است. مهندسان برای یک کار گرافیکی مانند یک نشانه باید معکوس عمل کنند. مهندسان برای اینکه بتوانند تصویر معینی را از زاویه‌هایی و تصویر متفاوتی را از زاویه‌های دیگری ببینند باید خواص توری در سراسر OVG را مشخص کنند. چنین کاری مستلزم برنامه‌ریزی پیشرفته‌ای در رایانه‌هاست. وقتی این طراحی انجام گرفت ساختار OVG چنان پیچیده است که جعل کردن آن فوق العاده دشوار است.

✔ *نکتهٔ وارسی ۵* این شکل خطهای مرتبه‌های مختلف ایجاد شده توسط یک توری پراش را در نور قرمز تکفام نشان می‌دهد. (الف) آیا مرکز نقش در چپ است یا راست؟ (ب) با نور سبز تکفام، آیا نیم پهناهای خطها در همین مرتبه‌ها بیشتر از نیم پهنای خطهای نشان داده شده است یا کمتر یا همین مقدار است؟



1. hologram
2. optically variable graphics (OVG)

۳۶-۹ توریها: پاشندگی و توان تفکیک

پاشندگی

توری باید بتواند خطهای پراش مربوط به طول موجهای مختلف را از هم جدا کند تا در تشخیص طول موجهایی که به هم نزدیک‌اند مفید باشد. (نظیر کاری که در طیف‌نما با توری انجام می‌گیرد.) این جداسازی که **پاشندگی** نامیده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D=\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} \quad \text{(۳۶-۳۰) (تعریف پاشندگی)}$$

در اینجا $\Delta\theta$ فاصلهٔ زاویه‌ای دو خطی است که طول موج آنها به اندازهٔ $\Delta\lambda$ با یکدیگر تفاوت دارد. D بزرگتر به معنای بزرگ بودن فاصلهٔ بین دو خط گسیل شده است که طول موج آنها با یکدیگر به اندازهٔ $\Delta\lambda$ تفاوت دارد. در زیر نشان خواهیم داد که پاشندگی یک توری در زاویهٔ θ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$D=\frac{m}{d\cos\theta} \quad \text{(۳۶-۳۰) (پاشندگی توری)}$$

بنابراین، برای رسیدن به پاشندگی بالاتر باید از توری با فاصلهٔ شیارهای d کم و در مرتبه‌های بالا استفاده کرد. توجه کنید که پاشندگی به تعداد شیارها بستگی ندارد. یکای SI پاشندگی درجه بر متر یا رادیان بر متر است.

توان تفکیک

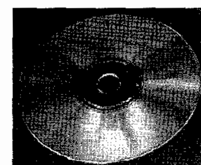
برای *تفکیک* خطهایی که طول موجهای آنها به یکدیگر نزدیک‌اند (یعنی، برای متمایز کردن خطها)، تا جایی که ممکن است خط باید باریک شود. به بیان دیگر، توری باید دارای توان تفکیک R بالا باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$R=\frac{\lambda_{\text{avg}}}{\Delta\lambda} \quad \text{(۳۶-۳۱) (تعریف توان تفکیک)}$$

در اینجا λ_{avg} طول موج متوسط دو خط گسیلی است که به زحمت از هم تشخیص داده می‌شوند، و $\Delta\lambda$ اختلاف طول موج بین آنهاست. هرچه R بزرگتر باشد، دو خط گسیلی نزدیک به هم‌تری را می‌توان جدا کرد. در زیر نشان خواهیم داد که **توان تفکیک** یک توری با عبارت ساده زیر داده می‌شود

$$R=Nm \quad \text{(۳۶-۳۲) (توان تفکیک یک توری)}$$

برای رسیدن به توان تفکیک زیاد، باید تعداد شیارها زیاد باشند. (N زیاد).



شیارهای ظریف هر یک به پهنای ۰/۵ µm، روی یک دیسک فشرده به عنوان یک توری پراش عمل می‌کنند. وقتی چشمهٔ کوچکی از نور سفید بر این دیسک بتابد، نور پراشیده «مسیرهایی» رنگی را تشکیل می‌دهد که ترکیبی از نقشهای پراش از شیارهاست.

اثبات معادلهٔ ۳۶-۳۰

از معادلهٔ ۳۶-۲۵ شروع می‌کنیم، که عبارتی برای محل خطها در نقش پراش یک توری است

$$d\sin\theta=m\lambda$$

θ و λ را متغیر گرفته و از این معادله دیفرانسیل می‌گیریم، داریم

$$d(\cos\theta)d\theta=m\,d\lambda$$

برای زاویه‌های کوچک می‌توان این دیفرانسیلها را به صورت اختلافهای کوچک درنظر گرفت، پس

$$d(\cos\theta)\Delta\theta=m\Delta\lambda \quad \text{(۳۶-۳۳)}$$

یا

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}=\frac{m}{d\cos\theta}$$

نسبت سمت چپ همان D است (به معادلهٔ ۳۶-۲۹ نگاه کنید)، پس در واقع معادله ۳۶-۳۰ به دست آمده است.

اثبات معادلهٔ ۳۶-۳۲

با معادلهٔ ۳۶-۳۳ شروع کردیم، که از معادلهٔ ۳۶-۲۵، عبارتی مربوط به محل خطها در نقش پراش تشکیل شده به وسیلهٔ یک توری، به دست آمده بود. در اینجا $\Delta\lambda$ اختلاف طول موج کوچک بین دو موجی است که به وسیلهٔ توری پراشیده شده‌اند، و $\Delta\theta$ فاصلهٔ زاویه‌ای بین آنها در نقش پراش است. اگر $\Delta\theta$ کوچکترین زاویه‌ای باشد که تفکیک دو خط را امکان‌پذیر می‌کند، باید (بنا بر معیار ریلی) برابر با نیم پهنای خطی باشد که با معادلهٔ ۳۶-۲۸ داده می‌شود

$$\Delta\theta_{\text{hw}}=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$$

اگر $\Delta\theta_{\text{hw}}$ داده شده در اینجا را در معادلهٔ ۳۶-۳۳ به جای $\Delta\theta$ قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{\lambda}{N}=m\Delta\lambda$$

که از این رابطهٔ زیر به راحتی به دست می‌آید

$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=Nm$$

که همان معادلهٔ ۳۶-۳۲ است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

مقایسهٔ پاشندگی و توان تفکیک

توان تفکیک یک توری نباید با پاشندگی آن اشتباه شود. جدول ۳۶-۱ مشخصه‌های سه توری را نشان می‌دهد که همگی با توری با طول موج $\lambda=$ ۵۸۹nm روشن شده‌اند، و نور پراشیده در مرتبهٔ اول ($m=$ ۱ در معادلهٔ ۳۶-۲۵) دیده شده است. باید بررسی کنید که مقدارهای D و R داده شده در جدول به ترتیب می‌توانند از معادله‌های ۳۶-۳۰ و ۳۶-۳۲ محاسبه شوند. (در محاسبه D، باید رادیان بر متر را به درجه بر میکرومتر تبدیل کنیم.)

جدول ۳۶-۱

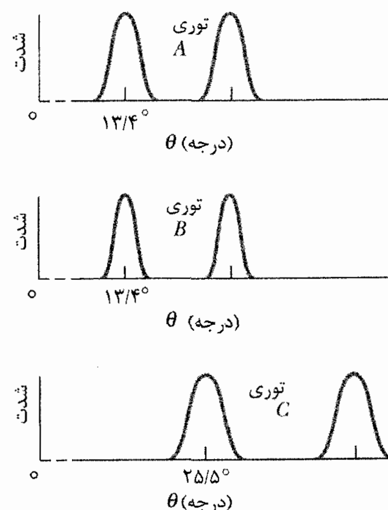
سه توری

توری	N	d(nm)	θ	$D(°/\mu m)$	R
A	۱۰۰۰۰	۲۵۴۰	۱۳/۴°	۲۳/۲	۱۰۰۰۰
B	۲۰۰۰۰	۲۵۴۰	۱۳/۴°	۲۳/۲	۲۰۰۰۰
C	۱۰۰۰۰	۱۳۶۰	۲۵/۵°	۴۶/۳	۱۰۰۰۰

۱. داده‌ها به ازای $\lambda = 589\,\text{nm}$ و $m=1$ هستند.

در مورد شرایط گفته شده در جدول ۳۶-۱، توریهای A و B دارای *پاشندگی* یکسان D و A و C دارای *توان تفکیک* یکسان R هستند.

شکل ۳۶-۲۸ نقشهای شدت (به نام *شکلهای خط*) را نشان می‌دهد که به وسیلهٔ این توریها برای دو خط با طول موجهای λ_1 و λ_2 در نزدیکی $\lambda = 589\,\text{nm}$ ایجاد شده‌اند. توری B با توان تفکیک بالاتر خطهای باریکتری ایجاد می‌کند و در نتیجه می‌تواند خطهایی را که طول موجهای آنها از مقدار نشان داده شده در شکل به هم خیلی نزدیکتر است جدا کند. توری C با پاشندگی بالاتر فاصلهٔ زاویه‌ای بیشتری بین خطها ایجاد می‌کند.



شکل ۳۶-۲۸ نقشهای شدت برای نور با دو طول موج که از توریهای جدول ۳۶-۱ گذشته است. توری B بیشترین توان تفکیک و توری C بیشترین پاشندگی را دارد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۶-۶

یک توری پراش دارای $1/26 \times 10^4$ شیار است که به طور یکنواخت در پهنای $w = 25/4\,\text{mm}$ جا گرفته‌اند. این توری با تابش عمود توسط نور زرد یک لامپ بخار سدیم روشن شده است. این نور دارای دو خط گسیلی با فاصلهٔ نزدیک به هم (به نام دوتایی سدیم) با طول موجهای $589/00\,\text{nm}$ و $589/59\,\text{nm}$ است.

نکته‌های کلیدی بیشینهٔ ایجاد شده توسط توری پراش با معادلهٔ ۳۶-۲۵ $(d\sin\theta = m\lambda)$ تعیین می‌شود.

محاسبه‌ها: فاصلهٔ d توری عبارت است از

$$d = \frac{w}{N} = \frac{25/4 \times 10^{-3}\,\text{m}}{1/26 \times 10^4} = 2/016 \times 10^{-6}\,\text{m} = 2016\,\text{nm}$$

بیشینهٔ مرتبهٔ اول متناظر با $m=1$ است. با قراردادن این مقدارها برای d و m در معادلهٔ ۳۶-۲۵ به معادلهٔ زیر می‌رسیم

$$\theta = \sin^{-1}\frac{m\lambda}{d} = \sin^{-1}\frac{(1)(589/00\,\text{nm})}{2016\,\text{nm}} = 16/99° \approx 17/0°$$

(پاسخ)

(ب) با استفاده از پاشندگی توری، فاصلهٔ زاویه‌ای بین دو خط را در مرتبهٔ اول محاسبه کنید.

نکته‌های کلیدی (۱) فاصلهٔ زاویه‌ای $\Delta\theta$ بین دو خط در مرتبهٔ اول مطابق با معادلهٔ ۳۶-۲۹ $(D = \Delta\theta / \Delta\lambda)$ به اختلاف طول موج آنها و پاشندگی D توری بستگی دارد. (۲) پاشندگی D به زاویهٔ θ بستگی دارد که در آن محاسبه می‌شود.

محاسبه‌ها: می‌توان فرض کرد که، در مرتبهٔ اول، دو خط سدیم جهت محاسبهٔ D در زاویهٔ $\theta = 16/99°$ که در بند (الف) برای یکی از این خطها پیدا کردیم به قدر کافی نزدیک‌اند. بنابراین، از معادلهٔ ۳۶-۳۰ پاشندگی به صورت زیر به دست می‌آید

$$D = \frac{m}{d\cos\theta} = \frac{1}{(2016\,\text{nm})(\cos 16/99°)} = 5/187 \times 10^{-4}\,\text{rad/nm}$$

از معادلهٔ ۳۶-۲۹ و با $\Delta\lambda$ بر حسب نانومتر، داریم

$$\Delta\theta = D\Delta\lambda = (5/187 \times 10^{-4}\,\text{rad/nm})(589/59 - 589/00) = 3/06 \times 10^{-4}\,\text{rad} = 0/0175°$$

(پاسخ)

می‌توانید نشان دهید که این نتیجه نه تنها به فاصلهٔ d توری بلکه به تعداد شیارهای موجود در توری بستگی دارد.

(پ) کمترین تعداد شیارهای یک توری باید چقدر باشد تا بتواند دوتایی سدیم را در مرتبهٔ اول تفکیک کند؟

نکته‌های کلیدی (۱) توان تفکیک توری در هر مرتبهٔ m از نظر فیزیکی با تعداد شیارهای N در توری مطابق با معادلهٔ ۳۶-۳۲ $(R = Nm)$ بستگی دارد. (۲) کوچکترین اختلاف طول موج $\Delta\lambda$ که می‌تواند تفکیک شود بنابر معادلهٔ ۳۶-۳۱ $(R = \lambda_{avg}/\Delta\lambda)$ به متوسط طول موج موجود و به توان تفکیک R توری بستگی دارد.

محاسبه‌ها: در مورد دوتایی سدیم که در حد تفکیک باشد، $\Delta\lambda$ باید اختلاف طول موج آنها $0/59\,\text{nm}$ و λ_{avg} باید متوسط طول موج آنها $589/30\,\text{nm}$ باشد.

بنابراین درمی‌یابیم که کمترین تعداد شیارها برای توری جهت تفکیک دوتایی سدیم عبارت است از

$$N = \frac{R}{m} = \frac{\lambda_{avg}}{m\Delta\lambda} = \frac{589/30\,\text{nm}}{(1)(0/59\,\text{nm})} = 999 \text{ شیار}$$

(پاسخ)

۳۶-۱۰ پراش توسط لایه‌های منظم

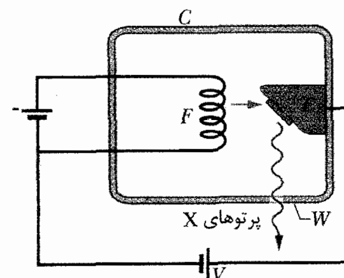
در اینجا دو مثال از تداخل نوری را به واسطهٔ پراش نور توسط لایه‌های منظم بررسی می‌کنیم. ابتدا دربارهٔ پراش پرتو x توسط لایه‌های منظم اتمی بحث می‌کنیم که تقریباً ۱۰۰ لایه دارد. سپس دربارهٔ پراش نور مرئی توسط لایه‌های موجود در مواد آلی صحبت می‌کنیم که مشتمل بر پوست میمونهائی است که موضوع پژوهش است.

پرتوهای x تابش الکترومغناطیسی هستند که طول موج آنها از مرتبهٔ $1\text{Å}\ (=10^{-10}\,\text{m})$ است. این را با یک طول موج $550\,\text{nm}(=5/5\times10^{-7}\,\text{m})$ در مرکز طیف مرئی مقایسه کنید. شکل ۳۶-۲۹ نشان می‌دهد که پرتوهای x هنگامی ایجاد می‌شوند که الکترونهای حاصل از یک رشته گرم F به وسیلهٔ اختلاف پتانسیل V شتاب بگیرند و به هدف فلزی T برخورد کنند.

یک توری پراش نوری استاندارد نمی‌تواند برای تشخیص طول موجهای مختلف در گسترهٔ طول موج پرتو x به کار برده شود. برای مثال به ازای $\lambda = 1\text{Å}\ (=0/1\text{nm})$ و $d = 3000\,\text{nm}$، معادلهٔ ۳۶-۲۵ نشان می‌دهد که بیشینهٔ مرتبه اول در مقدار زیر رخ می‌دهد

$$\theta = \sin^{-1}\frac{m\lambda}{d} = \sin^{-1}\frac{(1)(0/1\text{nm})}{3000\,\text{nm}} = 0/0019^\circ$$

$$\theta = \sin^{-1}\frac{m\lambda}{d} = \sin^{-1}\frac{(1)(0/1\text{nm})}{3000\,\text{nm}} = 0/0019^\circ$$



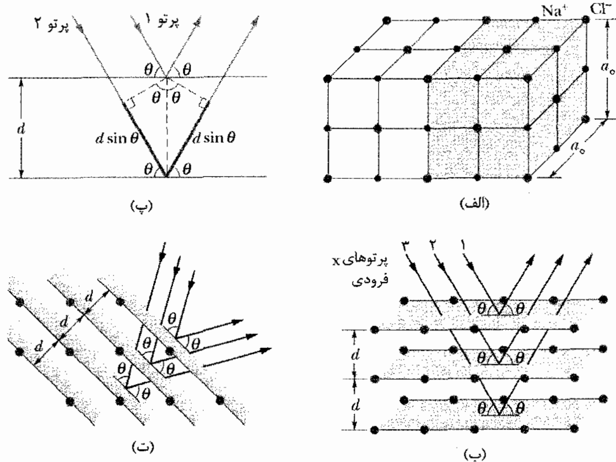
شکل ۳۶-۲۹ پرتوهای x هنگامی ایجاد می‌شوند که الکترونهای حاصل از رشتهٔ گرم F که با اختلاف پتانسیل V شتاب گرفته‌اند به هدف فلزی T برخورد کنند. «پنجره» W در اتاقک خلأ C برای پرتوهای x شفاف است.

این به بیشینهٔ مرکزی بیش از آنچه که عملی باشد نزدیک است. توری با $d \approx \lambda$ مطلوب است، ولی چون طول موجهای پرتو x تقریباً برابر قطر اتمی هستند، چنین توریهایی به طور مکانیکی نمی‌توانند ساخته شوند.

در سال ۱۹۱۲/۱۲۹۱، فیزیکدان آلمانی ماکس فون لاوه[1] متوجه شد که یک جامد بلوری که از آرایهٔ منظمی از اتمها ساخته شده است، می‌تواند برای پرتوهای x یک «توری پراش» سه بعدی طبیعی تشکیل دهد. عقیده بر این است که در یک بلور مانند سدیم کلراید (NaCl)، واحد اصلی اتمها (به نام *یاختهٔ یکه*) در سراسر این آرایه تکرار می‌شود. شکل ۳۶-۳۰ الف مقطعی از بلور NaCl را نشان می‌دهد و این واحد اصلی را مشخص می‌کند. این یاختهٔ یکه مکعبی به ضلع a_0 است.

وقتی یک باریکهٔ پرتو x داخل بلوری مانند NaCl می‌شود، پرتوهای x *پراکنده* می‌شوند یعنی در تمام جهتها توسط ساختار بلوری تغییر جهت می‌دهند. در برخی جهتها موجهای پراکنده شده تداخل ویرانگر ایجاد می‌کنند، که به کمینه‌های شدت می‌انجامد؛ در جهتهای دیگر تداخل سازنده است، که به بیشینه‌های شدت منجر می‌شود. این فرایند پراکندگی و تداخل شکلی از پراش است، هر چند که شبیه پراش نور که از شکافی عبور می‌کند یا از کنار لبه‌ای می‌گذرد و قبلاً مورد بحث قرار گرفت نیست.

هرچند فرایند پراش پرتوهای x به وسیلهٔ یک بلور پیچیده است، ولی بیشینه‌ها در جهتهایی حاصل می‌شوند که گویی پرتوهای x به وسیلهٔ گروهی از *صفحه‌های بازتاب دهندهٔ موازی* (یا *صفحه‌های بلوری*) بازتاب یافته‌اند، این صفحه‌ها که داخل بلور امتداد دارند، شامل آرایه‌های منظمی از اتمها هستند. (پرتوهای x در واقع بازتابیده نمی‌شوند؛ از این صفحه‌های فرضی برای ساده کردن تحلیل فرایندهای واقعی پراش استفاده می‌کنیم.)



شکل ۳۶-۳۰ (الف) ساختار مکعبی NaCl، که نشان دهندهٔ یونهای سدیم و کلر و یاختهٔ یکه (سایه زده) است. (ب) پرتوهای x فرودی به وسیلهٔ ساختار (الف) پراشیده می‌شود. مثل این است که پرتوهای پراشیده توسط دسته‌ای از صفحه‌های موازی، با زاویهٔ بازتابی برابر با زاویهٔ فرود که هر دو نسبت به این صفحه‌ها اندازه‌گیری می‌شوند (نه نسبت به عمود مانند نورشناسی) بازتابیده می‌شوند. (پ) اختلاف راه بین موجهایی که به طور مؤثر به وسیله دو صفحهٔ مجاور بازتابیده شده‌اند $2d\sin\theta$ است. (ت) با سمتگیری متفاوت پرتوهای x فرودی نسبت به این ساختار، گروه دیگری از صفحه‌ها اکنون به طور مؤثر پرتوهای x را بازتاب می‌دهند.

شکل ۳۶-۳۰ ب سه دسته صفحهٔ بازتاب دهنده (بخشی از یک دسته صفحه‌های موازی زیاد) با *فاصلهٔ بین صفحه‌ای* d را

1. Max Von Laue

نشان می‌دهد، که گفته می‌شود که پرتوهای فرودی نشان داده شده از آنها بازتاب پیدا می‌کنند. پرتوهای ۱ و ۲ و ۳ به‌ترتیب از اولین، دومین و سومین صفحه باز می‌تابند. در هر بازتاب زاویهٔ فرود و زاویهٔ بازتاب با θ نشان داده شده است. بر خلاف آنچه که در نورشناسی مرسوم است، این زاویه‌ها نسبت به *سطح* بازتاب دهنده اندازه‌گیری می‌شوند نه نسبت به عمود بر آنها. در مورد وضعیت شکل ۳۶-۳۰ ب، فاصلهٔ بین صفحه‌ای برابر با ضلع یاختهٔ یکه یعنی $a_\circ$ است.

شکل ۳۶-۳۰ پ نمای جانبی بازتاب از یک جفت صفحهٔ مجاور را نشان می‌دهد. موجهای پرتوهای ۱ و ۲ به طور همفاز به بلور می‌رسند. آنها پس از بازتاب نیز باید دوباره همفاز باشند، زیرا بازتابها و صفحه‌های بازتاب دهنده فقط برای توضیح بیشینه‌های شدت در پراش پرتوهای x توسط یک بلور تعریف شده‌اند. بر خلاف پرتوهای نوری، پرتوهای x در ورود به بلور شکسته نمی‌شوند؛ افزون بر این، یک ضریب شکست برای این وضعیت نمی‌توان تعریف کرد. بنابراین فاز نسبی بین موجهای پرتوهای ۱ و ۲ هنگام ترک بلور فقط از اختلاف راه آنها ناشی می‌شود. برای اینکه این پرتوها همفاز باشند، اختلاف راه باید برابر با مضرب صحیحی از طول موج λ پرتوهای x باشد.

با رسم عمودهای خطچین در شکل ۳۶-۳۰ پ، درمی‌یابیم که اختلاف راه $2d\sin\theta$ است. در واقع، این رابطه برای هر جفت صفحهٔ مجاور در دسته صفحه‌های نمایش داده شده در شکل ۳۶-۳۰ ب درست است. بنابراین به عنوان معیاری برای بیشینه‌های شدت پراش پرتو x داریم

$$2d\sin\theta = m\lambda\ ,\ m=1,2,3,\ldots \quad \text{(قانون براگ)} \qquad (۳۶-۳۴)$$

که در آن m عدد مربوط به مرتبهٔ یک بیشینهٔ شدت است. معادلهٔ ۳۶-۳۴ به افتخار فیزیکدان انگلیسی براگ[1]، کسی که اولین بار آن را به دست آورد، **قانون براگ** نام دارد. (او و پدرش جایزهٔ نوبل سال ۱۹۱۵/۱۲۹۴ را به خاطر استفاده از پرتوهای x برای مطالعهٔ ساختار بلورها نصیب خود کردند.) زاویهٔ فرود و زاویهٔ بازتاب در معادلهٔ ۳۶-۳۴ *زاویهٔ براگ* نامیده می‌شود.

بدون توجه به زاویه‌ای که در آن پرتوهای x وارد یک بلور می‌شوند، همواره دسته‌ای از صفحه‌ها وجود دارند که این پرتوها از آنها طوری بازتابیده می‌شوند که می‌توان قانون براگ را به کار برد. در شکل ۳۶-۳۰ ت، قابل توجه این است که سمتگیری ساختار بلور مانند مورد شکل ۳۶-۳۰ الف است، ولی زاویه‌ای که در آن باریکه وارد ساختار می‌شود با مورد نشان داده شده در شکل ۳۶-۳۰ ب تفاوت دارد. این زاویهٔ جدید برای توضیح پراش پرتوهای x با قانون براگ به دستهٔ جدیدی از صفحه‌ها نیاز دارد که فاصلهٔ بین صفحه‌ای d و زاویهٔ براگ θ آنها متفاوت است.

شکل ۳۶-۳۱ نشان می‌دهد که چگونه فاصلهٔ بین صفحه‌ای d به ضلع یاختهٔ یکه یعنی $a_\circ$ مربوط است. برای دسته‌ای از صفحه‌های نشان داده شده در آنجا از قضیه فیثاغورس داریم

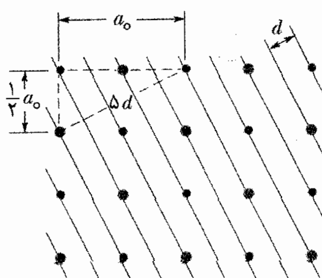
$$5d=\sqrt{\frac{5}{4}a_\circ^2}$$

یا

$$d=\frac{a_\circ}{\sqrt{20}}=0/2236a_\circ \qquad (۳۶-۳۵)$$

شکل ۳۶-۳۱ روشی را پیشنهاد می‌کند که چگونه می‌توان ابعاد یاختهٔ یکه را از فاصلهٔ بین صفحه‌ای که به وسیلهٔ پراش پرتو x اندازه‌گیری شده، پیدا کرد.

پراش پرتو x وسیله‌ای قدرتمند برای مطالعهٔ طیف پرتو x و نیز آرایش اتمها در بلورهاست. برای مطالعهٔ طیف، مجموعهٔ خاصی از صفحه‌های بلوری که دارای فاصلهٔ d معلومی هستند انتخاب می‌شود. این صفحه‌ها به طور مؤثر طول موجهای مختلفی را در زاویه‌های مختلف بازتابیده می‌کنند. آشکارسازی که می‌تواند یک زاویه را از زاویهٔ دیگر تمیز دهد برای تعیین



شکل ۳۶-۳۱ دسته‌ای از صفحه‌ها در ساختار شکل ۳۶-۳۰ الف و روشی برای ارتباط طول $a_\circ$ یک یاختهٔ یکه به فاصلهٔ بین صفحه‌ای d.

طول موج فرودی که به آن می‌رسد به کار می‌رود. خود بلور می‌تواند با یک باریکه تکفام پرتو x مطالعه شود، تا نه تنها فاصلهٔ صفحه‌های مختلف بلوری بلکه ساختار یاختهٔ یکه نیز تعیین شود.

رنگین شدن ساختاری توسط پراش

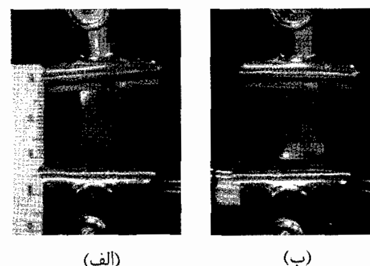
شکل ۳۶-۳۲ الف ورقهٔ لاستیکی شفافی را نشان می‌دهد که در آن کره‌های پلی‌استرن تقریباً به طور یکنواخت در آن قرار داده شده‌اند که صفحه‌هایی با فاصلهٔ d را تشکیل می‌دهند (شکل ۳۶-۳۲ پ)، وقتی نور مرئی در ورقه نفوذ می‌کند، توسط کره‌ها پراشیده می‌شود و بخشی از آن به سوی ما می‌آید ولی چون بین نوری که از هر دو صفحه به ما می‌رسد اختلاف فازی وجود دارد، در نور تداخل رخ می‌دهد. وقتی لاستیک کشیده نشده است، در طول موجهای تقریباً ۵۹۰nm تداخل سازنده رخ می‌دهد، که نور قرمز می‌دهد. (شکل ۳۶-۳۲ الف). وقتی ورقه

1. W.L. Bragg

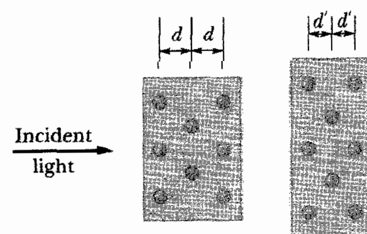
کشیده می‌شود، نازک می‌شود و موجب می‌گردد تا فاصلهٔ بین صفحه‌ها به مقدار d' باریک شود (شکل ۳۶-۳۲ ت) و در نتیجه طول موج‌های تشکیل دهنده تداخل سازنده کاهش می‌یابند.

در شکل ۳۶-۳۲ ب ورقهٔ تحت کشش نور سبز را در طول موج تقریبی ۵۶۳nm به ما می‌دهد. این وضعیت رنگی مثالی از رنگی شدن ساختاری است چون به دلیل تداخل نوری است که توسط آرایه‌بندی داخل یک ماده به وجود می‌آید.

رنگینی شدن ساختاری مشابهی در پوست خارجی بعضی میمون‌ها (و پوست برخی حیوانات دیگر) رخ می‌دهد. چون پراش در تارهای موازی رنگی زیر سطح پوست صورت می‌پذیرد، نور در پوست نفوذ می‌کند، از تارها پراش می‌یابد، و سپس از پوست خارج می‌شود. فاصلهٔ تارها موجب تداخل سازنده برای طول موجهای در حدود ۴۶۰nm می‌شود و پوست آبی به نظر می‌رسد. این رنگین‌کمان نیست. (مانند بالهای برخی از انواع پروانه‌ها) چون نظم موازی تارهای رنگی فقط در سطح میکروسکوپی یکنواخت است که به آن *نیمه‌منظم* می‌گویند.



(الف) (ب)



(پ) (ت)

شکل ۳۶-۳۲ جابه‌جایی رنگی توسط یک ورقهٔ لاستیکی که کره‌های پلی‌استیرن در آن قرار داده شده است. (الف) و (پ) بدون کشش، با کره‌هایی که صفحه‌هایی به فاصلهٔ d را تشکیل می‌دهند. (ب) و (ت) در حالت کشش، با کره‌هایی که صفحه‌هایی با فاصلهٔ کوچکتر d' را به وجود می‌آورند.

بازنگری و خلاصهٔ درس

پراش هرگاه موجها با یک لبه، یک مانع، یا یک روزنه با اندازهٔ قابل مقایسه با طول موج این موجها روبه‌رو شوند، این موجها از جهت حرکت خود گسترده‌تر می‌شوند و تداخل می‌کنند. این را **پراش** می‌نامند.

پراش تک شکاف موجهایی که از یک شکاف باریک دراز با پهنای a می‌گذرند، **یک نقش پراش تک شکاف** روی صفحهٔ مشاهده ایجاد می‌کنند که شامل یک بیشینهٔ مرکزی و بیشینه‌های دیگری است که با کمینه‌هایی واقع در زاویهٔ θ نسبت به محور مرکزی که در رابطه زیر صدق می‌کند از هم جدا هستند

$$a\sin\theta = m\lambda \quad , \quad m=1,2,3,\ldots \quad \text{(کمینه‌ها) به ازای} \quad (۳۶-۳)$$

شدت نقش پراش در هر زاویهٔ معین θ عبارت است از

$$I(\theta) = I_m\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \, , \, \alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta \quad (۳۶-۵ ، ۳۶-۶)$$

که در آن I_m شدت در مرکز نقش است.

پراش روزنهٔ دایره‌ای پراش توسط روزنهٔ دایره‌ای یا یک عدسی به قطر d یک بیشینهٔ مرکزی و بیشینه‌ها و کمینه‌های هم مرکزی ایجاد می‌کند که اولین کمینه در زاویهٔ θ قرار دارد که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\sin\theta = 1/22\frac{\lambda}{d} \quad \text{(اولین کمینه – روزنهٔ دایره‌ای)} \quad (۳۶-۱۲)$$

معیار ریلی معیار ریلی پیشنهاد می‌کند که اگر بیشینهٔ پراش مرکزی یک جسم روی اولین کمینهٔ جسم دیگر قرار گیرد، آنگاه این دو جسم در حد تفکیک‌پذیری قرار دارند. فاصلهٔ زاویه‌ای آنها باید به صورت زیر باشد

$$\theta_R = 1/22\frac{\lambda}{d} \quad \text{(معیار ریلی)} \quad (۳۶-۱۴)$$

که در آن d قطر روزنه‌ای است که نور از آن می‌گذرد.

پراش دو شکاف موجهایی که از دو شکاف هر یک به پهنای a و فاصلهٔ مرکز به مرکز d می‌گذرند، نقشهای پراشی ایجاد می‌کنند که شدت I آنها در زاویهٔ θ عبارت است از

$$I(\theta) = I_m(\cos^2\beta)\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \quad \text{(دو شکاف)} \quad (۳۶-۱۹)$$

که $\beta = (\pi d/\lambda)\sin\theta$ و α مانند مورد پراش یک شکاف است.

توریهای پراش *توری پراش* عبارت است از دسته‌ای از «شکافها» که برای جداکردن یک موج فرودی به مؤلفه‌های طول موجی خود و نمایش بیشینه‌های پراش آنها به کار می‌رود. توری با N (چند) شکاف به (خطهای) بیشینه در زاویه‌های θ می‌انجامد به طوری که

$$d\sin\theta = m\lambda \quad , \quad m=0,1,2,\ldots \quad \text{(بیشینه‌ها) به ازای} \quad (۳۶-۲۵)$$

با **نیم پهناهای** خطها که با

$$\Delta\theta_{hw} = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} \quad \text{(نیم پهناها)} \quad (۳۶-۲۸)$$

داده می‌شود.

پاشندگی D و توان تفکیک R عبارت‌اند از:

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta} \quad (۳۶-۲۹ ، ۳۶-۳۰)$$

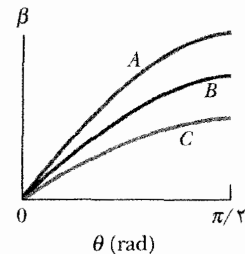
$$R = \frac{\lambda_{avg}}{\Delta\lambda} = Nm \quad (۳۶-۳۱ ، ۳۶-۳۲)$$

پراش پرتو x آرایهٔ منظمی از اتمهای یک بلور عبارت است از یک توری پراش سه بعدی برای موجهایی با طول موج کوتاه مانند پرتوهای x. به منظور تحلیل، می‌توان تصور کرد که اتمها در صفحه‌هایی ترتیب یافته‌اند که فاصلهٔ بین آنها d است. بیشینه‌های پراش (ناشی از تداخل سازنده) زمانی رخ می‌دهند که جهت تابش موج، که از سطح این صفحه اندازه‌گیری می‌شود، و طول موج λ تابش در **قانون براگ** صدق کنند

$$2d\sin\theta = m\lambda \ , \quad m=1,2,3,\ldots \text{ به ازای } \quad \text{(قانون براگ)} \quad (۳۶-۳۴)$$

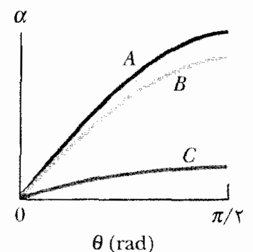
پرسشها

۱-شکل ۳۶-۳۳ برای سه آزمایش عامل β در معادلهٔ ۳۶-۲۰ را برحسب θ در تداخل دو شکاف با استفاده از نور با طول موج ۵۰۰nm به دست می‌دهد. فاصلهٔ شکافها در سه آزمایش متفاوت است. این آزمایشها را به ترتیب بزرگی (الف) فاصلهٔ شکافها و (ب) تعداد کل بیشینه‌های تداخل دو شکاف در نقش مرتب کنید.



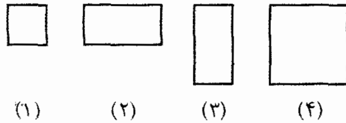
شکل ۳۶-۳۳ پرسش ۱

۲-شکل ۳۶-۳۴ برای سه آزمایش در پراش تک شکاف با استفاده از نور با طول موج ۵۰۰nm، α را برحسب زاویهٔ θ به دست می‌دهد. این آزمایشها را به ترتیب بزرگی (الف) پهنای شکاف و (ب) تعداد کل کمینه‌های پراش در نقش، مرتب کنید.



شکل ۳۶-۳۴ پرسش ۲

۳-شکل ۳۶-۳۵ چهار گزینه را برای روزنهٔ مستطیلی شکل در مقابل یک چشمه با موجهای صوتی یا موجهای نوری نشان می‌دهد. طول ضلعها L یا $2L$ و L برابر با سه برابر طول موج موجهاست. روزنه‌ها را به ترتیب بزرگی (الف) پهن‌شدگی چپ- راست، (ب) پهن‌شدگی بالا- پایین موجها ناشی از پراش مرتب کنید.



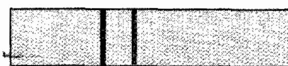
شکل ۳۶-۳۵ پرسش ۳

۴-نوری با بسامد f با روشن کردن شکاف باریک درازی یک نقش پراش ایجاد می‌کند. (الف) اگر بسامد نور به $1/3f$ تغییر کند، آیا این نقش از مرکز به طرف بیرون گسترش می‌یابد یا به طرف آن جمع می‌شود؟ (ب) اگر این وسیله را در مایع شفافی غوطه‌ور کنیم، آیا این نقش گسترش می‌یابد یا جمع می‌شود؟

۵-آزمایش پراش تک شکاف را با طول موج λ انجام می‌دهیم. روی صفحهٔ مشاهدهٔ دور، در نقطه‌ای که پرتوهای بالایی و پایینی از شکاف می‌گذرند و اختلاف راه برابر با (الف) 5λ و (ب) $4/5\lambda$ هستند، چه دیده می‌شود؟

۶-در آزمایش پراش تک شکاف، پرتوهای بالایی و پایینی که از شکاف می‌گذرند با اختلاف راه ۴/۰ طول موج، به نقطهٔ معینی روی صفحهٔ مشاهده می‌رسند. در نمایش با بردار فاز شکل ۳۶-۷ چند دایرهٔ همپوشانی زنجیرهٔ بردار فاز را تشکیل می‌دهند؟

۷-شکل ۳۶-۳۶ یک خط قرمز (راست) و یک خط سبز (چپ) از مرتبهٔ یکسانی از نقش حاصل از یک توری پراش را نشان می‌دهد. اگر تعداد شیارهای توری را زیاد کنیم، مثلاً با حذف نواری که نصف خطها را پوشانده است، آیا (الف) نیم پهناهای خطها و (ب) فاصله خطها افزایش می‌یابد یا کاهش یا ثابت می‌ماند؟ (پ) آیا خطها به طرف راست جابه‌جا می‌شوند یا به طرف چپ، یا در همان محل باقی می‌مانند؟



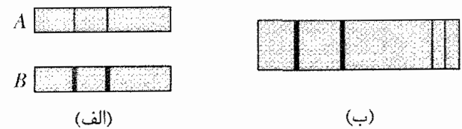
شکل ۳۶-۳۶ پرسش ۷ و ۸

۸-در وضعیت پرسش ۷ و شکل ۳۶-۳۶ اگر فاصلهٔ شیارهای توری افزایش یابد، آیا (الف) نیم پهنای خطها و (ب) فاصلهٔ خطها افزایش می‌یابد، یا کاهش یا بدون تغییر می‌ماند؟ (پ) آیا خطها به سمت راست جابه‌جا می‌شوند یا به سمت چپ یا در همان محل باقی می‌مانند؟

۹-در شب بسیاری از مردم حلقه‌هایی (به نام هاله‌های درون چشمی) را می‌بینند که اطراف لامپهای روشن خارج از خانه را در حصاری از تاریکی احاطه کرده‌اند. این حلقه‌ها اولین بیشینه‌های کناری در نقشهای پراش ایجاد شده توسط ساختاری است که فکر می‌کنند در داخل قرنیه (یا احتمالاً عدسی) چشم ناظر قرار دارند. (بیشینه‌های مرکزی چنین نقشهایی با لامپ همپوشانی می‌کنند.) (الف) اگر نور لامپ از آبی به قرمز تبدیل شود آیا یک حلقهٔ خاص کوچکتر می‌شود یا بزرگتر؟ (ب) اگر لامپ نور سفید گسیل کند در لبهٔ بیرونی این حلقه آبی قرار دارد یا قرمز؟

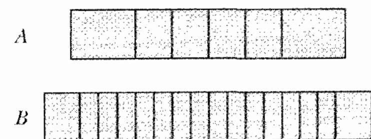
۱۰- (الف) برای یک توری پراش معین، آیا با افزایش طول موج، کمترین اختلاف $\Delta\lambda$ قابل تفکیک در دو طول موج افزایش می‌یابد یا کاهش یا ثابت می‌ماند؟ (ب) در مورد یک ناحیهٔ طول موج معین (مثلاً اطراف ۵۰۰nm) آیا $\Delta\lambda$ در مرتبهٔ اول بزرگتر است یا در مرتبهٔ سوم؟

۱۱- (الف) شکل ۳۶-۳۷ الف خطهای ایجاد شده توسط توریهای پراش A، B را با استفاده از نور با طول موج یکسان نشان می‌دهد؛ این خطها دارای مرتبهٔ یکسان هستند و در زاویهٔ یکسان θ ظاهر می‌شوند. کدام توری تعداد شیار بیشتری دارد؟ (ب) شکل ۳۶-۳۷ ب خطهای دو مرتبه را نشان می‌دهد که توسط یک توری پراش تنها با استفاده از نور با دو طول موج، هر دو در ناحیه قرمز طیف ایجاد شده‌اند. کدام خطها، دو تای سمت چپ یا دو تای سمت راست، دارای مرتبهٔ بزرگتر m هستند؟ آیا مرکز نقش پراش در سمت چپ است یا سمت راست؟ (پ) در شکل ۳۶-۳۷ الف و (ت) در شکل ۳۶-۳۷ ب مرکز نقش پراش در طرف چپ قرار دارد یا طرف راست؟



شکل ۳۶-۳۷ پرسش ۱۱

۱۲- شکل ۳۶-۳۸ فریزهای روشنی را نشان می‌دهد که در داخل پوش پراش مرکزی در آزمایشهای پراش دو شکاف با استفاده از یک طول موج یکسان نور قرار دارد. آیا (الف) پهنای شکاف a، (ب) فاصلهٔ دو شکاف d و (پ) نسبت d/a در آزمایش B، بیشتر از آزمایش A است یا کمتر یا همان اندازه است؟



شکل ۳۶-۳۸ پرسش‌های ۱۲

مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)

SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها

WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

●●●- تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.

اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

بخش ۳۶-۳ پراش توسط تک شکاف: محل کمینه‌ها

۱- یک شکاف با نوری به طول موج λ_a و λ_b روشن شده است. طول موجها طوری انتخاب شده‌اند که اولین کمینهٔ پراش مؤلفهٔ λ_a منطبق است. (الف) اگر $\lambda_b = ۳۵۰\,\text{nm}$ باشد، λ_a چقدر است؟ در چه مرتبهٔ m_b (در صورت وجود) یک کمینهٔ مؤلفهٔ λ_b بر کمینهٔ مؤلفهٔ λ_a در مرتبهٔ (ب) $m_a = ۲$ و (پ) $m_a = ۳$ منطبق است؟

۲- نور تکفام با طول موج ۴۴۱nm بر یک شکاف باریک می‌تابد. روی صفحه‌ای به فاصلهٔ ۲/۰۰m، فاصلهٔ بین دومین کمینهٔ پراش و بیشینهٔ مرکزی ۱/۵۰cm است. (الف) زاویهٔ پراش θ دومین کمینه را محاسبه کنید. (ب) پهنای شکاف را پیدا کنید.

۳- نوری با طول موج ۶۳۳nm بر شکاف باریکی می‌تابد. زاویهٔ بین اولین کمینهٔ پراش در یک طرف بیشینهٔ مرکزی و اولین کمینه در طرف دیگر °۱/۲۰ است. پهنای شکاف چقدر است؟

۴- نسبت پهنای شکاف به طول موج برای تک تک شکاف برای اینکه اولین کمینهٔ پراش در $\theta = ۴۵/۰°$ رخ دهد چقدر است؟

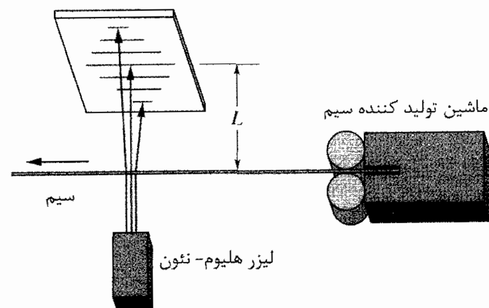
۵- یک موج تخت با طول موج ۵۹۰nm بر شکافی با پهنای $a = ۰/۴۰\,\text{mm}$ فرود می‌آید. عدسی نازک همگرایی با فاصلهٔ کانونی ۷۰cm+ بین شکاف صفحهٔ مشاهده قرار داده شده و نور را روی صفحه متمرکز می‌کند. (الف) فاصلهٔ صفحهٔ مشاهده از عدسی چقدر است؟ (ب) فاصلهٔ مرکز نقش پراش تا اولین کمینه روی صفحه چقدر است؟

۶- در تلویزیون معمولی، سیگنالها از دکلهایی به گیرنده‌های خانگی ارسال می‌شوند. حتی وقتی که یک گیرنده به علت تپه‌ای یا ساختمانی در دید مستقیم دکل نباشد، در صورتی که سیگنال به قدر کافی اطراف مانع به داخل «ناحیهٔ سایه» مانع پراشیده شود، هنوز سیگنال را می‌توان دریافت کرد. طول موج سیگنالهای متعارف تلویزیونی تقریباً ۵۰cm است، ولی طول موج بیشتر سیگنالهای دیجیتالی تلویزیون که از دکل باید ارسال شوند تقریباً ۱۰nm است. (الف) آیا به دلیل این تغییر در طول موج، پراش سیگنالها به داخل ناحیه‌های سایهٔ موانع افزایش می‌یابد یا کاهش؟ فرض کنید که سیگنالی از یک روزنه با پهنای ۵/۰nm بین دو ساختمان مجاور می‌گذرد. گسترش زاویه‌ای بیشینهٔ پراش مرکزی (به طرف بیرون کمینهٔ اول) برای طول موجهای (ب) ۵۰cm و (پ) ۱۰mm چقدر است؟

۷- فاصلهٔ بین اولین و پنجمین کمینهٔ نقش پراش یک شکاف ۰/۳۵mm است. فاصلهٔ پرده تا شکاف ۴۰cm و نوری با طول موج ۵۵۰nm به کار رفته است. (الف) پهنای شکاف را پیدا کنید. (ب) زاویهٔ θ اولین کمینهٔ پراش را محاسبه کنید.

۸- تولیدکنندگان سیم (و سایر اجسام با ابعاد کوچک) بعضی مواقع از لیزر برای نمایش مداوم وضعیت ضخامت محصول استفاده می‌کنند. از تلاقی باریکه لیزر با سیم نقش پراشی مانند

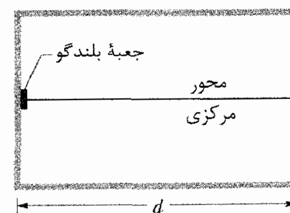
نقش پراش تک شکاف با پهنای برابر با قطر سیم ایجاد می‌شود (شکل ۳۶-۳۹). فرض کنید که لیزر هلیوم- نئون با طول موج ۶۳۲/۸nm سیم را روشن می‌کند و نقش پراش روی صفحه‌ای در فاصلهٔ $L=۲/۶۰\text{m}$ ظاهر می‌شود. اگر قطر سیم مورد نظر ۱/۳۷mm باشد، فاصلهٔ مشاهده شده بین دو کمینهٔ مرتبهٔ دهم (هر یک در یک طرف بیشینهٔ مرکزی) چقدر است؟



شکل ۳۶-۳۹ مسئلهٔ ۸

۹- شکافی به پهنای ۱/۰۰mm با نوری به طول موج ۵۸۹*nm* روشن شده است. نقش پراش را روی صفحه‌ای به فاصلهٔ ۳/۰۰m از آن می‌بینیم. فاصلهٔ بین اولین دو کمینهٔ پراش در یک طرف بیشینهٔ مرکزی پراش چقدر است؟ **SSM ILW**

۱۰- موجهای صوتی با بسامد ۳۰۰۰Hz و تندی ۳۴۳m/s از گشودگی مستطیلی شکل بلندگویی پراشیده شده و وارد سالنی به طول $d=۱۰۰\text{m}$ می‌شوند. این گشودگی که دارای پهنای افقی ۳۰/۰cm است از دیوار ۱۰۰m فاصله دارد (شکل ۳۶-۴۰). در طول دیوار، در چه فاصله‌ای از محور مرکزی شنونده در اولین کمینهٔ پراش قرار دارد و در نتیجه مشکل شنیدن صوت خواهد داشت؟ (از بازتابها چشم‌پوشی کنید.)



شکل ۳۶-۴۰ مسئلهٔ ۱۰

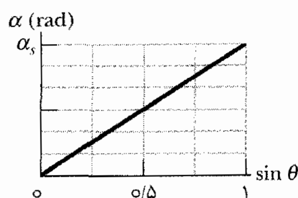
بخش ۳۶-۵ شدت در پراش تک شکاف، به طور کمی

۱۱- نور تکفام با طول موج ۵۳۸*nm* بر شکافی با پهنای ۰/۰۲۵mm می‌تابد. فاصلهٔ شکاف تا صفحهٔ مشاهده ۳/۵m است. نقطه‌ای را روی صفحه به فاصلهٔ ۱/۱cm از بیشینهٔ مرکزی در نظر بگیرید. (الف) θ را برای این نقطه، (ب) α و (پ) نسبت شدت در آن نقطه به شدت در بیشینهٔ مرکزی را محاسبه کنید.

۱۲- در آزمایش پراش تک شکاف شکل ۳۶-۴، طول موج نور را ۵۰۰nm، پهنای شکاف را ۶/۰۰μm و فاصلهٔ صفحهٔ مشاهده را $D=۳/۰۰\text{m}$ در نظر بگیرید. فرض کنید محور y به طرف بالا در صفحهٔ مشاهده و مبدأ آن در مرکز نقش پراش قرار داشته باشد. همچنین فرض کنید I_P شدت نور پراشیده در نقطهٔ P واقع در $y=۱۵/۰\text{cm}$ باشد. (الف) نسبت I_P به شدت I_m در مرکز نقش چقدر است؟ (ب) تعیین کنید که نقطهٔ P در نقش پراش بین بیشینه و کمینه قرار دارد یا بین دو کمینه؟

۱۳- شکافی با پهنای ۰/۱۰mm با نوری به طول موج ۵۸۹*nm* روشن می‌شود. نقطهٔ P را روی یک صفحهٔ مشاهده در نظر بگیرید که نقش پراش شکاف روی آن دیده می‌شود؛ این نقطه در زاویهٔ °۳۰ از محور مرکزی شکاف قرار دارد. اختلاف فاز بین موجکهای هویگنس که از بالا و وسط شکاف به نقطهٔ P می‌رسند چقدر است؟ (راهنمایی: به معادلهٔ ۳۶-۴ نگاه کنید).

۱۴- شکل ۳۶-۴۱ مقدار α را برحسب $\sin\theta$ در آزمایش پراش تک شکاف با استفاده از نور با طول موج ۶۱۰nm نشان می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $\alpha_s=۱۲\text{rad}$ مشخص شده است. (الف) پهنای شکاف، (ب) تعداد کل کمینه‌های پراش در نقش (تعداد آنها در دو طرف مرکز نقش پراش)، (پ) کمترین زاویه برای یک کمینه، و (ت) بیشترین زاویه برای یک کمینه، چقدر است؟



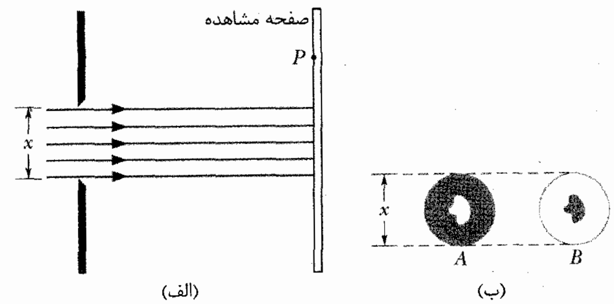
شکل ۳۶-۴۱ مسئله ۱۴

۱۵- (الف) نشان دهید که مقدارهای α که به ازای آنها بیشینه‌های شدت در پراش تک شکاف رخ می‌دهد دقیقاً با دیفرانسیل‌گیری از معادلهٔ ۳۶-۵ نسبت به α و با مساوی قرار دادن نتیجه برابر صفر و به دست آوردن شرط $\tan\alpha=\alpha$ به دست می‌آید. برای پیدا کردن مقدارهای α که در این رابطه صدق می‌کند، منحنی $y=\tan\alpha$ و خط راست $y=\alpha$ را رسم و سپس محل تلاقی آنها را پیدا کنید، یا از ماشین حساب برای پیدا کردن مقدارهای α به روش سعی و خطا استفاده کنید.

سپس به ازای $\alpha=\left(m+\frac{۱}{۲}\right)\pi$، مقدارهای m مربوط به بیشینه‌ها در نقش تک شکاف را تعیین کنید. (این مقدارهای m عدد صحیح *نیستند* چون بیشینه‌های بعدی دقیقاً در وسط کمینه‌ها قرار ندارند). (ب) کوچکترین مقدار دوم α و (پ) m مربوط، (ت) کوچکترین مقدار دوم α و (ث) m مربوط، و (ج) کوچکترین مقدار سوم α و (چ) m مربوط چقدر است؟

۱۶- *اصل بابینه*. باریکهٔ تکفام نور موازی به روزنه‌ای به قطر $x>>\lambda$ می‌تابد و به صورت موازی از آن می‌گذرد. نقطهٔ P در ناحیهٔ سایه هندسی روی یک صفحهٔ *دور* قرار دارد (شکل ۳۶-۴۲ الف). دو مانع پراش دهندهٔ نشان داده شده در شکل ۳۶-۴۲

ب، به نوبت روی روزنه قرار داده می‌شوند. جسم A دایره‌ای کدر با روزنه‌ای روی آن و B «عکس منفی» A است. با استفاده از مفاهیم برهم نهی، نشان دهید که شدت در P در مورد دو جسم پراش دهنده A و B یکسان است.



شکل ۳۶-۴۲ مسئله ۱۶

۱۷- پهنای کامل در نیم بیشینهٔ یک بیشینهٔ پراش مرکزی به صورت زاویهٔ بین دو نقطه در نقش پراش تعریف می‌شود که در آن شدت نصف شدت در مرکز پراش است. (به شکل ۳۶-۸ ب نگاه کنید.) (الف) نشان دهید که هرگاه $\sin^2 \alpha = \alpha^2/2$ باشد، شدت به نصف شدت بیشینه افت می‌کند. (ب) بررسی کنید که $\alpha = ۱/۳۹\text{rad}$ (تقریباً °۸۰) جوابی برای معادلهٔ (الف) است. (پ) نشان دهید که پهنای کامل در نیم بیشینه عبارت است از $\Delta\theta = ۲\sin^{-1}(۰/۴۴۳\,\lambda/a)$، که در آن a پهنای شکاف است. پهنای کامل در نیم بیشینهٔ مرکزی را به ازای پهنای شکاف (ت) $۱/۰۰\lambda$، (ث) $۵/۰۰\lambda$ و (ج) $۱۰/۰\lambda$، محاسبه کنید.
SSM WWW

بخش ۳۶-۶ پراش توسط یک روزنهٔ دایره‌ای

۱۸- تلسکوپهای بعضی سفینه‌های نظارتی تجاری («تجسسی») می‌توانند اجسام زمینی به کوچکی ۸۵cm، (*google earth*) را ببینید و تلسکوپهای سفینه‌های نظارتی نظامی می‌توانند اجسام به کوچکی ۱۰cm را تفکیک کنند. ابتدا فرض کنید که تفکیک‌پذیری جسم تماماً با معیار ریلی تعیین می‌شود و با تلاطمهای جوی کمتر نمی‌شود. هم‌چنین فرض کنید که سفینه‌ها در ارتفاع نوعی ۴۰۰km قرار دارند و طول موج نور مرئی ۵۵۰nm است. قطر دهانهٔ مورد نیاز تلسکوپ برای (الف) تفکیک‌پذیری ۸۵cm و (ب) تفکیک‌پذیری ۱۰cm چقدر است؟ (پ) اکنون، با در نظر گرفتن اینکه تلاطم تفکیک‌پذیری را کاهش می‌دهد و با اینکه قطر دهانهٔ تلسکوپ فضایی هابل ۲/۴m است، درباره پاسخ بند (ب) و دربارهٔ تفکیک‌پذیریهای نظارتی نظامی که انجام می‌شود چه می‌توانید بگویید؟

۱۹- اگر شخص خارق‌العاده‌ای دارای دید پرتو x با طول موج ۰/۱۰nm و قطر مردمک او ۴/۰mm باشد، با فرض اینکه او بخواهد نقطه‌هایی با فاصلهٔ ۵/۰cm را از هم تفکیک کند، بیشینهٔ ارتفاعی که برای تمایز می‌تواند داشته باشد چقدر است؟

۲۰- فرض کنید که معیار ریلی محدودیت تفکیک‌پذیری چشم فضانوردی را به دست می‌دهد که از یک شاتل فضایی نوعی در ارتفاع ۴۰۰km به سطح زمین نگاه می‌کند. (الف) با این فرض آرمانی، کوچکترین پهنای خطی روی سطح زمین را که فضانورد می‌تواند تفکیک کند برآورد کنید. قطر مردمک فضانورد را ۵mm و طول موج نور مرئی را ۵۵۰nm در نظر بگیرید. (ب) آیا فضانورد می‌تواند دیوار بزرگ چین (شکل ۳۶-۴۳) را تفکیک کند که بیش از ۳۰۰۰km طول، ۵ تا ۱۰ متر ضخامت در قاعده، ۴m ضخامت در بالا و ۸m ارتفاع دارد؟ (پ) آیا فضانورد می‌تواند هر علامت غیر قابل اشتباهی از زندگی موجودی روی سطح زمین را تفکیک کند؟



شکل ۳۶-۴۳ مسئله ۲۰ دیوار بزرگ چین

۲۱- فاصلهٔ دو چراغ اتومبیلی که در حال نزدیک شدن است ۱/۴m است. در چه (الف) فاصلهٔ زاویه‌ای و (ب) مسافت بیشینه‌ای، چشم آنها را از هم تفکیک می‌کند؟ فرض کنید که قطر مردمک ۵/۰mm و طول موج نور ۵۵۰nm است. هم‌چنین فرض کنید که آثار پراش به تنهایی محدود کنندهٔ توان تفکیک است به طوری که معیار ریلی را می‌توان اعمال کرد.
SSM

۲۲- *هاله درون چشمی*. اگر به یک لامپ روشن بیرون از خانه در محلی که در تاریکی قرار دارد نگاه کنیم، به نظر می‌رسد که لامپ با حلقه‌های روشن و تاریک (از این‌رو *هاله*) احاطه شده است که در واقع مانند شکل ۳۶-۹ یک نقش پراش دایره‌ای هستند، که بیشینهٔ مرکزی با نور مستقیم از لامپ همپوشانی می‌کند. این پراش توسط ساختارهایی در داخل قرنیه یا عدسی چشم ایجاد شده است (از این‌رو *درون چشمی*). اگر طول موج نور تکفام لامپ ۵۵۰nm و اولین حلقهٔ تاریک در زاویهٔ قطری °۲/۵ از دید ناظر دیده شود، قطر (داخلی) ساختار ایجادکننده پراش چقدر است؟

۲۳- با فرض اینکه فاصله دو نقطه روی سطح ماه فقط توسط آثار پراش تعیین شود، فاصلهٔ این دو نقطه را که با استفاده از تلسکوپ ۲۰۰m(=۵/۱m) واقع در تپهٔ پالومار تفکیک شود

پیدا کنید. فاصلهٔ زمین تا ماه $3/8\times10^5$ km است. فرض کنید طول موج نور ۵۵۰ nm است. ILW

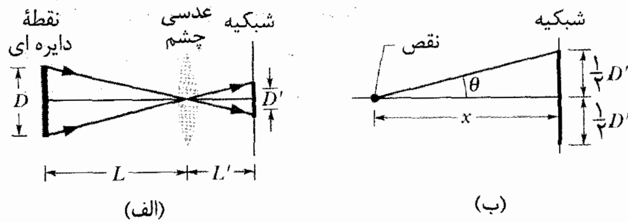
۲۴- سامانهٔ راداری یک رزمناو جنگی از یک آنتن دایره‌ای شکل به قطر ۲/۳m در طول موج ۱/۶cm موجهایی ارسال می‌کند. در برد ۶/۲km، کمترین فاصلهٔ دو قایق تندرو چقدر باید باشد تا بتوان آنها را به عنوان دو جسم جدا از هم به وسیلهٔ دستگاه رادار تفکیک کرد؟

۲۵- فاصلهٔ خطی دو جسم واقع روی سیارهٔ مریخ را که توسط ناظری روی زمین (الف) با استفاده از چشم غیر مسلح و (ب) با استفاده از تلسکوپ تپهٔ پالومار ۲۰۰in(=۵/۱m) در شرایط آرمانی بتوان تفکیک کرد برآورد کنید. از داده‌های زیر استفاده کنید: فاصلهٔ زمین تا مریخ برابر $8/0\times10^7$ km، قطر مردمک برابر ۵/۰ mm و طول موج نور برابر ۵۵۰ nm است. SSM ILW

۲۶- دیوار اتاق بزرگی با کاشی اکوستیکی پوشیده شده است که در آن حفره‌های کوچکی با فاصلهٔ مرکز تا مرکز ۵/۰ mm قرار دارد. با فرض شرایط آرمانی، قطر مردمک چشم ناظر برابر با ۴/۰ mm و طول موج نور اتاق برابر با ۵۵۰ nm، شخص در چه فاصله‌ای می‌تواند قرار گیرد تا حفره‌ها را جدا از هم تمیز دهد؟

۲۷- (الف) اگر قطر مردمک ۱/۵mm، شعاع دانه‌های کروی ماسهٔ قرمز رنگ ۵۰ μm و طول موج نور حاصل از دانه‌ها ۶۵۰ nm باشد، در چه فاصله‌ای این دانه‌ها درست در حد تفکیک قرار دارند؟ (ب) اگر دانه‌ها آبی رنگ و نور حاصل از آن دارای طول موج ۴۰۰nm باشد، آیا پاسخ (الف) بزرگتر می‌شود یا کوچکتر؟

۲۸- *شناورها*. شناورهایی که موقع تماشای یک زمینهٔ روشن ساده می‌بینید نقش‌های پراشی از نقائص موجود در زجاجیه است که بیشترین قسمت چشم را تشکیل می‌دهد. با نگریستن از یک روزنهٔ کوچک، نقش پراش واضحتر می‌شود. هم‌چنین اگر به یک نقطهٔ دایره‌ای کوچک نگاه کنید، می‌توانید بزرگی نقص را برآورد کنید. فرض کنید که نقصی نور را مانند روزنهٔ دایره‌ای پراشیده می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ L از چشم خود را (یا عدسی چشم) تنظیم کنید تا اینکه نقطه و دایرهٔ اولین بیشینه که در نقش پراش ظاهر می‌شود اندازهٔ یکسانی در نگاه شما داشته باشد. یعنی، تا وقتی که اینها قطر یکسان D' روی شبکیه در فاصلهٔ $L=2/0$ cm از جلو چشم داشته باشند، همانطور که در شکل ۳۶-۴۴ الف دیده می‌شود، جایی که زاویه‌ها در دو طرف عدسی چشم برابر هستند. فرض کنید که طول موج نور مرئی $\lambda=550$ nm باشد. اگر قطر نقطه $D=2/0$ mm و فاصلهٔ $L=45/0$ cm از چشم و نقص از جلو شبکیه $x=6/0$ mm فاصله داشته باشد (شکل ۳۶-۴۴ ب)، قطر نقص چقدر است؟



شکل ۳۶-۴۴ مسئله ۲۸

۲۹- یک رادار با موجهای میلی‌متری باریکه‌ای نازکتر از رادار میکرو موج معمولی ایجاد می‌کند، که آن را نسبت به بردار معمولی در برابر هدفهای ضد راداری کمتر آسیب‌پذیر می‌کند. (الف) پهنای زاویه‌ای 2θ بیشینهٔ مرکزی، از اولین کمینه تا اولین کمینه را که به وسیلهٔ یک باریکهٔ راداری ۲۲۰ GHz از یک آنتن دایره‌ای به قطر ۵۵/۰ cm گسیل شده است محاسبه کنید. (بسامد چنان اختیار شده است که با یک «پنجره» جوی با جذب کم سازگار باشد.) (ب) 2θ برای یک آنتن دایره‌ای معمولی که قطر آن ۲/۳m و در طول موج ۱/۶cm گسیل می‌کند چقدر است؟ SSM

۳۰- (الف) یک میان‌بند دایره‌ای به قطر ۶۰ cm در بسامد ۲۵kHz به عنوان یک چشمهٔ صوتی زیر آبی که از آن در آشکارسازی زیردریایی استفاده می‌شود، نوسان می‌کند. دور از چشمه، شدت صوت به صورت نقش پراش روزنهٔ دایره‌ای که قطر آن برابر با قطر میان‌بند است توزیع شده است. تندی صوت در آب را ۱۴۵۰ m/s گرفته و زاویهٔ بین عمود بر میان‌بند و خط واصل از میان‌بند به اولین کمینه را پیدا کنید. (ب) آیا چنین کمینه‌ای برای چشمهٔ دارای بسامد (صوتی) ۱/۰ kHz وجود دارد؟

۳۱- لیزرهای پرتو x که به طور هسته‌ای پمپ می‌شوند می‌توانند تا برد ۲۰۰۰ km برای انهدام راکتهای *ICBM* به عنوان جنگ‌افزار مورد استفاده قرار گیرند. یکی از محدودیتهای چنین جنگ افزاری پخش شدن باریکهٔ ناشی از پراش است که باعث ضعیف شدن شدت باریکه می‌شود. لیزری را که در طول موج ۱/۴۰ nm کار می‌کند در نظر بگیرید. جسمی که نور را گسیل می‌کند عبارت است از سیمی با قطر ۰/۲۰۰mm. (الف) قطر باریکهٔ مرکزی را در هدفی به فاصلهٔ ۲۰۰۰ km از چشمهٔ باریکه محاسبه کنید. (ب) با چه ضریبی شدت باریکه ضمن انتقال به هدف کاهش می‌یابد؟ (لیزر از فضا شلیک می‌شود به طوری که می‌توان از جذب جوی صرفنظر کرد.) GO

۳۲- بال سوسکها (شکل ۳۶-۴۵) به دلیل تداخل ناشی از لایه‌های نازک پوستی رنگی دیده می‌شود. افزون بر این، این لایه‌ها به صورت تکه‌هایی به عرض ۶۰ μm ترتیب یافته‌اند و رنگهای مختلفی ایجاد می‌کنند. رنگی که دیده می‌شود عبارت است از مخلوط نقطه نقطه‌ای از رنگهای ناشی از تداخل لایهٔ نازک که با تغییر منظر تغییر می‌کند. بنابر معیار ریلی تقریباً از

چه فاصله‌ای باید نگاه کنیم تا رنگهای مختلف لایه‌ها در حد تفکیک شدن باشند؟ طول موج نور ۵۵۰nm و قطر مردمک را ۳/۰۰mm در نظر بگیرید.

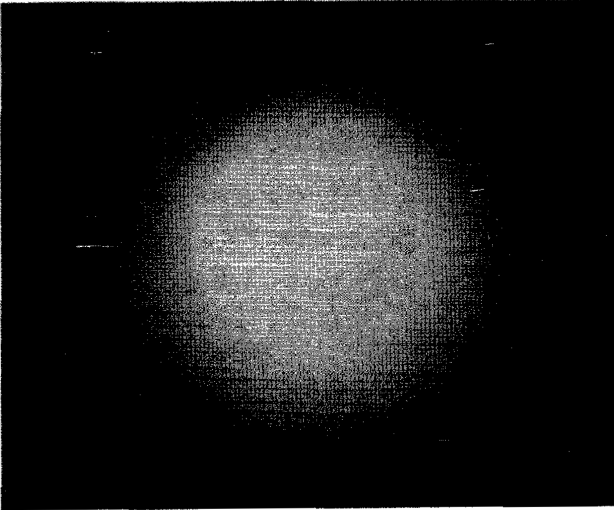


شکل ۳۶-۴۵ مسئلهٔ ۳۲ سوسکها به صورت آمیزه‌ای نقطه‌ای از رنگهای تداخلی لایهٔ نازک، رنگی دیده می‌شوند.

۳۳- (الف) اگر تصویرهای دو ستاره به وسیلهٔ تلسکوپ شکستی تاو در رصدخانه آلگنی در پیتسبورگ به زحمت تفکیک شوند، فاصلهٔ زاویه‌ای این دو ستاره چقدر است؟ قطر عدسی ۷۶cm و فاصلهٔ کانونی آن ۱۴m است. فرض کنید $\lambda = ۵۵۰\,\text{nm}$. (ب) اگر هر یک از این ستاره‌ها ۱۰ سال نوری از زمین فاصله داشته باشند، فاصلهٔ بین آنها را وقتی در حد تفکیک باشند پیدا کنید. (پ) در مورد تصویر یک ستارهٔ تنها در این تلسکوپ، قطر اولین حلقهٔ تاریک در نقش پراش را، وقتی روی یک صفحهٔ عکاسی واقع در صفحهٔ کانونی عدسی تلسکوپ اندازه گیری شود، پیدا کنید. فرض کنید که ساختار تصویر به پراش در دهانهٔ عدسی وابسته است نه به «خطاهای» عدسی.

۳۴- یک مانع دایره‌ای همان نقش پراشی را ایجاد می‌کند که یک روزنهٔ دایره‌ای با قطر یکسان به وجود می‌آورد (به جز خیلی نزدیک $\theta = ۰$). قطره‌های آب در هوا مثالهایی از چنین مانعهایی هستند. وقتی از میان قطره‌های معلق آب، مانند مه به ماه نگاه کنیم، نقش پراش حاصل از قطره‌های زیادی را رهگیری می‌کنیم. ترکیب بیشینه‌های مرکزی پراش این قطره‌ها یک ناحیهٔ سفید در اطراف ماه تشکیل می‌دهد که ممکن است آن را بپوشاند. شکل ۳۶-۴۶ تصویری است که ماه پوشیده شده است. دو حلقهٔ کم‌نور رنگی دور ماه وجود دارد (حلقهٔ بزرگتر به قدر کم رنگ است که در این تصویر به زحمت دیده می‌شود). حلقهٔ کوچکتر در لبهٔ بیرونی بیشینهٔ مرکزی از قطره‌ها قرار دارد؛ حلقهٔ بزرگتر تقریباً در لبهٔ بیرونی کوچکترین بیشینه‌های ثانوی قطره‌ها واقع است (به شکل ۳۶-۱۰ نگاه کنید). چون حلقه‌ها به کمینه‌های پراش (حلقه‌های تاریک) در نقشها نزدیک‌اند، این رنگ مرئی است. (رنگها در بخشهای دیگر همپوشانی می‌کنند و به زحمت دیده می‌شوند.)

(الف) رنگ این حلقه‌ها در لبه‌های بیرونی بیشینه‌های پراش چیست؟ (ب) حلقهٔ رنگی اطراف بیشینهٔ مرکزی در شکل ۳۶-۴۶ دارای قطر زاویه‌ای است که ۱/۳۵ برابر قطر زاویه‌ای ماه یعنی $۰/۵۰°$ است. فرض کنید که همهٔ قطره‌ها دارای قطر تقریباً یکسانی هستند. این قطر تقریبی چقدر است؟



شکل ۳۶-۴۶ مسئله ۳۴ هالهٔ اطراف ماه ترکیبی از نقشهای پراش قطره‌های آب در هواست

بخش ۳۶-۷ پراش با دو شکاف

۳۵- در آزمایش دو شکاف، فاصلهٔ شکافها d دو برابر پهنای آن w است. چند فریز تداخلی روشن در پوش مرکزی پراش وجود دارد؟

۳۶- باریکه‌ای از نور با یک طول موج، مانند شکل ۳۵-۱۰ بر آرایش دو شکاف به طور عمود می‌تابد. پهنای شکاف $۴۶\mu\text{m}$ و فاصلهٔ شکافها ۰/۳۰mm است. بین دو کمینهٔ مرتبهٔ اول نقش پراش چند فریز روشن کامل ظاهر می‌شود؟

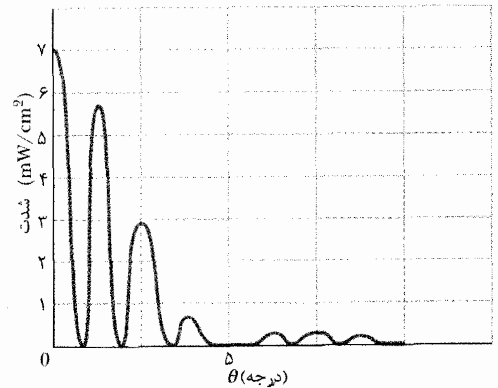
۳۷- فرض کنید که پوش مرکزی پراش یک نقش پراش دو شکافی دارای ۱۱ نوار روشن است و اولین کمینه‌های پراش فریزهای روشن را (که بر آن منطبق هستند) حذف می‌کنند. چند فریز روشن بین کمینه‌های اول و دوم پوش پراش قرار دارد؟

۳۸- دو شکاف با پهنای a و فاصلهٔ d به وسیلهٔ باریکهٔ همدوس نوری با طول موج λ روشن شده‌اند. فاصلهٔ خطی فریزهای تداخلی روشن که روی صفحه‌ای به فاصلهٔ D مشاهده می‌شود چقدر است؟

۳۹- (الف) اگر $d = ۰/۱۵۰\,\text{mm}$ ، $\lambda = ۵۵۰\,\text{nm}$ و $a = ۳۰/۰\,\mu\text{m}$ باشد، چند فریز روشن بین اولین کمینه‌های پوش پراش در دو طرف بیشینهٔ مرکزی در یک نقش دو شکافی وجود دارد؟ (ب) نسبت شدت سومین فریز روشن به شدت فریز مرکزی چقدر است؟ **SSM WWW**

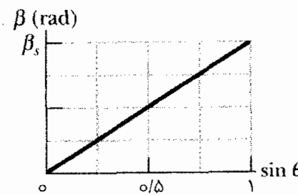
۴۰- (الف) در یک آزمایش دو شکاف، چه نسبتی از d به a باعث می‌شود که پراش فریز چهارم روشن کناری را حذف کند؟ (ب) کدام فریزهای روشن دیگر نیز حذف می‌شوند؟

۴۱- نوری با طول موج ۴۴۰ nm از دو شکاف می‌گذرد و نقش پراشی را که نمودار شدت I آن برحسب مکان زاویه‌ای θ در شکل ۳۶-۴۷ نشان داده شده است به دست می‌دهد. (الف) پهنای شکاف و (ب) فاصلهٔ شکافها را محاسبه کنید. (پ) شدتهای نمایش داده شدهٔ ۱=m و ۲=m فریزهای تداخلی را بررسی کنید.



شکل ۳۶-۴۷ مسئله ۴۱

۴۲- شکل ۳۶-۴۸ عامل β در معادلهٔ ۳۶-۲۰ را برحسب سینوس زاویهٔ θ در یک آزمایش تداخل دو شکاف با استفاده از نور با طول موج ۴۳۵nm به دست می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $\beta_s = ۸۰/۰\,\text{rad}$ مشخص شده است. (الف) فاصلهٔ شکافها، (ب) تعداد کل بیشینه‌های تداخلی (در دو طرف نقش مرکزی آنها را شمارش کنید)، (پ) کوچکترین زاویه برای یک بیشینه و (ت) بزرگترین زاویه برای یک کمینه، چقدر است؟ فرض کنید که هیچ‌یک از بیشینه‌های تداخلی توسط یک کمینهٔ پراش به طور کامل حذف نمی‌شوند.



شکل ۳۶-۴۸ مسئلهٔ ۴۲

۴۳- در آزمایش تداخل دو شکاف شکل ۳۵-۱۰، پهنای شکافها هر یک ۱۲/۰ μm، فاصلهٔ آنها ۲۴/۰ μm، طول موج ۶۰۰nm و صفحهٔ مشاهده در فاصلهٔ ۴/۰۰m قرار دارد. I_P را شدت در نقطهٔ P روی صفحهٔ مشاهده در ارتفاع $y = ۷۰/۰\,\text{cm}$ در نظر می‌گیریم. (الف) نسبت I_P به شدت I_m در مرکز نقش چقدر است؟ (ب) در نقش تداخلی دو شکاف محل P را تعیین کنید، روی کدام بیشینه یا کمینه قرار دارد یا بین بیشینه و کمینه است؟ (پ) سپس، در نقش پراش ایجاد شده، محل P را تعیین کنید، روی یک کمینه قرار دارد یا بین دو کمینه؟

بخش ۳۶-۸ توریهای پراش

۴۴- نور مرئی به طور عمود بر یک توری با ۳۱۵ شیار /mm می‌تابد. بلندترین طول موجی که در مرتبهٔ پنجم پراش دیده می‌شود چقدر است؟

۴۵- یک توری ۴۰۰ شیار /mm دارد، علاوه بر مرتبهٔ $m = ۰$، چند مرتبه از تمام طیف مرئی (۴۰۰ تا ۷۰۰ نانومتر) در آزمایش پراش ایجاد می‌شود؟ **ILW SSM**

۴۶- شاید جهت فریب انسان، برخی سوسکهای چرخندهٔ استوایی (سوسکهای دورزن) توسط تداخل نوری رنگی هستند که ناشی از میزان جهتگیری پوسته‌های آنها و تشکیل یک توری پراش است (که به جای عبور دادن نور آن را پراکنده می‌کند). هرگاه پرتوهای نور تابشی به طور عمود بر توری بتابد، زاویهٔ بین بیشینه‌های مرتبهٔ اول (در دو طرف بیشینهٔ مرتبهٔ صفر) در نور با طول موج ۵۵۰nm تقریباً °۲۶ است، فاصلهٔ خطهای توری در سوسک چقدر است؟

۴۷- یک توری پراش با پهنای ۲۰/۰mm دارای ۶۰۰۰ شیار است. (الف) نور با طول موج ۵۸۹nm به طور عمود بر توری می‌تابد. (الف) بزرگترین مقدار، (ب) دومین مقدار بزرگ و (پ) سومین مقدار بزرگ θ که در آن بیشینه‌هایی روی پردهٔ مشاهده ظاهر می‌شوند، چقدر است؟

۴۸- در یک نقش تداخلی دو شکاف خاص، ۱۰ فریز روشن داخل قلهٔ دوم کناری پوش پراش قرار دارد و کمینه‌های پراش بر بیشینه‌های تداخل دو شکاف منطبق‌اند. نسبت فاصلهٔ شکافها به پهنای شکاف چقدر است؟

۴۹- یک توری پراش که دارای ۱۸۰ شیار /mm است با یک سیگنال نوری که فقط دو طول موج $\lambda_1 = ۴۰۰\text{nm}$ و $\lambda_2 = ۵۰۰\text{nm}$ دارد روشن می‌شود. این سیگنال به طور عمود بر توری فرود می‌آید. (الف) فاصلهٔ زاویه‌ای بین بیشینه‌های مرتبهٔ دوم این دو طول موج چقدر است؟ (ب) کوچکترین زاویه‌ای که در آن دو بیشینهٔ حاصل برهم نهاده شده‌اند چقدر است؟ (پ) بزرگترین مرتبه‌ای که برای آن بیشینه‌های دو طول موج در نقش پراش وجود دارند چقدر است؟

۵۰- یک توری پراش از شکافهایی با پهنای ۳۰۰nm و فاصلهٔ ۹۰۰nm ساخته شده است. این توری با موجهای تخت تکفام با طول موج $\lambda = ۶۰۰\text{nm}$ با تابش عمود روشن شده است. (الف) چند بیشینهٔ پراش در نقش کامل پراش وجود دارد؟ (ب) اگر توری ۱۰۰۰ شکاف داشته باشد، پهنای زاویه‌ای خط طیفی مشاهده شده در مرتبهٔ اول چقدر است؟

۵۱- نور با طول موج ۶۰۰nm به طور عمود بر یک توری پراش می‌تابد. دو بیشینهٔ مجاور در زاویه‌هایی رخ می‌دهند که با $\sin\theta = ۰/۲$ و $\sin\theta = ۰/۳$ داده می‌شوند. بیشینه‌های مرتبهٔ چهارم محو شده‌اند. (الف) فاصلهٔ بین شکافهای مجاور چقدر است؟ (ب) کوچکترین پهنای شکافی که این توری می‌تواند

داشته باشد چقدر است؟ با این پهنای شکاف، (پ) بزرگترین مقدار، (ت) دومین مقدار بزرگ، و (ث) سومین مقدار بزرگ مرتبهٔ m بیشینه‌های ایجاد شده توسط این توری چقدر است؟
SSM WWW

۵۲- با نوری حاصل از لامپ تخلیهٔ گازی با تابش عمود بر یک توری با فاصلهٔ شکافهای $1/73 \mu m$، بیشینه‌های تیزی از نور سبز به طور تجربی با زاویه‌های θ برابر با $\pm 17/6°$، $37/3°$, $-37/1°$، $65/2°$ و $-65/0°$ به دست آمده است. طول موج نور سبز را که با این داده‌ها بهترین سازگاری را داشته باشد محاسبه کنید.

۵۳- فرض کنید که حدود طیف مرئی به طور اختیاری به صورت $430 nm$ و $680 nm$ انتخاب شده‌اند. تعداد خطها بر میلی‌متر یک توری را محاسبه کنید به طوری که طیف مرتبهٔ اول را به اندازهٔ زاویهٔ $20/0°$ پخش کند.

۵۴- باریکه‌ای از نور شامل طول موجهایی از $460/0 nm$ تا $640/0 nm$ به طور عمود بر یک توری پراش با 160 خط/mm می‌تابد. (الف) کمترین مرتبه‌ای که با مرتبهٔ دیگر همپوشانی می‌کند چیست؟ (ب) بزرگترین مرتبه‌ای که برای آن کل گسترهٔ طول موج باریکه حضور دارد چیست؟ در این بزرگترین مرتبه، در چه زاویه‌ای نور در طول موج (پ) $460/0 nm$ و (ت) $640/0 nm$ ظاهر می‌شود؟ (ث) بزرگترین زاویه‌ای که در آن نور با طول موج $460/0 nm$ ظاهر می‌شود چقدر است؟ GO

۵۵- یک توری با 350 خط/mm با تابش عمودی با نور سفید روشن می‌شود. طیفی روی پردهٔ مشاهده در فاصلهٔ $30/0 cm$ از توری تشکیل شده است. اگر روزنه‌ای به اندازهٔ $10/0 mm^2$ در صفحه ایجاد شود به طوری که لبهٔ داخلی آن از بیشینهٔ مرکزی $50 mm$ فاصله داشته و با آن موازی باشد، (الف) کوتاهترین و (ب) بلندترین طول موجهایی که می‌تواند از این روزنه بگذرد چقدر است؟

۵۶-این عبارت را برای نقش شدت یک «توری» با سه شکاف به دست آورید.

$$I = \frac{1}{9} I_m (1 + 4\cos\phi + 4\cos^2\phi)$$

که در آن $\phi = (2\pi d \sin\theta)/\lambda$ و $a << \lambda$ **SSM**

بخش ۳۶-۹ توریها: پاشندگی و توان تفکیک

۵۷-یک توری پراش با پهنای $2/0 cm$ دارای 1000 خط/cm در این پهناست. با طول موج $6000 nm$، کوچکترین اختلاف طول موجی که این توری در مرتبهٔ دوم می‌تواند تفکیک کند چقدر است؟

۵۸-خط D در طیف سدیم یک دوتایی با طول موجهای $589/0 nm$ و $589/6nm$ است. کمترین مقدار شیارهای مورد نیاز در توری که این دو تایی را در مرتبهٔ دوم طیف تفکیک کند چقدر است؟ به مسئلهٔ نمونهٔ ۳۶-۶ نگاه کنید.

۵۹- نوری با طول موج $589nm$ از یک لامپ سدیم به طور عمود بر یک توری با 40000 شیار در پهنای $76nm$ می‌تابد. مرتبهٔ اول (الف) پاشندگی D و (ب) توان تفکیک R، مرتبهٔ دوم (پ) D و (ت) R و مرتبهٔ سوم (ث) D و (ج) R چقدر است؟

۶۰- (الف) برای تفکیک طول موجهای $415/496nm$ و $415/487nm$ در مرتبهٔ دوم چند شیار باید در توری پراش با پهنای $4/00cm$ وجود داشته باشد؟ (ب) در چه زاویه‌ای بیشینه مرتبهٔ دوم حاصل می‌شود؟

۶۱- چشمه‌ای که مخلوطی از اتمهای هیدروژن و دوترون دارد در دو طول موج که متوسط آنها $659/3nm$ و فاصلهٔ آنها $0/180 nm$ است نور قرمز گسیل می‌کند. کمینهٔ شیارهای مورد نیاز در توری پراش که این خطها را در مرتبهٔ اول تفکیک کند چقدر است؟ **SSM ILW**

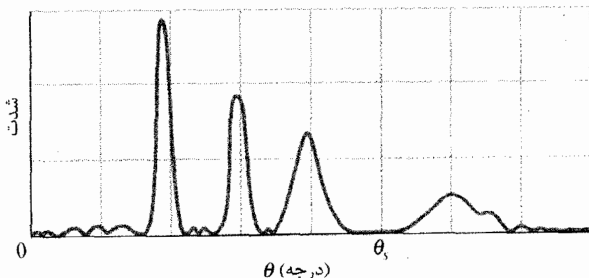
۶۲- یک توری دارای 600 شیار mm/ و پهنای آن $5/0 mm$ است. (الف) کوچکترین بازهٔ طول موجی که بتواند در مرتبهٔ سوم در $\lambda = 500nm$ تفکیک شود چقدر است؟ (ب) چند بیشینهٔ مرتبهٔ بالاتر می‌تواند دیده شود؟

۶۳- با توری خاصی دوتایی سدیم (به مسئلهٔ نمونهٔ ۳۶-۶ نگاه کنید). در زاویهٔ $10°$ نسبت به عمود دیده می‌شود و در حد تفکیک شدن است. (الف) فاصلهٔ شیارهای توری و (ب) پهنای کل شیارها را پیدا کنید.

۶۴- یک توری پراش با نور تکفام عمود بر توری که خط معینی را در زاویهٔ θ ایجاد می‌کند روشن شده است. (الف) حاصلضرب نیم پهنای خط و توان تفکیک توری چقدر است؟ (ب) این حاصلضرب برای مرتبهٔ اول توری با فاصلهٔ شیارهای $900nm$ در نور با طول موج $600nm$ چقدر است؟

بخش ۳۶-۱۰ پراش توسط لایه‌های منظم

۶۵-شکل ۳۶-۴۹ نمودار شدت برحسب مکان زاویه‌ای θ برای پراش یک باریکهٔ پرتو x توسط یک بلور را نشان می‌دهد. مقیاس محور افقی با $\theta_s = 2/00°$ مشخص شده است. این باریکه دارای دو طول موج و فاصلهٔ بین صفحه‌ای صفحه‌های بازتاب دهندهٔ $0/94nm$ است. (الف) کوتاهترین و (ب) بلندترین طول موج در باریکه چقدر است؟



شکل ۳۶-۴۹ مسئلهٔ ۶۵

۶۶- اگر بازتاب مرتبهٔ اول در بلوری با زاویهٔ براگ °۳/۴ رخ دهد، در چه زاویهٔ براگی از همین دسته صفحه‌های بازتاب دهنده بازتاب مرتبهٔ دوم رخ می‌دهد؟

۶۷- معلوم شده است که پرتوهای x با طول موج ۰/۱۲nm در زاویهٔ براگ °۲۸ از بلور لیتیوم فلوراید بازتاب مرتبهٔ دوم می‌یابد. فاصلهٔ بین صفحه‌ای صفحه‌های بازتاب دهنده در این بلور چقدر است؟

۶۸- کوچکترین زاویهٔ براگ برای پرتوهای x با طول موج ۳۰pm برای بازتاب از صفحه‌های بازتاب دهنده به فاصلهٔ ۰/۳nm از یکدیگر در یک بلور کلسیت چقدر است؟

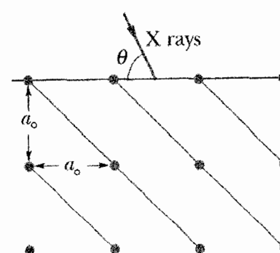
۶۹- یک باریکهٔ پرتو x با طول موج A وقتی با زاویهٔ تابش °۲۳ با صفحهٔ بلور بر آن فرود آید بازتاب مرتبهٔ اول پیدا می‌کند و وقتی باریکه‌ای به طول موج ۹۷pm با زاویهٔ °۶۰ به آن صفحه فرود آید بازتاب مرتبهٔ سوم می‌یابد. با فرض اینکه دو باریکه از دسته‌ای از صفحه‌های بازتاب دهندهٔ یکسان بازتاب کنند، (الف) فاصلهٔ صفحه‌های داخلی و (ب) طول موج A چقدر است؟

۷۰- یک باریکهٔ پرتو x با طول موج معین بر بلور $NaCl$، با زاویهٔ °۳۰/۰ بر دسته‌ای از صفحه‌های بازتاب دهنده با فاصلهٔ ۳۹/۸μm می‌تابد. اگر بازتاب از این صفحه‌ها در مرتبهٔ اول باشد، طول موج پرتو x چقدر است؟

۷۱- یک ساختار بلوری مربعی دوبعدی، مانند یک ضلع ساختار نشان داده شده در شکل ۳۶-۳۰ الف را در نظر بگیرید. بزرگترین فاصلهٔ بین صفحه‌ای صفحه‌های بازتاب دهنده برابر با ضلع a_0 یاختهٔ یکه است. (الف) بزرگترین فاصلهٔ بین صفحه‌ای دوم، (ب) سوم، (پ) چهارم، (ت) پنجم و (ث) ششم، را محاسبه و رسم کنید. (ج) نشان دهید که نتیجه‌های به دست آمده از (الف) تا (ث) با فرمول کلی زیر مطابقت دارد

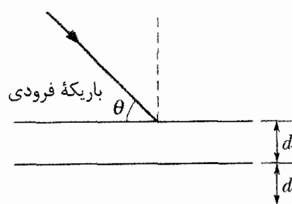
$$d=\frac{a_0}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

۷۲- در شکل ۳۶-۵۰، بازتاب مرتبهٔ اول از صفحه‌های بازتاب دهندهٔ نشان داده شده وقتی که باریکه پرتو x با طول موج ۰/۲۶۰nm، زاویهٔ $\theta=63/8°$ با صفحهٔ بالایی بلور بسازد رخ می‌دهد. ضلع a_0 یاختهٔ یکه چقدر است؟



شکل ۳۶-۵۰ مسئلهٔ ۷۲

۷۳- در شکل ۳۶-۵۱ باریکه‌ای از پرتوهای x با طول موج ۰/۱۲۵nm بر بلور $NaCl$ با زاویهٔ $\theta=45/0°$ و بر وجه بالایی بلور و دسته‌ای از صفحه‌های بازتاب دهنده می‌تابد. فاصلهٔ صفحه‌های بازتاب دهنده $d=0/252$nm است. بلور را به اندازهٔ زاویهٔ ϕ حول محوری عمود بر صفحهٔ کاغذ می‌چرخانیم تا این صفحه‌های بازتاب دهنده بیشینه‌های پراش را به دست دهند. اگر بلور به طور ساعتگرد چرخیده باشد (الف) کوچکترین مقدار ϕ و (ب) بزرگترین مقدار ϕ چقدر است، و اگر به طور پادساعتگرد چرخیده باشد (پ) کوچکترین مقدار ϕ و (ت) بزرگترین مقدار ϕ چقدر است؟ SSM



شکل ۳۶-۵۱ مسئله‌های ۷۳ و ۷۴

۷۴- در شکل ۳۶-۵۱ یک باریکهٔ پرتو x با طول موج از ۹۵/۰pm تا ۱۴۰pm با زاویهٔ $\theta=45/0°$ بر دسته‌ای از صفحه‌های بازتاب دهنده با فاصلهٔ $d=275$pm می‌تابد. (الف) بلندترین طول موج و (ب) مرتبهٔ بزرگی m مربوط و (پ) کوتاهترین λ و (ت) m مربوط به بیشینهٔ شدت در پراش باریکه، چقدرند؟

مسئله‌های اضافی

۷۵- در سال ۱۹۸۵/۱۳۶۴، یک باریکهٔ لیزر از ایستگاه اپتیکی نیروی هوایی در مائویی هاوایی ارسال و از شاتل *دیسکاوری* که ۳۵۴km از آن فاصله داشت بازتابیده شد. قطر بیشینهٔ مرکزی باریکه در محل شاتل ۹/۱m و طول موج باریکه ۵۰۰nm بود. قطر مؤثر دهانه لیزر در ایستگاه زمینی مائویی چقدر بوده است؟ (*راهنمایی:* فرض کنید باریکهٔ لیزری فقط به دلیل پراش پخش می‌شود، و دهانهٔ خروجی دایره‌ای است.)

۷۶- فضانوردی در یک شاتل فضایی مدعی است که می‌تواند دو چشمهٔ نقطه‌ای روی سطح زمین را در فاصلهٔ ۱۶۰km پایین در حد تفکیک شدن ببیند. با فرض شرایط آرمانی (الف) فاصلهٔ زاویه‌ای و (ب) فاصلهٔ خطی را محاسبه کنید. $\lambda=540$nm و قطر مردمک چشم فضانورد را ۵/۰mm در نظر بگیرید.

۷۷- نور مرئی به طور عمود بر یک توری پراش با $/mm$ شیار ۲۰۰ می‌تابد. (الف) بلندترین طول موج، (ب) دومین طول موج بلند و (پ) سومین طول موج بلند مربوط به بیشینهٔ شدت در $\theta=30/0°$ چقدر است؟ SSM

۷۸- وقتی نور تکفام بر شکافی به پهنای ۲۲/۰μm بتابد، اولین کمینهٔ پراش در زاویهٔ °۱/۸۰ از امتداد نور فرودی مشاهده می‌شود. طول موج این نور چقدر است؟

۷۹- در یک آزمایش تک شکاف، یک کمینهٔ شدت برای نور نارنجی ($\lambda = ۶۰۰nm$) و یک کمینهٔ شدت برای نور آبی - سبز ($\lambda = ۵۰۰nm$) در زاویهٔ یکسان ۱/۰۰mrad وجود دارد. در چه کمینهٔ پهنای شکافی این امر امکان‌پذیر است؟ **SSM**

۸۰- در نقش تداخلی دو شکاف، اگر ۱۷ فریز روشن در داخل پوش مرکزی پراش وجود داشته و کمینه‌های پراش بر بیشینه‌های تداخل دو شکاف منطبق باشند، نسبت فاصلهٔ شکافها به پهنای شکاف چقدر است؟

۸۱- در تداخل دو شکاف، اگر فاصلهٔ شکافها $۱۴\mu m$ و پهنای شکافها هر یک $۲/۰ \mu m$ باشد، (الف) چند بیشینهٔ دو شکاف در قلهٔ مرکزی پوش پراش وجود دارد و (ب) چند بیشینهٔ دو شکاف در هر طرف اولین قلهٔ کناری پوش پراش وجود دارد؟ **SSM**

۸۲- یک آزمایش پراش تک شکاف با نور با طول موج ۴۲۰nm که به طور عمود بر شکاف با پهنای $۵/۱۰ \mu m$ می‌تابد انجام می‌شود. صفحهٔ مشاهده در فاصلهٔ ۳/۲۰m قرار دارد. روی صفحه، فاصلهٔ بین مرکز نقش پراش و دومین کمینهٔ پراش چقدر است؟

۸۳- یک باریکهٔ نور با گسترهٔ باریک طول موج به مرکز ۴۵۰nm به طور عمود بر توری پراشی با پهنای ۱/۸۰cm و چگالی ۱۴۰۰ خط/cm در این پهنا می‌تابد. برای این نور، کوچکترین اختلاف طول موجی که این توری می‌تواند در مرتبهٔ سوم تفکیک کند چقدر است؟

۸۴- اگر به اجسام در فاصلهٔ ۴۰m از خود نگاه کنید، کوچکترین طول (در امتداد عمود بر خط دید) که بنابر معیار ریلی می‌توانید تفکیک کنید چقدر است؟ فرض کنید که قطر مردمک چشم ۴/۰۰mm و طول موج ۵۰۰nm است.

۸۵- دو گل زرد به فاصلهٔ ۶۰cm در امتداد خط عمود بر خط دید شما تا گلها قرار گرفته‌اند. این گلها وقتی در حد تفکیک‌پذیری بنابر معیار ریلی باشند، چقدر از شما فاصله دارند؟ فرض کنید طول موج نور حاصل از گلها ۵۵۰nm و قطر مردمک چشم ۵/۵mm است.

۸۶- در آزمایش پراش تک شکاف، اگر کمینه‌های دوم پراش در زاویهٔ $۳۷/۰^\circ$ از مرکز نقش پراش روی صفحهٔ مشاهده رخ داده باشند، نسبت پهنای شکاف به طول موج چقدر است؟

۸۷- یک توری پراش به پهنای ۳/۰۰cm مرتبهٔ دوم را در $۳۳/۰^\circ$ با نور با طول موج ۶۰۰nm ایجاد می‌کند. تعداد کل شیارهای توری چقدر است؟

۸۸- یک باریکهٔ نور، مرکب از دو طول موج ۵۹۰/۱۵۹nm و ۵۹۰/۲۲۰nm است که باید با یک توری پراش تفکیک شوند. اگر توری در پهنای ۳/۸۰cm این شیارها را داشته باشد، کمترین تعداد شیارهای لازم برای تفکیک دو طول موج در مرتبهٔ دوم چقدر است؟

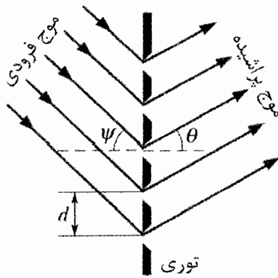
۸۹- یک سفینهٔ تجسسی که در مداری ۱۶۰km بالاتر از سطح زمین می‌چرخد دارای عدسی با فاصلهٔ کانونی ۳/۶m است و می‌تواند اجسام به کوچکی ۳۰cm روی زمین را تفکیک کند. برای مثال، این سفینه می‌تواند به آسانی اندازهٔ بخش مکش هوای هواپیما را مشخص کند. قطر مؤثر عدسی با توجه به ملاحظات پراش چقدر است؟ فرض کنید $\lambda = ۵۵۰nm$

۹۰- قطر مردمک چشم انسان ۵/۰۰mm است. بنابر معیار ریلی اگر تصویرهای دو جسم کوچک وقتی فاصلهٔ آنها از چشم ۲۵۰mm است در حد تفکیک شدن باشند فاصلهٔ آن دو جسم چقدر است؟ فرض کنید اینها با نوری با طول موج ۵۰۰nm روشن شده‌اند.

۹۱- همانطور که در شکل ۳۶-۵۲ نشان داده شده است، نور با زاویهٔ ψ بر یک توری می‌تابد. نشان دهید که فریزهای روشن با زاویهٔ θ که در معادلهٔ زیر صدق می‌کند تشکیل می‌شوند.

به ازای $d(\sin\psi + \sin\theta) = m\lambda$ ، $m = ۰,۱,۲,...$

(این معادله را با معادلهٔ ۳۶-۲۵ مقایسه کنید.) در این فصل فقط حالت خاص $\psi = ۰$ در نظر گرفته شده است.



شکل ۳۶-۵۲ مسئلهٔ ۹۱

۹۲- یک توری با $d = ۱/۵۰ \mu m$ در زاویه‌های مختلفی از تابش نور با طول موج ۶۰۰nm روشن می‌شود. انحراف زاویه‌ای بیشینهٔ مرتبهٔ اول از جهت تابش را برحسب تابعی از زاویهٔ فرود (۰ تا ۹۰°) رسم کنید. (به مسئلهٔ ۹۱ نگاه کنید.)

۹۳- اگر پهنای شکاف یک تک شکاف را دو برابر کنیم، شدت بیشینهٔ مرکزی نقش پراش با ضریب ۴ افزایش می‌یابد، حتی اگر انرژی عبوری از شکاف فقط دو برابر شود. این را به طور کمی شرح دهید.

۹۴- در آزمایشی برای زیر نظر قرار گرفتن سطح ماه با یک باریکهٔ نوری، تپ تابشی از یک لیزر یا قوت ($\lambda = ۰/۶۹\mu m$) از طریق یک تلسکوپ بازتابی با آینه‌ای به شعاع ۱/۳m به سمت ماه تابیده می‌شود. بازتابانندهٔ واقع در ماه مانند یک آینهٔ دایره‌ای تخت به شعاع ۱۰cm عمل می‌کند، و نور را مستقیماً به طرف تسلکوپ روی زمین باز می‌تاباند و سپس نور بازتابیده پس از متمرکز شدن با این تلسکوپ آشکار می‌شود. تقریباً چه کسری از انرژی نور اولیه توسط آشکار ساز دریافت می‌شود؟ فرض کنید که برای هر جهت حرکت تمام انرژی در قلهٔ پراش مرکزی قرار دارد.

۹۵- توان تفکیک یک توری پراش $R=\lambda_{avg}/\Delta\lambda = Nm$ است. (الف) نشان دهید که گسترهٔ بسامد متناظر Δf را که می‌توان تفکیک کرد با رابطهٔ $\Delta f = c/Nm\lambda$ داده می‌شود. (ب) از شکل ۳۶-۲۱، نشان دهید که اختلاف زمانهای لازم برای حرکت پرتو از زیر و بالای شکل با مقدار $\Delta t = (Nd/c)\sin\theta$ داده می‌شود. (پ) نشان دهید که $(\Delta f)(\Delta t) = 1$، این رابطه مستقل از عوامل مختلف توری است. فرض کنید $N >> 1$. SSM

۹۶- یک دستگاه دو شکاف با پهنای هر یک از شکافها برابر با ۰/۰۳۰mm و فاصلهٔ شکافها ۰/۱۸mm با نور ۵۰۰nm در جهت عمود بر صفحهٔ شکافها روشن می‌شود. تعداد کل فریزهای روشنی که بین دو کمینهٔ مرتبهٔ اول نقش پراش ظاهر می‌شود چقدر است؟ (فریزهایی را که بر کمینه‌های نقش پراش منطبق هستند به حساب نیاورید.) GO

۹۷- یک توری پراش ۸۹۰۰ شکاف در پهنای ۱/۲۰cm دارد. اگر نور با طول موج ۵۰۰nm از آن عبور کند، تعداد مرتبه‌های (بیشینه‌های) واقع در یک طرف بیشینهٔ مرکزی چقدر است؟

۹۸- یک توری پراش با پهنای ۱/۰۰cm دارای ۱۰۰۰۰ شکاف موازی است. نور تکفامی که به طور عمود می‌تابد با زاویهٔ °۳۰ در مرتبهٔ اول پراشیده می‌شود. طول موج نور چقدر است؟

۹۹- یک توری پراش دارای ۲۰۰ خط /mm است. نور شامل گسترهٔ پیوسته‌ای از طول موجهای بین ۵۵۰nm و ۷۰۰nm به طور عمود بر توری می‌تابد. (الف) پایینترین مرتبه‌ای که با مرتبهٔ دیگر همپوشانی می‌کند چقدر است؟ (ب) بیشترین مرتبه‌ای که در آن طیف کامل وجود دارد چقدر است؟

۱۰۰- فرض کنید که فاصلهٔ دو نقطه ۲/۰cm است. اگر این نقطه‌ها با چشمی که قطر مردمک آن ۵/۰mm است دیده شوند، در چه فاصله‌ای از بیننده این نقطه‌ها در محدودهٔ ریلی برای تفکیک‌پذیری واقع‌اند؟ فرض کنید طول موج نور ۵۰۰nm است.

۱۰۱- نشان دهید که پاشندگی یک توری $D=(\tan\theta)/\lambda$ است.

۱۰۲- نور تکفام (۴۵۰nm = طول موج) به طور عمود بر یک شکاف می‌تابد (۰/۴۰mm = پهنا). صفحه‌ای موازی با صفحهٔ شکاف قرار دارد، و روی آن فاصلهٔ بین دو کمینه در هر طرف بیشینهٔ مرکزی ۱/۸mm است. (الف) فاصلهٔ شکاف تا صفحه چقدر است؟ (*راهنمایی:* زاویه تا هر کمینه به قدری کوچک است که $\sin\theta \approx \tan\theta$). (ب) فاصلهٔ بین اولین کمینه و سومین کمینه در یک طرف بیشینهٔ مرکزی روی پرده چقدر است؟

۱۰۳- نوری شامل آمیزه‌ای از دو طول موج ۵۰۰nm و ۶۰۰nm به طور عمود بر یک توری پراش می‌تابد. می‌خواهیم (۱) اولین و دومین بیشینه برای هر طول موج در $\theta \le 20°$ ظاهر شود، (۲) پاشندگی تا جایی که ممکن است بیشتر باشد، و (۳) مرتبهٔ سوم برای نور ۶۰۰nm مرتبهٔ محو باشد. (الف) فاصلهٔ شکافها باید چقدر باشد؟ (ب) کوچکترین پهنای شکافی که می‌تواند به کار رود چقدر است؟ (پ) برای مقدارهای محاسبه شده در (الف) و (ب) و نور با طول موج ۶۰۰nm، بزرگترین مرتبهٔ بیشینه‌های ایجاد شده توسط توری چقدر است؟

۱۰۴- باریکه‌ای از پرتوهای x با طول موج از ۰/۱۲۰nm تا ۰/۰۷۰۰nm از دسته‌ای از صفحه‌های بازتاب دهندهٔ یک بلور پراکنده می‌شود. فاصلهٔ صفحه‌ای ۰/۲۵۰nm است. مشاهده می‌شود که باریکه‌های پراکنده شده برای ۰/۱۰۰nm و ۰/۰۷۵۰nm ایجاد شده‌اند. زاویهٔ بین باریکه‌های فرودی و پراکنده شده چقدر است؟

۱۰۵- نشان دهید که در یک توری که از نوارهای متناوب شفاف و کدر با پهنای مساوی تشکیل شده است، همهٔ مرتبه‌های زوج بیشینه‌ها (غیر از $m=0$) حذف می‌شوند.

۱۰۶- نوری با طول موج ۵۰۰nm از شکافی با پهنای ۲/۰۰μm پراشیده شده و بر صفحه‌ای به فاصلهٔ ۲/۰۰m برخورد می‌کند. روی صفحه فاصلهٔ بین مرکز نقش پراش و سومین کمینهٔ پراش چقدر است؟

۱۰۷- در نقش تداخلی دو شکاف اگر ۸ فریز روشن در اولین قلهٔ کناری پوش پراش وجود داشته باشند و کمینه‌های پراش بر بیشینه‌های تداخل دو شکاف منطبق باشند، در این صورت نسبت فاصلهٔ شکافها به پهنای شکاف چقدر است؟

۱۰۸- نور سفید (شامل طول موجهای از ۴۰۰nm تا ۷۰۰nm) بر یک توری به طور عمود می‌تابد. نشان دهید بدون توجه به فاصله‌های d توری، مرتبهٔ دوم و مرتبهٔ سوم همپوشانی می‌کنند.

۱۰۹- در شکل ۳۶-۵۳ اگر $d=a$ باشد، دو شکاف به یک شکاف با پهنای $2a$ تبدیل می‌شود. نشان دهید که معادلهٔ ۳۶-۱۹ به موقعیتی تبدیل می‌شود که نقش پراش برای چنین شکافی را به دست می‌دهد.



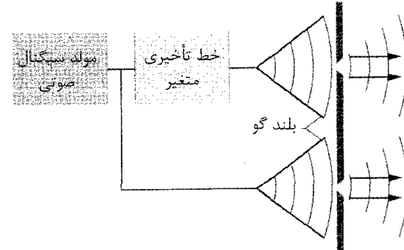
شکل ۳۶-۵۳ مسئله ۱۰۹

۱۱۰- معادلهٔ ۳۶-۲۸ یعنی عبارت نیم پهنای خطها در نقش پراش توری را به دست آورید.

۱۱۱- ثابت کنید که ممکن نیست هم طول موج پرتو فرودی و هم فاصلهٔ صفحه‌های بازتاب کننده در یک بلور را با اندازه‌گیری زاویه‌های براگ در چند مرتبه تعیین کرد.

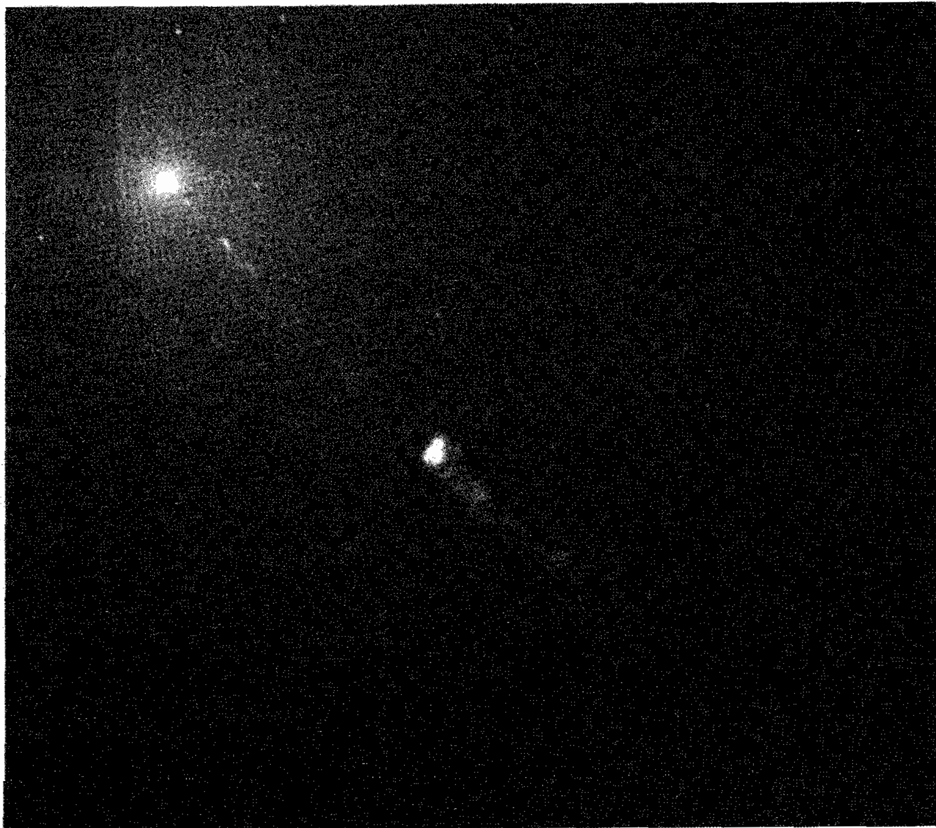
۱۱۲- چند مرتبه از کل طیف مرئی (۴۰۰nm تا ۷۰۰nm) را می‌توان به وسیلهٔ یک توری با ۵۰۰ خط /mm ایجاد کرد؟

۱۱۳- یک دستگاه دو شکاف صوتی (با فاصلهٔ شکافهای d و پهنای شکاف a) با دو بلندگوی نشان داده شده در شکل ۳۶-۵۴ به کار انداخته شده است. با استفاده از یک خط تأخیری، فاز یکی از بلندگوها را نسبت به بلندگوی دیگر می‌توان تغییر داد. تغییرات ایجاد شده در نقش پراش دو شکاف را در فاصله های زیاد وقتی اختلاف فاز بین بلندگوها از صفر تا ۲π تغییر کند بطور مفصل توصیف کنید. هم آثار تداخل و هم آثار پراش را در نظر بگیرید.



شکل ۳۶-۵۴ مسئلهٔ ۱۱۳

۳۷
نسبیت



چگونه می‌توان گفت چه هیولایی در مرکز M۸۷ قرار دارد؟

فورانی به طول ۵۰۰۰ سال نوری از مرکز کهکشان M۸۷ (لکهٔ نورانی در انتهای سمت چپ فواره) کشیده شده است، که ۵×۱۰^۷ سال نوری با ما فاصله دارد. این فوران از الکترونهایی حاصل شده است که تقریباً با سرعت نور حرکت می‌کنند. برای خارج ساختن الکترونها از این کهکشان در چنین سرعت زیادی باید اتفاق عجیبی در مرکز M۸۷ افتاده باشد. آیا در آنجا هیولایی وجود دارد؟ متأسفانه M۸۷ آن چنان از ما دور است که بتوانیم چیزی را در مرکز آن ببینیم.

پاسخ در همین فصل.

۱-۳۷ فیزیک چیست؟

یک موضوع اساسی فیزیک **نسبیت** است، حوزهٔ مطالعه‌ای که رویدادها (چیزهایی که رخ می‌دهند) را اندازه‌گیری می‌کند: کجا و کی رخ داده‌اند، و دو رویداد چقدر در فضا و زمان از هم فاصله دارند. افزون بر این، نسبیت به تبدیل چنین اندازه‌گیریهایی بین چارچوبهای مرجعی که نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند مربوط می‌شود. (از این رو *نسبیت* نامیده می‌شود.)

تبدیلها و چارچوبهای مرجع متحرک، مانند آنهایی که در بخشهای ۴-۸ و ۴-۹ (جلد اول) بحث کردیم در سال ۱۹۰۵/۱۲۸۴ به وسیلهٔ فیزیکدانان کاملاً درک شده و عادی بود. سپس آلبرت اینشتین[1] (شکل ۳۷-۱) **نظریهٔ نسبیت خاص** خود را منتشر کرد. صفت *خاص* بدان معناست که نظریه فقط به **چارچوبهای مرجع لخت**، یعنی چارچوبهایی که قانونهای نیوتون در آنها معتبرند می‌پردازد. (*نظریهٔ نسبیت عام اینشتین* وضعیتهای خیلی مشکلتر را که در آنها چارچوبهای مرجع شتابدار هستند بررسی می‌کند؛ در این فصل اصطلاح *نسبیت* فقط برای چارچوبهای مرجع لخت به کار برده می‌شود.)



شکل ۳۷-۱ وضعیت قرار گرفتن اینشتین در عکس که شروعی برای نام آوری او شد.

اینشتین با شروع با دو فرضیهٔ ساده و اغواگرانه، جهان علم را با نشان دادن اینکه عقاید قدیمی در مورد نسبیت نادرست است مبهوت کرد. هر چند که همهٔ افراد چنان به آن عقاید عادت کرده بودند که به نظر آنها این عقاید ناشی از عقل سلیم و غیر قابل پرسش بود. ولی این عقل سلیم، فقط از آزمایش با چیزهایی که نسبتاً آهسته حرکت می‌کردند حاصل شده بود. نسبیت اینشتین، که بعدها مشخص شد برای تمام تندیها ممکن است درست باشد، اثرهای زیادی را که، در ابتدا باور نکردنی به نظر می‌رسیدند چون هیچ‌کس آنها را تجربه نکرده بود، پیش‌بینی می‌کرد.

به خصوص، اینشتین نشان داد که فضا و زمان در هم آمیخته‌اند؛ یعنی زمان بین دو رویداد به اینکه آنها چقدر از هم فاصله دارند بستگی دارد، و برعکس. هم چنین این در هم آمیختگی برای ناظرهای مختلفی که نسبت به یکدیگر در حرکت‌اند نیز متفاوت است. یک نتیجه این است که زمان با آهنگ ثابتی سپری نمی‌شود، یعنی مثل این است که گویی با تنظیم مکانیکی یک ساعت اصلی مرجع که جهان را کنترل می‌کند، مورد رسیدگی قرار می‌گیرد. به طور دقیقتر این آهنگ تنظیم‌پذیر است: حرکت نسبی می‌تواند آهنگی را که با آن زمان سپری می‌شود تغییر دهد. قبل از سال ۱۹۰۵/۱۲۸۴، هیچ‌کس به جز تعدادی خیال پرداز به آن فکر نکرده بودند. امروزه مهندسان و دانشمندان آن را به عنوان یک فرض مسلم در نظر می‌گیرند چون تجربهٔ آنها با نسبیت خاص عقل سلیم را تغییر شکل داده است. برای مثال، مهندسی که با سیستم مکان‌یابی جهانی[2] سفینه‌های NAVSTAR سر و کار دارد باید به طور عادی از نسبیت برای تعیین آهنگی که با آن زمان در سفینه سپری می‌شود استفاده کند زیرا این آهنگ با آهنگ روی سطح زمین فرق می‌کند.

نسبیت خاص به مشکل بودن شهرت دارد. حداقل از نظر ریاضی، مشکل نیست، ولی، دربارهٔ اینکه باید دقت کرد *چه کسی چه چیزی* را دربارهٔ رویدادی اندازه می‌گیرد و اندازه‌گیری *چگونه* انجام می‌گیرد می‌تواند مشکل باشد- و می‌تواند مشکل باشد چون می‌تواند با تجربهٔ عادی مغایرت داشته باشد.

۲-۳۷ اصلهای موضوع

اکنون دو اصل موضوع نسبیت را که نظریهٔ اینشتین بر آنها استوار است بررسی می‌کنیم:

> ☜ **اصل موضوع نسبیت:** قانونهای فیزیک برای ناظرها در همه چارچوبهای مرجع لخت یکسان است. هیچ چارچوبی نسبت به چارچوب دیگر ارجحیت ندارد.

گالیله فرض کرده بود که قانونهای *مکانیک* در همهٔ چارچوبهای مرجع لخت یکسان می‌مانند. (قانون اول حرکت نیوتون یک پیامد مهم است.) اینشتین این عقیده را به همهٔ قانونهای فیزیک مخصوصاً الکترومغناطیس و نورشناسی تعمیم داد. این اصل موضوع *نمی‌گوید* که مقدارهای اندازه‌گیری شدهٔ همه کمیتهای فیزیکی برای همهٔ ناظرهای لخت یکسان است؛ اغلب آنها یکسان نیستند. این *قانونهای فیزیک* است که یکسان هستند و آن اندازه‌گیریها را به یکدیگر ربط می‌دهند.

---

1. Albert Einstein

2. Global Positioning System

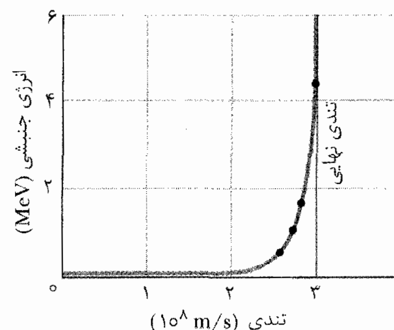
☜ تندی نور در خلأ در تمام جهتها و در تمام چارچوبهای مرجع لخت مقدار یکسان c را دارد.

هم چنین می‌توانیم این اصل موضوع را این گونه بیان کنیم که در طبیعت یک *تندی نهایی* c وجود دارد که در تمام جهتها و در تمام چارچوبهای مرجع لخت یکسان است. نور با این تندی نهایی حرکت می‌کند. ولی، تندی هر موجودی که انرژی یا اطلاعاتی را حمل می‌کند نمی‌تواند از این تندی بیشتر باشد. افزون بر این، هر ذره‌ای که جرمی دارد، صرفنظر از اینکه چه مقدار شتاب دارد و چه مدت شتابدار می‌ماند، نمی‌تواند به تندی c برسد. (حرکتهای تندتر از نور که در داستانهای تخیلی علمی دیده می‌شود امکان پذیر نیستند.)

هر دو اصل موضوع به طور گسترده‌ای آزمایش شده‌اند و هیچ استثنایی در آنها دیده نشده است.

تندی نهایی

وجود حدی برای تندی الکترونهای شتابدار در سال ۱۹۶۴/۱۳۴۳ با آزمایشی توسط برتوزی[1] نشان داده شد، او الکترونها را با روشی مستقل– تا تندیهای مختلفی شتاب داد و انرژیهای جنبشی آنها را اندازه گرفت. او دریافت که وقتی نیرویی که بر الکترون خیلی سریع وارد می‌شود افزایش یابد، انرژی جنبشی اندازه‌گیری شدهٔ الکترون به سمت مقدارهای بسیار زیاد افزایش می‌یابد اما تندی آن به مقدار محسوسی زیاد نمی‌شود (شکل ۳۷-۲). الکترونها در آزمایشگاهها حداقل تا ۰/۹۹۹ ۹۹۹ ۹۹۹ ۹۵ برابر تندی نور– هر چه نزدیک‌تر به آن– شتاب داده شده‌اند ولی این تندی هنوز کمتر از تندی نهایی c است.



شکل ۳۷-۲ نقطه‌ها مقدارهای اندازه‌گیری شدهٔ انرژی جنبشی یک الکترون را که برحسب تندی اندازه‌گیری شدهٔ آن رسم شده است نشان می‌دهند. بدون توجه به اینکه چقدر انرژی به الکترون (یا به هر ذرهٔ دیگر جرم‌دار) داده شود، تندی آن هرگز نمی‌تواند برابر یا بیش از تندی حدی نهایی c شود (منحنی رسم شده از میان نقطه‌های نشان داده شده پیش‌بینی نظریهٔ نسبیت خاص اینشتین را نشان می‌دهد.)

این تندی نهایی دقیقاً به این صورت تعریف شده است

$$c = 299\ 792\ 458\ \text{m/s} \qquad (۳۷-۱)$$

1. W. Bertozzi

توجه: تاکنون در این کتاب c را (بنا به اقتضا) تقریباً $3/0 \times 10^8$ m/s گرفته‌ایم، ولی در این فصل غالباً مقدار دقیق را به کار خواهیم برد. می‌توانید این مقدار را در حافظهٔ ماشین حساب خود ذخیره کنید (اگر قبلاً در آن نبوده باشد) و هر وقت بخواهید آن را بیاورید.

آزمودن اصل موضوع تندی نور

اگر تندی نور در تمام چارچوبهای لخت یکسان باشد، در این صورت تندی نور گسیل شده به وسیلهٔ چشمه‌ای متحرک نسبت به مثلاً، یک آزمایشگاه برابر با تندی نوری است که توسط چشمه‌ای در حالت سکون در آزمایشگاه گسیل می‌شود. این ادعا در یک آزمایش دقیق به طور مستقیم آزموده شده است. «چشمهٔ نور» یک *پیون* خنثی (با نماد π°) است، ذره‌ای ناپایدار با عمر کوتاه که می‌تواند به وسیلهٔ برخورد ذره‌ها در شتاب دهنده‌ها ایجاد شود. پیون طی فرایند زیر به پرتو گاما وا می‌پاشد (تبدیل می‌شود)

$$\pi^\circ \rightarrow \gamma + \gamma \qquad (۳۷-۲)$$

پرتوهای γ بخشی از طیف الکترومغناطیسی هستند (در بسامدهای خیلی بالا) و بنابراین، درست مانند نور مرئی، از اصل موضوع تندی نور پیروی می‌کند. (در این فصل از اصطلاح نور در مورد همه نوع موج الکترومغناطیسی، مرئی یا نامرئی استفاده می‌کنیم.)

در سال ۱۹۶۴/۱۳۴۳ در سرن، آزمایشگاه اروپایی فیزیک ذره‌ها در نزدیکی ژنو فیزیکدانان باریکه‌ای از پیونهای متحرک با تندی $0/999\ 75c$ را نسبت به آزمایشگاه ایجاد کردند. سپس آزمایش کننده‌ها تندی پرتوهای گاما را که از این چشمه‌های خیلی سریع متحرک گسیل می‌شدند اندازه‌گیری کردند. آنها دریافتند که تندی نور گسیل شده به وسیلهٔ پیونها درست برابر با تندی پیونهایی است که اگر نسبت به آزمایشگاه ساکن می‌بودند، یعنی c ، گسیل می‌شد.

۳۷-۳ اندازه‌گیری یک رویداد

یک **رویداد** چیزی است که رخ می‌دهد، و هر رویدادی می‌تواند با سه مختصهٔ فضایی و یک مختصهٔ زمانی مشخص شود. از میان بسیاری رویدادهای ممکن برخی عبارت‌اند از (۱) روشن یا خاموش کردن یک چراغ کوچک، (۲) برخورد دو ذره، (۳) عبور یک تپ نوری از یک نقطهٔ معین، (۴) یک انفجار، و (۵) قرار گرفتن عقربهٔ ساعت روی یکی از علامتهای دور ساعت. ناظری واقع در یک چارچوب مرجع لخت معین می‌تواند، برای مثال یک رویداد A را به مختصات داده شده در جدول ۳۷-۱ نسبت دهد. چون در نسبیت فضا و زمان در هم آمیخته‌اند، می‌توانیم مجموع این مختصه‌ها را در یک دستگاه مختصات *فضا زمان* بیان کنیم. خود دستگاه مختصات بخشی از چارچوب مرجع ناظر است.

جدول ۳۷-۱

ثبت رویداد A

مختصه	مقدار
x	۳/۵۸m
y	۱/۲۹m
z	۰m
t	۳۴/۵s

یک رویداد معین ممکن است به وسیلهٔ ناظرهای متعدد که هر یک در یک چارچوب مرجع لخت قرار دارند ثبت شود. به طور کلی ناظرهای مختلف مختصات فضازمان متفاوتی را به یک رویداد یکسان نسبت می‌دهند. توجه کنید که یک رویداد به یک چارچوب مرجع لخت خاصی «تعلق» ندارد. یک رویداد درست چیزی است که رخ می‌دهد و هر کس در هر چارچوب مرجع ممکن است آن را آشکار کند و به آن مختصات فضازمان نسبت دهد.

در مسائل عملی چنین نسبت دادن مختصه‌ای می‌تواند پیچیده باشد. برای مثال، فرض کنید بالونی در سمت راست شما در فاصله 1km آتش بگیرد در حالی که در همان زمان فرضاً ساعت AM ۹:۰۰ در سمت چپ شما به فاصلهٔ ۲km یک فشفشهٔ آتش بازی منفجر شود. اما شما نمی‌توانید هر دو رویداد را دقیقاً در AM ۹:۰۰ آشکار کنید، چون در این فاصله نور از رویدادها هنوز به شما نرسیده است. چون نور انفجار مسافت بیشتری را باید طی کند و بنابراین، دیرتر از بالون آتش گرفته به چشم شما می‌رسد و در نتیجه به نظر می‌رسد انفجار دیرتر از آتش سوزی رخ داده است. برای مشخص کردن ترتیب زمانهای واقعی و نسبت دادن AM ۹:۰۰ به هر دو رویداد، شما باید زمانهای طی شدهٔ نور را محاسبه و سپس از زمانهای دریافتی کم کنید.

این شیوه برای وضعیتهای پیچیده‌تر می‌تواند خیلی در هم و برهم شود و ما به شیوه ساده‌تری نیاز داریم که به طور خودکار ارتباط زمان حرکت از یک رویداد تا ناظر را حذف کند. برای برقراری چنین شیوه‌ای، آرایه‌ای مجازی از میله‌ها و ساعتهای اندازه‌گیری را در تمام نقطه‌های چارچوب لخت ناظر (آرایه به طور صلب با ناظر حرکت می‌کند) در نظر می‌گیریم. این امر ممکن است ساختگی به نظر برسد، اما مانع سردرگمی در محاسبه‌ها می‌شود و به ما امکان می‌دهد تا مختصات فضا، مختصه زمان، و مختصات فضا زمان را به صورت زیر به دست آوریم:

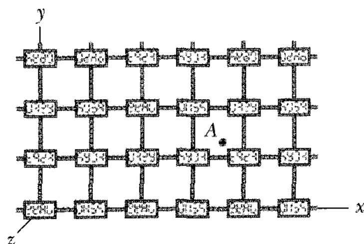
۱- **مختصات فضا.** فرض می‌کنیم دستگاه مختصات ناظر شامل آرایه‌ای سه بعدی از میله‌های اندازه‌گیری تنگ هم باشد که هر دسته از میله‌ها موازی با یکی از سه محور مختصات‌اند. این میله‌ها راهی را برای تعیین مختصه‌ها در امتداد محورها فراهم می‌کنند. بنابراین، اگر رویدادی، مثلاً روشن کردن یک چراغ کوچک رخ دهد، ناظر برای تعیین مکان این رویداد، فقط کافی است که سه مختصه فضایی را در محل چراغ بخواند.

۲- **مختصهٔ زمانی.** در مورد مختصهٔ زمانی، فرض می‌کنیم که در هر نقطه از محل تقاطع در آرایهٔ میله‌های اندازه‌گیری، ساعت کوچکی قرار دارد که ناظر به علت اینکه ساعت با نور ایجاد شده توسط رویداد روشن می‌شود، می‌تواند آن را بخواند. شکل ۳۷-۳ سطحی از «انبوه» ساعتها و میله‌های اندازه‌گیری را که توصیف کردیم نشان می‌دهد.

آرایه ساعتها باید به طور کامل همزمان شوند. کافی نیست که دسته‌ای از ساعتهای مشابه را فراهم آوریم و همه را در یک زمان قرار دهیم، و سپس آنها را به محل مقرر شده حرکت دهیم. برای مثال نمی‌دانیم آیا حرکت دادن ساعتها آهنگ آنها را تغییر می‌دهد یا خیر (که در واقع تغییر می‌دهد.) بنابراین، باید ساعتها را در محلشان قرار داد و سپس آنها را همزمان کرد.

اگر روشی می‌داشتیم که انتقال سیگنالها را با تندی نامتناهی انجام دهیم، همزمان کردن موضوع ساده‌ای می‌شد. ولی، هیچ سیگنالی چنین خاصیتی ندارد. بنابراین، نور را (که به تعبیری تمام طیف الکترومغناطیسی را شامل می‌شود) برای ارسال سیگنال همزمانی انتخاب می‌کنیم، چون در خلأ نور با بیشترین تندی ممکن، تندی حدی c، حرکت می‌کند.

در اینجا یکی از راههای گوناگونی را که می‌توان آرایه‌ای از ساعتها را با کمک سیگنالهای نوری همزمان کرد بیان می‌کنیم. ناظر تعداد زیادی دستیار موقت، به تعداد ساعتها در نظر می‌گیرد. سپس، ناظر در نقطه‌ای که به عنوان مبدأ انتخاب شده است می‌ایستد و وقتی که ساعت واقع در مبدأ $t = 0$ را نشان می‌دهد یک تپ نوری را ارسال می‌کند. وقتی تپ نوری به هر یک از دستیاران رسید، آنها ساعت را روی $t = r/c$ قرار می‌دهند، که r فاصلهٔ بین دستیار و مبدأ است. در این صورت ساعتها همزمان شده‌اند.



شکل ۳۷-۳ مقطعی از آرایهٔ سه بعدی از ساعتها و میله‌های اندازه‌گیری به گونه‌ای که ناظری بتواند به یک رویداد، مانند برق زدن نور در یک نقطهٔ A، مختصه‌های فضا زمان نسبت دهد. مختصات فضایی رویداد تقریباً در ۳/۷ = x برابر طول میله، ۱/۳ = y برابر طول میله و ۰= z قرار دارند. مختصهٔ زمانی، زمانی است که نزدیکترین ساعت به A در موقع برق زدن نشان می‌دهد.

۳- **مختصات فضازمان.** اکنون ناظر به سادگی می‌تواند با ثبت زمانی روی ساعت نزدیکترین رویداد و موضع اندازه‌گیری شده روی نزدیکترین میلهٔ اندازه‌گیری، مختصات فضا زمانی به رویداد نسبت دهد. اگر دو رویداد وجود داشته باشد،

ناظر جدایی زمان آنها را به وسیلهٔ اختلاف زمانها روی ساعتهای نزدیک هر یک و جدایی فضایی آنها را از اختلاف مختصات روی میله‌های نزدیک هر یک، محاسبه می‌کند. بنابراین از مشکل عملی محاسبهٔ زمانهای حرکت سیگنالها به ناظر از رویدادها پرهیز می‌شود.

۳۷-۴ نسبیت همزمانی

فرض کنید که یک ناظر (سام) متوجه می‌شود که دو رویداد مستقل (رویداد قرمز و رویداد آبی) در یک زمان رخ می‌دهند. هم‌چنین فرض کنید که ناظر دیگری (سالی) که با سرعت ثابت $\vec{v}$ نسبت به سام حرکت می‌کند، نیز این دو رویداد را ثبت می‌کند. آیا سالی نیز درمی‌یابد که این رویدادها در یک زمان رخ می‌دهند؟

پاسخ این است که در حالت کلی این طور نیست:

> اگر دو ناظر در حرکت نسبی باشند، در حالت کلی آنها در اینکه دو رویداد همزمان رخ داده‌اند توافق نخواهند داشت. اگر یک ناظر دریابد که آنها همزمان هستند ناظر دیگر در حالت کلی چنین دریافتی نخواهد داشت.

نمی‌توانیم بگوییم که یک ناظر درست می‌گوید و دیگری نادرست. مشاهده‌های آنها هر دو معتبر است، و هیچ دلیلی بر اینکه یکی بر دیگری ارجحیت دارد وجود ندارد.

تحقق اینکه دو عبارت متضاد در مورد یک رویداد طبیعی صحیح باشد به نظر عجیب می‌رسد و این حاصل نسبیت اینشتین است. البته، در فصل ۳۳ بدون رد کردن نتایج متضاد، روش دیگری را مورد بحث قرار دادیم که چگونه حرکت در اندازه‌گیری اثر دارد: در اثر دوپلر، بسامدی که ناظر در مورد یک موج صوتی اندازه می‌گیرد به حرکت نسبی ناظر و چشمه بستگی دارد. بنابراین دو ناظر که نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند برای یک موج بسامدهای متفاوتی اندازه می‌گیرند، و هر دو اندازه‌گیریها صحیح است.

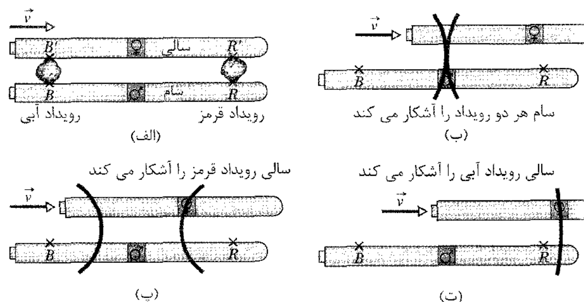
مراتب زیر را نتیجه می‌گیریم:

> همزمانی یک مفهوم مطلق نیست بلکه یک مفهوم نسبی است و به حرکت ناظر بستگی دارد.

اگر تندی نسبی ناظرها خیلی کمتر از تندی نور باشد، آنگاه انحراف اندازه‌گیری شده از همزمانی آنقدر کوچک است که قابل ذکر نیست. در تمام تجربه‌های روزانهٔ زندگی ما چنین حالتی برقرار است، به همین خاطر است که نسبیت همزمانی ناآشناست.

نگاهی دقیقتر به همزمانی

اکنون با مثالی مبتنی بر اصل موضوع نسبیت، که به طور مستقیم شامل ساعتها یا میله‌های اندازه‌گیری نباشد، نسبیت همزمانی را روشنتر می‌کنیم. شکل ۳۷-۴ دو سفینهٔ فضایی دراز را نشان می‌دهد (در یکی سالی و در دیگری سام قرار دارد)، که می‌توانند برای ناظرهای سالی و سام به عنوان چارچوب مرجع لخت در نظر گرفته شوند. هر دو ناظر در وسط سفینه‌هایشان قرار دارند. دو سفینه در امتداد یک محور مشترک x از هم جدا هستند، سرعت نسبی *سالی* نسبت به *سام* $\vec{v}$ است. شکل ۳۷-۴ الف سفینه‌ها را نشان می‌دهد که به طور زودگذر دو ناظر در مقابل یکدیگر واقع هستند.



شکل ۳۷-۴ سفینه‌های فضایی سالی و سام و رخداد رویدادها از نظر سام. سفینهٔ سالی با سرعت $\vec{v}$ به سمت راست حرکت می‌کند. (الف) رویداد قرمز در وضعیتهای RR' و رویداد آبی وضعیتهای BB' رخ می‌دهند؛ هر رویداد موجی نوری به خارج می‌فرستد. (ب) سام به طور همزمان موجها را از رویداد قرمز و رویداد آبی آشکار می‌کند. (پ) سالی موج از رویداد قرمز را آشکار می‌کند. (ت) سالی موج از رویداد آبی را آشکار می‌کند.

دو شهابسنگ بزرگ به سفینه‌ها برخورد می‌کنند، یکی شعلهٔ قرمز (رویداد قرمز) و دیگری شعلهٔ آبی (رویداد آبی) ایجاد می‌کند ولی مهم نیست که همزمان باشند. هر رویداد یک علامت دائمی روی هر سفینه در وضعیتهای RR' و BB' باقی می‌گذارد.

فرض می‌کنیم که جبهه‌های موج رو به گسترش از دو رویداد، همانطور که شکل ۳۷-۴ ب نشان می‌دهد در یک زمان به سام برسند. اضافه بر این فرض می‌کنیم که پس از این پیشامد، سام با اندازه‌گیری نشانه‌های روی سفینه، در می‌یابد که وقتی دو رویداد رخ می‌دهند او در واقع دقیقاً در میانهٔ بین علامتهای B و R روی سفینه‌اش قرار دارد. او خواهد گفت:

سام نور از رویداد قرمز و نور از رویداد آبی در یک زمان به من می‌رسند. از علامتهای روی سفینه‌ام دریافتم که من در میانهٔ دو چشمه قرار داشته‌ام. بنابراین، رویداد قرمز و رویداد آبی همزمان رخ داده‌اند.

مطالعهٔ شکل ۳۷-۴ نشان می‌دهد، سالی و جبههٔ موج رو به گسترش از رویداد قرمز *به طرف یکدیگر* حرکت می‌کنند، در حالی که او و جبههٔ موج رو به گسترش از رویداد آبی در یک *جهت یکسان* حرکت می‌کنند. بنابراین، جبههٔ موج از رویداد قرمز پیش از رسیدن جبههٔ موج از رویداد آبی به سالی می‌رسد. او خواهد گفت:

سالی نور از رویداد قرمز پیش از نور از رویداد آبی به من رسید. از علامتهای روی سفینه‌ام دریافتم که من نیز در میانه بین دو چشمه قرار داشته‌ام. بنابراین، دو رویداد همزمان *نبوده‌اند*؛ ابتدا رویداد قرمز و سپس رویداد آبی رخ داده است. این گزارشها توافق ندارند. با این وصف هر دو ناظر درست می‌گویند.

دقت کنید که فقط یک جبهه موج رو به گسترش از محل هر رویداد وجود دارد و این جبههٔ موج *با تندی یکسان* c در هر *دو چارچوب مرجع*، یعنی دقیقاً تندی مورد نیاز در اصل موضوع تندی نور، حرکت می‌کند.

ممکن است برخورد شهابسنگ به سفینه‌ها به گونه‌ای رخ داده باشد که به نظر سالی همزمان بوده‌اند. اگر این حالت باشد، آنگاه سام ادعا خواهد کرد که آنها همزمان نبوده‌اند.

۳۷-۵ نسبیت زمان

اگر دو ناظری که نسبت به هم حرکت می‌کنند بازهٔ زمانی (*یا جدایی زمانی*) بین دو رویداد را اندازه‌گیری کنند، به طور کلی نتایج متفاوتی به دست می‌آورند. چرا؟ چون جدایی فضایی رویدادها می‌تواند بر بازهٔ زمانی اندازه‌گیری شدهٔ ناظرها اثر بگذارد.

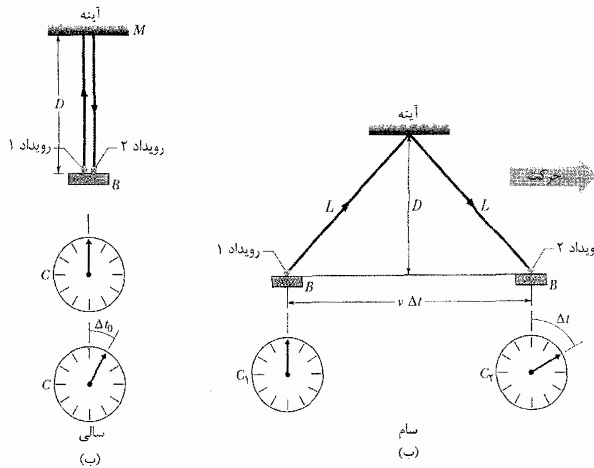
> بازهٔ زمانی بین دو رویداد به اینکه در چه فاصله‌ای از هم قرار دارند بستگی دارد: یعنی جدایی فضایی و جدایی زمانی آنها در هم آمیخته است.

در این بخش با مثالی دربارهٔ درهم آمیختگی بحث می‌کنیم؛ ولی این مثال به روشی بسیار اساسی مقید است: *برای یکی از دو ناظر، دو رویداد در یک محل رخ می‌دهند*. تا بخش ۳۷-۷ به مثالهای کلیتری نخواهیم پرداخت.

شکل ۳۷-۵ الف اساس آزمایش انجام شده توسط سالی را نشان می‌دهد، او و وسایل‌اش، یک چشمهٔ نوری، یک آینه و یک ساعت، سوار بر قطاری که با سرعت ثابت $\vec{v}$ نسبت به یک ایستگاه حرکت می‌کند قرار دارند. یک تپ نوری چشمهٔ نوری B (رویداد ۱) را ترک می‌کند، به طور عمودی به سمت بالا می‌رود، به وسیلهٔ آینه‌ای به سمت پایین باز می‌تابد و سپس در چشمه آشکار می‌شود (رویداد ۲). سالی بازهٔ زمانی معین Δt_0 بین دو رویداد مربوط به فاصلهٔ D از چشمه تا آینه را با این رابطه اندازه می‌گیرد

$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c} \quad \text{(سالی)} \qquad (۳۷-۳)$$

دو رویداد در چارچوب مرجع سالی در یک محل رخ می‌دهند و او در آن محل فقط به یک ساعت C برای اندازه‌گیری بازهٔ زمانی نیاز دارد. ساعت C در شکل ۳۷-۵ الف دوبار، یکی در شروع دیگری در پایان بازهٔ زمانی، نشان داده شده است.



شکل ۳۷-۵ (الف) سالی در قطار، بازهٔ زمانی Δt_0 بین رویدادهای ۱ و ۲ را با استفاده از فقط یک ساعت C در قطار اندازه‌گیری می‌کند. این ساعت دوبار نشان داده شده است: ابتدا برای رویداد ۱ و سپس برای رویداد ۲. (ب) سام که از ایستگاه رخ دادن رویدادها را نگاه می‌کند، به دو ساعت همزمان احتیاج دارد، C_1 برای رویداد ۱ و C_2 برای رویداد ۲، تا بازهٔ زمانی بین دو رویداد را اندازه‌گیری کند؛ بازهٔ زمانی اندازه‌گیری شده توسط او Δt است.

اکنون بررسی می‌کنیم که این دو رویداد یکسان به وسیلهٔ سام که روی سکوی ایستگاه ایستاده و قطار از مقابلش می‌گذرد چگونه اندازه‌گیری می‌شود. چون وسایل در زمان حرکت نور با قطار حرکت می‌کنند، سام مسیر نور را مانند آنچه در شکل ۳۷-۵ ب نشان داده شده است می‌بیند. برای او، دو رویداد در چارچوب مرجعش در دو مکان مختلف رخ داده است، و بنابراین برای اندازه‌گیری بازهٔ زمانی دو رویداد، سام باید در ساعت همزمان شده C_1 و C_2، هر کدام در یک رویداد را به کار گیرد. بنابر اصل موضوع تندی نور اینشتین، برای سالی و سام نور با تندی یکسان c حرکت می‌کند. ولی اکنون نور فاصلهٔ $2L$ بین دو رویداد ۱ و ۲ را طی می‌کند. بازهٔ زمانی بین دو رویداد که به وسیلهٔ سام اندازه‌گیری می‌شود برابر است با

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \quad \text{(سام)} \qquad (۳۷-۴)$$

که در آن

$$L = \sqrt{\left(\frac{1}{2} v\,\Delta t\right)^2 + D^2} \qquad (۳۷-۵)$$

از معادلهٔ ۳۷-۳ می‌توان این رابطه را به این صورت نوشت

$$L = \sqrt{\left(\frac{1}{2} v\,\Delta t\right)^2 + \left(\frac{1}{2} c\,\Delta t_0\right)^2} \qquad (۳۷-۶)$$

اگر بین معادله‌های ۳۷-۴ و ۳۷-۶، L را حذف و آن را برحسب Δt حل کنیم، داریم

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad (۳۷-۷)$$

معادلهٔ ۳۷-۷ نشان می‌دهد که چگونه بازهٔ زمانی اندازه‌گیری شدهٔ Δt بین رویدادها توسط سام با بازهٔ زمانی سالی Δt_0

مقایسه می‌شود. چون v باید کمتر از c باشد، مخرج معادلهٔ ۳۷-۷ باید کمتر از یک باشد. بنابراین، Δt باید بزرگتر از $\Delta t_{\circ}$ باشد: سام بازهٔ زمانی بین دو رویداد را بیشتر از سالی اندازه می‌گیرد. سام و سالی بازهٔ زمانی بین دو رویداد *یکسان* را اندازه می‌گیرند، ولی حرکت نسبی بین سام و سالی می‌تواند *آهنگ* گذشت زمان بین دو رویداد را تغییر دهد؛ کلید این پدیده این است که تندی نور برای همهٔ ناظرها یکسان است.

بین اندازه‌گیریهای سام و سالی با اصطلاحهای زیر تمایز قایل می‌شویم:

> ☜ هرگاه دو رویداد در یک مکان در یک چارچوب مرجع لخت رخ دهند، بازهٔ زمانی بین آنها را که در آن چارچوب اندازه‌گیری می‌شود، **بازهٔ زمانی ویژه** یا **ویژه زمان** می‌گویند. اندازه‌گیریهای همین بازهٔ زمانی در هر چارچوب مرجع لخت دیگر همیشه بزرگتر است.

بنابراین سالی یک بازهٔ زمانی ویژه را اندازه می‌گیرد، و سام یک بازهٔ زمانی بزرگتری را اندازه می‌گیرد. (اصطلاح *ویژه* متأسفانه این توهم را ایجاد می‌کند که سایر اندازه‌گیریها ناویژه یا ناواقعی‌اند. در حالی که این درست نیست.) مقداری که بازهٔ زمانی اندازه‌گیری شده از بازهٔ زمانی ویژهٔ متناظر بزرگتر است **اتساع زمان** نامیده می‌شود. (اتساع یافتن، منبسط یا کشیده شدن است؛ در اینجا بازهٔ زمانی منبسط یا کشیده شده است).

اغلب نسبت بدون بعد v/c را در معادلهٔ ۳۷-۷ با β جایگزین می‌کنند و آن را پارامتر تندی می‌نامند، و جذر وارون بدون بعد در معادلهٔ ۳۷-۷ را که با γ نشان می‌دهند، **عامل لورنتس** می‌نامند.

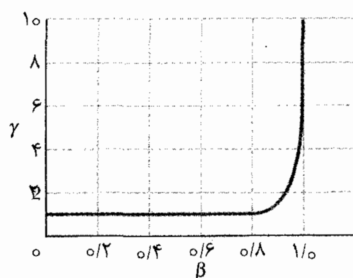
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad (۳۷-۸)$$

با قرار دادن اینها، می‌توان معادلهٔ ۳۷-۷ را به صورت زیر نوشت

$$\Delta t = \gamma \Delta t_{\circ} \qquad \text{(اتساع زمان)} \qquad (۳۷-۹)$$

پارامتر تندی β همیشه کمتر از یک است و مشروط بر اینکه v صفر نباشد، γ همیشه بزرگتر از یک است. ولی، اختلاف بین γ و ۱ چشمگیر نیست، مگر آنکه $v > ۰/۱c$ باشد. بنابراین، به طور کلی، «نسبیت قدیم» به خوبی برای $v > ۰/۱c$ برقرار است، اما برای مقدارهای بزرگتر v باید نسبیت خاص را بکار برد. همانطور که شکل ۳۷-۶ نشان می‌دهد، بزرگی γ وقتی β به ۱ نزدیک می‌شود (وقتی v به c می‌رسد) به سرعت افزایش می‌یابد. بنابراین، هرچه تندی نسبی بین سالی و سام بیشتر شود، بازهٔ زمانی اندازه‌گیری شده توسط سام بزرگتر خواهد شد، تا اینکه در تندی به قدر کافی بزرگ این بازه «در تمام مدت» برقرار خواهد بود.

ممکن است از آنچه که سالی در مورد بازهٔ زمانی که توسط سام اندازه‌گیری شده و بزرگتر از بازهٔ زمانی او است، می‌گوید تعجب کنید. اندازه‌گیری سام برای سالی شگفت‌آور نیست، چون از نظر او سام به رغم پافشاریش موفق به همزمان کردن ساعتهای C_1 و C_2 خود نشده است. به یاد آورید که دو ناظری که نسبت به یکدیگر حرکت نسبی دارند به طور کلی در مورد همزمانی توافق ندارند. در اینجا، سام پافشاری می‌کند که دو ساعت او وقتی رویداد ۱ اتفاق می‌افتد به طور همزمان زمان یکسانی را نشان می‌دهند. ولی، برای سالی، ساعت C_2 به طور همزمان سام در فرایند همزمان سازی به مقدار زیادی جلو است. بنابراین، وقتی سام زمان رویداد ۲ را می‌خواند، برای سالی او زمان بسیار بزرگی را می‌خواند، و به همین دلیل بازهٔ زمانی که سام بین دو رویداد اندازه می‌گیرد بیشتر از فاصلهٔ زمانی است که سالی اندازه می‌گیرد.



شکل ۳۷-۶ نمودار عامل لورنتس γ برحسب تابعی از پارامتر تندی $\beta(=v/c)$.

دو آزمون از اتساع زمان

۱- **ساعتهای میکروسکوپی.** ذره‌های زیر اتمی که *موئونها* نامیده می‌شوند ناپایدارند؛ یعنی وقتی موئونی ایجاد می‌شود، پیش از *واپاشی* (تبدیل شدن به دو نوع ذرهٔ دیگر) فقط زمان کوتاهی دوام می‌آورد. *طول عمر* موئون عبارت است از بازهٔ زمانی بین ایجاد (رویداد ۱) و واپاشی آن (رویداد ۲). وقتی موئونها ساکن هستند و طول عمر آنها با ساعتهای ساکن (مثلاً در آزمایشگاه) اندازه‌گیری می‌شوند، طول عمر متوسط آنها $۲/۲۰۰\mu s$ است. این بازهٔ زمانی ویژه است، چون برای هر موئون، رویدادهای ۱ و ۲ در یک مکان در چارچوب مرجع موئون- یعنی در خود موئون رخ می‌دهند. این بازهٔ زمانی ویژه را با $\Delta t_{\circ}$ می‌توان نشان داد؛ افزون بر این، چارچوب مرجعی را که در آن این زمان اندازه‌گیری می‌شود می‌توان چارچوب *ساکن* موئون نامید.

ولی، اگر موئونها در حرکت باشند، مثلاً در میان آزمایشگاه، آنگاه اندازه‌گیری طول عمر آنها با ساعتهای آزمایشگاه باید طول عمر متوسط بزرگتری را (طول عمر متوسط اتساع) به دست دهد. برای وارسی این نتیجه، طول عمر متوسط موئونی که با تندی $۰/۹۹۹۴c$ نسبت به ساعتهای اندازه‌گیری در حرکت بود اندازه‌گیری شد. از معادلهٔ ۳۷-۸، با $\beta = ۰/۹۹۹۴$، عامل لورنتس برای این تندی عبارت است از

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(۰/۹۹۹۴)^2}} = ۲۸/۸۷$$

در این صورت از معادلهٔ ۳۷-۹ برای طول عمر اتساع متوسط خواهیم داشت

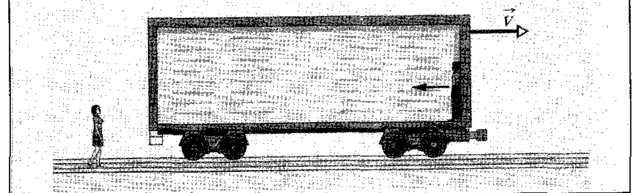
$$\Delta t = \gamma\, \Delta t_\circ = (۲۸/۸۷)(۲/۲۰۰\mu s) = ۶۳/۵۱\,\mu s$$

مقدار اندازه‌گیری شدهٔ واقعی با این نتیجه با توجه به خطای تجربی، تطابق دارد.

۲- ساعتهای ماکروسکوپی. در سال ۱۹۷۷/۱۳۵۶، ژوزف هافل[1] و ریچارد کیتینگ[2] آزمایشی انجام دادند که بسیار طاقت فرسا بود. آنها چهار ساعت اتمی قابل حمل را با هواپیماهای تجاری دوبار دور زمین، هر بار در یک جهت به گردش درآوردند. هدف آنها «آزمون نظریهٔ نسبیت اینشتین با ساعتهای ماکروسکوپی» بود. همانطور که هم اکنون دیدیم، اتساع زمانی که نظریه اینشتین پیش‌بینی می‌کرد در مقیاس میکروسکوپی تایید شده بود، ولی اگر به وسیلهٔ یک ساعت واقعی تأیید می‌شد آرامش بیشتری حاصل می‌شد. چنین اندازه‌گیریهای ماکروسکوپی فقط به خاطر دقت بسیار زیاد ساعتهای اتمی امروزی میسر گردیده است. هافل و کیتینگ پیش‌بینی نظریه را تا ۱۰٪ تأیید کردند. (نظریهٔ نسبیت *عام* که پیش‌بینی می‌کند گرانش بر آهنگ ساعت تأثیر می‌گذارد در این آزمایش نیز نقش دارد.)

چند سال بعد، فیزیکدانان در دانشگاه مریلند آزمایش مشابهی را با دقت بیشتری انجام دادند. آنها یک ساعت اتمی را با پروازهایی که 15h طول کشید به طور مرتب دور خلیج چساپیک[3] به گردش درآوردند و موفق شدند اتساع زمان پیش‌بینی شده را تا ۱٪ بهتر بیازمایند. امروزه، وقتی ساعتهای اتمی که برای کالیبره کردن یا هر مقصود دیگری از یک نقطه به نقطه دیگر منتقل می‌شوند، اتساع زمانی را که به وسیلهٔ حرکت آنها ایجاد می‌شود همیشه به حساب می‌آورند.

✔ نکتهٔ وارسی ۱ موقع ایستادن در کنار ریل راه‌آهن، ناگهان به وسیلهٔ یک واگن نسبیتی که مطابق شکل از مقابل ما می‌گذرد، از جا می‌پریم. داخل واگن دستگاه مجهزی یک تپ لیزری از جلو به سمت عقب واگن آتش می‌کند. (الف) آیا تندی تپ که به وسیلهٔ ما اندازه‌گیری می‌شود، نسبت به تندی که مسافر اندازه‌گیری می‌کند بزرگتر است یا کوچکتر یا یکسان است. (ب) آیا اندازه‌گیری زمان حرکت تپ توسط مسافر یک زمان ویژه است؟ (پ) آیا اندازه‌گیری زمان حرکت به وسیلهٔ ما و مسافر با معادلهٔ ۳۷-۹ به هم مربوط‌اند؟



1. Joseph Hafele
2. Richard keating
3. Chesapeake Bay

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷-۱

اخترپیمای شما با تندی نسبی $۰/۹۹۹۰c$ از کنار زمین عبور می‌کند. پس از $۱۰/۰y$ سفر (با زمان شما)، در ایستگاه تجسمی LP۱۳ توقف می‌کنید و سپس با همان تندی نسبی به زمین بر می‌گردید. سفر برگشت $۱۰/۰y$ دیگر طول می‌کشد (با زمان شما). این رفت و برگشت بنابر اندازه‌گیری انجام شده در زمین چقدر طول می‌کشد؟ (از هر اثری به خاطر شتابهای موقع توقف و برگشت چشم‌پوشی کنید.)

نکته‌های کلیدی با تحلیل سفر رفت شروع می‌کنیم:

۱- این مسئله شامل اندازه‌گیریهای انجام شده در دو چارچوب مرجع (لخت) یکی متصل به زمین و دیگری (چارچوب مرجع) متصل به سفینه (شما) است.

۲- سفر رفت شامل دو رویداد است: آغاز سفر از زمین و انتهای آن در $Lp۱۳$.

۳- $۱۰/۰y$ اندازه‌گیری شده برای سفر رفت ویژه زمان $\Delta t_\circ$ بین این دو رویداد است، زیرا این رویدادها در همان مکان چارچوب مرجع شما یعنی در سفینه، رخ داده است.

۴- بنابر معادلهٔ ۳۷-۹ برای اتساع زمان $(\Delta t = \gamma \Delta t_\circ)$ بازهٔ زمانی سفر رفت در اندازه‌گیری چارچوب زمین باید بزرگتر از $\Delta t_\circ$ باشد.

محاسبه‌ها: با استفاده از معادلهٔ ۳۷-۸ برای قرار دادن γ در معادلهٔ ۳۷-۹، به دست می‌آوریم

$$\Delta t = \frac{\Delta t_\circ}{\sqrt{۱-(v/c)^۲}}$$

$$= \frac{۱۰/۰\,y}{\sqrt{۱-(۰/۹۹۹۰c/c)^۲}} = (۲۲/۳۷)(۱۰/۰\,y) = ۲۲۴y$$

در سفر برگشت، همین وضعیت و همین داده‌ها را خواهیم داشت. بنابراین، رفت و برگشت $۲۰y$ زمان شما را می‌گیرد ولی زمان زمینی خواهد شد

$$\Delta t_{\text{کل}} = (۲)(۲۲۴y) = ۴۴۸y \qquad \text{(پاسخ)}$$

به عبارت دیگر، در حالی که از عمر شما $۲۰y$ گذشته از عمر زمین $۴۴۸y$ گذشته است. اگر چه شما نمی‌توانید به گذشته سفر کنید (تا جایی که می‌دانیم)، اما با استفاده از حرکت نسبی با تندی زیاد برای تنظیم آهنگ سپری شدن زمان می‌توانید به آیندهٔ مثلاً زمین سفر کنید.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷-۲ مهارت خود را تقویت کنید

ذرهٔ بنیادی شناخته شده‌ای به نام کائون مثبت (K^+) وقتی ساکن است، به طور متوسط طول عمر آن $۰/۱۲۳۷\mu s$ است، یعنی هنگامی که طول عمر در چارچوب ساکن کائون اندازه‌گیری شود. اگر تندی کائون مثبت، به هنگام تولید نسبت به یک چارچوب در مدت طول عمر خود مطابق *با فیزیک کلاسیک* (که تقریب معقولی برای تندیهای خیلی کمتر از c

است) و مطابق با نسبیت خاص (که برای تمام تندیهای ممکن فیزیکی درست است) چه مسافتی را می‌تواند طی کند؟

نکته‌های کلیدی

۱- این مسئله شامل اندازه‌گیریهایی است که در دو چارچوب مرجع (لخت)، یکی متصل به کائون و دیگری متصل به آزمایشگاه انجام می‌شود.

۲- این مسئله هم‌چنین شامل دو رویداد است: آغاز حرکت کائون (وقتی کائون ایجاد می‌شود) و انتهای حرکت آن (در انتهای طول عمر کائون).

۳- ارتباط مسافت پیموده شده توسط کائون بین این دو رویداد با تندی v آن و بازهٔ زمانی حرکت، با رابطهٔ زیر داده می‌شود.

$$v = \frac{\text{مسافت}}{\text{بازه زمانی}} \qquad (۱۰\text{-}۳۷)$$

با این نکته‌ها، مسافت را اول با استفاده از فیزیک کلاسیک و سپس با استفاده از نسبیت خاص پیدا می‌کنیم.

فیزیک کلاسیک: در فیزیک کلاسیک، مسافت و بازهٔ زمانی یکسانی را (در معادلهٔ ۳۷-۱۰) در چارچوب کائون یا در چارچوب آزمایشگاهی به دست می‌آوریم. بنابراین، مهم نیست که دربارهٔ چارچوبی که اندازه‌گیری در آن انجام می‌شود دقیق باشیم. برای پیدا کردن مسافت پیموده شدهٔ d_{cp} بنابر فیزیک کلاسیک، معادلهٔ ۳۷-۱۰ را دوباره به صورت زیر می‌نویسیم

$$d_{cp} = v\Delta t \qquad (۱۱\text{-}۳۷)$$

که در آن Δt بازهٔ زمانی بین دو رویداد در هر کدام از دو چارچوب است. سپس با قرار دادن $۰/۹۹۰c$ برای v و $۰/۱۲۳۷\mu s$ برای Δt در معادلهٔ ۳۷-۱۱، پیدا می‌کنیم

$$\begin{aligned} d_{cp} &= (۰/۹۹۰c)\Delta t \\ &= (۰/۹۹۰)(۲۹۹۷۹۲۴۵۸\ \text{m/s})(۰/۱۲۳۷\times ۱۰^{-۶}\ \text{s}) \\ &= ۳۶/۷\ \text{m} \end{aligned}$$

(پاسخ)

اگر فیزیک کلاسیک در تندیهای نزدیک به c صحیح می‌بود، این میزان حرکت کائون خواهد بود.

نسبیت خاص: در نسبیت خاص باید هم در مورد مسافت و هم در مورد بازهٔ زمانی در معادلهٔ ۳۷-۱۰ که در چارچوب مرجع *یکسانی* اندازه‌گیری می‌شوند دقت کنیم- به ویژه، مانند اینجا وقتی تندی به c نزدیک است. پس، برای پیدا کردن مسافت حرکت واقعی d_{sr} کائون *از نظر چارچوب آزمایشگاهی* بنابر نسبیت خاص، معادلهٔ ۳۷-۱۰ را به صورت زیر دوباره‌نویسی می‌کنیم

$$d_{sr} = v\Delta t \qquad (۱۲\text{-}۳۷)$$

که در آن Δt بازهٔ زمانی بین دو رویداد *اندازه‌گیری شده در چارچوب آزمایشگاهی است.*

قبل از محاسبهٔ d_{sr} در معادلهٔ ۳۷-۱۲، باید Δt را پیدا کنیم: بازهٔ زمانی $۰/۱۲۳۷\mu s$ ویژه زمان است زیرا دو رویداد در یک مکان در چارچوب کائون- یعنی در خود کائون رخ داده‌اند. بنابراین، Δt_0 را بازهٔ زمانی ویژه قرار می‌دهیم. آنگاه برای پیدا کردن بازهٔ زمانی Δt از نظر اندازه‌گیری در چارچوب آزمایشگاه می‌توان از معادلهٔ ۳۷-۹ ($\Delta t = \gamma\Delta t_0$) برای اتساع زمان استفاده کرد. با استفاده از معادلهٔ ۳۷-۸ برای قرار دادن γ در معادلهٔ ۳۷-۹ خواهیم داشت

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{۱-(v/c)^۲}} = \frac{۰/۱۲۳۷\times ۱۰^{-۶}\ \text{s}}{\sqrt{۱-(۰/۹۹۰c/c)^۲}} = ۸/۷۶۹\times ۱۰^{-۷}\ \text{s}$$

این تقریباً هفت برابر بزرگتر از طول عمر ویژهٔ کائون است. یعنی، طول عمر کائون در چارچوب آزمایشگاه تقریباً هفت برابر بیشتر از مقدار آن در چارچوب خودش است- طول عمر کائون زیاد شده است. برای مسافت پیموده شدهٔ d_{sr} در چارچوب آزمایشگاه، معادلهٔ ۳۷-۱۲ را به صورت زیر حل می‌کنیم

$$\begin{aligned} d_{sr} &= v\Delta t = (۰/۹۹۰c)\Delta t \\ &= (۰/۹۹۰)(۲۹۹۷۹۲۴۵۸\ \text{m/s})(۸/۷۶۹\times ۱۰^{-۷}\ \text{s}) \\ &= ۲۶۰\ \text{m} \end{aligned}$$

(پاسخ)

این تقریباً هفت برابر d_{cp} است. آزمایشهایی مانند آزمایشهای مطرح شده در اینجا، که نسبیت خاص را بررسی می‌کنند، در دهه‌های گذشته در آزمایشگاههای فیزیک به صورت امری عادی در آمده است. مهندسانی که تجهیزات علمی یا پزشکی را طراحی می‌کنند و می‌سازند باید نسبیت را در مورد ذره‌هایی که با تندی زیاد عمل می‌کنند به حساب آورند.

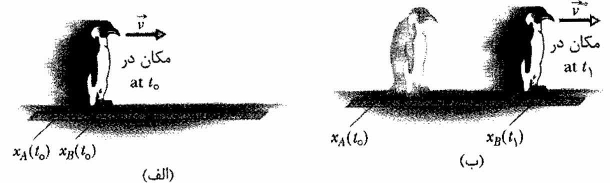
۳۷-۶ نسبیت طول

اگر بخواهید طول میله‌ای را که نسبت به شما ساکن است اندازه بگیرید، می‌توانید- در هنگام فراغت- آن را روی مقیاس ساکن درازی قرار دهید و به وضعیت دو انتهای آن روی مقیاس توجه کنید و آنها را بخوانید و از هم کم کنید. ولی اگر میله حرکت کند، باید به طور *همزمان* دو انتهای میله را در (چارچوب مرجع خود) قرار دهید وگرنه نمی‌توانید اندازه‌گیری خود را طول بنامید. شکل ۳۷-۷ مشکل اندازه‌گیری طول یک پنگوئن در حال حرکت را برای مشخص کردن جلو و عقب او در زمانهای مختلف نشان می‌دهد. چون همزمانی نسبی است و در اندازه‌گیری طول وارد می‌شود، بنابراین، طول نیز یک کمیت نسبی خواهد بود.

فرض کنیم L_0 طول میله‌ای باشد که در حالت ساکن می‌خواهید آن را اندازه‌گیری کنید (این بدان معناست که شما و میله در یک چارچوب مرجع، یعنی چارچوب ساکن میله قرار دارید). ولی اگر، یک حرکت نسبی با تندی v بین شما و میله در *راستای طول میله* وجود داشته باشد، در این صورت با

اندازه‌گیریهای همزمان، طول L میله را به صورت زیر به دست می‌آورید

$$L = L_{\circ}\sqrt{1-\beta^{2}} = \frac{L_{\circ}}{\gamma} \qquad \text{(انقباض طول)} \qquad (۱۳-۳۷)$$



شکل ۳۷-۷ اگر بخواهید طول از جلو تا عقب پنگوئن در حال حرکتی را اندازه‌گیری کنید، باید به طور همزمان (الف) وضعیتهای جلو و عقب پنگوئن را مانند (الف) (در چارچوب مرجع خودتان) مشخص کنید نه مانند (ب) در زمانهای مختلف.

چون عامل لورنتس γ همیشه بزرگتر از یک است، در صورت وجود حرکت نسبی، L کمتر از $L_{\circ}$ است. حرکت نسبی باعث *انقباض طول* و L *طول منقبض شده* نامیده می‌شود. چون γ با تندی v افزایش می‌یابد، انقباض طول نیز با v افزایش می‌یابد.

> طول $L_{\circ}$ جسمی که در چارچوب ساکن جسم اندازه‌گیری می‌شود **ویژه طول** یا طول ساکن جسم است. اندازه‌گیریهای طول در هر چارچوب مرجعی که در حرکت نسبی موازی با آن طول باشد همیشه کمتر از ویژه طول است.

دقت کنید: انقباض طول فقط در امتداد جهت حرکت نسبی رخ می‌دهد. همچنین، طولی که اندازه‌گیری می‌شود الزامی ندارد مربوط به یک جسم مانند میله یا حلقه باشد، بلکه میتواند طول (یا فاصلهٔ) بین دو جسم در یک چهارچوب ساکن باشد- برای مثال، خورشید و ستارهٔ مجاورش (که حداقل نسبت به هم تقریباً ساکن هستند).

آیا جسم در حال حرکت *واقعاً* منقبض می‌شود؟ واقعیت بر پایهٔ مشاهده‌ها و اندازه‌گیری‌ها استوار است؛ اگر نتایج همیشه سازگار باشند و اگر خطایی را نتوان محاسبه کرد، آنگاه چیزی که مشاهده شده و اندازه‌گیری شده واقعی است. در این مفهوم، جسم واقعاً منقبض می‌شود. با وجود این، عبارت دقیقتر این است که انقباض جسم *واقعاً اندازه‌گیری شده است*- حرکت بر اندازه‌گیری و در نتیجه به واقعیت اثر می‌گذارد.

وقتی یک طول منقبض شده، مثلاً میله‌ای را اندازه‌گیری می‌کنید، ناظر در حال حرکت با میله در مورد اندازه‌گیری شما چه می‌گوید؟ برای این ناظر، دو سر میله را به طور همزمان نمی‌توانید پیدا کنید. (به یاد آورید که ناظرهای در حال حرکت نسبت به یکدیگر دربارهٔ همزمانی با یکدیگر توافق ندارند.) برای ناظر، شما ابتدا مکان جلو میله و سپس، کمی بعد از آن، مکان انتهای میله را پیدا می‌کنید و به همین خاطر است که طولی را که شما اندازه می‌گیرید کمتر از ویژه طول است.

اثبات معادلهٔ ۳۷-۱۳

انقباض طول پیامد مستقیم اتساع زمان است. یک بار دیگر دو ناظر را در نظر می‌گیریم. در یک زمان سالی در قطاری که از ایستگاه می‌گذرد نشسته است و سام نیز روی سکوی ایستگاه قرار دارد، هر دو می‌خواهند طول سکو را اندازه بگیرند. سام از یک متر نواری استفاده می‌کند و در می‌یابد که طول $L_{\circ}$، ویژه طول است چون سکو نسبت به او در حال سکون است. سام همچنین توجه می‌کند که سالی، در داخل قطار این طول را در زمان $\Delta t = L_{\circ}/v$ طی می‌کند، که v تندی قطار است یعنی،

$$L_{\circ} = v\Delta t \qquad \text{(سام)} \qquad (۱۴-۳۷)$$

این بازهٔ زمانی Δt یک بازهٔ زمانی ویژه نیست چون دو رویدادی که آن را تعریف می‌کنند (سالی عقب سکو و سام جلو سکو را پشت سر می‌گذارند) در دو مکان متفاوت رخ می‌دهند، و بنابراین، سام باید از دو ساعت همزمان شده برای اندازه‌گیری بازهٔ زمانی Δt استفاده کند.

ولی، از نظر سالی سکو در جهت پشت سر گذاشتن او حرکت می‌کند. او در می‌یابد که رویداد اندازه‌گیری شده توسط سام در چارچوب مرجع خود سالی *در یک مکان* رخ می‌دهند. سالی می‌تواند زمان را با یک ساعت ساکن اندازه بگیرد، و در نتیجه بازهٔ $\Delta t_{\circ}$ که اندازه می‌گیرد بازهٔ زمانی ویژه است. برای سالی، طول L سکو با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$L = v\Delta t_{\circ} \qquad \text{(سالی)} \qquad (۱۵-۳۷)$$

اگر معادلهٔ ۳۷-۱۵ را بر معادلهٔ ۳۷-۱۴ تقسیم کنیم و معادلهٔ اتساع زمان، معادلهٔ ۳۷-۹ را به کار بریم، خواهیم داشت

$$\frac{L}{L_{\circ}} = \frac{v\Delta t_{\circ}}{v\Delta t} = \frac{1}{\gamma}$$

یا

$$L = \frac{L_{\circ}}{\gamma} \qquad (۱۶-۳۷)$$

که معادلهٔ ۳۷-۱۳، معادلهٔ انقباض طول است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷-۳

در شکل ۳۷-۸، سالی (در نقطهٔ A) و سفینهٔ سام (با ویژه طول $L_{\circ} = ۲۳۰\,\text{m}$) با تندی نسبی و ثابت v از مقابل هم می‌گذرند. سالی برای سفینه‌ای که از مقابلش می‌گذرد بازهٔ زمانی $۳/۵۷\,\mu\text{s}$ را اندازه می‌گیرد (از نقطهٔ عبور B تا نقطهٔ عبور C). برحسب c، تندی نسبی v بین سالی و سفینه چقدر است؟

نکته‌های کلیدی فرض می‌کنیم که تندی v نزدیک به c است. آنگاه

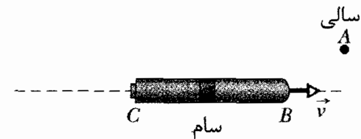
۱- این مسئله شامل دو اندازه‌گیری است که در چارچوبهای مرجع (لخت) یکی متصل به سالی و دیگری متصل به سام و سفینهٔ او انجام شده است.

۲- این مسئله همچنین شامل دو رویداد است: یکی عبور نقطهٔ B از سالی و دیگری عبور نقطهٔ C از او.

۳- از هر چارچوب مرجعی، چارچوب مرجع دیگر با تندی v از آن می‌گذرد و فاصلهٔ معینی را در بازهٔ زمانی بین دو رویداد حرکت می‌کند:

$$v = \frac{\text{فاصله}}{\text{بازه زمانی}} \qquad (۱۷-۳۷)$$

چون فرض شده است که تندی v به تندی نور نزدیک است، باید دقت کنیم که فاصله و بازهٔ زمانی در معادلهٔ ۳۷-۱۷ در یک چارچوب مرجع اندازه‌گیری شده‌اند.



شکل ۳۷-۸ سالی در نقطهٔ A، زمان عبور سفینه را که از آن می‌گذرد اندازه می‌گیرد.

محاسبه: برای استفاده از هر چارچوبی جهت اندازه‌گیری آزاد هستیم. چون می‌دانیم که بازهٔ زمانی Δt بین دو رویداد اندازه‌گیری شده از نظر چارچوب سالی $3/57\,\mu s$ است، همچنین از فاصلهٔ L بین دو رویداد اندازه‌گیری شده از چارچوب سالی استفاده می‌کنیم. بنابراین، معادلهٔ ۳۷-۱۷ چنین خواهد شد

$$v = \frac{L}{\Delta t} \qquad (۱۸-۳۷)$$

L را نمی‌دانیم ولی می‌توانیم آن را به L_0 داده شده مرتبط کنیم. فاصلهٔ بین دو رویداد که در چارچوب سام اندازه‌گیری می‌شود عبارت است از ویژه طول سفینه L_0. پس، فاصلهٔ L اندازه‌گیری شده از چارچوب سالی به صورتی که با معادلهٔ ۳۷-۱۴ $(L = L_0/\gamma)$ برای انقباض طول داده می‌شود، باید کمتر از L_0 باشد. با قرار دادن L_0/γ به جای L در معادلهٔ ۳۷-۱۸ و سپس با قرار دادن ۳۷-۸ به جای γ، داریم

$$v = \frac{L_0/\gamma}{\Delta t} = \frac{L_0\sqrt{1-(v/c)^2}}{\Delta t}$$

با حل این معادله برحسب v (توجه کنید که در سمت چپ است و همچنین در عامل لورنتس هم وجود دارد) به عبارت زیر می‌رسیم

$$v = \frac{L_0 c}{\sqrt{(c\,\Delta t)^2 + L_0^2}}$$

$$= \frac{(230\ \text{m})c}{\sqrt{(299792458\ \text{m/s})^2(3/57\times10^{-6}\ \text{s})^2 + (230\ \text{m})^2}}$$

$$= 0/210\,c \qquad \text{(پاسخ)}$$

بنابراین، تندی نسبی بین سالی و سفینه ۲۱٪ تندی نور است. توجه کنید که در اینجا فقط حرکت نسبی سالی و سام اهمیت دارد؛ اینکه کدامیک نسبت به مثلاً یک ایستگاه فضایی ساکن است، مهم نیست. در شکل ۳۷-۸ سالی را ساکن در نظر گرفتیم، ولی به جای آن می‌توانستیم سفینه را ساکن بگیریم که سالی از مقابل آن به طرف چپ می‌گذرد. در نتایج ما تغییری حاصل نمی‌شود.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷-۴

با غافلگیری به چنگ ابرنواختری که در مجاورت شماست درآمده‌اید، سفینهٔ فضایی شما منفجر شده و شما با یک جریان تند به بیرون پرتاب شده‌اید و امید دارید که تندی این پرتاب چنان باشد تا موادی که به سمت شما پرتاب می‌شوند به شما نرسند. عامل لورنتس γ شما نسبت به چارچوب مرجع لخت ستاره‌های محلی ۲۲/۴ است.

(الف) برای رسیدن به یک فاصلهٔ امن، در می‌یابید که باید $9/00\times10^{16}$ m را که در چارچوب مرجع ستاره‌های محلی اندازه‌گیری شده طی کنید. وقتی اندازه‌گیری در همان چارچوب انجام می‌شود، پرواز چقدر طول می‌کشد؟

نکته‌های کلیدی همانطور که در فصل ۲ (جلد اول) ملاحظه کردیم، زمان لازم برای پیمودن فاصلهٔ معینی با تندی ثابت را با تعریف تندی v می‌توان پیدا کرد:

$$\text{تندی} = \frac{\text{مسافت}}{\text{بازه زمانی}} \qquad (۱۹-۳۷)$$

از شکل ۳۷-۶، چون عامل لورنتس شما γ نسبت به ستارگان ۲۲/۴ (بزرگ) است، تندی v نسبی تقریباً c است- این قدر نزدیک است که تقریباً می‌توان آن را برابر c گرفت. آنگاه، برای تندی $v \approx c$، باید دقت کنیم که فاصله و بازهٔ زمانی در معادلهٔ ۳۷-۱۹ در یک چارچوب مرجع اندازه گرفته می‌شوند.

محاسبه‌ها: مسافت داده شده $(9/00\times10^{16}\ \text{m})$ برای طول مسافت طی شدهٔ شما در چارچوب مرجع ستارگان اندازه‌گیری می‌شود، و بازهٔ زمانی مورد نظر Δt در همین چارچوب اندازه‌گیری می‌شود. پس، می‌توان نوشت

$$\text{(بازهٔ زمانی نسبت به ستارگان)} = \frac{\text{فاصله نسبت به ستارگان}}{c}$$

آنگاه با قرار دادن مسافت داده شده، در می‌یابیم که

$$\text{(بازهٔ زمانی نسبت به ستارگان)} = \frac{9/00\times10^{16}\ \text{m}}{299792458\ \text{m/s}}$$

$$= 3/00\times10^{8}\,\text{s} = 9/51\,\text{y} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) این سفر از نظر شما (در چارچوب مرجع شما) چقدر طول می‌کشد؟

نکته‌های کلیدی

۱- اکنون بازهٔ زمانی اندازه‌گیری شده در چارچوب مرجع مختلفی- یعنی در چارچوب شما را می‌خواهیم. بنابراین، نیاز داریم که داده‌های چارچوب مرجع ستارگان را به چارچوب شما تبدیل کنیم.

۲- طول مسیر داده شدهٔ $9/00\times10^{16}\,m$ که در چارچوب مرجع ستارگان اندازه‌گیری شده است، یک ویژه طول L_0 است، زیرا در آن چارچوب دو انتهای مسیر در حالت سکون است. همانطور که از چارچوب مرجع شما مشاهده می‌شود، چارچوب مرجع ستارگان و این دو انتهای مسیر شما را با تندی نسبی $v\approx c$ پشت سر می‌گذارند.

۳- طول منقبض شدهٔ L_0/γ را که برای مسیر اندازه می‌گیرید، ویژه طول L_0 نیست.

محاسبه‌ها: ۳۷-۱۹ را می‌توان به این صورت نوشت

$$\text{(بازهٔ زمانی نسبت به شما)} = \frac{\text{فاصله نسبت به شما}}{c} = \frac{L_0/\gamma}{c}$$

با قراردادن داده‌های معلوم، پیدا می‌کنیم

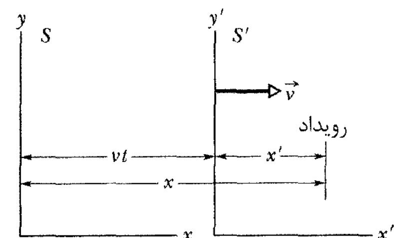
$$\text{(بازهٔ زمانی نسبت به شما)} = \frac{(9/00\times10^{16}\,m)/22/4}{299792458\,m/s}$$

$$= 1/340\times10^{7}\,s = 0/425\,y \quad \text{(پاسخ)}$$

در بند (الف) دریافتیم که در چارچوب مرجع ستارگان پرواز $9/51\,y$ طول می‌کشد. ولی، در اینجا دریافتیم که به علت حرکت نسبی و انقباض طول مسیر به دست آمده در چارچوب شما فقط $0/425\,y$ طول می‌کشد.

۳۷-۷ تبدیل لورنتس

شکل ۳۷-۹ چارچوب مرجع لخت S' را نشان می‌دهد که با تندی v نسبت به چارچوب S در جهت مثبت محور x (نشان داده شده با x و x') حرکت می‌کند. ناظری در S مختصات فضا زمان x، y، z، t را برای یک رویداد و ناظر واقع در S' مقدارهای x'، y'، z' و t' را برای همین رویداد گزارش می‌دهند. این دسته از عددها چگونه به هم ارتباط دارند؟



شکل ۳۷-۹ دو چارچوب مرجع لخت: چارچوب S' نسبت به چارچوب S با سرعت $\vec{v}$ حرکت می‌کند.

بی‌درنگ می‌توان ادعا کرد (اگر چه نیاز به اثبات دارد) که مختصه‌های y و z که بر حرکت عمودند، تحت تأثیر حرکت قرار ندارند؛ یعنی $y=y'$ و $z=z'$. بنابراین، توجه ما به رابطهٔ بین x و x' و بین t و t' معطوف خواهد شد.

معادله‌های تبدیل گالیله‌ای

پیش از اینکه اینشتین مقالهٔ نظریهٔ نسبیت خاص خود را منتشر کند، فرض می‌شد که چهار مختصه مورد توجه بنابر *معادله‌های تبدیل گالیله* به هم مربوط‌اند

$$x' = x - vt \qquad x = t \qquad \text{(۳۷-۲۰)}$$

(معادله‌های تبدیل گالیله: برای تندیهای کم تقریباً معتبرند)

(این معادله‌ها با این فرض نوشته شده‌اند که وقتی مبدأهای S و S' بر هم منطبق‌اند، $t=t'=0$) با استفاده از شکل ۳۷-۹ می‌توانید درستی معادلهٔ اول را تأیید کنید. معادلهٔ دوم به طور مؤثری ادعا می‌کند که گذر زمان برای دو ناظر در هر چارچوب مرجع آهنگ یکسانی دارد. واقعیت این مطلب برای فیزیکدانان پیش از اینشتین به قدری آشکار بود که حتی اشاره‌ای هم به آنها نمی‌شد. وقتی تندی v در مقایسه با c کوچک باشد، معادله‌های ۳۷-۲۰ در حالت کلی به خوبی برقرار است.

معادله‌های تبدیل لورنتس

بدون اثبات می‌پذیریم که معادله‌های تبدیل درستی را که برای همه تندیها تا تندی نور معتبرند، می‌توان از اصول موضوع نسبیت به دست آورد. این نتایج، که به نام **معادله‌های تبدیل لورنتس**[1] یا بعضی مواقع (اندکی به طور خلاصه) فقط تبدیلهای لورنتس نامیده می‌شوند، عبارت‌اند از

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y \qquad \text{(۳۷-۲۱)}$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

(معادله‌های تبدیل لورنتس، در همه تندیهای ممکن فیزیکی معتبرند)

(این معادله‌ها با این فرض نوشته شده‌اند که وقتی مبدأهای S و S' بر هم منطبق‌اند، $t=t'=0$.) توجه کنید که مقدارهای فضایی x و مقدارهای زمانی t در اولین و آخرین معادله به یکدیگر مربوط‌اند. این در هم آمیختن فضا و زمان پیام عمدهٔ نظریهٔ اینشتین بود، پیامی که مدتها به وسیلهٔ معاصرین او رد می‌شد.

این یک شرط رسمی معادله‌های نسبیتی است که اگر c به سمت بینهایت میل کند آنها باید به معادله‌های آشنای کلاسیکی تبدیل شوند. یعنی، اگر تندی نور به طور نامتناهی بزرگ باشد، همهٔ تندیها «کم» و معادله‌های کلاسیکی هرگز شکست نمی‌خورند. اگر در معادله‌های ۳۷-۲۱، $c\to\infty$ در نتیجه $\gamma\to1$ و معادله‌ها- همانطور که انتظار می‌رود- به معادله‌های

---

۱. شاید متعجب شوید که چرا اینها را *معادله‌های تبدیل اینشتین* نمی‌نامند (و چرا *عامل اینشتین* برای γ گفته نمی‌شود). لورنتس در واقع این معادله‌ها را پیش از اینشتین به دست آورد، ولی همانطور که فیزیکدان بزرگ آلمانی با بزرگواری تصدیق کرد، گام برجستهٔ بیشتری جهت تغییر این معادله‌ها که توصیف کنندهٔ طبیعت واقعی فضا و زمان هستند بر نداشت. این تفسیر که اولین بار توسط اینشتین انجام شد، قلب نسبیت است.

گالیله‌ای (معادله‌های ۳۷-۲۰) تبدیل می‌شوند. می‌توانید این امر را بررسی کنید.

معادله‌های ۳۷-۲۱ را به شکلی نوشته‌اند که اگر x و t را داده باشند، و بخواهیم x' و t' را به دست آوریم، مفید خواهند بود. ولی می‌خواهیم راه دیگری را برویم. در این حالت معادله‌های ۳۷-۲۱ را برای x و t به سادگی حل می‌کنیم؛ داریم

$$x=\gamma(x'+vt') \quad \text{و} \quad t=\gamma(t'+vx'/c^2) \qquad (۳۷\text{-}۲۲)$$

مقایسه نشان می‌دهد که با هر دسته از معادله‌های ۳۷-۲۱ یا ۳۷-۲۲ شروع کنیم، می‌توانیم با تعویض کمیت‌های پریم‌دار و بدون پریم و تغییر علامت سرعت نسبی v دستهٔ دیگر را به دست آوریم.

معادله‌های ۳۷-۲۱ و ۳۷-۲۲ مختصات یک رویداد منفرد را که به وسیلهٔ دو ناظر مشاهده می‌شود به هم ربط می‌دهند. گاهی مختصات یک رویداد منفرد را نمی‌خواهیم بدانیم بلکه اختلاف بین مختصات دو رویداد را می‌خواهیم. یعنی اگر رویدادها را با علامتهای ۱ و ۲ مشخص کنیم، می‌خواهیم

$$\Delta x=x_2-x_1 \quad \text{و} \quad \Delta t=t_2-t_1$$

را که به وسیلهٔ ناظری در S اندازه‌گیری می‌شود و

$$\Delta x'=x'_2-x'_1 \quad \text{و} \quad \Delta t'=t'_2-t'_1$$

را که به وسیلهٔ ناظری در S' اندازه‌گیری می‌شود به هم ربط دهیم.

جدول ۳۷-۲ معادله‌های لورنتس را در شکلهای مختلف به طرزی مناسب برای تحلیل دو رویداد نشان می‌دهد. معادله‌های جدول با قرار دادن سادهٔ اختلافها (مانند Δx و $\Delta x'$) برای چهار متغیر در معادله‌های ۳۷-۲۱ و ۳۷-۲۲ به دست آمده‌اند.

دقت کنید: وقتی مقدارها را به جای این اختلافها قرار می‌دهید، باید سازگار باشند و مقدارهای مربوط به اولین رویداد با مقدارهای دومین رویداد در هم نیامیزند. همچنین، اگر برای مثال، Δx یک کمیت منفی باشد، باید مطمئن شوید که علامت منها را در جایگذاری در نظر گرفته‌اید.

✔ نکتهٔ وارسی ۲ در شکل ۳۷-۹ سرعت چارچوب S' نسبت به چارچوب S، $0/90c$ است. ناظری در چارچوب S' دو رویداد را که در مختصه‌های فضا زمان زیر رخ می‌دهند اندازه می‌گیرد: رویداد زرد در $(5/0\,\text{m}, 20\,\text{ns})$ و رویداد سبز در $(-2/0\,\text{m}, 45\,\text{ns})$. ناظر واقع در چارچوب S می‌خواهد بازهٔ زمانی $\Delta t_{GY}=t_G-t_Y$ بین این رویدادها را پیدا کند. (الف) کدام معادله در جدول ۳۷-۲ باید به کار برده شود؟ (ب) آیا برای v در پرانتزهای سمت راست معادله و عامل لورنتس γ؛ باید $+0/90c$ گذاشته شود یا $-0/90c$؟ چه مقداری باید در (پ) جملهٔ اول پرانتز و (ت) جملهٔ دوم پرانتز قرار داده شود؟

جدول ۳۷-۲

معادله‌های تبدیل لورنتس برای دو رویداد

$1'-\ \Delta x'=\gamma(\Delta x-v\Delta t)$	$1-\ \Delta x=\gamma(\Delta x'+v\Delta t')$
$2'-\ \Delta t'=\gamma(\Delta t-v\Delta x/c^2)$	$2-\ \Delta t=\gamma(\Delta t+v\Delta x'/c^2)$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

چارچوب S' با سرعت v نسبت به چارچوب S حرکت می‌کند.

۳۷-۸ برخی پیامدهای معادله‌های لورنتس

در اینجا برای اثبات برخی نتایجی که پیشتر با بحثی مستقیماً مبتنی بر اصول موضوع بیان شد، از معادله‌های جدول ۳۷-۲ استفاده می‌کنیم.

همزمانی

معادلهٔ ۲ جدول ۳۷-۲ را در نظر بگیرید

$$\Delta t=\gamma\left(\Delta t'+\frac{v\Delta x'}{c^2}\right) \qquad (۳۷\text{-}۲۳)$$

اگر دو رویداد در مکانهای مختلف در چارچوب مرجع S' شکل ۳۷-۹ رخ دهند، آنگاه $\Delta x'$ در این معادله صفر نیست. پیامد این امر این است که حتی اگر رویدادها در S' همزمان باشند (پس $\Delta t'=0$)، آنها در چارچوب S همزمان نخواهند بود. (این با نتیجه‌گیری ما در بخش ۳۷-۴ مطابقت دارد.) بازهٔ زمانی بین رویدادها در S عبارت خواهد بود از

$$\Delta t=\gamma\frac{v\Delta x'}{c^2} \qquad (\text{رویدادهای همزمان در } S')$$

اتساع زمان

اکنون فرض کنید که دو رویداد در S' در یک مکان (پس $\Delta x'=0$) ولی در زمانهای مختلف رخ دهند (پس $\Delta t'\neq 0$). آنگاه معادلهٔ ۳۷-۲۳ به صورت زیر در می‌آید:

$$\Delta t=\gamma\Delta t' \qquad (\text{رویدادها در یک مکان در } S') \qquad (۳۷\text{-}۲۴)$$

این اتساع زمان بین چارچوبهای S و S' را تأیید می‌کند. افزون بر این، چون دو رویداد در یک مکان در S' رخ می‌دهند، بازهٔ زمانی $\Delta t'$ بین آنها می‌تواند با یک ساعت واقع در آن محل اندازه‌گیری شود. در این شرایط، بازهٔ اندازه‌گیری شده یک بازهٔ زمانی ویژه است، و آن را با Δt_0 مشخص می‌کنیم، همانطور که قبلاً ویژه زمانها را مشخص می‌کردیم. بنابراین، معادلهٔ ۳۷-۲۴ خواهد شد

$$\Delta t=\gamma\Delta t_0 \qquad (\text{اتساع زمان})$$

که دقیقاً معادلهٔ ۳۷-۹، معادلهٔ اتساع زمان است.

انقباض طول

معادله ′۱جدول ۳۷-۲ را در نظر می‌گیریم

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \qquad (۳۷-۲۵)$$

اگر میله با محورهای x و x' شکل ۳۷-۹ موازی و در چارچوب مرجع S' ساکن باشد، ناظری در S' می‌تواند در موقع مناسب طول آن را اندازه بگیرد. یک راه برای انجام این کار کم کردن مختصه‌های دو نقطهٔ انتهایی میله است. مقدار $\Delta x'$ که حاصل می‌شود ویژه طول $L_\circ$ میله خواهد بود، چون اندازه‌گیریها در چارچوبی انجام گرفته که در آن میله ساکن است.

حال فرض کنید میله در چارچوب S حرکت می‌کند. این بدان معناست که اگر مختصه‌های دو نقطهٔ انتهایی میله *به طور همزمان* اندازه‌گیری شوند، در چارچوب S ، Δx می‌تواند به عنوان طول L میله در نظر گرفته شود- یعنی اگر $\Delta t = \circ$ باشد. اگر در معادلهٔ ۳۷-۲۵ قرار دهیم $\Delta x' = L_\circ$ ، $\Delta x = L$ و $\Delta t = \circ$، پیدا می‌کنیم

$$L = \frac{L_\circ}{\gamma} \qquad \text{(انقباض طول)} \qquad (۳۷-۲۶)$$

که دقیقاً معادلهٔ ۳۷-۱۳، معادلهٔ انقباض طول است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷-۵

یک سفینهٔ زمینی برای وارسی یک پایگاه نظامی روی سیارهٔ $P۱۴۰۷$ که ماه آن پناهگاه گروه‌های جنگی، اغلب مهاجمین متخاصم است، ارسال شده است. همین طور که سفینه مسیر خط مستقیمی را طی می‌کند و ابتدا از سیاره و سپس از ماه عبور می‌کند، یک موج شدید میکروموج با انرژی زیاد را در پایگاه مهاجمین در ماه ثبت می‌کند و پس از گذشت ۱/۱۰s، انفجاری را در پایگاه نظامی در زمین ثبت می‌کند که وقتی از چارچوب مرجع سفینه اندازه‌گیری شود $۴/۰۰\times ۱۰^{۸}$ m از پایگاه مهاجمین فاصله دارد. واضح است که مهاجمین به پایگاه نظامی زمین حمله کرده‌اند؛ بنابراین سفینه خود را آمادهٔ رویارویی با آنها می‌کند.

(الف) تندی سفینه نسبت به سیاره و ماه آن $۰/۹۸۰c$ است. فاصله و بازهٔ زمانی بین موج شدید و انفجار وقتی در چارچوب لخت سیاره- ماه (و در نتیجه بر اساس ایستگاههای اشغالگران) اندازه‌گیری شوند، چقدر است؟

نکته‌های کلیدی

۱- این مسئله شامل اندازه‌گیریهایی است که در دو چارچوب مرجع، چارچوب سیاره- ماه و چارچوب سفینه انجام شده است.

۲- این مسئله شامل دو رویداد است: موج شدید و انفجار.

۳- نیاز داریم که داده‌های معلوم دربارهٔ زمان و مسافت بین دو رویداد را که در چارچوب سفینه اندازه‌گیری شده‌اند به داده‌های متناظر در چارچوب سیاره- ماه تبدیل کنیم.

چارچوب سفینه: پیش از تبدیل، لازم است که نمادگذاری خود را به دقت انتخاب کنیم. با نمودار وضعیت نشان داده شده در شکل ۳۷-۱۰ شروع می‌کنیم. در اینجا، چارچوب مرجع سفینهٔ S را ساکن و چارچوب سیاره- ماه S' را با سرعت مثبت (به سمت راست) متحرک در نظر می‌گیریم. (این یک انتخاب اختیاری است؛ می‌توانستیم چارچوب سیاره- ماه را ساکن بگیریم. بنابراین، در شکل ۳۷-۱۰ ، $\vec{v}$ را وصل به چارچوب S دوباره رسم می‌کنیم که حرکت به سمت چپ را نشان می‌دهد؛ v اکنون کمیتی منفی است. نتایج یکسان خواهند بود.) زیرنویسهای e و b را به ترتیب برای نمایش انفجار و موج شدید قرار می دهیم. آنگاه داده‌های معلوم همه در چارچوب مرجع بدون پریم (سفینه) عبارت‌اند از

$$\Delta x = x_e - x_b = +۴/۰۰\times ۱۰^{۸}\ \text{m}$$

و

$$\Delta t = t_e - t_b = +۱/۱۰\text{s}$$

در اینجا Δx یک کمیت مثبت است چون در شکل ۳۷-۱۰، مختصهٔ x_e برای انفجار بزرگتر از مختصهٔ x_b برای موج شدید است؛ Δt نیز کمیت مثبتی است چون زمان t_e انفجار بزرگتر از زمان t_b موج شدید است.

چارچوب سیاره- ماه: در جستجوی $\Delta x'$ و $\Delta t'$ هستیم که آنها را با تبدیل داده‌های معلوم در چارچوب S به چارچوب سیاره- ماه S' به دست می‌آوریم. چون یک جفت رویداد را در نظر می‌گیریم، معادله‌های تبدیل از جدول ۳۷-۲ یعنی معادله‌های ′۱ و ′۲ را انتخاب می‌کنیم:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \qquad (۳۷-۲۷)$$

و

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^۲}\right) \qquad (۳۷-۲۸)$$

در اینجا $v = +۰/۹۸۰c$ و عامل لورنتس عبارت است از

$$\gamma = \frac{۱}{\sqrt{۱-(v/c)^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۱-(+۰/۹۸۰c/c)^۲}} = ۵/۰۲۵۲$$

بنابراین، معادلهٔ ۳۷-۲۷ به دست می‌دهد

$$\Delta x' = (۵/۰۲۵۲)[۴/۰۰\times ۱۰^{۸}\ \text{m} - (+۰/۹۸۰)(۲۹۹۷۹۲۴۵۸\ \text{m/s})(۱/۱۰\text{s})] = ۳/۸۶\times ۱۰^{۸}\ \text{m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

و از معادلهٔ ۳۷-۲۸ داریم

$$\Delta t' = (۵/۰۲۵۲)\left[(۱/۱۰\text{s}) - \frac{(+۰/۹۸۰)(۲۹۹۷۹۲۴۵۸\ \text{m/s})(۴/۰۰\times ۱۰^{۸}\ \text{m})}{(۲۹۹۷۹۲۴۵۸\ \text{m/s})^۲}\right] = -۱/۰۴\text{s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) معنی علامت منفی در مقدار $\Delta t'$ چیست؟

استدلال: از سازگاری با نماد گذاری قرار داده شده دربند (الف). به خاطر آورید که در آغاز بازهٔ زمانی بین موج شدید و انفجار را به صورت $t_e - t_b = -۱/۱۰\text{s}$ تعریف کردیم. برای

سازگاری با انتخاب نمادگذاری، تعریف ما از $\Delta t'$ باید به صورت $t'_e - t'_b$ باشد؛ پس، در می‌یابیم که

$$\Delta t' = t'_e - t'_b = -۱/۰۴\text{s}$$

علامت منفی در اینجا حاکی از آن است که $t'_b > t'_e$؛ یعنی، در چارچوب مرجع سیاره- ماه، موج شدید ۱/۰۴s پس از انفجار رخ می‌دهد، نه ۱/۱۰s پیش از انفجار آنطور که در چارچوب سفینه آشکار می‌شود.

(پ) آیا موج شدید باعث انفجار شده است یا برعکس؟

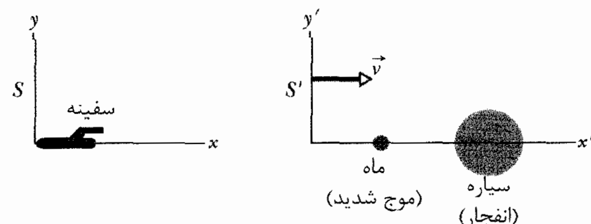
نکته‌های کلیدی توالی رویدادهای اندازه‌گیری شده در چارچوب مرجع سیاره- ماه عکس توالی رویدادهای اندازه‌گیری شده در چارچوب سفینه است. در هر وضعیت، اگر یک رابطه علّی بین دو رویداد وجود داشته باشد، اطلاعات باید از محل یک رویداد به محل رویداد دیگر حرکت کند تا آن را به وجود آورد.

وارسی تندی: تندی لازم برای این اطلاعات را بررسی می‌کنیم. در چارچوب سفینه، تندی عبارت است از

حل:

$$v_{\text{info}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۴/۰۰ \times ۱۰^۸\ \text{m}}{۱/۱۰\ \text{s}} = ۳/۶۴ \times ۱۰^۸\ \text{m/s}$$

اما این تندی ناممکن است چون بیشتر از c است. در چارچوب سیاره- ماه، تندی $۳/۷ \times ۱۰^۸$ m/s به دست می‌آید، که این نیز ناممکن است. بنابراین، هیچ یک از رویدادها نمی‌توانند باعث رویداد دیگر شود؛ یعنی، آنها رویدادهای *بدون ارتباط* هستند. پس، سفینه نمی‌تواند با مهاجمین مقابله کند.



شکل ۳۷-۱۰ سیاره و ماه آن در چارچوب مرجع S' با تندی v نسبت به سفینه در چارچوب مرجع S به طرف راست حرکت می‌کند.

۳۷-۹ نسبیت سرعتها

در اینجا می‌خواهیم با به کار بردن معادله‌های تبدیل لورنتس سرعتهایی را که دو ناظر در چارچوبهای لخت متفاوت S و S' برای یک ذرهٔ متحرک اندازه می‌گیرند مقایسه کنیم. فرض می‌کنیم S' با سرعت v نسبت به S حرکت می‌کند.

فرض کنید که ذره‌ای با سرعت ثابت موازی با محورهای x و x' در شکل ۳۷-۱۱ حرکت می‌کند و در حین حرکت دو سیگنال ارسال می‌کند. هر ناظر بازهٔ مکانی و بازهٔ زمانی بین این دو رویداد را اندازه می‌گیرد. این چهار اندازه‌گیری با معادله‌های ۱ و ۲ جدول ۳۷-۲ به هم مربوط‌اند

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$$

و

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^۲}\right)$$

اگر معادلهٔ اول را بر معادلهٔ دوم تقسیم کنیم خواهیم داشت

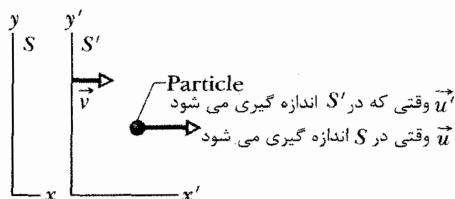
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + v\Delta x'/c^۲}$$

صورت و مخرج سمت راست را بر $\Delta t'$ تقسیم می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'/\Delta t' + v}{۱ + v(\Delta x'/\Delta t')/c^۲}$$

ولی، در حد دیفرانسیلی، $\Delta x/\Delta t$ عبارت است از u، سرعت ذره وقتی در S اندازه‌گیری می‌شود، و $\Delta x'/\Delta t'$ عبارت است از u'، سرعت ذره وقتی در S' اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین، سرانجام خواهیم داشت

$$u = \frac{u' + v}{۱ + u'v/c^۲} \qquad \text{(تبدیل نسبیتی سرعت)} \qquad (۳۷\text{-}۲۹)$$



شکل ۳۷-۱۱ چارچوب مرجع S' با سرعت v نسبت به چارچوب S حرکت می‌کند. سرعت ذره نسبت به چارچوب مرجع S' برابر $\vec{u}'$ و نسبت به چارچوب مرجع S برابر $\vec{u}$ است.

که معادلهٔ تبدیل نسبیتی سرعت است. وقتی آزمون رسمی $c \to \infty$ را به کار بریم، این معادله به معادلهٔ تبدیل سرعت کلاسیکی یا گالیله‌ای تبدیل می‌شود

$$u = u' + v \qquad \text{(تبدیل سرعت کلاسیکی)} \qquad (۳۷\text{-}۳۰)$$

به عبارت دیگر، معادلهٔ ۳۷-۲۹ برای تمام تندیهای فیزیکی ممکن برقرار است ولی معادلهٔ ۳۷-۳۰ برای تندیهای خیلی کمتر از c تقریباً صحیح است.

۳۷-۱۰ اثر دوپلر برای نور

در بخش ۳۳-۹ دربارهٔ اثردوپلر (جابه‌جایی در بسامد آشکار شده) در مورد موجهای صوتی که در هوا حرکت می‌کنند بحث کردیم. برای چنین موجهایی، اثر دوپلر به دو سرعت، یعنی سرعتهای چشمه و آشکارساز نسبت به هوا بستگی دارد. هوا محیطی است که موجها را انتقال می‌دهد.

برای موجهای نوری وضعیت اینگونه نیست، برای اینها (و سایر موجهای الکترومغناطیسی) به محیط نیازی نیست، و موجها می‌توانند حتی در خلأ حرکت کنند. اثر دوپلر در مورد موجهای نوری فقط به یک سرعت بستگی دارد، سرعت نسبی $\vec{v}$ بین چشمه و آشکارساز وقتی در چارچوب مرجع هر یک

اندازه‌گیری شود. f_0 را **ویژه بسامد** چشمه قرار می‌دهیم، یعنی بسامدی که توسط ناظری در چارچوب ساکن چشمه اندازه‌گیری می‌شود. f را بسامد آشکار شده توسط ناظری که با سرعت $\vec{v}$ نسبت به چارچوب ساکن حرکت می‌کند در نظر می‌گیریم. بنابراین، وقتی $\vec{v}$ در جهت دور شدن از چشمه باشد، خواهیم داشت

$$f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \text{(چشمه و آشکارساز در حال دور شدن)} \qquad (۳۷-۳۱)$$

که در آن $\beta = v/c$. وقتی جهت $\vec{v}$ به طور مستقیم به طرف چشمه باشد، علامتهای جلو همهٔ نمادهای β در معادلهٔ ۳۷-۳۱ را باید عوض کنیم.

اثر دوپلر در تندی پایین

در تندیهای پایین ($\beta \ll 1$)، می‌توان معادلهٔ ۳۷-۳۱ را به صورت یک سری توانی برحسب β بسط داد و تقریباً به صورت زیر در آورد

$$f = f_0\left(1-\beta+\frac{1}{2}\beta^2\right) \quad \text{(} \beta \ll 1 \text{، چشمه و آشکارساز از هم دور می‌شوند)} \qquad (۳۷-۳۲)$$

معادلهٔ تندی پایین متناظر برای اثر دوپلر با موجهای صوتی (یا هر موج دیگر غیر از موجهای نوری) همین دو جملهٔ اول را دارد ولی در جملهٔ سوم ضریب دیگری دارد. بنابراین، اثر نسبیتی برای چشمه‌ها و آشکارسازهای نوری با تندی پایین فقط با جملهٔ β^2 نشان داده می‌شود.

یگانهای رادار پلیس از اثر دوپلر با موجهای میکروموج برای اندازه‌گیری تندی v ماشینها استفاده می‌کنند. چشمهٔ واقع در یگان رادار یک باریکهٔ میکروموج در بسامد (ویژه) معین f_0 در طول جاده گسیل می‌کند. ماشینی که به طرف این یگان می‌آید با باریکه تلاقی می‌کند ولی در بسامدی که توسط اثر دوپلر به واسطهٔ حرکت ماشین به طرف یگان رادار، به بالا جابه‌جا شده است. ماشین باریکه را به طرف یگان رادار بازتاب می‌دهد. چون ماشین به طرف یگان رادار حرکت می‌کند، آشکارساز یگان باریکهٔ بازتابیده را در بسامدی که انتقال به بالای بیشتری یافته دریافت می‌کند. یگان بسامد آشکار شده را با f_0 مقایسه و تندی v ماشین را محاسبه می‌کند.

اثر دوپلر نجومی

در مشاهده‌های نجومی ستارگان، کهکشانها و دیگر چشمه‌های نوری، می‌توان سرعت حرکت آنها را هم وقتی به طور مستقیم از ما دور می‌شوند و هم وقتی به طور مستقیم به ما نزدیک می‌شوند، با اندازه‌گیری *جابه‌جایی دوپلر* نوری که از آنها به ما می‌رسد تعیین کرد. اگر ستارهٔ معینی نسبت به ما ساکن باشد، نور حاصل از آن را با ویژه بسامد معین f_0 می‌توانیم آشکار کنیم. ولی، اگر ستاره به طور مستقیم به ما نزدیک شود یا به طور مستقیم از ما دور شود، نور آشکار شده دارای بسامد f است که بنابر اثر دوپلر از f_0 جابه‌جا شده است. این جابه‌جایی دوپلری فقط ناشی از حرکت *شعاعی* ستاره (حرکت آن به طور مستقیم به طرف ما نزدیک شونده یا از ما دورشونده) است و تندیی که با اندازه‌گیری این جابه‌جایی دوپلری می‌توان تعیین کرد فقط *تندی شعاعی* v ستاره، یعنی، فقط مؤلفهٔ شعاعی سرعت ستاره نسبت به ماست.

فرض کنید ستاره‌ای (یا هر چشمهٔ نوری دیگر) از ما دور می‌شود و تندی شعاعی v آن به اندازه‌ای برای ما کوچک است (β به اندازهٔ کافی کوچک است) که می‌توان از جملهٔ β^2 در معادلهٔ ۳۷-۳۲ چشم‌پوشی کرد. بنابراین، داریم

$$f = f_0(1-\beta) \qquad (۳۷-۳۳)$$

چون اندازه‌گیریهای نجومی با نور معمولاً به جای بسامد با طول موج انجام می‌شوند، به جای f، c/λ و به جای f_0، c/λ_0 را قرار می‌دهیم، که λ طول موج اندازه‌گیری شده و λ_0 **ویژه طول موج** (طول موج مربوط به f_0) است. بنابراین، داریم

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}(1-\beta)$$

یا

$$\lambda = \lambda_0(1-\beta)^{-1} \qquad (۳۷-۳۴)$$

چون فرض کرده‌ایم که β کوچک است، $(1-\beta)^{-1}$ را برحسب سری توانی بسط می‌دهیم. با انجام این کار و نگه داشتن فقط توان اول β، خواهیم داشت

$$\lambda = \lambda_0(1+\beta)$$

یا

$$\beta = \frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0} \qquad (۳۷-۳۵)$$

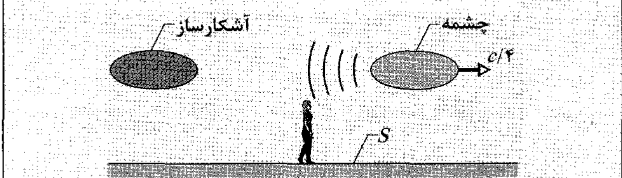
با جایگذاری β با v/c و $\lambda-\lambda_0$ با $|\Delta\lambda|$ خواهیم داشت

$$v = \frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0}c \quad \text{(} v \ll c \text{، تندی شعاعی چشمهٔ نور)} \qquad (۳۷-۳۶)$$

اختلاف $\Delta\lambda$ *جابه‌جایی دوپلری طول موج* چشمه نور است. آن را با قدر مطلق نوشته‌ایم چون همیشه بزرگی این جابه‌جایی را داریم.

معادله ۳۷-۳۶ تقریبی است که فقط وقتی $v \ll c$ برقرار است. با این شرط، می‌توان معادلهٔ ۳۷-۳۶ را چه چشمهٔ نور به ما نزدیک شود یا دور به کار برد. اگر چشمه از ما دور شود، آنگاه λ بزرگتر از λ_0 و $\Delta\lambda$ مثبت است، در این صورت جابه‌جایی دوپلر *انتقال به سرخ* نامیده می‌شود. (اصطلاح *سرخ* بدان معنا نیست که نور آشکار شده سرخ یا حتی مرئی است. بلکه به این معناست که نور سرخ با طول موج *بلند* در انتهای طیف مرئی است. بنابراین، λ بلندتر از λ_0 است.) اگر چشمهٔ نوری به طرف ما حرکت کند، آنگاه λ کوتاه‌تر از λ_0 و $\Delta\lambda$ منفی است، و جابه‌جایی دوپلر *انتقال به آبی* نامیده می‌شود.

✔ نکتهٔ وارسی ۳ شکل چشمه‌ای را نشان می‌دهد که موقع حرکت مستقیم به طرف راست با تندی $c/۴$ که در چارچوب مرجع S اندازه‌گیری شده است نور با ویژه بسامد $f_\circ$ گسیل می‌کند. شکل هم‌چنین یک آشکارساز نوری را نشان می‌دهد که برای نور گسیل شده بسامد $f < f_\circ$ را اندازه می‌گیرد. (الف) آیا آشکار ساز به سمت چپ حرکت می‌کند یا سمت راست؟ (ب) آیا تندی آشکار ساز وقتی از چارچوب مرجع S اندازه‌گیری شود بیشتر از $c/۴$ است یا کمتر از $c/۴$ یا برابر با $c/۴$ است؟



اثر دوپلر عرضی

تاکنون، در اینجا و در فصل ۳۳ درباره اثر دوپلر، فقط در موقعیتهایی که در آنها چشمه و آشکارساز به طور مستقیم به طرف هم حرکت می‌کنند یا از هم دور می‌شوند بحث کردیم. شکل ۳۷-۱۲ آرایش متفاوتی را نشان می‌دهد که در آن چشمهٔ S با حرکت خود از آشکارساز D می‌گذرد. وقتی S به نقطهٔ P می‌رسد، سرعت S عمود بر خط واصل P و D است و در آن لحظه S نه به طرف D حرکت می‌کند و نه از آن دور می‌شود. اگر چشمه موجهای صوتی با بسامد $F_\circ$ گسیل کند، D این بسامد را (بدون اثر دوپلر) موقع رسیدن موجهایی که در نقطه P گسیل شده بودند، آشکار می‌کند. ولی، اگر چشمه موجهای نوری را گسیل کند، باز هم یک اثر دوپلر وجود دارد که به آن **اثر دوپلر عرضی** می‌گویند. در این وضعیت، بسامد آشکار شدهٔ نور گسیل شده وقتی که چشمه در نقطهٔ P باشد عبارت است از

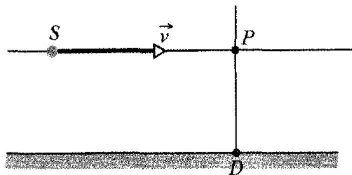
$$f = f_\circ\sqrt{1-\beta^۲} \qquad \text{(اثر دوپلر عرضی)} \qquad (۳۷-۳۷)$$

در تندیهای کم ($\beta \ll ۱$)، معادلهٔ ۳۷-۳۷ را می‌توان به صورت سری توانی برحسب β بسط داد و با تقریب نوشت

$$f = f_\circ\left(۱-\frac{۱}{۲}\beta^۲\right) \qquad \text{(تندیهای کم)} \qquad (۳۸-۳۷)$$

در اینجا جملهٔ اول همان چیزی است که برای موجهای صوتی انتظار داریم، و دوباره اثر نسبیتی برای چشمه‌های نور و آشکار سازهای با تندی کم با جملهٔ $\beta^۲$ ظاهر می‌شود.

در اصل، یگان رادار پلیس می‌تواند تندی ماشین را حتی وقتی که مسیر باریکهٔ رادار عمود (عرضی) بر مسیر ماشین است، تعیین کند. ولی، از معادلهٔ ۳۷-۳۸ دیده می‌شود که چون β حتی برای یک ماشین سریع کوچک است، جمله نسبیتی $\beta^۲/۲$ در اثر دوپلر عرضی فوق العاده کوچک خواهد بود. بنابراین، $f \approx f_\circ$ و یگان رادار تندی را صفر محاسبه می‌کند. به این دلیل افسران پلیس همواره سعی می‌کنند باریکهٔ رادار را به طور مستقیم در راستای مسیر ماشین بگیرند تا جابه‌جایی دوپلری تندی واقعی ماشین را به دست دهد.



شکل ۳۷-۱۲ یک چشمهٔ نوری S با سرعت v حرکت می‌کند و از مقابل آشکارساز D می‌گذرد. وقتی چشمه از نقطه P می‌گذرد که در این صورت جهت حرکت بر امتداد خطی که از D می‌گذرد عمود باشد، نظریهٔ نسبیت خاص یک اثر دوپلر عرضی را پیش‌بینی می‌کند. نظریه کلاسیکی چنین اثری را پیش‌بینی نمی‌کند.

هر انحرافی از این جهتگیری به نفع رانندگان است چون تندی اندازه‌گیری شده را کاهش می‌دهد.

اثر دوپلر عرضی در واقع آزمون دیگری از اتساع زمان است. اگر معادلهٔ ۳۷-۳۷ را به جای بسامد، برحسب دورهٔ تناوب T نوسان موج نوری گسیل شده بازنویسی کنیم، چون $T = ۱/f$، خواهیم داشت

$$T = \frac{T_\circ}{\sqrt{1-\beta^۲}} = \gamma T_\circ \qquad (۳۹-۳۷)$$

که در آن $T_\circ (= ۱/f_\circ)$ **ویژه دورهٔ تناوب** چشمه است. وقتی با معادلهٔ ۳۷-۹ مقایسه شود، معلوم می‌شود که معادلهٔ ۳۷-۳۹ به طور ساده همان فرمول اتساع زمان است چون دورهٔ تناوب یک بازهٔ زمانی است.

سامانهٔ هوانوردی NAVSTAR

هر ماهوارهٔ NAVSTAR در سامانهٔ مکان‌یابی جهانی[1] (GPS) به طور پیوسته سیگنالهای رادیویی را در بسامدی که توسط ساعتهای دقیق اتمی تنظیم و کنترل می‌شود پخش و مکان خود را مشخص می‌کند. وقتی سیگنال توسط یک آشکارساز GPS مثلاً یک هواپیمای تجارتی دریافت شد، بسامد به دلیل حرکت نسبی ماهواره و آشکارساز جابه‌جایی دوپلری پیدا می‌کند. با آشکارسازی همزمان سیگنالها از چندین ماهوارهٔ NAVSTAR، آشکارساز می‌تواند جهت به طرف هر یک از آنها و جهت سرعت ماهواره را تعیین کند. آنگاه از جابه‌جایی دوپلری سیگنالها آشکارساز تندی هواپیما را تعیین می‌کند.

گرچه سهم نسبیت در جابه‌جایی دوپلری خیلی اندک است (تقریباً $۴/۵ \times ۱۰^{-۱۰}$ برابر جابه‌جایی ناشی از نسبیت در این فصل)، مهندسان برای دقیق نگه داشتن سامانهٔ NAVSTAR باید آن را به حساب بیاورند. آنها هم‌چنین باید آثار نظریهٔ عام نسبیت اینشتین را به دلیل متفاوت بودن شتاب گرانش در ارتفاع یک ماهواره از مقدار آن در ارتفاع یک آشکارساز مستقر در زمین به حساب آورند. نظریه‌های خاص و عام نسبیت اینشتین مدتی طولانی پس از آنکه منتشر شده بودند مورد توجه قرار نگرفتند. امروزه اینها در مکانیابی جهانی و هوانوردی دور برد امری حیاتی به حساب می‌آیند.

1. Global Positioning System

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷-۶

شکل ۳۷-۱۳ الف منحنیهای شدت طول موج را برحسب طول موج را بـرای نوری که از گاز میان سیاره‌ای واقع در دو طرف مقابل کهکـشان M۸۷ (شکل ۳۷-۱۳ ب) به ما می‌رسد نشان می‌دهد. یـک قلـهٔ منحنی در ۴۹۹/۸nm و قلـهٔ دیگـر در ۵۰۱/۶nm قـرار دارد. این گاز در شـعاع $r = ۱۰۰$ سـال نـوری دور هـستهٔ کهکـشان می‌چرخد، از یک طرف هسته به ما نزدیک و از طرف مقابل آن از ما دور می‌شود.

(الف) کدام منحنی متناظر با گازی است که به طرف ما حرکـت می‌کند؟ تندی گاز نسبت به ما (و نـسبت بـه هـستهٔ کهکـشان) چقدر است؟

نکته‌های کلیدی

۱- اگر گاز حرکت نمی‌کرد، نـور حاصـل از آن در طـول مـوج معینی آشکار می‌شد.

۲- حرکت گاز طول موج آشکار شده را توسط اثر دوپلر تغییـر می‌دهد، طول موج در مورد گازی کـه از مـا دور مـی‌شـود افزایش و در مورد گازی که به ما نزدیک مـی‌شـود کـاهش می‌یابد.

بنابراین قلهٔ منحنی واقع در ۵۰۱/۶nm متناظر بـا حرکـت دور شونده از مـا، و قلـهٔ واقـع در ۴۹۹/۸nm متنـاظر بـا حرکـت نزدیک شونده به ماست.

محاسبه‌ها: اکنون فرض می‌کنیم که بزرگی افزایش و کـاهش در طول موج به دلیل حرکت گاز یکسان باشد. بنابراین، طول مـوج جابه‌جا نشده، که می‌توان آن را به عنوان ویژه طول موج $\lambda_۰$ در نظر گرفت، باید متوسط دو طول موج جابه‌جا شده باشد؛

$$\lambda_۰ = \frac{۵۰۱/۶\,\text{nm} + ۴۹۹/۸\,\text{nm}}{۲} = ۵۰۰/۷\,\text{nm}$$

جابه‌جایی دوپلـری $\Delta\lambda$ نـور حاصـل از دور شـدن گـاز از مـا عبارت است از

$$\Delta\lambda = |\lambda - \lambda_۱| = ۵۰۱/۶\,\text{nm} - ۵۰۰/۷\,\text{nm} = ۰/۹۰\,\text{nm}$$

بـا قـرار دادن ایـن و $\lambda_۰ = ۵۰۰/۷\,\text{nm}$ در معادلـهٔ ۳۷-۳۶، در می‌یابیم که تندی گاز عبارت است از

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_۰}c = \frac{۰/۹۰\,\text{nm}}{۵۰۰/۷\,\text{nm}} ۲۹۹۷۹۲۴۵۸\,\text{m/s}$$
$$= ۵/۳۹ \times ۱۰^۵\,\text{m/s} \quad \text{(پاسخ)}$$

(ب) به دلیل اینکه یک نیروی گرانشی ناشی از جرم M هسته بر گاز وارد می‌شود، گاز دور هسته کهکشان می‌چرخد. ایـن جـرم چند برابر جرم خورشید $M_S (= ۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۰}\,\text{kg})$ است؟

نکته‌های کلیدی

۱- از معادلهٔ ۱۳-۱ (جلد اول) بزرگی F نیـروی گرانـشی وارد بر یک عنصر گاز در حال چرخش به جرم m در مداری بـه شعاع r عبارت است از

$$F = \frac{GMm}{r^۲}$$

۲- اگر عنصر گازی در یک مدار دایـره‌ای دور هـستهٔ کهکـشان بچرخد، آنگاه، این عنصر باید یک شـتاب رو بـه مرکـز بـه بزرگی $a = v^۲/r$ ، در جهت هسته داشته باشد.

۳- قانون دوم نیوتون، که برای یک محور شـعاعی از مرکـز تـا عنصر گاز نوشته می‌شود حاکی از آن است که $F = ma$.

با قرار دادن این سه نکته با یکدیگر، خواهیم داشت

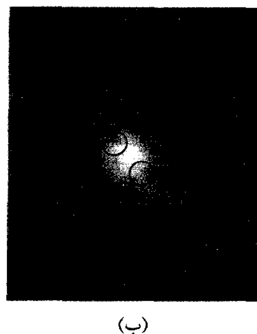
$$\frac{GMm}{r^۲} = m\frac{v^۲}{r}$$

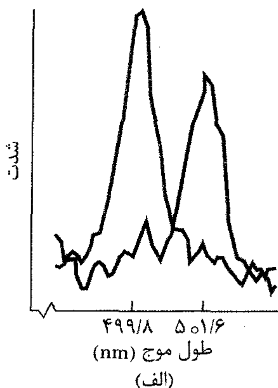
با حل این معادله برحسب M و قرار دادن داده‌های معلوم، پیـدا می‌کنیم

$$M = \frac{v^۲ r}{G}$$
$$= \frac{(۵/۳۹ \times ۱۰^۵\,\text{m/s})^۲ (۱۰۰\,\text{ly})(۹/۴۶ \times ۱۰^{۱۵}\,\text{m/ly})}{۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\,\text{N.m}^۲/\text{kg}^۲}$$
$$= ۴/۱۲ \times ۱۰^{۳۹}\,\text{kg} = (۲/۱ \times ۱۰^۹)\text{M}_s \quad \text{(پاسخ)}$$

این نتیجه حاکی از آن است که جرمی معادل با دو میلیارد برابـر جرم خورشید در هستهٔ این کهکشان متراکم شده است، که قویـاً یک *ابر سیاهچاله* را نشان می‌دهد که در هسته قرار گرفته است.

میولای M۸۷: سیاهچالهٔ M۸۷ تقریبـاً ۱۰۰۰ برابـر بزرگتـر از ابر سیاهچاله‌ای است که در مرکز کهکشان راه شیری، قـرار دارد (مسئلهٔ نمونهٔ ۱۳-۷ جلد اول) و بنابراین به واقـع عظـیم الجثـه است. این سیاهچاله نسبت به محوری می‌چرخد و وقتی موادی (ستارگان و گازها) به درون آن می‌افتند، این مواد نیروهای قوی الکترومغناطیسی ایجاد می‌کنند که الکترونها را از سـیاهچاله، در امتداد محور دوران رو به بیرون و خارج M۸۷ پرتاب مـی‌کننـد. پرتاب به قدری شدید است که الکترونها تقریبـاً بـا تنـدی نـور حرکت می‌کنند. تصویر آغاز این فصل فورانی را نشان مـی‌دهـد که تقریباً به طرف ما سمتگیری کـرده اسـت؛ فـوران در جهـت مخالف را نمی‌توانیم ببینیم.


(ب)



(الف)

شکل ۳۷-۱۳ (الف) نمودارهای شدت برحسب طول موج برای نـور گسیل شده به وسیلهٔ گاز در دو طرف مقابل کهکشان M۸۷ و آشـکار شده روی زمین. (ب) ناحیهٔ مرکزی M۸۷ . دایره‌ها مکانهای گـازی را نشان می‌دهند که شدت آنها در (الف) داده شده است. هستهٔ M۸۷ در وسط دایره‌ها قرار دارد.

۳۷-۱۱ نگاهی نو به اندازه حرکت

فرض کنید تعدادی ناظر، هر یک در چارچوب مرجع لخت متفاوت، برخورد منزوی شدهٔ بین دو ذره را مشاهده می‌کنند. در مکانیک کلاسیکی، دیده‌ایم که- اگر چه ناظرها سرعتهای متفاوتی را برای ذره‌های برخورد کننده اندازه می‌گیرند- آنها همگی در می‌یابند که قانون پایستگی اندازه حرکت برقرار است. یعنی آنها در می‌یابند که اندازه حرکت کل دستگاهی از ذره‌ها پس از برخورد همان مقدار پیش از برخورد است.

این وضعیت چگونه تحت تأثیر نسبیت قرار می‌گیرد؟ اگر به تعریف اندازه حرکت $\vec{p}$ ذره‌ای به صورت $m\vec{v}$ ، حاصلضرب جرم آن در سرعتش ادامه دهیم، در می‌یابیم که اندازه حرکت برای همهٔ ناظرهای لخت متفاوت پایستار *نیست*. دو انتخاب داریم: (۱) قانون پایستگی اندازه حرکت را رها کنیم یا (۲) ببینیم اگر بتوانیم اندازه حرکت ذره را به روش جدیدی دوباره تعریف کنیم به طوری که قانون پایستگی اندازه حرکت همچنان برقرار باشد. شیوه دوم را انتخاب می‌کنیم.

ذره‌ای را در نظر می‌گیریم که با تندی ثابت v در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. از نظر کلاسیکی بزرگی اندازه حرکت آن عبارت است از

$$p = mv = m\frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{(اندازه حرکت کلاسیکی)} \qquad (۳۷-۴۰)$$

که در آن Δx مسافتی است که ذره در زمان Δt پیموده است. برای یافتن یک عبارت نسبیتی برای اندازه حرکت، با تعریف جدید زیر شروع می‌کنیم

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t_0}$$

در اینجا مانند قبل، Δx مسافت پیموده شده توسط ذرهٔ متحرک از نظر ناظری است که آن ذره را نگاه می‌کند. ولی، Δt_0 زمان لازم برای پیمودن همان مسافت است ولی نه از نظر ناظری که به آن نگاه می‌کند بلکه از نظر ناظری که همراه ذره حرکت می‌کند. ذره نسبت به این ناظر دوم ساکن است؛ پس زمانی که اندازه می‌گیرد یک ویژه زمان است.

با استفاده از فرمول اتساع زمان، $\Delta t = \gamma t_0$ (معادلهٔ ۳۷-۹) می‌توان نوشت

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t_0} = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\,\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\gamma$$

ولی، چون $\Delta x/\Delta t$ درست سرعت ذره v است، داریم

$$p = \gamma mv \qquad \text{(اندازه حرکت)} \qquad (۳۷-۴۱)$$

توجه کنید که این با تعریف کلاسیکی معادلهٔ ۳۷-۴۰ فقط در عامل لورنتس γ تفاوت دارد. ولی، این اختلاف مهم است: برخلاف اندازه حرکت کلاسیکی، اندازه حرکت نسبیتی با میل کردن v به طرف c به مقدار بینهایت میل می‌کند.

تعریف معادلهٔ ۳۷-۴۱ را می‌توان به شکل برداری به صورت زیر تعمیم داد

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v} \qquad \text{(اندازه حرکت)} \qquad (۳۷-۴۲)$$

این معادله تعریف صحیح اندازه حرکت را برای همهٔ تندیهای ممکن فیزیکی به دست می دهد. در مورد تندی خیلی کمتر از c، این معادله به تعریف کلاسیکی اندازه حرکت ($\vec{p} = m\vec{v}$) تبدیل می‌شود.

۳۷-۱۲ نگاهی نو به انرژی

انرژی جرم

علم شیمی در آغاز با این فرض توسعه یافت که در واکنشهای شیمیایی، انرژی و جرم به طور جداگانه پایسته‌اند. در سال ۱۹۰۵/۱۲۸۴، اینشتین نشان داد که به عنوان پیامدی از نظریهٔ نسبیت خاص او، جرم می‌تواند شکل دیگری از انرژی در نظر گرفته شود. بنابراین، قانون پایستگی انرژی در واقع قانون پایستگی جرم- انرژی است.

در یک *واکنش شیمیایی* (فرایندی که در آن اتمها یا مولکولها بر هم کنش می‌کنند)، مقدار جرمی که به شکلهای دیگری از انرژی انتقال می‌یابد (یا برعکس) آنچنان کسر کوچکی از کل جرم داخل واکنش است که امیدی به اندازه‌گیری تغییر جرم حتی با بهترین ترازوهای آزمایشگاهی وجود ندارد. *به نظر می‌رسد* که جرم و انرژی به واقع به طور جداگانه پایسته باشند. ولی، در یک *واکنش هسته‌ای* (که در آن هسته‌ها یا ذره‌های بنیادی برهم‌کنش می‌کنند)، انرژی آزاد شده اغلب حدود یک میلیون برابر بزرگتر از انرژی آزاد شده در یک واکنش شیمیایی است، و تغییر در جرم به آسانی می‌تواند اندازه‌گیری شود. در نظر گرفتن انتقالهای جرم- انرژی در واکنشهای هسته‌ای مدتهاست که به کاری عادی تبدیل شده است.

جرم m یک جسم و انرژی معادل E_0 آن با رابطهٔ زیر به هم مربوط‌اند

$$E_0 = mc^2 \qquad (۳۷-۴۳)$$

که بدون زیر نویس ۰ معادلهٔ علمی کاملاً شناخته شده‌ای در تمام زمانها بوده است. این انرژی که به جرم یک جسم مربوط است **انرژی جرم** یا **انرژی سکون** نام دارد. نام دوم پیشنهاد می‌کند که E_0 انرژیی است که جسم حتی وقتی که ساکن است، به طور ساده به دلیل داشتن جرم آن را دارد. (اگر مطالعهٔ فیزیک را به بیشتر از این کتاب ادامه دهید، بحثهای ظریفی از رابطهٔ بین جرم و انرژی را خواهید دید. حتی با عدم توافقهایی دربارهٔ اینکه این رابطه چیست و چه معنی می‌دهد، رو به رو خواهید شد.)

جدول ۳۷-۳ انرژی جرم (تقریبی)، یا انرژی سکون چند ماده را نشان می‌دهد. انرژی جرم مثلاً یک پنی فوق‌العاده زیاد، معادل مقدار انرژی الکتریکی بیش از چند میلیون دلار است. به

عبارت دیگر، تولید کل انرژی الکتریکی سالانهٔ امریکا متناظر با جرم فقط چند صد کیلوگرم از ماده (سنگ، یا هر چیز دیگر) است.

در عمل، یکاهای SI بندرت با معادلهٔ ۳۷-۴۳ به کار برده می‌شوند چون بیش از حد معمول بزرگ‌اند. جرمها معمولاً برحسب یکاهای اتمی جرم اندازه‌گیری می‌شوند، داریم

$$1u = 1/66053873 \times 10^{-27} kg \qquad (۳۷-۴۴)$$

انرژیها معمولاً برحسب الکترون ولت یا مضربهای آن اندازه‌گیری می‌شوند، که عبارت است از

$$1eV = 1/602176462 \times 10^{-19} J \qquad (۳۷-۴۵)$$

در یکاهای معادله‌های ۳۷-۴۴ و ۳۷-۴۵، با ضرب c^2 مقدارهای زیر حاصل می‌شود

$$c^2 = 9/31494013 \times 10^8 eV/u = 9/31494013 \times 10^5 keV/u = 931/494013 MeV/u \qquad (۳۷-۴۶)$$

جدول ۳۷-۳

معادلهای انرژی چند جسم

جسم	جرم (kg)	معادل انرژی	
الکترون	$\approx 9/11 \times 10^{-31}$	$\approx 8/19 \times 10^{-14} J$	$(\approx 511 keV)$
پروتون	$\approx 1/67 \times 10^{-27}$	$\approx 1/50 \times 10^{-10} J$	$(\approx 938 MeV)$
اتم اورانیوم	$\approx 3/95 \times 10^{-25}$	$\approx 3/55 \times 10^{-8} J$	$(\approx 225 GeV)$
ذرهٔ غبار	$\approx 1 \times 10^{-13}$	$\approx 1 \times 10^{4} J$	$(\approx 2 kcal)$
پنی آمریکا	$\approx 3/1 \times 10^{-3}$	$\approx 2/8 \times 10^{14} J$	$(\approx 78 GW.h)$

انرژی کل

در مورد هر جسمی، معادلهٔ ۳۷-۴۳ انرژی جرم E_0 مربوط به جسم به جرم m را بدون توجه به اینکه جسم ساکن است یا متحرک به دست می‌دهد. اگر جسم در حال حرکت باشد، انرژیی اضافی به شکل انرژی جنبشی K دارد. اگر فرض کنیم که انرژی پتانسیل جسم صفر است، آنگاه انرژی کل عبارت است از مجموع انرژی جرم و انرژی جنبشی آن

$$E = E_0 + K = mc^2 + K \qquad (۳۷-۴۷)$$

اگرچه آن را اثبات نمی‌کنیم، انرژی کل E به صورت زیر نیز نوشته می‌شود

$$E = \gamma mc^2 \qquad (۳۷-۴۸)$$

که در آن γ عامل لورنتس برای حرکت جسم است.

از فصل ۷ (جلد اول)، در مورد مثالهای زیادی که شامل تغییرات در انرژی کل یک ذره یا دستگاهی از ذره‌ها بودند بحث کردیم. ولی، انرژی جرم را در این بحثها منظور نکردیم چون از تغییرات در انرژی جرم که صفر یا بسیار کوچک است چشم پوشی کردیم. قانون پایستگی انرژی کل وقتی تغییرات در انرژی جرم بارز باشد باز هم برقرار است. بنابراین، بدون توجه به آنچه که برای انرژی جرم رخ می‌دهد، گفته زیر از بخش ۸-۸ (جلد اول) هنوز درست است

> انرژی کل E یک *دستگاه منزوی نمی‌تواند تغییر کند.*

برای مثال، اگر انرژی جرم کل دو ذره برهم‌کنش کننده در یک دستگاه منزوی کاهش یابد، انواع دیگر انرژی در دستگاه باید افزایش یابد چون انرژی کل نمی‌تواند تغییر کند.

در دستگاهی که در آن یک واکنش شیمیایی یا هسته‌ای رخ می‌دهد، تغییر در انرژی جرم کل دستگاه ناشی از واکنش، اغلب با مقدار Q داده می‌شود. مقدار Q در مورد یک واکنش از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

(انرژی جرم کل اولیهٔ دستگاه) = (انرژی جرم کل نهایی دستگاه) + Q

یا

$$E_{0i} = E_{0f} + Q \qquad (۳۷-۴۹)$$

با استفاده از معادلهٔ ۳۷-۴۳ $(E_0 = mc^2)$، این را برحسب جرم *کل* اولیهٔ M_i و جرم *کل* نهایی M_f می‌توان به صورت زیر نوشت

$$M_i c^2 = M_f c^2 + Q$$

یا

$$Q = M_i c^2 - M_f c^2 = -\Delta M c^2 \qquad (۳۷-۵۰)$$

که در آن تغییر در جرم ناشی از واکنش $\Delta M = M_f - M_i$ است.

اگر واکنشی به تبدیل انرژی از انرژی جرم به، مثلاً انرژی جنبشی محصولهای واکنش بیانجامد، انرژی جرم کل دستگاه E_0 (و جرم کل M) کاهش می‌یابد و Q مثبت است. ولی اگر واکنشی مستلزم این باشد که انرژی به انرژی جرم تبدیل شود، انرژی جرم کل دستگاه E_0 (و جرم کل آن M) افزایش می‌یابد و Q منفی است.

برای مثال، فرض کنید دو هستهٔ هیدروژن یک *واکنش همجوشی* انجام می‌دهند که در آن دو هسته برای تشکیل یک هستهٔ تنها به یکدیگر می‌چسبند و دو ذره در این فرایند آزاد می‌کنند. انرژی جرم کل (و جرم کل) هستهٔ حاصل و دو ذره آزاد شده کمتر از انرژی جرم کل (و جرم کل) هسته‌های هیدروژن اولیه است. بنابراین، Q واکنش همجوشی مثبت است، و گفته می‌شود انرژی به وسیلهٔ واکنش *آزاد شده است* (از انرژی جرم تبدیل شده است). این آزاد شدن برای ما مهم است زیرا همجوشی هسته‌های هیدروژن در خورشید بخشی از فرایندی است که به درخشش آفتاب روی زمین می‌انجامد و زندگی را در اینجا امکان‌پذیر می‌سازد.

انرژی جنبشی

در فصل ۷ (جلد اول) انرژی جنبشی K جسمی به جرم m را که با تندی v خیلی کمتر از c حرکت می‌کند به صورت زیر تعریف کردیم

$$K = \frac{1}{2} mv^2 \qquad (۳۷-۵۱)$$

البته این معادلهٔ کلاسیکی فقط تقریبی است و وقتی تندی خیلی کمتر از تندی نور باشد برقرار است.

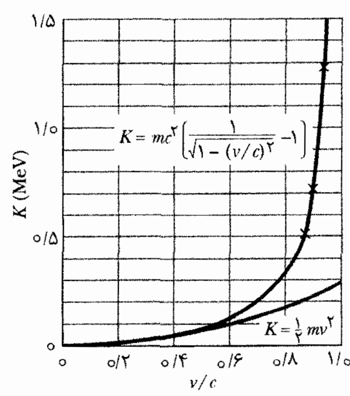
اکنون عبارتی را برای انرژی جنبشی که برای *کلیه* تندیهای ممکن فیزیکی، با در نظر گرفتن تندیهای نزدیک به c، صحیح باشد پیدا می‌کنیم. با حل معادلهٔ ۳۷-۴۷ برحسب K و سپس با قرار دادن به جای E از معادلهٔ ۳۷-۴۸ خواهیم داشت

$$K = E - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2$$
$$= mc^2(\gamma - 1) \qquad \text{(انرژی جنبشی)} \qquad (۵۲-۳۷)$$

که در آن $\gamma (= 1/\sqrt{1-(v/c)^2})$ عامل لورنتس برای حرکت جسم است.

شکل ۳۷-۱۴ نمودارهای انرژی جنبشی یک الکترون را وقتی با تعریف صحیح (معادلهٔ ۳۷-۵۲) و تقریب کلاسیکی (معادلهٔ ۳۷-۵۱) محاسبه شوند، هر دو برحسب تابعهایی از v/c نشان می‌دهد. توجه کنید که در سمت چپ نمودار دو نمودار بر هم منطبق‌اند؛ این بخشی از نمودار- در تندیهای پایین‌تر- است که انرژیهای جنبشی را تاکنون در این کتابها (جلد اول و جلد دوم) محاسبه کرده‌ایم. این بخش از نمودار نشان می‌دهد که در محاسبهٔ انرژی جنبشی با عبارت کلاسیکی معادلهٔ ۳۷-۵۱ درست عمل کرده‌ایم. ولی، در سمت راست نمودار- در تندیهای نزدیک به c- اختلاف دو نمودار قابل ملاحظه است. وقتی v/c به ۱/۰ نزدیک می‌شود، نمودار مربوط به تعریف کلاسیکی انرژی جنبشی به آرامی افزایش می‌یابد در حالی که نمودار مربوط به تعریف صحیح انرژی جنبشی شدیداً افزایش می‌یابد و در بینهایت وقتی v/c به ۱/۰ برسد به بینهایت میل می‌کند. بنابراین، وقتی تندی v جسمی نزدیک به c باشد، *باید* از معادلهٔ ۳۷-۵۲ برای محاسبهٔ انرژی جنبشی آن استفاده کنیم.

شکل ۳۷-۱۴ همچنین حاکی از چیزهایی دربارهٔ کار است که باید روی جسمی انجام دهیم تا تندی آن را، مثلاً ۱٪ افزایش دهد. کار لازم W برابر است با تغییر حاصل ΔK در انرژی جنبشی جسم. اگر تغییر در تندی پایین رخ دهد، در سمت چپ



شکل ۳۷-۱۴ معادله‌های نسبیتی (معادلهٔ ۳۷-۵۲) و کلاسیکی (معادلهٔ ۳۰-۵۱) انرژی جنبشی یک الکترون، برحسب تابعی از v/c، که v تندی الکترون و c تندی نور است رسم شده است. توجه کنید که دو منحنی در تندیهای پایین نزدیک به هم و در تندیهای بالا به میزان زیادی از هم دور می‌شوند. داده‌های تجربی (در علامتهای ×) نشان می‌دهد که در تندیهای بالا منحنی نسبیتی با تجربه توافق دارد ولی منحنی کلاسیکی توافق ندارد.

شکل ۳۷-۱۴، کار لازم چندان زیاد نیست. ولی، اگر تغییر در تندی زیاد رخ دهد، در سمت راست شکل ۳۷-۱۴، کار لازم ممکن است خیلی زیاد باشد چون انرژی جنبشی K با افزایش در تندی v خیلی سریع افزایش می‌یابد. برای افزایش تندی جسمی تا c، در اصل مقدار انرژی لازم بینهایت است، پس انجام این کار ناممکن است.

انرژی جنبشی الکترونها، پروتونها و ذره‌های دیگر اغلب با یکای الکترون ولت یا یکی از مضربهای آن بیان می‌شود. برای مثال، الکترونی با انرژی جنبشی ۲۰ MeV به صورت الکترون ۲۰ MeV بیان می‌شود.

اندازه حرکت و انرژی جنبشی

در مکانیک کلاسیکی، اندازه حرکت p یک ذره برابر mv و انرژی جنبشی آن K عبارت است از $\frac{1}{2}mv^2$. اگر v را بین این دو عبارت حذف کنیم، رابطه مستقیمی بین اندازه حرکت و انرژی جنبشی پیدا می‌کنیم

$$p^2 = 2Km \qquad \text{(کلاسیکی)} \qquad (۵۳-۳۷)$$

رابطه مشابهی را در نسبیت با حذف v بین تعریف نسبیتی اندازه حرکت (معادلهٔ ۳۷-۴۱) و تعریف نسبیتی انرژی جنبشی (معادلهٔ ۳۷-۵۲) پیدا می‌کنیم. با انجام چند عمل جبری به رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2 \qquad (۵۴-۳۷)$$

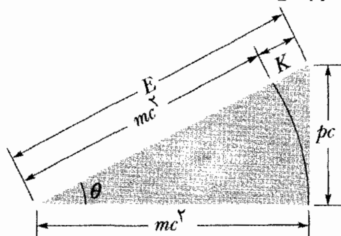
به کمک معادلهٔ ۳۷-۴۷ می‌توان معادلهٔ ۳۷-۵۴ را به رابطهٔ بین اندازه حرکت p و انرژی کل E ذره تبدیل کرد

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \qquad (۵۵-۳۷)$$

مثلث قائم الزاویهٔ شکل ۳۷-۱۵ به شما کمک می‌کند تا این رابطه‌های مفید را حفظ کنید. در این مثلث می‌توانید نشان دهید که

$$\sin\theta = \beta \quad \text{و} \quad \cos\theta = \frac{1}{\gamma} \qquad (۵۶-۳۷)$$

با معادلهٔ ۳۷-۵۵ می‌توان دید که حاصلضرب pc باید یکای انرژی E را داشته باشد؛ پس یکای اندازه حرکت p را به صورت یکای انرژی بخش بر c می‌توان بیان کرد. در واقع در فیزیک ذره‌های بنیادی اندازه حرکت برحسب یکاهای MeV/c یا GeV/c داده می‌شود.



شکل ۳۷-۱۵ نمودار مفیدی برای حفظ کردن رابطه‌های نسبیتی انرژی کل E، انرژی سکون یا انرژی جرم mc^2، انرژی جنبشی K و بزرگی اندازه حرکت p.

> ✓ **نکتهٔ وارسی ۴** آیا (الف) انرژی جنبشی و (ب) انرژی کل یک الکترون 1GeV، بیشتر از انرژی کل مربوط به پروتون 1GeV است یا کمتر یا با آن مساوی است؟

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷-۷

(الف) انرژی کل E یک الکترون ۲/۵۳MeV چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی معادلهٔ ۳۷-۴۷، انرژی کل E مجموع انرژی جرم الکترون (یا انرژی سکون) $mc^۲$ و انرژی جنبشی آن است.

$$E = mc^۲ + K \qquad (۵۷\text{-}۳۷)$$

محاسبه‌ها: صفت «۲/۵۳MeV»در مسئله بدان معناست که انرژی جنبشی الکترون ۲/۵۳MeV است. برای محاسبهٔ انرژی جرم الکترون $mc^۲$، جرم m الکترون را از پیوست ب قرار می‌دهیم، به دست می‌آوریم

$$mc^۲ = (۹/۱۰۹\times۱۰^{-۳۱}\ \text{kg})(۲۹۹۷۹۲۴۵۸\ \text{m/s})^۲$$
$$= ۸/۱۸۷\times۱۰^{-۱۴}\ \text{J}$$

سپس با تقسیم این نتیجه بر $۱/۶۰۲\times۱۰^{-۱۳}$ J/MeV مقدار ۰/۵۱۱MeV به عنوان انرژی جرم الکترون به دست می‌آید (که مقدار جدول ۳۷-۳ را تأیید می‌کند). بنابراین، از معادلهٔ ۳۷-۵۷ داریم

$$E = ۰/۵۱۱\text{MeV} + ۲/۵۳\text{MeV} = ۳/۰۴\text{MeV} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) بزرگی p اندازه حرکت الکترون برحسب MeV/c چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی می‌توان p را از انرژی کل E و انرژی جرم $mc^۲$ از معادلهٔ ۳۷- ۵۵ پیدا کرد، داریم

$$E^۲ = (pc)^۲ + (mc^۲)^۲$$

محاسبه‌ها: با حل آن برحسب pc خواهیم داشت

$$pc = \sqrt{E^۲ - (mc^۲)^۲}$$
$$= \sqrt{(۳/۰۴\text{MeV})^۲ - (۰/۵۱۱\text{MeV})^۲} = ۳/۰۰\text{MeV}$$

سرانجام با تقسیم هر دو بر c پیدا می‌کنیم

$$p = ۳/۰۰\text{MeV/c} \qquad \text{(پاسخ)}$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷-۸

پرانرژی‌ترین پروتونی که تاکنون در پرتوهای کیهانی که از فضا روی زمین می‌آیند آشکار شده دارای انرژی جنبشی حیرت‌آور $۳/۰\times۱۰^{۲۰}$ eV است (انرژی کافی برای گرم کردن یک قاشق چای خوری آب به مقدار چند درجه).

(الف) عامل لورنتس γ و تندی v پروتون (هر دو نسبت به آشکارساز واقع روی زمین) چقدر است؟

نکته‌های کلیدی (۱) عامل لورنتس γ پروتون انرژی کل E آن را از معادلهٔ ۳۷-۴۸ ($E = \gamma mc^۲$) به انرژی جرم آن $mc^۲$ مربوط می‌کند. **(۲)** انرژی کل پروتون عبارت است از مجموع انرژی جرم $mc^۲$ و انرژی جنبشی (داده شده) آن K.

محاسبه‌ها: با قرار دادن این موارد با هم خواهیم داشت

$$\gamma = \frac{E}{mc^۲} = \frac{mc^۲ + K}{mc^۲} = ۱ + \frac{K}{mc^۲} \qquad (۵۸\text{-}۳۷)$$

می‌توان انرژی جرم پروتون $mc^۲$ را از جرم داده شدهٔ آن در پیوست ب، همانطور که برای الکترون در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷-۷ الف دیدیم، محاسبه کرد. در می‌یابیم که $mc^۲$ برابر ۹۳۸MeV است (همانطور که در جدول ۳۷-۳ نوشته شده است). با قرار دادن این و مقدار انرژی جنبشی داده شده در معادلهٔ ۳۷-۵۸، به دست می‌آوریم

$$\gamma = ۱ + \frac{۳/۰\times۱۰^{۲۰}\ \text{eV}}{۹۳۸\times۱۰^{۶}\ \text{eV}}$$
$$= ۳/۱۹۸\times۱۰^{۱۱} \approx ۳/۲\times۱۰^{۱۱} \qquad \text{(پاسخ)}$$

مقدار محاسبه شدهٔ γ بقدری بزرگ است که نمی‌توانیم تعریف γ (معادلهٔ ۳۷-۸) را برای پیدا کردن v به کار بریم. این را انجام دهید، ماشین حساب شما نشان خواهد داد که β به طور مؤثر برابر با ۱ و در نتیجه v به طور مؤثر برابر با c است. در واقع، v تقریباً c است، ولی می‌خواهیم جواب دقیقتری بدهیم، ابتدا با حل معادلهٔ ۳۷-۸ برای $۱-\beta$ می‌توانیم آن را به دست آوریم. با نوشتن این معادله شروع می‌کنیم

$$\gamma = \frac{۱}{\sqrt{۱-\beta^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{(۱-\beta)(۱+\beta)}} = \frac{۱}{\sqrt{۲(۱-\beta)}}$$

که از این واقعیت استفاده کردیم که β بقدری نزدیک به یک است که $۱+\beta$ خیلی به ۲ نزدیک است. سرعتی را که به دنبالش هستیم در جملهٔ $۱-\beta$ قرار دارد. با حل برای $۱-\beta$ خواهیم داشت

$$۱-\beta = \frac{۱}{۲\gamma^۲} = \frac{۱}{(۲)(۳/۱۹۸\times۱۰^{۱۱})^۲}$$
$$= ۴/۹\times۱۰^{-۲۴} \approx ۵\times۱۰^{-۲۴}$$

بنابراین،

$$\beta = ۱ - ۵\times۱۰^{-۲۴}$$

و چون $v = \beta c$ است،

$$v \approx ۰/۹۹۹\ ۹۹۹\ ۹۹۹\ ۹۹۹\ ۹۹۹\ ۹۹۹\ ۹۹۹\ ۹۹۵c \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) فرض کنید که پروتون در امتداد قطری از کهکشان راه شیری ($۹/۸\times۱۰^{۴}$ ly) حرکت می‌کند. تقریباً چقدر طول می‌کشد تا پروتون این قطر را وقتی از چارچوب مرجع مشترک زمین و کهکشان اندازه‌گیری می‌شود، طی کند؟

استدلال: قبلاً دیدیم که این پروتون *فرانسبیتی* با تندی کمی کمتر از c حرکت می‌کند. پس **نکتهٔ کلیدی** در اینجا این است که بنا به تعریف سال نوری، نور 1y طول می‌کشد تا فاصلهٔ 1ly را طی کند، پس نور باید $۹/۸\times۱۰^{۴}$ y حرکت کند تا $۹/۸\times۱۰^{۴}$ ly را طی کند، و برای این پروتون تقریباً همین مقدار زمان طول می‌کشد. پس، از چارچوب مرجع زمین- راه شیری، حرکت پروتون به مقدار زیر طول می‌کشد

(پاسخ) $\Delta t = ۹/۸\times ۱۰^{۴}$ y

(پ) وقتی اندازه‌گیری در چارچوب ساکن پروتون انجام گیرد این حرکت چقدر طول می‌کشد؟

نکته‌های کلیدی

۱- این مسئله شامل اندازه‌گیریهای انجام شده در دو چارچوب مرجع (لخت) است: یکی در چارچوب زمین- راه شیری ودیگری متصل به پروتون.

۲- این مسئله هم‌چنین شامل دو رویداد است: رویداد اول عبارت است از وقتی که پروتون از یک انتهای قطر در امتداد کهکشان می‌گذرد، و دیگر وقتی است که از انتهای مقابل می‌گذرد.

۳- بازهٔ زمانی بین این دو رویداد وقتی در چارچوب مرجع پروتون اندازه‌گیری شود بازهٔ ویژه زمان $\Delta t_{\circ}$ است چون این رویدادها در یک مکان در آن چارچوب- یعنی در خود پروتون رخ می‌دهند.

۴- می‌توان بازهٔ ویژه زمان $\Delta t_{\circ}$ را از بازهٔ زمانی Δt اندازه‌گیری شده در چارچوب زمین- راه شیری با استفاده از معادلهٔ ۳۷-۹ $(\Delta t = \gamma \Delta t_{\circ})$ برای اتساع زمان پیدا کرد.

محاسبه: معادلهٔ ۳۷-۹ برای $\Delta t_{\circ}$ و قرار دادن γ از (الف) و Δt از (ب) پیدا می‌کنیم

$$\Delta t_{\circ} = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{۹/۸\times ۱۰^{۴}\ \text{y}}{۳/۱۹۸\times ۱۰^{۱۱}}$$

(پاسخ) $\approx ۳/۰۶\times ۱۰^{-۷}\text{y} = ۹/۷\text{s}$

در چارچوب مرجع ما، سفر ۹۸۰۰۰y طول می‌کشد. در چارچوب پروتون، سفر ۹/۷s طول می‌کشد! همانطور که در آغاز این فصل دیدیم، حرکت نسبی می‌تواند آهنگ گذشت زمان را تغییر دهد، و ما در اینجا مثالی فراتر از حد متعارف داریم.

بازنگری و خلاصه درس

اصول موضوع نظریه نسبیت خاص اینشتین بر دو اصل موضوع استوار است:

۱- قانونهای فیزیک برای همهٔ ناظرها در همهٔ چارچوبهای مرجع لخت یکسان هستند. هیچ چارچوبی بر چارچوب دیگر ارجحیت ندارد.

۲- تندی نور در خلأ در تمام جهتها و در همهٔ چارچوبهای مرجع لخت دارای مقدار یکسان c است.

تندی نور c در خلأ یک تندی غایی است و تندی هیچ موجودی که انرژی یا اطلاعات حمل می‌کند نمی‌تواند از آن بیشتر شود.

مختصات یک رویداد سه مختصهٔ فضایی و یک مختصهٔ زمانی یک **رویداد** را مشخص می‌کنند. یک وظیفهٔ نسبیت خاص این است که این مختصات را وقتی توسط دو ناظری مشاهده می‌شوند که نسبت به هم دارای حرکت یکنواخت هستند به هم ربط دهد.

رویدادهای همزمان اگر دو ناظر در حرکت نسبی باشند، به طور کلی نمی‌توانند بر سر اینکه آیا دو رویداد همزمان هستند توافق داشته باشند. اگر یکی از ناظرها دریابد که دو رویداد در مکانهای متفاوت همزمان هستند، دیگری چنین برداشتی ندارد و برعکس. همزمانی یک مفهوم مطلق *نیست* بلکه امری نسبی است و به حرکت ناظر بستگی دارد. نسبیت همزمانی پیامد مستقیم تندی غایی و محدود c است.

اتساع زمان اگر دو رویداد پی در پی در یک مکان در چارچوب مرجع لختی رخ دهند، بازهٔ زمانی $\Delta t_{\circ}$ بین آنها، که با یک ساعت در محلی که رخ می‌دهند اندازه‌گیری می‌شود، **ویژه زمان** بین رویدادها نامیده می‌شود. *ناظرهایی که در چارچوبهای متحرک نسبت به آن چارچوب قرار دارند مقدار بزرگتری را برای این بازه اندازه‌گیری می‌کنند.* در مورد ناظری که با تندی نسبی v حرکت می‌کند، بازهٔ زمانی اندازه‌گیری شده عبارت است از

$$\Delta t = \frac{\Delta t_{\circ}}{\sqrt{1-(v/c)^{2}}} = \frac{\Delta t_{\circ}}{\sqrt{1-\beta^{2}}} = \gamma \Delta t_{\circ} \qquad \text{(اتساع زمان)} \qquad (۳۷\text{-}۷ \text{ تا } ۳۷\text{-}۹)$$

در اینجا $\beta = v/c$ **پارامتر تندی** و $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^{2}}$ **عامل لورنتس** است. یک نتیجهٔ مهم اتساع زمان این است که ساعتهای متحرک وقتی توسط ناظر ساکن اندازه‌گیری شوند آهسته کار می‌کنند.

انقباض طول طول $L_{\circ}$ جسمی که توسط ناظری در چارچوب مرجع لختی که جسم در آن ساکن است اندازه‌گیری شود، **ویژه طول** نامیده می‌شود. *ناظرهایی که در چارچوبهایی قرار دارند که نسبت به آن چارچوب و موازی با آن طول حرکت می‌کنند طول کوتاهتری را اندازه می‌گیرند.* برای ناظری که با تندی نسبی v حرکت می‌کند، طول اندازه‌گیری شده برابر است با

$$L = L_{\circ}\sqrt{1-\beta^{2}} = \frac{L_{\circ}}{\gamma} \qquad \text{(انقباض طول)} \qquad (۳۷\text{-}۱۳)$$

تبدیل لورنتس معادله‌های *تبدیل لورنتس* مختصات فضازمان یک رویداد تنها را وقتی توسط ناظرهایی در دو چارچوب لخت S و S' مشاهده شوند به هم ربط می‌دهد، که S' نسبت به S با سرعت v در جهت مثبت x و x' حرکت می‌کند. چهار مختصه با رابطه‌های زیر به هم مربوط‌اند

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y \qquad (۳۷\text{-}۲۱)$$

$$z' = z$$
$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

نسبیت سرعتها هرگاه ذره‌ای با تندی u' در جهت مثبت x' در یک چارچوب مرجع لخت S' حرکت کند که خود آن چارچوب با تندی v موازی با جهت x یک چارچوب لخت دیگر S حرکت می‌کند، تندی u ذره وقتی در S اندازه‌گیری شود عبارت است از

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad \text{(سرعت نسبیتی)} \qquad (۲۹-۳۷)$$

اثر دوپلر نسبیتی اگر چشمه‌ای که موجهای نوری با بسامد f_0 گسیل می‌کند با تندی شعاعی نسبی v (و پارامتر تندی $\beta = v/c$) به طور مستقیم از آشکارساز دور شود، بسامد f اندازه‌گیری شده توسط آشکارساز عبارت است از

$$f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad (۳۱-۳۷)$$

اگر چشمه به طور مستقیم به طرف آشکارساز حرکت کند، علامتها در معادلهٔ ۳۷-۳۱ معکوس می‌شوند.

در مشاهده‌های نجومی، اثر دوپلر برحسب طول موجها اندازه‌گیری می‌شود. در مورد تندیهای کمتر از c، از معادلهٔ ۳۷-۳۱ خواهیم داشت

$$v = \frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0}c \qquad (۳۶-۳۷)$$

که $\Delta\lambda (= \lambda - \lambda_0)$ *جابه‌جایی دوپلر* در طول موج ناشی از حرکت است.

اثر دوپلر عرضی اگر حرکت نسبی چشمهٔ نور بر خط واصل چشمه و آشکارساز عمود باشد، فرمول بسامد دوپلر عبارت است از

$$f = f_0\sqrt{1-\beta^2} \qquad (۳۷-۳۷)$$

اثر دوپلر عرضی ناشی از اتساع زمان است.

اندازه حرکت و انرژی تعریفهای زیر از اندازه حرکت خطی $\vec{p}$، انرژی جنبشی K، و انرژی کل E برای ذره‌ای به جرم m در هر تندی ممکن فیزیکی معتبرند

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v} \quad \text{(اندازه حرکت)} \qquad (۴۲-۳۷)$$

$$E = mc^2 + K = \gamma mc^2 \quad \text{(انرژی کل)} \qquad (۴۷-۳۷ \text{ و } ۴۸-۳۷)$$

$$K = mc^2(\gamma - 1) \quad \text{(انرژی جنبشی)} \qquad (۵۲-۳۷)$$

در اینجا، γ عامل لورنتس برای حرکت ذره و mc^2 *انرژی جرم* یا *انرژی سکون*، مربوط به جرم ذره است. این معادله‌ها به رابطه‌های زیر می‌انجامند

$$(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2 \qquad (۵۴-۳۷)$$

و

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \qquad (۵۵-۳۷)$$

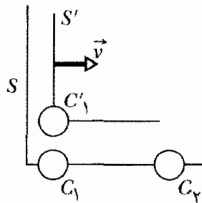
هرگاه واکنش شیمیایی یا هسته‌ای در سامانه‌ای از ذره‌ها رخ دهد، واکنش عبارت است از منفی تغییر در انرژی جرم کل سامانه

$$Q = M_i c^2 - M_f c^2 = -\Delta M c^2 \qquad (۵۰-۳۷)$$

که M_i جرم کل دستگاه پیش از واکنش و M_f جرم کل آن پس از واکنش است.

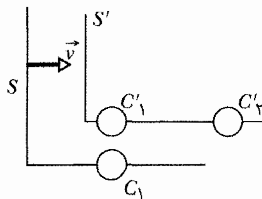
پرسشها

۱- شکل ۳۷-۱۶ دو ساعت در چارچوب ساکن S (در این چارچوب همزمان شده‌اند) و یک ساعت در چارچوب متحرک S' را نشان می‌دهد. وقتی ساعتهای C_1 و C'_1 از مقابل هم می‌گذرند صفر را نشان می‌دهند. وقتی ساعتهای C'_1 و C_2 از مقابل هم می‌گذرند، (الف) کدام ساعت عدد کوچکتری را نشان می‌دهد و (ب) کدام ساعت ویژه زمان را اندازه می‌گیرد؟



شکل ۳۷-۱۶ پرسش ۱

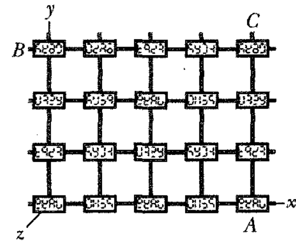
۲- شکل ۳۷-۱۷ دو ساعت در چارچوب ساکن S' (در این چارچوب همزمان شده‌اند) و یک ساعت در چارچوب متحرک S را نشان می‌دهد. وقتی ساعتهای C_1 و C'_1 از مقابل هم می‌گذرند، صفر را نشان می‌دهند. وقتی ساعتهای C_1 و C'_2 از مقابل یکدیگر می‌گذرند، (الف) کدام ساعت عدد کوچکتری را نشان می‌دهد و (ب) کدام ساعت ویژه زمان را اندازه می‌گیرد؟



شکل ۳۷-۱۷ پرسش ۲

۳- صفحهٔ ساعتها و میله‌های اندازه‌گیری در شکل ۳۷-۱۸ همانند ساعتها و میله‌های شکل ۳۷-۳ هستند. فاصلهٔ ساعتها در امتداد محور x (مرکز تا مرکز) ۱ ثانیه نوری است، و ساعتهای در امتداد محور y در همین وضع قرار دارند و همهٔ ساعتها از طریق روشی که در بخش ۳۷-۳ توصیف شد همزمان شده‌اند. وقتی سیگنال همزمان کنندهٔ اولیهٔ $t = 0$ از مبدأ به (الف) ساعت A، (ب) ساعت B، و (پ) ساعت C می‌رسد، زمان اولیه روی آن ساعتها چیست؟ وقتی ساعت A زمان $10\,s$ را نشان می‌دهد رویدادی رخ می‌دهد. (ت) چه مدت طول می‌کشد تا سیگنال

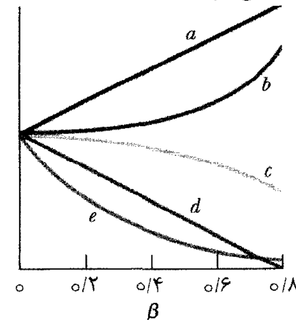
این رویداد به ناظری برسد که در مبدأ قرار گرفته است؟ (ث) چه زمانی را ناظر به این رویداد نسبت می‌دهد؟



شکل ۳۷-۱۸ پرسش ۳

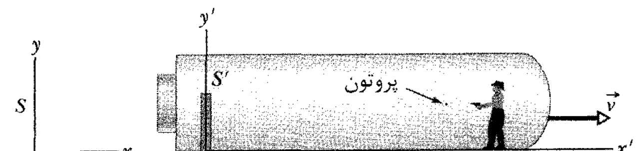
۴- سام در سفینه‌ای به سوی مریخ، ونوس را ترک می‌کند و با تندی نسبی $0/5c$ نسبت به سالی که روی زمین است حرکت می‌کند. (الف) هر دو زمان سفر ونوس- مریخ را اندازه می‌گیرند. کدامیک ویژه زمان را اندازه می‌گیرد، سام، سالی یا هیچ‌کدام؟ (ب) در بین راه سام یک تپ نوری به مریخ می‌فرستد. هر دو زمان حرکت این تپ را اندازه می‌گیرند. کدامیک ویژه زمان را اندازه می‌گیرد؟

۵- میله‌ای با تندی ثابت v در امتداد محور x چارچوب مرجع S، با طول میله موازی با آن محور حرکت می‌کند. ناظری در چارچوب S با طول L میله را اندازه می‌گیرد. کدام منحنی در شکل ۳۷-۱۹ بهترین نمودار برای طول (محور قائم در نمودار) L برحسب پارامتر تندی β است؟



شکل ۳۷-۱۹ پرسش ۵ و ۷

۶- شکل ۳۷-۲۰ سفینه‌ای را (متصل به چارچوب مرجع S') نشان می‌دهد که از ما (ایستاده در چارچوب مرجع S) می‌گذرد. پروتونی از جلو به عقب سفینه، تقریباً با تندی نور در طول سفینه شلیک می‌شود. (الف) آیا فاصلهٔ فضایی $\Delta x'$ بین نقطه‌ای که پروتون شلیک شده و نقطه‌ای که به دیوار عقب سفینه اصابت می‌کند کمیتی مثبت است یا منفی؟ (ب) آیا فاصلهٔ زمانی $\Delta t'$ بین این رویداد کمیتی مثبت است یا منفی؟



شکل ۳۷-۲۰ پرسش ۶ و مسئله ۶۴

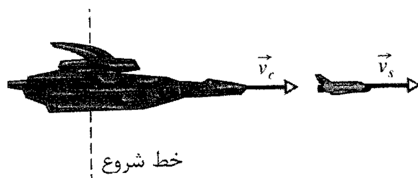
۷- مانند شکل ۳۷-۹ چارچوب مرجع S' با تندی v در جهت مشترک محورهای x و x' نسبت به چارچوب مرجع S حرکت می‌کند. ناظری که با چارچوب S' حرکت می‌کند با ساعت مچی زمان $25s$ را اندازه می‌گیرد. بازهٔ زمانی متناظری که توسط ناظری واقع در چارچوب S اندازه‌گیری می‌شود Δt است. کدامیک از منحنیهای شکل ۳۷-۱۹ بهترین نمودار Δt (محور قائم نمودار) برحسب پارامتر تندی β است؟

۸- در حالی که در اخترپیما هستید با سیگنالهایی از چهار سفینه روبه‌رو می‌شوید که یا به طور مستقیم به سوی شما حرکت می‌کنند یا به طور مستقیم از شما دور می‌شوند. ویژه بسامد سیگنالها مقدار یکسان f_0 است. تندی و جهت (هر دو نسبت به شما) سفینه‌ها عبارت‌اند از (الف) $0/3c$ از طرف شما، و (ت) $0/6c$ از طرف شما. سفینه‌ها را به ترتیب بزرگی بسامدهایی که دریافت می‌کنند مرتب کنید.

۹- شکل ۳۷-۲۱ یکی از چهار اخترپیما را که در حال مسابقه‌اند نشان می‌دهد. وقتی هر اخترپیما از خط شروع می‌گذرد، سفینه‌ای آن را ترک می‌کند و به سمت خط پایان می‌رود. شما که داور مسابقه‌اید نسبت به خط شروع و پایان ساکن هستید. تندیهای v_c اخترپیماها نسبت به شما و تندیهای v_s سفینه نسبت به اخترپیما به ترتیب عبارت‌اند از

(۱) $0/40c$، $0/70c$
(۲) $0/7c$، $0/40c$
(۳) $0/2c$، $0/90c$
(۴) $0/60c$، $0/50c$

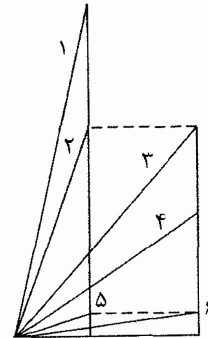
(الف) بدون محاسبه، سفینه‌ها را به ترتیب بزرگی تندیهایشان نسبت به شما مرتب کنید. (ب) باز هم بدون محاسبه سفینه‌ها را به ترتیب بزرگی فاصله‌هایی که خلبانهایشان از خط شروع تا خط پایان اندازه می‌گیرند مرتب کنید. (پ) هر اخترپیما سیگنالی را با بسامد معین f_0 به سفینهٔ خود می‌فرستد که در اخترپیما اندازه‌گیری می‌شود. باز هم بدون محاسبه، سفینه‌ها را به ترتیب بزرگی بسامدهایی که آشکار می‌کنند مرتب کنید.



شکل ۳۷-۲۱ پرسش ۹

۱۰- انرژی سکون و انرژی کل سه ذره به ترتیب برحسب مقدار پایهٔ A بیان شده‌اند که عبارت‌اند از (۱) A، $2A$؛ (۲) A، $3A$؛ (۳) $3A$، $4A$. بدون محاسبه، ذره‌ها را به ترتیب بزرگی (الف) جرم آنها، (ب) انرژی جنبشی آنها، (پ) عامل لورنتس آنها و (ت) تندیها مرتب کنید.

۱۱- شکل ۳۷-۲۲ مثلث شکل ۳۷-۱۵ را برای شش ذره نشان می‌دهد؛ طول خطهای ۲ و ۴ با هم یکسان است. این ذره‌ها را به ترتیب بزرگی (الف) جرم، (ب) اندازه حرکت و (پ) عامل لورنتس، مرتب کنید. (ت) مشخص کنید که کدام دو ذره انرژی کل یکسانی دارند. (ث) سه ذره با کمترین جرم را به ترتیب بزرگی انرژی جنبشی آنها مرتب کنید.



شکل ۳۷-۲۲ پرسش ۱۱

مسئله‌ها

GO مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
••• تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

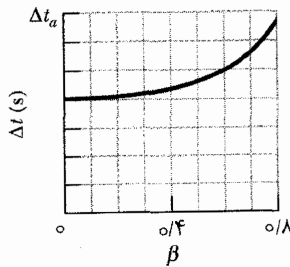
بخش ۳۷-۵ نسبیت زمان

•۱- طول عمر متوسط موئونهای ساکن برابر با $2/2000\,\mu s$ اندازه‌گیری شده است. طول عمر متوسط موئونهای با تندی زیاد در ظهور ناگهانی پرتوهای کیهانی که از زمین مشاهده شده است برابر با $16/000\,\mu s$ اندازه‌گیری شده است. تا پنج رقم معنی‌دار، پارامتر تندی β این موئونهای پرتو کیهانی نسبت به زمین چقدر است؟ **SSM**

•۲- اگر عامل لورنتس γ (الف) ۱/۰۱۰۰۰۰۰، (ب) ۱۰/۰۰۰۰۰۰، (پ) ۱۰۰/۰۰۰۰۰ و (ت) ۱۰۰۰/۰۰۰۰ باشد، با هشت رقم با معنا پارامتر تندی چقدر است؟

••۳- ذرهٔ پر انرژی ناپایداری وارد یک آشکارساز می‌شود و پیش از واپاشی اثری به طول 1/05mm باقی می‌گذارد. تندی آن نسبت به آشکارساز ‎۰/۹۹۲c‎ بوده است. اگر ذره نسبت به آشکارساز به حالت سکون برسد چه مدت طول کشیده است؟ **ILW**

••۴- همانطور که شکل ۳۷-۹ نشان می‌دهد، چارچوب مرجع S' نسبت به چارچوب مرجع S با تندی v در امتداد جهت مشترک محورهای x و x' حرکت می‌کند. ناظری که با چارچوب S' حرکت می‌کند بازهٔ زمانی معینی را با ساعت مچی خود ثبت می‌کند. بازهٔ زمانی Δt متناظر توسط ناظر واقع در چارچوب S اندازه‌گیری می‌شود. شکل ۳۷-۲۳، Δt را برحسب پارامتر تندی β برای گستره‌ای از مقدارهای β نشان می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $\Delta t_a = 14/0\,s$ مشخص شده است. اگر $v = 0/98c$ باشد بازهٔ Δt چقدر است؟



شکل ۳۷-۲۳ مسئله ۴

••۵- داستان فیلم و کتاب سیارهٔ میمونها این است که فضانوردان در رویا به آینده دور زمین سفر می‌کنند، زمانی که به جای تمدن بشری تمدن میمونها وجود دارد. با در نظر گرفتن فقط نسبیت خاص، تعیین کنید که اگر فضانوردان 120y در خواب باشند در حالی که نسبت به زمین با تندی $0/9990c$، ابتدا از زمین دور شوند و سپس دوباره به زمین برگردند، چقدر از آیندهٔ زمین در حرکت خواهند بود؟

••۶- برگشت به آینده. فرض کنید که پدری 20/00y از دخترش بزرگتر باشد. او به مدت 2/00y از زمین دور شود و سپس به مدت 2/00y دیگر (دو اندازه‌گیری توسط او انجام می‌شود) به زمین برگردد به طوری که پس از آن او 20/00y از دخترش جوانتر است. پارامتر تندی β ثابت (نسبت به زمین) مورد نیاز برای این سفر چقدر است؟

••۷- می‌خواهید با تندی ثابت در امتداد خط راستی به مدت دقیقاً ۶ ماه در سفینه‌ای از زمین سفر کنید و دوباره با همان تندی ثابت به زمین برگردید. مایلید در برگشت زمین را به گونه‌ای بیابید که دقیقاً ۱۰۰۰ سال در آینده باشد. (الف) با هشت رقم با معنا، با چه پارامتر تندی β باید حرکت کنید؟ (ب) آیا مهم است که در امتداد خط راست سفر کنید؟

بخش ۳۷-۶ نسبیت طول

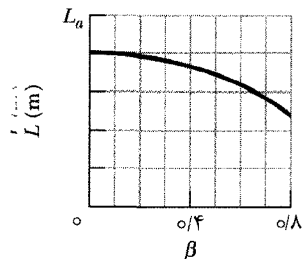
•۸- یک خط‌کش در چارچوب S' با محور x' زاویهٔ $30°$ می‌سازد. اگر این چارچوب موازی با محور x چارچوب S با تندی $0/90c$ نسبت به S حرکت کنند، طول خط‌کش در چارچوب S' چقدر است؟

●۹- میله‌ای که موازی با محور x در چارچوب مرجع S قرار دارد، در امتداد این محور با تندی $0/63c$ حرکت می‌کند. طول در حال سکون آن $1/70\,m$ است. طول آن در چارچوب S' چقدر است؟ SSM

●۱۰- الکترونی با $\beta = 0/999987$ در امتداد محور لامپ خلائی که طول آن از نظر ناظر آزمایشگاهی S در حالت سکون نسبت به لامپ $3/00\,m$ است حرکت می‌کند. ناظر S' که در حالت سکون نسبت به الکترون است مشاهده می‌کند که این لامپ با تندی $v(=\beta c)$ حرکت می‌کند. ناظر S' چه طولی را برای لامپ اندازه می‌گیرد؟

●۱۱- سفینه‌ای با طول در حالت سکون $130\,m$ با تندی $0/740c$ از یک ایستگاه زمان‌سنجی می‌گذرد. (الف) طول سفینه که به وسیلهٔ ایستگاه اندازه‌گیری می‌شود چقدر است؟ (ب) چه بازهٔ زمانی بین عبور جلو و عقب سفینه در دستگاه ثبت می‌شود؟ SSM

●●۱۲- میله‌ای با تندی ثابت v در امتداد محور x به طور موازی با آن حرکت می‌کند. ناظر چارچوب S طول میله را برابر L اندازه می‌گیرد. شکل ۳۷-۲۴ طول L را برحسب پارامتر تندی β در گستره‌ای از مقدارهای β نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $L_a = 1/00\,m$ مشخص شده است. اگر $v = 0/95c$ باشد، L چقدر است؟



شکل ۳۷-۲۴ مسئله ۱۲

●●۱۳- مرکز کهکشان راه شیری تقریباً $23000\,ly$ از ما فاصله دارد. (الف) با هشت رقم بامعنا، به چه پارامتر تندی نیاز دارید تا دقیقاً $23000\,ly$ (از نظر چارچوب کهکشان) را در مدت دقیقاً $30\,y$ (از نظر چارچوب خودتان) طی کنید؟ (ب) با اندازه‌گیری در چارچوب خودتان و برحسب سال نوری چه طولی از کهکشان در طی سفر از مقابل شما خواهد گذشت؟

●●۱۴- طول سفینه‌ای دقیقاً نصف طول آن در حالت سکون است. (الف) با سه رقم با معنی، پارامتر تندی β سفینه نسبت به چارچوب ناظر چقدر است؟ (ب) با چه ضریبی ساعتهای این سفینه نسبت به ساعتهای چارچوب ناظر آهسته کار می‌کنند؟

●●۱۵- فضاپیمایی از زمین بلند می‌شود و با تندی $0/99c$ به طرف ستاره وگا که در فاصلهٔ $26ly$ قرار دارد، حرکت می‌کند. (الف) وقتی فضاپیما به وگا می‌رسد و (ب) وقتی ناظران زمینی پیامی از رسیدن فضاپیما دریافت می‌کنند، چه مدت زمان توسط ساعتهای زمینی گذشته است؟ (پ) وقتی مسافر فضاپیما به وگا می‌رسد، ناظران زمینی چه مدت زمان بیشتری (وقتی از چارچوب مسافر فضاپیما اندازه‌گیری شود) نسبت به زمانی که مسافر از شروع سفر داشته است، محاسبه می‌کنند؟

بخش ۳۷-۸ برخی پیامدهای معادله‌های لورنتس

●۱۶- چارچوب لخت S' با تندی $0/60c$ نسبت به چارچوب S (شکل ۳۷-۹) حرکت می‌کند. در $t = t' = 0$ ، $x = x' = 0$ است. دو رویداد ثبت شده‌اند. در چارچوب S، رویداد ۱ در $t = 0$ در مبدأ و رویداد ۲، در $t = 4/00\mu s$ روی محور x و در $x = 3/0\,km$ رخ داده‌اند. از نظر ناظر S'، زمان (الف) رویداد ۱ و (ب) رویداد ۲ چیست؟ آیا دو ناظر این دو رویداد را با توالی یکسان می‌بینند یا با توالی معکوس؟

●۱۷- آزمایشگری ترتیبی می‌دهد که دو لامپ فلاش به طور همزمان روشن شوند، تا درخشش بزرگی در مبدأ دستگاه مرجع او و درخشش کوچکی در $x = 30/0\,km$ حاصل شود. ناظری که با تندی $0/250c$ در جهت مثبت x حرکت می‌کند نیز این دو درخشش را می‌بیند. (الف) بازهٔ زمانی بین آنها از نظر او چقدر است؟ (ب) از نظر این ناظر کدام درخشش اول رخ داده است؟ SSM

●۱۸- ناظر S گزارش می‌دهد که رویدادی روی محور x در چارچوب مرجع خودش در $x = 3/00 \times 10^8\,m$ در زمان $t = 2/50\,s$ رخ داده است. ناظر S' و چارچوب او با تندی $0/400c$ در جهت مثبت محور x حرکت می‌کنند. به علاوه در $t = t' = 0$ ، $x = x' = 0$ است. (الف) مختصهٔ فضایی و (ب) مختصهٔ زمانی رویداد بنابر S' چقدر است؟ حال اگر S' در جهت منفی محور x حرکت کند، (پ) مختصهٔ فضایی و (ت) مختصهٔ زمانی رویداد از نظر S' چقدر است؟

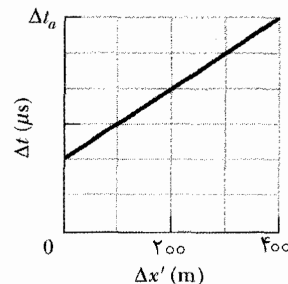
●۱۹- در شکل ۳۷-۹، در $t = t' = 0$، مبدأهای دو چارچوب بر یکدیگر منطبق‌اند و با تندی نسبی $0/950c$ حرکت می‌کنند. از نظر چارچوب S دو شهابسنگ کوچک در مختصات $x = 100\,km$ و $t = 200\mu s$ با هم برخورد می‌کنند. (الف) مختصهٔ فضایی و (ب) مختصهٔ زمانی برخورد از نظر ناظر چارچوب S' چقدر است؟ SSM WWW

●●۲۰- شخصی در چارچوب مرجع S' در امتداد محورهای x و x' مانند شکل ۳۷-۹ از مقابل شما که در چارچوب مرجع S هستید عبور می‌کند. او حامل سه خط‌کش است: خط‌کش ۱ موازی با محور x'، خط‌کش ۲ موازی با محور y' و خط‌کش ۳ موازی با محور z'. او با ساعت مچی خود $15/0\,s$ را می‌شمارد، که از نظر شما $30/0\,s$ طول می‌کشد. دو رویداد در ضمن عبور او رخ می‌دهد. بنابر نظر شما رویداد ۱ در $x_1 = 33/0\,m$ و $t_1 = 22/0\,ns$، و رویداد ۲ در $x_2 = 53/0\,m$ و $t_2 = 62/0\,ns$ رخ داده‌اند. بنابر اندازه‌گیریهای شما، طول (الف) خط‌کش ۱، (ب) خط‌کش ۲ و (پ) خط‌کش ۳، چقدر است؟ بنابر نظر

شخص، (ت) فاصلهٔ فضایی و (ث) فاصلهٔ زمانی بین رویدادهای ۱ و ۲ چقدرند؟ و (ج) کدام رویداد اول رخ می‌دهد؟

●●۲۱– ساعتی در امتداد محور x با تندی $0/600c$ حرکت می‌کند و وقتی از مبدأ می‌گذرد صفر را نشان می‌دهد. (الف) عامل لورنتس ساعت را محاسبه کنید. (ب) در موقع عبور از $x=180\,m$ ساعت چه عددی را نشان می‌دهد؟ **ILW**

●●۲۲– مانند شکل ۳۷-۹، چارچوب مرجع S' با سرعت معینی از مقابل چارچوب مرجع S می‌گذرد. رویدادهای ۱ و ۲ بنابر S' دارای فاصلهٔ زمانی معین $\Delta t'$ هستند. ولی، فاصلهٔ فضایی $\Delta x'$ از نظر این ناظر هنوز مشخص نیست. شکل ۳۷-۲۵ فاصلهٔ زمانی Δt آنها را از نظر ناظر S برحسب تابعی از $\Delta x'$ در گستره‌ای از مقدارهای $\Delta x'$ به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $\Delta t_a = 6/00\,\mu s$ مشخص شده است. $\Delta t'$ چقدر است؟



شکل ۳۷-۲۵ مسئله ۲۲

●●۲۳– در شکل ۳۷-۹، ناظر S دو درخشش نوری را آشکار می‌کند. درخشش بزرگ در $x_1 = 1200\,m$ و $5/00\,\mu s$ و پس از آن، یک درخشش کوچک در $x_2 = 480\,m$ رخ می‌دهد. از نظر ناظر S'، این دو درخشش در یک مختصهٔ تنهای x' رخ داده‌اند. (الف) پارامتر تندی S' چقدر است؟ و (ب) آیا S' در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند یا در جهت منفی x؟ از نظر S'، (پ) کدام درخشش اول رخ می‌دهد؟ و (ت) بازهٔ زمانی بین این درخششها چقدر است؟

●●۲۴– در شکل ۳۷-۹، ناظر S دو درخشش نوری را آشکار می‌کند. درخشش بزرگ در $x_1 = 1200\,m$ و اندکی بعد، یک درخشش کوچک در $x_2 = 480\,m$ رخ می‌دهد. بازهٔ زمانی این درخششها $\Delta t = t_2 - t_1$ است. کوچکترین مقدار Δt که ناظر S' تعیین می‌کند که دو درخشش در مختصهٔ یکسان x' رخ داده‌اند چقدر است؟

●●●۲۵– معکوس نسبیتی رویدادها. شکلهای ۳۷-۲۶ الف و ب وضعیت (معمولی) را نشان می‌دهد که در آن چارچوب مرجع پریم‌دار در جهت مشترک مثبت محورهای x و x' با سرعتی نسبی با بزرگی ثابت v از مقابل چارچوب مرجع بدون پریم می‌گذرد. ما در چارچوب بدون پریم ساکن هستیم؛ دانشجوی باهوشی در نسبیت به رغم طبیعت پر جنب و جوشش، در چارچوب پریم‌دار در حال سکون است. این شکل همچنین رویدادهای A و B را نشان می‌دهد که وقتی در چارچوب بدون پریم ما و در چارچوب پریم‌دار این دانشجو اندازه‌گیری می‌شوند، رخ می‌دهند:

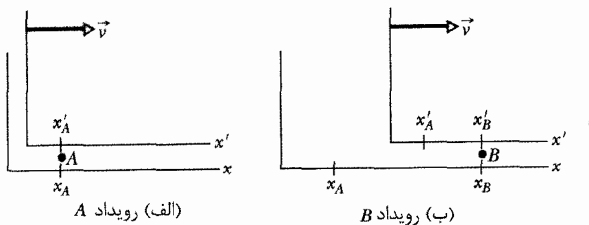
رویداد	بدون پریم	پریم‌دار
A	(x_A, t_A)	(x'_A, t'_A)
B	(x_B, t_B)	(x'_B, t'_B)

در چارچوب ما، رویداد A با فاصلهٔ زمانی $\Delta t = t_B - t_A = 1/00\,\mu s$ و فاصلهٔ فضایی $\Delta x = x_B - x_A = 400\,m$ پیش از رویداد B رخ می‌دهد. فرض کنید $\Delta t'$ فاصلهٔ زمانی رویدادها از نظر دانشجو باشد. (الف) عبارتی را برای $\Delta t'$ برحسب پارامتر تندی $\beta (= v/c)$ و داده‌های معلوم پیدا کنید. $\Delta t'$ را برحسب β برای دو گسترهٔ β در زیر رسم کنید:

(ب) ۰ تا ۰/۰۱ (از ۰ تا $v, 0/01c$ کم است)

(پ) ۰/۱ تا ۱ (از $0/1c$ تا حد c، v زیاد است)

(ت) به ازای چه مقداری از β، $\Delta t' = 0$ است؟ در چه گستره‌ای از β توالی رویدادهای A و B از نظر دانشجو (ث) با نظر ما یکسان می‌شود و (ج) عکس نظر ما می‌شود؟ (چ) آیا رویداد A می‌تواند رویداد B را باعث شود یا برعکس؟ توضیح دهید.



شکل ۳۷-۲۶ مسئله‌های ۲۵، ۲۶، ۶۲ و ۶۳

●●●۲۶– موقع عبور چارچوبهای مرجع در شکل ۳۷-۲۶، رویدادهای A و B در مختصات فضا زمان زیر رخ می‌دهند: در چارچوب بدون پریم، (x_A, t_A) و (x_B, t_B)؛ در چارچوب پریم‌دار، (x'_A, t'_A) و (x'_B, t'_B). در چارچوب بدون پریم، $\Delta t = t_B - t_A = 1/00\,\mu s$ و $\Delta x = x_B - x_A = 400\,m$. (الف) عبارتی برای $\Delta x'$ برحسب پارامتر تندی β و داده‌های معلوم پیدا کنید. $\Delta x'$ را برحسب β در دو گسترهٔ β رسم کنید: (ب) ۰ تا ۰/۰۱ و (پ) ۰/۱ تا ۱. (ت) به ازای چه مقداری از β، $\Delta x'$ کمینه است و (ث) مقدار این کمینه چقدر است؟

بخش ۳۷-۹ نسبیت سرعتها

●۲۷– گزارش شده است که کهکشان A با تندی $0/35c$ از ما دور می‌شود. کهکشان B که دقیقاً در امتداد مقابل قرار دارد نیز با همین تندی از ما دور می‌شود. تندی دور شدن از نظر ناظری واقع در کهکشان A (الف) که در کهکشان ما محاسبه می‌شود و (ب) در کهکشان B محاسبه می‌شود، چه مضربی از c است؟ **SSM**

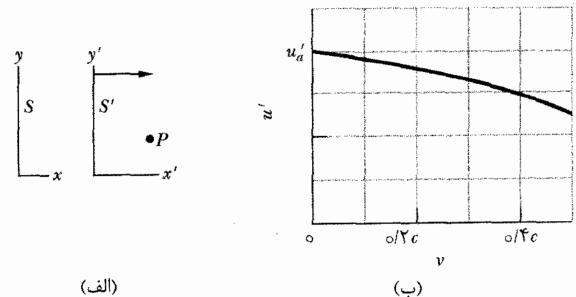
●۲۸– دستگاه ستاره‌ای $Q1$ با تندی $0/800c$ از ما دور می‌شود. دستگاه ستاره‌ای $Q2$، که در همان امتداد در فضا ولی به ما نزدیکتر است، با تندی $0/400c$ از ما دور می‌شود. تندی Q_2 وقتی توسط ناظری در چارچوب مرجع Q_1 اندازه‌گیری شود چه ضریبی از c است؟

•۲۹- ذره‌ای در امتداد محور x' در چارچوب S' با سرعت $0/40c$ حرکت می‌کند. چارچوب S' با سرعت $0/60c$ نسبت به چارچوب S حرکت می‌کند. سرعت ذره نسبت به چارچوب S چقدر است؟ **SSM**

•۳۰- در شکل ۳۷-۱۱، چارچوب S' نسبت به چارچوب S با سرعت $0/62c\vec{i}$ حرکت می‌کند در حالی که ذره‌ای موازی با محورهای x' و x در حرکت است. از نظر ناظر واقع در چارچوب S' سرعت ذره $0/47c\vec{i}$ اندازه‌گیری می‌شود. برحسب c، سرعت ذره از نظر ناظر واقع در چارچوب S بنابر تبدیل سرعت (الف) نسبیتی و (ب) کلاسیکی چقدر است؟ حال فرض کنید که S' سرعت ذره را $-0/47c\vec{i}$ اندازه می‌گیرد. ناظر واقع در S چه سرعتی را بنابر تبدیل سرعت (پ) نسبیتی و (ت) کلاسیکی اندازه می‌گیرد؟

••۳۱- ناوگانی جنگی از سفینه‌های فضایی به طول $1/00$ly (در چارچوب ساکن خودش) با تندی $0/800c$ نسبت به پایگاه زمینی S حرکت می‌کند. پیامی با تندی $0/950$ نسبت به S از عقب ناوگان به جلو آن ارسال می‌شود. وقتی اندازه‌گیری (الف) در چارچوب ساکن ناوگان و (ب) به وسیلهٔ ناظر در چارچوب S انجام شود، این ارسال چقدر طول می‌کشد؟ GO

••۳۲- در شکل ۳۷-۲۷ الف، ذرهٔ P با سرعت معینی نسبت به چارچوب S موازی با محورهای x و x' چارچوبهای مرجع S و S' حرکت می‌کند. چارچوب S' موازی با محور x چارچوب S با سرعت v حرکت می‌کند. شکل ۳۷-۲۷ ب سرعت u' ذره را نسبت به چارچوب S' در گسترهٔ مقدارهای v به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $u'_a = 0/800$ c مشخص شده است. اگر (الف) $v = 0/90c$ و (ب) $v \to c$، مقدار u' چقدر است؟



شکل ۳۷-۲۷ مسئله ۳۲

••۳۳- تندی سفینه‌ای که طول در حالت سکون آن 350 m است نسبت به چارچوب مرجع معینی $0/82c$ است. شهابسنگی که با همین تندی $0/82c$ در این چارچوب حرکت می‌کند، در جهت مخالف از سفینه می‌گذرد. چقدر طول می‌کشد که این جسم با اندازه‌گیری در سفینه از آن بگذرد؟ **SSM ILW WWW**

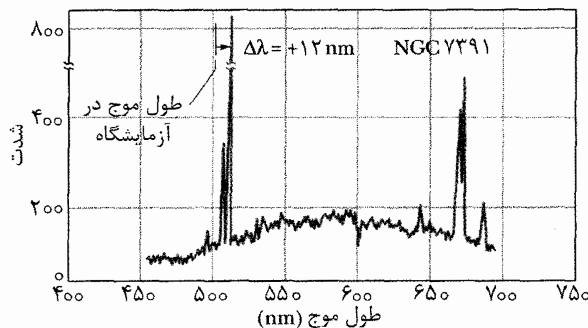
بخش ۳۷-۱۰ اثر دوپلر برای نور

•۳۴- طول موجهای معینی که در نور حاصل از یک کهکشان در صورت فلکی سنبله مشاهده می‌شوند ۰/۴٪ بلندتر از طول موج نور متناظر از چشمه‌های زمینی است. (الف) تندی شعاعی این کهکشان نسبت به زمین چقدر است؟ (ب) آیا کهکشان به زمین نزدیک می‌شود یا از آن دور می‌شود؟

•۳۵- با فرض اینکه معادلهٔ ۳۷-۳۶ صادق باشد، با چه سرعتی باید از نور قرمز بگذرید تا آن را سبز ببینید. طول موج نور قرمز را 620 nm و طول موج نور سبز را 540 nm در نظر بگیرید.

•۳۶- شکل ۳۷-۲۸ نمودار شدت برحسب طول موج را برای نوری که از کهکشان $NGC7319$ به زمین می‌رسد، نشان می‌دهد که تقریباً در فاصلهٔ 3×10^8 سال نوری قرار دارد. یک نور خیلی شدید توسط اکسیژن از $NGC7319$ گسیل می‌شود. در آزمایشگاه طول موج این گسیل $\lambda = 513$nm است ولی نور حاصل از $NGC7319$ به دلیل اثر دوپلر تا $525nm$ جابه‌جا شده است (همه گسیلها از $NGC7319$ جابه‌جا شده است).

(الف) تندی شعاعی $NGC7319$ نسبت به زمین چقدر است؟
(ب) آیا حرکت نسبی به سمت سیاره ما است یا از آن دور می‌شود؟



شکل ۳۷-۲۸ مسئلهٔ ۳۶

•۳۷- سفینه‌ای که با تندی $0/900c$ از زمین دور می‌شود، با ارسال در بسامد 100MHz (در چارچوب سفینه اندازه‌گیری می‌شود) گزارش می‌دهد. گیرنده‌های زمینی در چه بسامدی باید تنظیم شوند تا گزارش را دریافت کنند؟ **SSM**

•۳۸- یک چشمهٔ نور سدیم در یک دایرهٔ افقی با تندی ثابت $0/100c$ در حالی که نور در ویژه طول موج $\lambda_0 = 589/00$nm گسیل می‌کند در حرکت است. طول موج λ توسط آشکارسازی متصل به مرکز دایره برای آن نور اندازه‌گیری می‌شود. جابه‌جایی طول موج $\lambda - \lambda_0$ چقدر است؟

••۳۹- سفینه‌ای با تندی $0/20c$ از زمین دور می‌شود. چشمه‌ای واقع در عقب سفینه با طول موج 450 nm نوری گسیل می‌کند که از نظر شخص واقع در سفینه اندازه‌گیری می‌شود. (الف) طول موج و (ب) رنگ (آبی، سبز، زرد یا قرمز) آشکار شده به وسیلهٔ شخصی واقع روی زمین که سفینه را نظارت می‌کند چقدر است؟ **SSM**

بخش ۳۷-۱۲ نگاهی نو به انرژی

•۴۰- کمینهٔ انرژی لازم برای شکستن هستهٔ ^{12}C (به جرم ۱۱/۹۹۶۷۱u) به سه هستهٔ ^{4}He (هر کدام به جرم ۴/۰۰۱۵۱u) چقدر است؟

•۴۱- چقدر کار باید برای افزایش تندی یک الکترون (الف) از $0/18c$ به $0/19c$ و (ب) از $0/98c$ به $0/99c$، انجام شود؟ توجه کنید که در هر دو مورد افزایش تندی $0/01c$ است.

•۴۲- در واکنش $p + {}^{19}F \to \alpha + {}^{16}O$، جرمها عبارت‌اند از

$$m(p) = 1/007825u \qquad m(\alpha) = 4/002603u$$
$$m(F) = 18/998405u \qquad m(O) = 15/994915u$$

Q واکنش را از این داده‌ها محاسبه کنید.

•۴۳- جرم الکترون $9/10938188 \times 10^{-31}$ kg است. تا شش رقم بامعنا، (الف) γ و (ب) β را برای الکترونی با انرژی جنبشی $K = 100/000$ MeV پیدا کنید. **SSM WWW**

•۴۴- چقدر کار باید برای افزایش تندی الکترونی از حالت سکون به (الف) $0/500c$ و (ب) $0/990c$ و (پ) $0/9990c$ انجام شود؟

••۴۵- اندازه حرکت یک ذره به جرم m باید چقدر باشد به طوری که انرژی کل ذره ۳/۰۰ برابر انرژی حالت سکون آن باشد؟ **ILW**

••۴۶- جرم الکترون $9/10938188 \times 10^{-31}$ kg است. تا هشت رقم بامعنا، موارد زیر را برای انرژی جنبشی الکترون داده شده پیدا کنید: (الف) γ و (ب) β برای $K = 1/0000000$ KeV، (پ) γ و (ت) β برای $K = 1/0000000$ MeV و (ث) γ و (ج) β برای $K = 1/0000000$ GeV.

••۴۷- وقتی شما این صفحه را (روی کاغذ یا روی صفحهٔ نمایشگر) می‌خوانید، یک پروتون پرتو کیهانی از چپ به راست از پهنای صفحه با تندی نسبی v و انرژی کل $14/24nJ$ عبور می‌کند. بنابر اندازه‌گیریهای شما، پهنای صفحه از چپ به راست ۲۱/۰cm است. (الف) این پهنا بنابر چارچوب مرجع پروتون چقدر است؟ این عبور در (ب) چارچوب شما و (پ) چارچوب پروتون چه مدت زمان طول می‌کشد؟ GO

••۴۸- (الف) انرژی آزاد شده در انفجار ۱/۰۰mol از TNT برابر با ۳/۴۰MJ است. جرم مولی TNT برابر با ۰/۲۲۷kg/mol است. چه وزنی از TNT برای انفجاری که $1/80 \times 10^{14}$ J آزاد می‌کند لازم است؟ (ب) آیا این وزن را می‌توانید با پاکت حمل کنید یا کامیون یا قطار لازم است؟ (پ) فرض کنید که در یک انفجار بمب شکافت، ۰/۰۸۰٪ جرم قابل شکافت به انرژی آزاد شده تبدیل شود. چه وزنی از مادهٔ قابل شکافت برای انفجاری که $1/80 \times 10^{14}$ J آزاد می‌کند لازم است؟ (ت) آیا این وزن را می‌توانید با پاکت حمل کنید یا کامیون یا قطار لازم است؟

••۴۹- بزرگی اندازه حرکت ذرهٔ معینی به جرم m برابر با mc است. (الف) β، (ب) γ و (پ) نسبت E/E_0، چقدر است؟ **SSM**

••۵۰- برای ذره‌ای با (الف) $K = 2/00E_0$ و (ب) $K = 2/00E_0$، β چقدر است؟

••۵۱- تصور این است که اختروشها هسته‌های فعال کهکشانها در مراحل اولیهٔ تشکیل خود هستند. یک اختروش نوعی با آهنگ 10^{41} W تابش می‌کند. با چه آهنگی جرم این اختروش باید کاهش یابد تا این انرژی را تأمین کند؟ پاسخ خود را برحسب یکاهای جرم خورشیدی بر سال بیان کنید، که یک یکای جرم خورشیدی ($1smu = 2/0 \times 10^{30}$ kg) جرم خورشید ماست. **SSM**

••۵۲- (الف) نشان دهید که

$$m = \frac{(pc)^2 - K^2}{2Kc^2}$$

که در آن m جرم ذره، p بزرگی اندازه حرکت و K انرژی جنبشی آن است. (ب) در حد ذره با تندی پایین، نشان دهید که طرف راست این معادله به m تبدیل می‌شود. (پ) اگر وقتی $p = 121$MeV/C است $K = 55/0$ MeV باشد، نسبت m/m_e، نسبت جرم آن به جرم الکترون چقدر است؟

••۵۳- جرم یک قرص آسپیرین برابر با ۳۲۰mg است. انرژی معادل با این جرم تا چند کیلومتر انرژی لازم برای حرکت یک اتومبیل را تأمین می‌کند؟ برای گازوییل به کار رفته در اتومبیل فرض کنید که گرمای احتراق $3/65 \times 10^{7}$ J/L و مصرف ۱۲/۷۵km/L است. **SSM**

••۵۴- با چهار رقم با معنا موارد زیر را وقتی انرژی جنبشی ۱۰/۰۰MeV باشد پیدا کنید: (الف) γ و (ب) β برای یک الکترون ($E_0 = 0/510998$MeV)، (ب) γ و (پ) β برای یک پروتون ($E_0 = 938/272$MeV)، و (ت) γ و (ج) β برای یک ذرهٔ α ($E_0 = 3727/40$ MeV).

••۵۵- در بخش ۲۴-۶ (جلد دوم) نشان دادیم که وقتی سرعت $\vec{v}$ ذره‌ای با بار q و جرم m بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ عمود باشد، ذره در مسیری دایره‌ای به شعاع $r = mv/|q|B$ حرکت خواهد کرد. همچنین دیدیم که دورهٔ تناوب T حرکت مستقل از تندی v است. این دو نتیجه در صورتی که $v << c$ باشد تقریباً صحیح هستند. در مورد تندیهای نسبیتی از معادلهٔ صحیحی برای شعاع باید استفاده کنیم:

$$r = \frac{p}{|q|B} = \frac{\gamma mv}{|q|B}$$

••۵۶- جرم موئون ۲۰۷ برابر جرم الکترون است؛ طول عمر متوسط موئون در حالت سکون ۲/۲۰ μs است. در آزمایش معینی، طول عمر متوسط موئونهای متحرک وقتی در آزمایشگاه اندازه‌گیری شود برابر با ۶/۹۰ μs است. در مورد موئونهای متحرک، (الف) β، (ب) K و (پ) p (برحسب MeV/c)، چقدر است؟ GO

●●۵۷- در یک برخورد پرانرژی بین یک ذرهٔ پرتو کیهانی و ذره‌ای در نزدیکی بالای جو زمین یعنی ۱۲۰km بالاتر از سطح دریا، یک پیون تولید می‌شود. انرژی کل E پیون $1/35\times10^5$ MeV است و به طور قائم رو به بالا می‌رود. در چارچوب ساکن پیون، پیون ۳۵/۰ns پس از تولید واپاشیده می‌شود. در چه ارتفاعی بالای سطح دریا، وقتی از چارچوب مرجع زمین اندازه‌گیری شود، واپاشی رخ می‌دهد؟ انرژی سکون پیون ۱۳۹/۶MeV است؟

●●۵۸- قضیهٔ دوجمله‌ای (پیوست ث) را در قسمت آخر معادلهٔ ۳۷-۵۲ در مورد انرژی جنبشی یک ذره به کار برید. (الف) با حفظ دو جملهٔ اول بسط نشان دهید که انرژی جنبشی به شکل زیر است

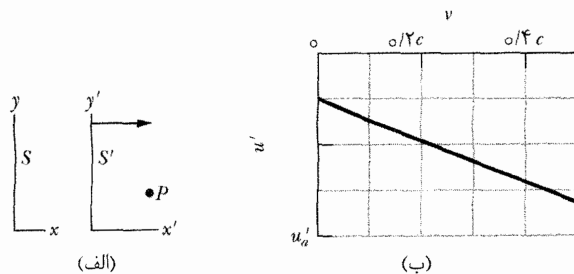
$K=$(جملهٔ اول) + (جمله دوم)

جمله اول عبارت کلاسیکی برای انرژی جنبشی است. جملهٔ دوم تصحیح مرتبهٔ اول عبارت کلاسیکی است. فرض کنید که ذره یک الکترون است. اگر تندی v آن $c/20$ باشد، مقدار (ب) عبارت کلاسیکی و (پ) تصحیح مرتبهٔ اول چقدر است؟ اگر تندی الکترون $0/80c$ باشد، مقدار (ت) عبارت کلاسیکی و (ث) تصحیح مرتبهٔ اول چقدر است؟ (ج) در چه پارامتر تندی β تصحیح مرتبهٔ اول ۱۰٪ بزرگتر از عبارت کلاسیکی می‌شود؟

●●●۵۹- یک ذرهٔ آلفا با انرژی جنبشی ۷/۷۰MeV با یک هستهٔ ^{14}N ساکن برخورد می‌کند، و این دو به هستهٔ ^{17}O و یک پروتون تبدیل می‌شوند. پروتون با زاویهٔ °۹۰ نسبت به جهت ذرهٔ آلفای فرودی گسیل می‌شود و انرژی جنبشی آن ۴/۴۴MeV است. جرم ذره‌های مختلف عبارت‌اند از: ذرهٔ α، ۴/۰۰۲۶۰u؛ ^{14}N، ۱۴/۰۰۳۰۷u؛ پروتون، ۱/۰۰۷۸۲۵u؛ و ^{17}O، ۱۶/۹۹۹۱۴u. برحسب مگا الکترون ولت، (الف) انرژی جنبشی هستهٔ اکسیژن و (ب) Q واکنش چقدر است؟ (راهنمایی: تندیهای ذره‌ها خیلی کمتر از c است.)

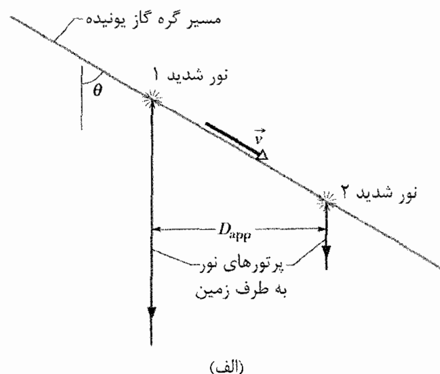
مسئله‌های اضافی

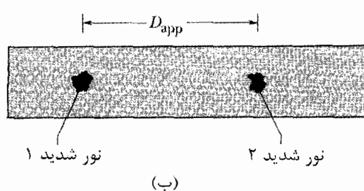
۶۰- در شکل ۳۷-۲۹ الف، ذرهٔ P موازی با محورهای x و x' در چارچوبهای مرجع S و S' با سرعت معینی نسبت به چارچوب S حرکت می‌کند. چارچوب S' با سرعت v موازی با محور x چارچوب S حرکت می‌کند. شکل ۳۷-۳۱ ب سرعت u' ذره را نسبت به چارچوب S' برای گستره‌ای از مقدارهای v به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $u'_a=-0/800c$ مشخص شده است. اگر (الف) $v=0/80c$ و (ب) $v\to c$ باشد، u' چقدر خواهد بود؟



شکل ۳۷-۲۹ مسئله ۶۰

۶۱- جت‌های ابر درخشنده. شکل ۳۷-۳۰ الف مسیری را که توسط گرهٔ موجود در یک جت گاز یونیده که از کهکشانی بیرون آمده است نشان می‌دهد. گره با سرعت ثابت $\vec{v}$ با زاویهٔ θ از جهت زمین حرکت می‌کند. گره گاهگاهی نور شدیدی گسیل می‌کند، که سرانجام روی زمین آشکار می‌شود. دو نور شدید در شکل ۳۷-۳۰ الف نشان داده شده‌اند، که وقتی در چارچوب ساکن نزدیک به این نورهای شدید اندازه‌گیری شود، فاصلهٔ زمانی بین آنها t است. شکل ۳۷-۳۰ ب این دو نور شدید را وقتی روی یک فیلم عکس‌برداری شده باشند نشان می‌دهد، ابتدا وقتی نور از موقعیت ۱ به زمین می‌رسد و سپس وقتی که نور از موقعیت ۲ می‌رسد. فاصلهٔ ظاهری $Dapp$ که توسط گره بین این دو نور شدید طی شده مسافت مسیر گره در عرض دید ناظر زمینی است. زمان ظاهری $Tapp$ بین این نورهای شدید عبارت است از اختلاف در زمان رسیدن نور از آنها. بنابراین تندی ظاهری گره عبارت است از $V_{app}=D_{app}/T_{app}$. برحسب v ، t و θ، (الف) $Dapp$ و (ب) $Tapp$، چقدر است؟ (پ) به ازای $v=0/980c$ و $\theta=30/0^\circ$، $Vapp$ را محاسبه کنید. وقتی اولین بار جتهای ابر درخشنده (سریع‌تر از نور) مشاهده شدند- حداقل تا زمانی که هندسه صحیح (شکل ۳۷-۳۰ الف) درک شد- چیزی در مقابل نسبیت خاص به نظر می‌رسید.





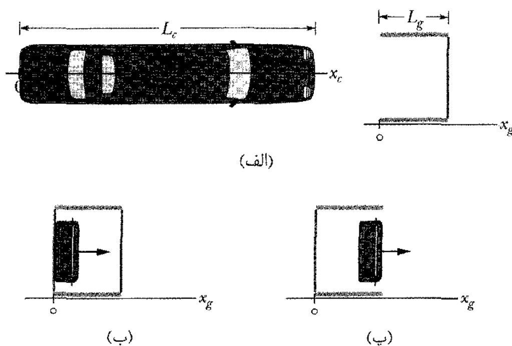
شکل ۳۷-۳۰ مسئله ۶۱

۶۲- فاصلهٔ زمانی بین دو رویداد. رویدادهای A و B با مختصات فضا زمان زیر در چارچوبهای مرجع شکل ۳۷-۲۶ رخ می‌دهند: در چارچوب بدون پریم، (x_A, t_A) و (x_B, t_B) و در چارچوب پریم‌دار (x'_A, t'_A) و (x'_B, t'_B). در چارچوب بدون پریم، $\Delta t = t_B - t_A =$ ۱/۰۰μs و $\Delta x = x_B - x_A =$ ۲۴۰ m.
(الف) عبارتی برای $\Delta t'$ برحسب پارامتر تندی β و داده‌های معلوم پیدا کنید. نمودار $\Delta t'$ را برحسب β در دو گسترهٔ: (ب) ۰ تا ۰/۰۱ و (پ) ۰/۱ تا ۱، رسم کنید. به ازای چه مقداری از Δt، β کمینه و (ث) این مقدار کمینه چقدر است؟ (ج) کدام رویداد علت رویداد دیگر است؟ توضیح دهید.

۶۳- فاصلهٔ فضایی بین دو رویداد. در عبور چارچوبهای مرجع شکل ۳۷-۲۶ رویدادهای A و B با مختصات فضا زمان زیر رخ می‌دهند: در چارچوب، بدون پریم، (x_A, t_A) و (x_B, t_B) و در چارچوب پریم‌دار (x'_A, t'_A) و (x'_B, t'_B). در چارچوب بدون پریم، $\Delta t = t_B - t_A =$ ۱/۰۰μs و $\Delta x = x_B - x_A =$ ۲۴۰ m
(الف) عبارتی برای $\Delta x'$ برحسب پارامتر تندی β و داده‌های معلوم پیدا کنید. نمودار $\Delta x'$ را برحسب β در دو گسترهٔ β: (ب) ۰ تا ۰/۰۱ و (پ) ۰/۱ تا ۱، رسم کنید. به ازای چه مقداری از β، $\Delta x' =$ ۰ است؟

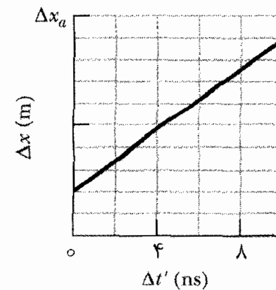
۶۴- شکل ۳۷-۲۰ سفینه‌ای (وصل به چارچوب مرجع S') را نشان می‌دهد که با سرعت $\vec{v} =$ ۰/۹۵۰$c\vec{i}$ از ما (ایستاده در چارچوب S) عبور می‌کند. پروتونی با تندی ۰/۹۸۰c نسبت به سفینه از جلو به عقب آن شلیک می‌شود. ویژه طول سفینه ۷۶۰ m است. فاصلهٔ زمانی بین زمان شلیک پروتون و زمان اصابت آن به دیوار عقب سفینه، بنابر (الف) مسافر داخل سفینه و (ب) ما، چقدر است؟ حال فرض کنید که پروتون از عقب به جلو سفینه شلیک شود. در این صورت فاصلهٔ زمانی بین زمان شلیک و زمان اصابت به دیوار جلو بنابر (پ) مسافر و (ت) ما، چقدر است؟

۶۵- مسئلهٔ اتومبیل در توقفگاه. رانندهٔ درازترین ماشین لیموزین را که ویژه طول آن $L_c =$ ۳۰/۵m است خریداری می‌کند. در شکل ۳۷-۳۲ الف، ماشین در توقفگاهی با ویژه طول $L_g =$ ۶/۰۰m پارک شده است. توقفگاه دارای یک درب جلو (که باز نشان داده شده) و یک درب عقب است (که بسته نشان داده شده). لیموزین به روشنی درازتر از توقفگاه است. صاحب توقفگاه که اطلاعات کمی در مورد انقباض طول نسبیتی دارد، با راننده شرط می‌بندد که لیموزین را در حالی که هر دو درب بسته‌اند در توقفگاه جا دهد. راننده که پیش از رسیدن به نسبیت خاص درس فیزیک دانشگاهی خود را حذف کرده است، چنین چیزی را از اساس ناممکن می‌داند.
برای تحلیل دیدگاه صاحب توقفگاه، محور xc را متصل به لیموزین با $x_c =$ ۰ در سپر عقب، و محور xg را متصل به توقفگاه با $x_g =$ ۰ در درب جلویی (که اکنون باز است) در نظر می‌گیریم. سپس راننده لیموزین را با سرعت ۰/۹۹۸۰c به طور مستقیم به سمت درب جلویی می‌راند (که البته هر دو از نظر فنی و مالی غیر ممکن است). راننده در چارچوب مرجع xc و صاحب توقفگاه در چارچوب مرجع xg ساکن هستند.
دو رویداد را باید در نظر گرفت. رویداد ۱: وقتی سپر عقب از درب جلویی می‌گذرد، درب جلو بسته می‌شود. فرض کنید زمان این رویداد برای راننده و صاحب توقفگاه صفر باشد: $t_{g1} = t_{c1} =$ ۰. این رویداد در $x_c = x_g =$ ۰ رخ می‌دهد. شکل ۳۷-۳۲ ب رویداد را در چارچوب مرجع xg نشان می‌دهد. رویداد ۲: وقتی سپر جلو به درب عقب می‌رسد آن درب باز می‌شود. شکل ۳۷-۳۲ پ رویداد ۲ را در چارچوب مرجع xg نشان می‌دهد.
بنابر صاحب توقفگاه، (الف) طول لیموزین چقدر است و مختصات فضایی (ب) x_{g2} و (پ) t_{g2} رویداد ۲ چقدرند؟ (ت) برای چه مدتی لیموزین موقتاً در توقفگاه با دربهای بسته «می‌ماند»؟ اکنون وضعیت را در چارچوب مرجع xc بررسی می‌کنیم که توقفگاه با سرعت ۰/۹۹۸۰c- از مقابل لیموزین می‌گذرد. از نظر راننده (ث) طول توقفگاه در حال عبور چقدر است، مختصات فضا زمان (ج) x_{c2} و (چ) t_{c2} رویداد ۲ چقدرند، (ح) آیا لیموزین هرگز در توقفگاه با دربهای بسته قرار دارد؟ و (خ) کدام رویداد اول رخ می‌دهد؟ (د) از نظر راننده رویدادهای ۱ و ۲ را رسم کنید. (ذ) آیا این رویدادها به طور علّی به هم مربوطاند، یعنی یک علت دیگری است؟ (ر) سرانجام چه کسی برنده است؟



شکل ۳۷-۳۱ مسئلهٔ ۶۵

۶۶- مانند شکل ۳۷-۹، چارچوب مرجع S' با سرعت معینی از چارچوب مرجع S می‌گذرد. برای ناظر S' فاصلهٔ فضایی رویدادهای ۱ و ۲ برابر $\Delta x'$ است. ولی، فاصلهٔ زمانی $\Delta t'$ آنها برای آن ناظر هنوز معلوم نیست. شکل ۳۷-۳۲ فاصلهٔ فضایی Δx آنها را برای ناظر S برحسب تابعی از $\Delta t'$ در گستره‌ای از مقدارهای $\Delta t'$ به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $\Delta x_a =$ ۱۰/۰ m مشخص شده است. $\Delta t'$ چقدر است؟

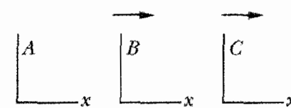


شکل ۳۷-۳۲ مسئلهٔ ۶۶

۶۷- رویکرد دیگر تبدیلهای سرعت. در شکل ۳۷-۳۳، چارچوبهای مرجع B و C در جهت مشترک محورهای x آنها از چارچوب مرجع A عبور می‌کنند. مؤلفه‌های x سرعتهای یک چارچوب نسبت به چارچوب دیگر را با دو زیرنویس نشان دهید. برای مثال vAB مؤلفهٔ x سرعت A نسبت به B را نشان می‌دهد. هم‌چنین پارامترهای تندی متناظر را با دو زیرنویس نشان دهید. برای مثال $\beta_{AB}(=v_{AB}/c)$ پارامتر تندی متناظر با vAB است. (الف) نشان دهید که

$$\beta_{AC}=\frac{\beta_{AB}+\beta_{BC}}{1+\beta_{AB}\beta_{BC}}$$

نسبت $(1-\beta_{AB})/(1+\beta_{AB})$ را با MAB و نسبتهای مشابه را با MBC و MAC نشان می‌دهیم. (ب) نشان دهید که رابطهٔ زیر صحیح است و از معادلهٔ بند (الف) به دست می‌آید



شکل ۳۷-۳۳ مسئله‌های ۶۷، ۶۸ و ۶۹

۶۸- ادامهٔ مسئلهٔ ۶۷. از نتیجهٔ بند (ب) مسئلهٔ ۶۷ برای حرکت در امتداد یک محور منفرد در موقعیت زیر استفاده کنید. چارچوب A در شکل ۳۷-۳۳ به ذره‌ای متصل است که با سرعت $+۰/۵۰۰c$ از چارچوب B عبور می‌کند که این چارچوب با سرعت $+۰/۵۰۰c$ از چارچوب C عبور می‌کند. (الف) MAC، (ب) β_{AC} و (پ) سرعت ذره نسبت به چارچوب C، چقدر است؟

۶۹- ادامهٔ مسئلهٔ ۶۷. فرض کنید که چارچوب مرجع C در شکل ۳۷-۳۳ از چارچوب مرجع D (نشان داده نشده) عبور می‌کند. (الف) نشان دهید که

$$M_{AD}=M_{AB}M_{BC}M_{CD}$$

(ب) اکنون این نتیجهٔ کلی را در نظر بگیرید: سه ذره موازی با یک محور که در آن ناظر ساکن است حرکت می‌کنند. علامتهای مثبت و منفی جهتهای حرکت را در امتداد آن محور نشان می‌دهند. ذرهٔ A با $\beta_{AB}=+۰/۲۰$ از ذرهٔ B عبور می‌کند. ذرهٔ B با $\beta_{BC}=-۰/۴۰$ از ذرهٔ C می‌گذرد. ذرهٔ C با $\beta_{CD}=+۰/۶۰$ از ناظر D عبور می‌کند. سرعت ذرهٔ A نسبت به ناظر D چقدر است؟ (روش حل در اینجا خیلی سریعتر از استفاده از معادلهٔ ۳۷-۲۹ است.)

۷۰- انرژی کل پروتونی که از یک وسیلهٔ آزمایشگاهی عبور می‌کند ۱۰/۶۱۱nJ است. پارامتر تندی β چقدر است؟ از جرم پروتون داده شده در پیوست ب در ستون «بهترین مقدار» استفاده کنید که عموماً عدد گرد شده نیست.

۷۱- اگر با الکترونی با انرژی کل ۱۵۳۳MeV که از وگا (نسر واقع) که ۲۶ly از ما فاصله دارد می‌آید برخورد کنیم، از نظر چارچوب ساکن الکترون مسافرت چند سال نوری طول کشیده است؟ **SSM**

۷۲- وقتی که یک ذرهٔ پرتو کیهانی پرانرژی به جو زمین می‌رسد با یک هستهٔ اتمی برخورد می‌کند و در نزدیکی بالای جو پیونی ایجاد می‌شود. پیون ایجاد شده با تندی ۰/۹۹c رو به پایین به طرف زمین حرکت می‌کند. در یک چارچوب مرجع که در آن پیونها ساکن هستند، پیونها با طول عمر متوسط ۲۶ns واپاشی می‌کنند. وقتی در یک چارچوب ثابت نسبت زمین اندازه‌گیری شود، چنین پیونی (به طور متوسط) چقدر در جو زمین حرکت می‌کند تا واپاشیده شود؟

۷۳- اندازه حرکت الکترونی با انرژی جنبشی ۲/۰۰MeV، برحسب MeV/c چقدر است؟ **SSM**

۷۴- پارامتر تندی ذره‌ای که برای حرکت مسافت ۶/۰ ly، ۲/۰ y بیشتر از نور طول می‌کشد چقدر است؟

۷۵- چقدر کار لازم است تا پروتونی از تندی ۰/۹۸۵۰c به تندی ۰/۹۸۶۰c شتاب بگیرد؟ **SSM**

۷۶- هواپیمایی که طول در حال سکون آن ۴۰/۰m است با سرعت یکنواخت نسبت به زمین با تندی ۶۳۰m/s حرکت می‌کند. (الف) برای ناظر روی زمین با چه کسری طول در حال سکون هواپیما کوتاه می‌شود؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا از نظر ساعت روی زمین، ساعت هواپیما ۱/۰۰μs عقب بماند؟ (نسبیت خاص را در محاسبه‌های خود به کار ببرید).

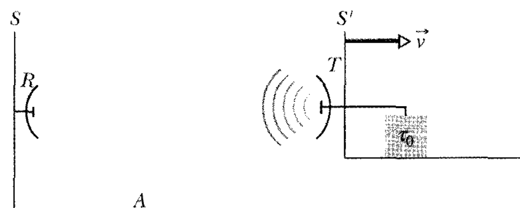
۷۷- برای گردش در مدار پایین دور زمین، سفینه‌ای باید تندی تقریباً $۲/۷\times۱۰^۴$ km/h را داشته باشد. فرض کنید که دو سفینه در چنین مداری از زمین در جهتهای مخالف حرکت می‌کنند. (الف) بنابر معادلهٔ تبدیل سرعت کلاسیکی گالیله‌ای، تندی نسبی آنها وقتی از کنار هم عبور می‌کنند چقدر است؟ (ب) کسر خطای ایجاد شده در (الف) به دلیل عدم استفاده از معادلهٔ (صحیح) تبدیل نسبیتی چقدر است؟ **SSM**

۷۸- فرستندهٔ راداری T در چارچوب مرجع S' که با تندی v نسبت به چارچوب مرجع S به سمت راست حرکت می‌کند ثابت است (شکل ۳۷-۳۴). یک زمان‌سنج مکانیکی (در اساس یک ساعت) در چارچوب S'، که دارای دورهٔ تناوب τ_0 (اندازه‌گیری شده در S') است باعث می‌شود که فرستندهٔ T تپهای راداری مقرری را گسیل کند که با تندی نور حرکت می‌کنند و توسط گیرندهٔ R که در چارچوب S ثابت است دریافت می‌شوند. (الف) دورهٔ تناوب τ زمان‌سنج وقتی توسط

ناظر A که در چارچوب S ثابت است اندازه‌گیری شود، چقدر است؟ (ب) نشان دهید که در گیرندهٔ R بازهٔ زمانی بین تپهایی که از T می‌رسند نه τ است و نه $\tau_\circ$، بلکه برابر است با

$$\tau_R = \tau_\circ \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

(پ) توضیح دهید که چرا گیرندهٔ R و ناظر A که هر دو در چارچوب مرجع یکسانی قرار دارند، دوره‌های تناوب متفاوتی را برای فرستنده اندازه می‌گیرند. (راهنمایی: ساعت و تپ رادار یک چیز نیستند.)



شکل ۳۷-۳۴ مسئلهٔ ۷۸

۷۹- تندی ذره‌ای به جرم m نسبت به چارچوب لخت S برابر با $c/۲$ است. این ذره با ذرهٔ مشابهی که در حال سکون نسبت به چارچوب S است برخورد می‌کند. نسبت به چارچوب S، تندی چارچوب S' که در آن اندازه حرکت این ذره‌ها صفر است، چقدر است؟ این چارچوب را چارچوب مرکز اندازه حرکت می‌نامند.

۸۰- یک ذرهٔ بنیادی ایجاد شده در یک آزمایش آزمایشگاهی پیش از واپاشی (به ذرهٔ دیگری تبدیل می‌شود) با تندی نسبی $۰/۹۶۰c$، $۰/۲۳۰$mm در آزمایشگاه حرکت می‌کند. (الف) ویژه طول عمر ذره چقدر است؟ (ب) فاصلهٔ طی شده توسط ذره وقتی در چارچوب ساکن آن اندازه‌گیری شود چقدر است؟

۸۱- (الف) K، (ب) E و (پ) p (برحسب GeV/c) برای پروتونی که با تندی $۰/۹۹۰c$ حرکت می‌کند، چقدر است؟ (ت) K، (ث) E و (ج) p (برحسب MeV/c) برای الکترونی که با تندی $۰/۹۹۰c$ حرکت می‌کند چقدر است؟

۸۲- در انتقال به سرخ تابش از یک کهکشان دور، معلوم شده است که طول موج آن ۴۳۴nm است و وقتی در آزمایشگاه مشاهده شود، طول موج آن ۴۶۲nm است. (الف) تندی شعاعی کهکشان نسبت به زمین چقدر است؟ (ب) آیا این کهکشان به زمین نزدیک می‌شود یا دور؟

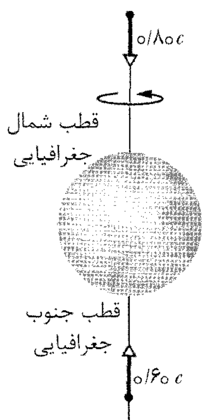
۸۳- (الف) از نظر فیزیک کلاسیکی چه اختلاف پتانسیلی یک الکترون را تا تندی c شتابدار می‌کند؟ (ب) با این اختلاف پتانسیل، الکترون به واقع به چه تندی می‌رسد؟

۸۴- شعاع زمین ۶۳۷۰km و تندی مداری آن دور خورشید ۳۰km/s است. فرض کنید زمین با این تندی از ناظری عبور می‌کند. از نظر این ناظر، قطر زمین در جهت حرکت چقدر منقبض می‌شود؟

۸۵- یک سفینهٔ فضایی در حال سکون در یک چارچوب مرجع معین S افزایش تندی $۰/۵۰c$ پیدا می‌کند. نسبت به چارچوب ساکن جدید افزایش تندی بیشتر $۰/۵۰c$ را به دست می‌آورد. این فرایند ادامه می‌یابد تا اینکه تندی آن نسبت به چارچوب اولیهٔ S به بیش از $۰/۹۹۹c$ می‌رسد. این فرایند به چند افزایش مرحله‌ای نیاز دارد؟

۸۶- یک قایق موتوری که به طور مستقیم به طرف یک کشتی دیدبانی حرکت می‌کند تله‌ای را به طرف کشتی دیدبانی می‌اندازد. تندی تله $۰/۹۸۰c$ و تندی قایق $۰/۹۰۰c$ است. تندی تله نسبت به قایق چقدر است؟

۸۷- یک ذرهٔ پرتو کیهانی در امتداد محور شمال- جنوب زمین با تندی $۰/۸۰c$ به قطب شمال جغرافیایی و ذرهٔ دیگری با تندی $۰/۶۰c$ به قطب جنوب جغرافیایی نزدیک می‌شوند (شکل ۳۷-۳۵). تندی نسبی نزدیک شدن یک ذره نسبت به ذرهٔ دیگر چقدر است؟



شکل ۳۷-۳۵ مسئلهٔ ۸۷

۸۸- (الف) در انفجار یک بمب شکافت که شامل ۳/۰kg ماده قابل شکافت است چقدر انرژی آزاد می‌شود؟ فرض کنید که ۰/۱۰٪ این جرم به انرژی آزاد شده تبدیل می‌شود. (ب) چه جرمی از TNT باید منفجر شود تا همین مقدار انرژی آزاد شود؟ فرض کنید که هر مول TNT در انفجار ۳/۴MJ انرژی آزاد می‌کند. جرم مولی TNT برابر با ۰/۲۲۷kg/mol است. (پ) برای همین جرم مادهٔ منفجره، نسبت انرژی آزاد شده در یک انفجار هسته‌ای به انرژی آزاد شده در یک انفجار TNT چقدر است؟

۳۸ فوتونها و موجهای ماده



کـربن منـو اکـسید انـسان شـکل چـسبناک مانـدگاری اسـت کـه از مولکـول‌هـای کـربن منـو اکـسید چندتایی تشکیل شده است. شکل به طور چشمگیری یک کار هنری است که در آزمایشگاه به وسیلهٔ جابه‌جا کردن تک تک مولکول‌ها به مکانشان روی سطح پلونونیم ایجاد شده است. حاصل آنقدر کوچک است که با هیچ میکروسکوپ اپتیکی قابل تفکیک نیست.

چگونه مـی‌تـوان مولکـول‌هـا را تک به تک حرکت داد و سـپس تصویرآنها را تشکیل داد.

پاسخ در همین فصل.

۱-۳۸ فیزیک چیست؟

یک تمرکز اصلی فیزیک عبارت است از نظریهٔ نسبیت اینشتین، که نگاه آن به جهانی فراتر از تجربهٔ عادی است — جهانی که در آن اجسام با تندیهایی نزدیک به تندی نور حرکت می‌کنند. در میان شگفتیهای دیگر، نظریهٔ اینشتین پیش‌بینی می‌کند که آهنگی که ساعت کار می‌کند به میزان سرعت ساعت نسبت به ناظر بستگی دارد: حرکت سریعتر به معنای کندی کارکرد ساعت است. این پیش‌بینی و پیش‌بینیهای دیگر این نظریه تاکنون از هر آزمایش تجربی موفق بیرون آمده، و نظریهٔ نسبیت ما را متوجه دید عمیقتر و قانع کننده‌تری از طبیعت فضا و زمان کرده است.

اکنون در حال کشف جهان دیگری هستیم که خارج از تجربهٔ عادی است — جهان زیر اتمی. با دستهٔ جدیدی از شگفتیها روبه‌رو می‌شویم، که اگرچه عجیب به نظر می‌رسند، ولی فیزیکدانان را مرحله به مرحله به دید عمیقتری از واقعیت هدایت می‌کنند.

فیزیک کوانتومی که موضوع جدید ما به آن نامیده می‌شود، پاسخ چنین پرسشهایی را به دست می‌دهد: چرا ستارگان می‌درخشند؟ چرا عنصرهای جدول تناوبی چنین نظم آشکاری دارند؟ ترانزیستورها و قطعه‌های میکروالکترونیکی چگونه کار می‌کنند؟ چرا مس رسانای الکتریسیته است ولی شیشه نیست؟ زیرا فیزیک کوانتومی در همهٔ شیمی از جمله بیوشیمی باید به حساب آورده شود. اگر بخواهیم خود زندگی را درک کنیم نیاز داریم آن را درک کنیم.

برخی از پیش‌بینیهای فیزیک کوانتومی حتی برای فیزیکدانان و فلاسفه، کسانی که بنیان آن را مطالعه می‌کنند عجیب به نظر می‌رسد. هنوز، آزمایش پس از آزمایش اثبات می‌کنند که این نظریه درست است و بسیاری حتی جنبه‌های عجیب نظریه را آشکار کرده‌اند. جهان کوانتومی پارکی تفریحی پر از دیدنیهای شگفت آوری است که می‌خواهند دنیای عقل سلیم ما را که از کودکی تکامل یافته است به لرزه درآورند. کاوش در این پارک کوانتومی را با فوتون شروع می‌کنیم.

۲-۳۸ فوتون، کوانتوم نور

فیزیک کوانتومی (که *مکانیک کوانتومی* و *نظریهٔ کوانتومی* نیز گفته می‌شود) عمدتاً عبارت است از مطالعهٔ وسیع جهان میکروسکوپی. در این جهان، بسیاری از کمیتها فقط در مقدارهای کمینهٔ معینی (*بنیادی*)، یا مضرب صحیحی از مقدارهای بنیادی یافت می‌شوند؛ گفته می‌شود که این کمیتها *کوانتیده‌اند*. مقدار بنیادی که به چنین کمیتی مربوط می‌شود **کوانتوم** آن کمیت (در جمع *کوانتا*) نامیده می‌شود.

به بیان ضعیفتر، اسکناسهای آمریکا کوانتیده‌اند چون حداقل مقدار پول سکهٔ یک پنی یا ۰٫۰۱ دلار است و مقدار همهٔ سکه‌ها و پولهای دیگر به مضربهای صحیحی از این مقدار حداقل محدود می‌شود. به عبارت دیگر کوانتوم اسکناس ۰٫۰۱ دلار است و همهٔ مقدارهای بزرگتر اسکناس $n\times 0/01$ دلار را تشکیل می‌دهند، که n همیشه مقدار مثبتی است. برای مثال، نمی‌توانید (۰٫۰۱ دلار) ۷۵٫۵ = ۰٫۷۵۵ دلار داشته باشید.

در سال ۱۹۰۵/۱۲۶۴ اینشتین پیشنهاد کرد که تابش الکترومغناطیسی (یا به طور ساده *نور*) کوانتیده است و در مقدارهایی بنیادی (کوانتا) وجود دارد که اکنون **فوتون** نامیده می‌شود. این پیشنهاد ممکن است برای شما عجیب به نظر برسد چون تاکنون در چندین فصل دربارهٔ نظر کلاسیکی بحث کرده‌ایم که نور یک موج سینوسی، با طول موج λ، بسامد f و تندی c است به طوری که

$$f=\frac{c}{\lambda} \tag{۱-۳۸}$$

افزون بر آن، در فصل ۲۹ (جلد دوم) بحث کردیم که موج نوری کلاسیکی ترکیب مستقلی از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی است که هر یک با بسامد f نوسان می‌کنند. این موج در میدانهای نوسان کننده چگونه می‌تواند از یک مقدار بنیادی از هر چیزی — کوانتوم نور — تشکیل شده باشد؟ فوتون چیست؟

معلوم شده است که مفهوم کوانتوم نور یا فوتون، خیلی دقیقتر و مرموزتر از چیزی است که اینشتین تصور کرده بود. در واقع، هنوز هم درک ما از فوتون خیلی ضعیف است. در این کتاب، فقط دربارهٔ برخی از جنبه‌های اصلی مفهوم فوتون، تا حدی در امتداد خطهای پیشنهادی اینشتین بحث خواهیم کرد.

بنابراین پیشنهاد، کوانتوم یک موج نوری با بسامد f دارای انرژی

$$E=hf \qquad \text{(انرژی فوتون)} \tag{۲-۳۸}$$

است. اینجا h **ثابت پلانک**، ثابتی که است اولین بار در معادلهٔ ۲۸-۲۳ (جلد دوم) با آن مواجه شدیم و مقدار آن عبارت است از

$$h=6/63\times10^{-34}\,\text{J.s}=4/14\times10^{-15}\,\text{eV.s} \tag{۳-۳۸}$$

کمترین مقدار انرژی که یک موج نوری با بسامد f می‌تواند داشته باشد hf، انرژی یک فوتون تنها است. اگر موج انرژی بیشتری داشته باشد، انرژی کل آن باید مضرب صحیحی از hf باشد، درست مانند اسکناس مثال قبل که مضرب صحیحی از ۰٫۰۱ دلار بود. نور نمی‌تواند انرژی مثلاً $0/6hf$ یا $75/5hf$ داشته باشد.

اینشتین هم‌چنین پیشنهاد کرد که هرگاه نور توسط جسمی (ماده‌ای) جذب یا گسیل شود، رویداد جذب یا گسیل در اتمهای ماده رخ می‌دهد. هرگاه نوری با بسامد f به وسیلهٔ اتمی جذب شود، انرژی hf یک فوتون از نور به اتم منتقل می‌شود. در این *رویداد جذب*، فوتون از بین می‌رود و اتم آن را جذب می‌کند. هرگاه نوری با بسامد f به وسیلهٔ اتمی گسیل شود،

مقدار انرژی hf از اتم به نور منتقل می‌شود. در این *رویداد گسیل*، یک فوتون ناگهان ظاهر می‌شود و گفته می‌شود اتم آن را گسیل کرده است. بنابراین، می‌توانیم در اتمهای یک جسم *جذب فوتون* و *گسیل فوتون* داشته باشیم.

در مورد جسمی که از بسیاری اتم تشکیل شده است چندین جذب فوتونی (مانند عینک آفتابی) یا چندین گسیل فوتونی (مانند لامپ) می‌تواند وجود داشته باشد. ولی، هر رویداد جذب یا گسیل هنوز متضمن انتقال مقداری انرژی برابر با آن یک فوتون تنها از نور است.

وقتی دربارهٔ جذب یا گسیل نور در فصلهای گذشته بحث می‌کردیم، مثالهای موردنظر شامل چنان نور زیادی بودند که به فیزیک کوانتومی نیازی نبود، و با فیزیک کلاسیک با آنها برخورد کردیم. ولی، در انتهای قرن بیستم، فناوری چنان پیشرفته شد که آزمایشهای یک فوتونی انجام شدند و به صورت کاربردهای عملی درآمدند. از آن زمان فیزیک کوانتومی به صورت بخشی از عملیات استاندارد مهندسی، به ویژه در مهندسی اپتیک درآمد.

✔ نکتهٔ وارسی ۱ تابشهای زیر را به ترتیب بزرگی انرژیهای مربوط به فوتون آنها مرتب کنید. (الف) نور زرد از یک لامپ بخار سدیم، (ب) پرتو گامای گسیل شده از هستهٔ پرتوزا، (پ) موج رادیویی گسیل شده از یک ایستگاه رادیویی تجارتی، (ت) باریکهٔ میکروموج گسیل شده از رادار کنترل ترافیک فرودگاه.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸-۱

یک لامپ بخار سدیم در مرکز کرهٔ بزرگی قرار دارد که تمام نورهایی را که به آن می‌رسد جذب می‌کند. آهنگی که با آن لامپ انرژی گسیل می‌کند $100\,W$ است؛ فرض کنید تمام این گسیل در طول موج $590\,nm$ صورت می‌گیرد. با چه آهنگی فوتونها توسط کره جذب می‌شوند؟

نکته‌های کلیدی نور به صورت فرتون گسیل و جذب می‌شود. فرض می‌کنیم که همهٔ نور گسیل شده توسط لامپ (و بنابراین جذب شده) به کره می‌رسند. بنابراین، آهنگ R که با آن فوتونها به وسیلهٔ کره جذب می‌شوند برابر با آهنگ $R_{گسیل}$ است که با آن فوتونها توسط لامپ گسیل می‌شوند.

محاسبه‌ها: این آهنگ عبارت است از

$$R_{گسیل} = \frac{\text{آهنگ گسیل انرژی}}{\text{انرژی هر فوتون گسیل شده}} = \frac{P_{گسیل}}{E}$$

بنابراین، از معادلهٔ ۳۸-۲ $(E = hf)$ خواهیم داشت

$$R = R_{گسیل} = \frac{P_{گسیل}}{hf}$$

با استفاده از معادلهٔ ۳۸-۱ $(f = c/\lambda)$ با قرار دادن به جای f و سپس با وارد کردن مقدارهای معلوم، به دست می‌آوریم

$$R = \frac{P_{گسیل}\,\lambda}{hc}$$

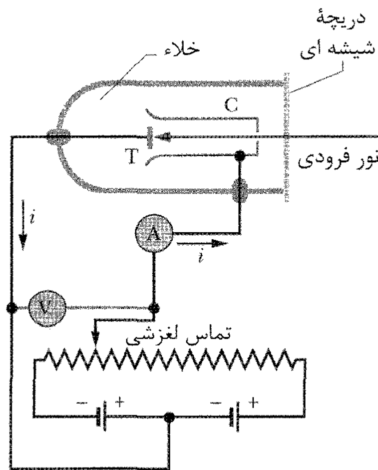
$$= \frac{(100\,W)(590\times10^{-9}\,m)}{(6/63\times10^{-34}\,J\cdot s)(2/998\times10^{8}\,m/s)}$$

$$= 2/97\times10^{20}\ \text{فوتون}/S \quad \text{(پاسخ)}$$

۳۸-۳ اثر فوتوالکتریک

اگر باریکه‌ای از نور با طول موج بقدر کافی کوتاه را به سطح فلزی تمیزی بتابانید، این نور موجب می‌شود تا الکترونها این سطح را ترک کنند (نور الکترونها را از سطح *می‌کند*). این **اثر فوتوالکتریک** دربسیاری‌ازوسایل از جمله دوربینهای تلویزیونی، دوربینهای ویدئویی و دوربینهای مرئی در شب به کار می‌رود. اینشتین از مفهوم فوتونی خود برای تشریح این اثر استفاده کرد ولی این اثر به سادگی و بدون فیزیک کوانتومی قابل درک نبود.

دو آزمایش اساسی فوتوالکتریک را با استفاده از وسیلهٔ شکل ۳۸-۱ تحلیل می‌کنیم، که در آن نور با بسامد f به هدف T برخورد می‌کند و الکترونها را از آن می‌کند. یک اختلاف پتانسیل V بین هدف T و ظرف C برای جمع‌آوری الکترونها، که **فوتو الکترون** نامیده می‌شوند، برقرار است. این مجموعه یک **جریان فوتوالکتریک** i ایجاد می‌کند که با وسیلهٔ A اندازه‌گیری می‌شود.



شکل ۳۸-۱ وسیله به کار رفته برای مطالعهٔ اثر فوتوالکتریک. نور فرودی به هدف T می‌تابد و الکترونها را می‌کند که این الکترونها توسط ظرف C جمع‌آوری می‌شوند. الکترونها در مدار در جهت مخالف پیکان قراردادی جریان حرکت می‌کنند. باتریها و مقاومت متغییر برای ایجاد و تنظیم اختلاف پتانسیل الکتریکی بین T و C به کار می‌روند.

آزمایش فوتوالکتریک اول

اختلاف پتانسیل V را با حرکت دادن تماس لغزشی در شکل ۳۸-۱ تنظیم می‌کنیم به طوری که جمع کنندهٔ C نسبت به هدف T اندکی منفی باشد. این اختلاف پتانسیل جهت آهسته کردن الکترونهای کنده شده عمل می‌کند. سپس V را تا جایی تغییر

می‌دهیم که به مقدار معینی به نام **پتانسیل توقف** $V_{\text{توقف}}$ برسد، در این نقطه آمپرسنج A دقیقاً به صفر افت می‌کند. وقتی $V = V_{\text{توقف}}$ باشد، بسیاری از الکترونهای پرانرژی کند شده قبل از آنکه به جمع کننده برسند برمی‌گردند. بنابراین، K_{max} یعنی انرژی جنبشی این الکترونهای پرانرژی عبارت است از

$$K_{max} = eV_{\text{توقف}} \qquad (۳۸-۴)$$

که در آن e بار بنیادی است.

اندازه‌گیریها نشان می‌دهند که برای نور با بسامد معین، K_{max} *به شدت چشمهٔ نور بستگی ندارد.* اینکه چشمه روشنایی خیره کننده داشته باشد یا خیلی ضعیف باشد که به سختی بتوان آن را آشکار کرد (یا با روشنایی متوسط)، بیشینهٔ انرژی جنبشی الکترونهای کنده شده همیشه مقدار یکسانی دارد.

این نتیجهٔ تجربی برای فیزیک کلاسیک یک معماست. از نظر کلاسیک، نور فرودی یک موج الکترومغناطیسی نوسان کنندهٔ سینوسی است. یک الکترون درون هدف به علت نیروی الکتریکی نوسانی وارد بر آن از طرف میدان الکتریکی موج باید به طور سینوسی نوسان کند. اگر دامنهٔ نوسان الکترون بقدر کافی بزرگ باشد، الکترون باید از سطح هدف آزاد شود - یعنی از هدف کنده شود. بنابراین، اگر دامنهٔ موج و میدان الکتریکی نوسانی آن را بیشتر کنیم، باید به الکترون موقع کنده شدن با انرژی بیشتری «ضربه» وارد شده باشد. *ولی، این چیزی نیست که رخ می‌دهد.* به ازای یک بسامد معین، باریکه‌های نور شدید و باریکه‌های نور ضعیف هر دو دقیقاً بیشینهٔ ضربهٔ یکسانی به الکترونهای کنده شده وارد می‌کنند.

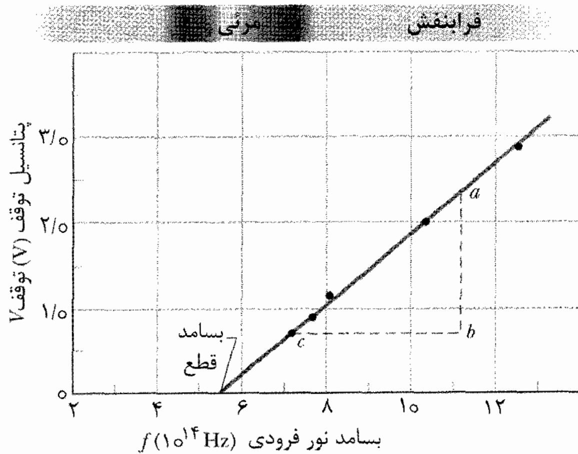
نتیجهٔ واقعی به طور طبیعی وقتی به دست می‌آید که برحسب فوتونها فکر کنیم. اکنون انرژیی که می‌تواند از نور فرودی به الکترونی در هدف انتقال یابد انرژی یک فوتون تنهاست. افزایش شدت نور *تعداد* فوتونهای نور را افزایش می‌دهد، ولی انرژی فوتون که با معادلهٔ ۳۸-۲ $(E = hf)$ داده می‌شود بدون تغییر می‌ماند چون بسامد تغییر نکرده است. بنابراین، انرژی انتقال یافته به انرژی جنبشی یک الکترون نیز بدون تغییر می‌ماند.

آزمایش فوتوالکتریک دوم

حال بسامد f نور فرودی را تغییر می‌دهیم و پتانسیل توقف $V_{\text{توقف}}$ مربوط را اندازه می‌گیریم. شکل ۳۸-۲ نمودار $V_{\text{توقف}}$ برحسب f است. توجه کنید که اگر بسامد کمتر از یک **بسامد قطع** f_0 معین باشد، یا به طور معادل، اگر طول موج بزرگتر از **طول موج قطع** متناظر $\lambda_0 = c/f_0$ باشد، اثر فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد. به همین دلیل است که *مهم نیست که نور فرودی چقدر شدید باشد.*

این معمای دیگر فیزیک کلاسیک است. اگر به نور از دید یک موج الکترومغناطیسی نگاه کنید، باید انتظار داشته باشید که اگر به آنها انرژی کافی بدهیم - یعنی از چشمهٔ نوری که روشنایی کافی داشته باشد استفاده کنیم، - مهم نیست که بسامد آن چقدر پایین باشد، الکترونها همیشه باید بتوانند به وسیلهٔ نور کنده شوند. *ولی این چیزی نیست که رخ می‌دهد.* در مورد نور زیر بسامد قطع f_0، اثر فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد، و مهم نیست که چشمهٔ نور چقدر روشن باشد.

ولی، هرگاه انرژی از طریق فوتونها انتقال یابد، وجود یک بسامد قطع درست چیزی است که باید انتظار داشته باشیم. الکترونهای داخل هدف به واسطهٔ نیروهای الکتریکی در آنجا نگهداشته شده‌اند. (اگر این نیروها وجود نداشتند، الکترونها به واسطهٔ نیروی گرانشی وارد بر آنها از هدف بیرون می‌ریختند.) جهت فرار از هدف، یک انرژی کمینهٔ معین Φ باید به الکترون داده شود، که Φ خاصیتی از مادهٔ هدف است که **تابع کار** آن نامیده می‌شود. اگر انرژی hf انتقال یافته به یک الکترون توسط



شکل ۳۸-۲ پتانسیل توقف $V_{\text{توقف}}$ برحسب تابعی از بسامد f نور فرودی برای یک هدف سدیم T در وسیلهٔ شکل ۳۸-۱. (این داده‌ها توسط میلیکان در سال ۱۲۹۵/۱۹۱۶ گزارش شده‌اند.)

یک فوتون بیشتر از تابع کار ماده باشد (اگر $hf > \Phi$)، الکترون می‌تواند از هدف فرار کند. ولی در صورتی که انرژی انتقال یافته بیشتر از تابع کار نباشد (یعنی اگر $hf < \Phi$)، الکترون نمی‌تواند فرار کند. این همان چیزی است که شکل ۳۸-۲ نشان می‌دهد.

معادلهٔ فوتوالکتریک

اینشتین نتایج آزمایشهای فوتوالکتریک را در معادلهٔ زیر جمع کرد

$$hf = K_{max} + \Phi \qquad \text{(معادلهٔ فوتوالکتریک)} \qquad (۳۸-۵)$$

این بیانی از پایستگی انرژی برای جذب یک فوتون تنها توسط یک هدف با تابع کار Φ است. انرژیی برابر با انرژی فوتون hf در مادهٔ هدف به یک الکترون منتقل می‌شود. اگر الکترون بخواهد از هدف فرار کند، باید انرژیی حداقل برابر با Φ گرفته باشد. هر انرژی اضافی $(hf - \Phi)$ که الکترون از فوتون به دست آورد به صورت انرژی جنبشی K الکترون ظاهر می‌شود. در مطلوب‌ترین شرایط، الکترون می‌تواند از سطح فرار کند

بدون اینکه هیچ انرژیی از این انرژی جنبشی را در این فرایند از دست بدهد؛ در این صورت الکترون با بیشترین انرژی جنبشی ممکن K_{max} در خارج هدف ظاهر می‌شود.

با قراردادن K_{max} از معادلهٔ ۳۸-۴ ($K_{max} = eV_{توقف}$) معادلهٔ ۳۸-۵ را بازنویسی می‌کنیم. پس از اندکی جابه‌جایی به دست می‌آوریم

$$V_{توقف} = \left(\frac{h}{e}\right)f - \frac{\Phi}{e} \qquad (۳۸\text{-}۶)$$

نسبتهای h/e و Φ/e ثابت‌اند، و بنابراین، انتظار داریم که نمودار پتانسیل توقف $V_{توقف}$ که برحسب بسامد f نور اندازه‌گیری شده است مانند شکل ۳۸-۲ یک خط راست باشد. افزون بر این، شیب این خط راست باید h/e باشد. جهت بررسی، در شکل ۳۸-۲ ab و bc را اندازه گرفته و می‌نویسیم

$$\frac{h}{e} = \frac{ab}{bc} = \frac{۲/۳۵\text{V} - ۰/۷۲\text{V}}{(۱۱/۲\times۱۰^{۱۴} - ۷/۲\times۱۰^{۱۴})\text{Hz}}$$
$$= ۴/۱\times۱۰^{-۱۵}\ \text{V.s}$$

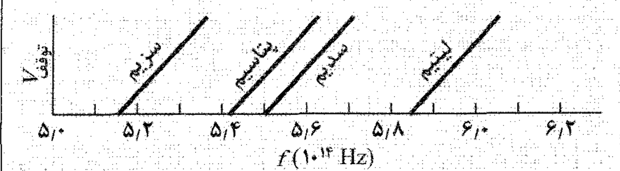
با ضرب این نتیجه در بار بنیادی e، پیدا می‌کنیم

$$h = (۴/۱\times۱۰^{-۱۵}\ \text{V.s})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\text{C}) = ۶/۶\times۱۰^{-۳۴}\ \text{J.s}$$

که با مقدارهای اندازه‌گیری شده با بسیاری از روشهای دیگر توافق دارد.

نکته: توصیف اثر فوتوالکتریک قطعاً مستلزم فیزیک کوانتومی است. به مدت چندین سال توصیف اینشتین استدلال مجاب کننده‌ای برای وجود فوتونها بود. ولی، در سال ۱۹۶۹/۱۳۴۸ توصیف دیگری برای این اثر به دست آمد که از فیزیک کوانتومی استفاده می‌کرد ولی به مفهوم فوتونها نیازی نداشت. نور در واقع به صورت فوتون کوانتیده است، ولی توصیف اینشتین از اثر فوتوالکتریک بهترین استدلال برای این وضعیت نیست.

✔ نکتهٔ وارسی ۲ شکل داده‌هایی مشابه با داده‌های شکل ۳۸-۲ را برای هدفهای سزیم، پتاسیم، سدیم و لیتیم نشان می‌دهد. نمودارها موازی‌اند. (الف) این هدفها را به ترتیب بزرگی تابعهای کار آنها مرتب کنید. (ب) این نمودارها را به ترتیب بزرگی مقدار h که به دست می‌دهند مرتب کنید.



مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸-۲

ورقه‌ای از پتاسیم در فاصلهٔ $r = ۳/۵\text{m}$ از یک چشمهٔ نوری همسانگرد که انرژی را با آهنگ $P = ۱/۵\text{W}$ گسیل می‌کند قرار دارد. تابع کار Φ پتاسیم $۲/۲\text{eV}$ است. فرض کنید که انرژی منتقل شده توسط نور فرودی به ورقه به طور پیوسته و هموار (یعنی اگر فیزیک کلاسیک به جای فیزیک کوانتومی حکم فرما بود) انتقال یافته باشد. چه مدت طول می‌کشد تا ورقه انرژی لازم را برای کندن یک الکترون جذب کند؟ فرض کنید که ورقه تمام انرژیی را که به آن می‌رسد جذب می‌کند و اینکه الکترونی که کنده می‌شود انرژی را از قسمت دایره‌ای ورقه به شعاع $۵/۰\times۱۰^{-۱۱}\text{m}$، یعنی تقریباً شعاع یک اتم نوعی جذب می‌کند.

نکته‌های کلیدی

۱. بازهٔ زمانی Δt مورد نیاز برای جذب انرژی ΔE توسط قسمت دایره‌ای به آهنگ P_{abs} بستگی دارد که با آن انرژی جذب می‌شود

$$\Delta t = \frac{\Delta E}{P_{abs}}$$

۲. اگر الکترون از ورقه کنده شود، کمترین مقدار انرژی ΔE که باید قسمت دایره‌ای از نور به دست آورد برابر با تابع کار Φ پتاسیم است. پس

$$\Delta t = \frac{\Phi}{P_{abs}}$$

۳. چون قسمت دایره‌ای جذب کنندهٔ کامل است، آهنگ جذب P_{abs} برابر با آهنگ P_{arr} است که با آن انرژی به قسمت دایره‌ای می‌رسد؛ یعنی

$$\Delta t = \frac{\Phi}{P_{arr}}$$

۴. با معادلهٔ ۲۹-۲۳ (جلد دوم) $[I = (\text{مساحت / توان})_{avg}]$، می‌توان انرژی رسیده با آهنگ P_{arr} را به شدت I نور در قسمت دایره‌ای و مساحت A آن مرتبط ساخت

$$P_{arr} = IA$$

بنابراین،

$$\Delta t = \frac{\Phi}{IA}$$

۵. چون چشمهٔ نور همسانگرد است، شدت نور I در فاصلهٔ r از چشمه به آهنگ $P_{گسیل}$ بستگی دارد که با آن انرژی بنابر معادلهٔ ۲۹-۲۷ (جلد دوم) به وسیلهٔ چشمه گسیل می‌شود

$$I = \frac{P_{گسیل}}{۴\pi r^۲}$$

محاسبه‌ها: بنابراین، سرانجام خواهیم داشت

$$\Delta t = \frac{۴\pi r^۲\Phi}{P_{گسیل}\ A}$$

سطح آشکارسازی A عبارت است از

$$\pi(۵/۰\times۱۰^{-۱۱}\text{m})^۲ = ۷/۸۵\times۱۰^{-۲۱}\text{m}^۲$$

و تابع کار Φ عبارت است از $۲/۲\text{eV} = ۳/۵\times۱۰^{-۱۹}\text{J}$. با قراردادن اینها و داده‌های دیگر خواهیم داشت

$$\Delta t = \frac{۴\pi(۳/۵\text{m})^۲(۳/۵\times۱۰^{-۱۹}\text{J})}{(۱/۵\text{W})(۷/۸۵\times۱۰^{-۲۱}\text{m}^۲)}$$

$$= ۴۵۸۰\text{s} \approx ۱/۳\text{h} \qquad \text{(پاسخ)}$$

بنابراین، از فیزیک کلاسیک معلوم می‌شود که باید بیشتر از یک ساعت پس از روشن شدن چشمهٔ نور برای فوتوالکترونی

که باید کنده شود منتظر بمانیم. زمان واقعی انتظار کمتر از $10^{-9}s$ است. بنابراین، روشن است که الکترون *نمی‌تواند* انرژی را بتدریج از نوری که وارد قسمت دایره‌ای شامل الکترون می‌شود جذب کند. بلکه یا، الکترون اصلاً انرژی جذب نمی‌کند یا کوانتوم انرژی را فوراً با گرفتن فوتون از نور جذب می‌کند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸-۳

تابع کار Φ سدیم را از شکل ۳۸-۲ پیدا کنید.

نکتهٔ کلیدی می‌توانیم تابع کار Φ را از بسامد قطع f_0 پیدا کنیم (که روی نمودار می‌توان آن را اندازه گرفت). دلیل آن این است: در بسامد قطع انرژی جنبشی K_{max} در معادلهٔ ۳۸-۵ صفر است. بنابراین، همهٔ انرژی hf که از یک فوتون به یک الکترون منتقل می‌شود صرف فرارکردن الکترون می‌شود، که مستلزم انرژی Φ است.

محاسبه‌ها: ، از معادلهٔ ۳۸-۵ با $f = f_0$ خواهیم داشت

$$hf_0 = 0 + \Phi = \Phi$$

در شکل ۳۸-۲، بسامد قطع f_0 بسامدی است که در آن خط رسم شده محور افقی بسامد را تقریباً در $5/5\times10^{14}Hz$ قطع می‌کند. در این صورت خواهیم داشت

$$\Phi = hf_0 = (6/63\times10^{-34}J.s)(5/5\times10^{14}Hz)$$
$$= 3/6\times10^{-19}\ J = 2/3 eV$$ (پاسخ)

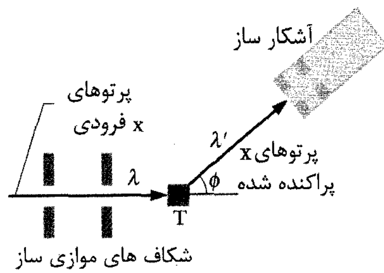
۳۸-۴ فوتونها اندازه حرکت دارند

در سال ۱۹۱۶/۱۲۹۴ اینشتین با پیشنهاد اینکه کوانتوم نور دارای اندازه حرکت خطی است مفهوم خود از کوانتای نور (فوتونها) را گسترش داد. در مورد فوتونی با انرژی hf، بزرگی این اندازه حرکت عبارت است از

$$p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \qquad \text{(اندازه حرکت فوتون)} \quad (۳۸-۷)$$

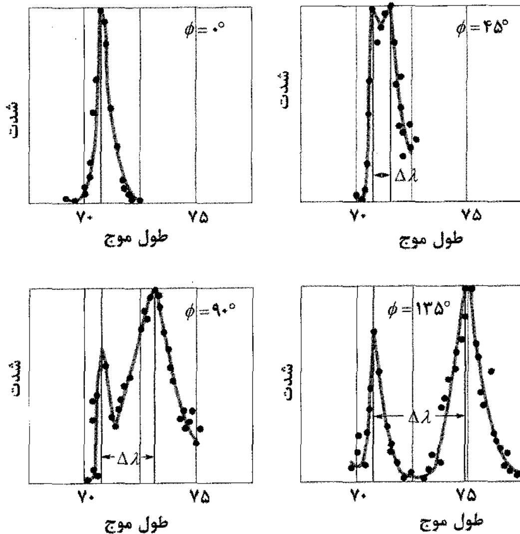
که در آن از معادلهٔ ۳۸-۱ $(f = c/\lambda)$ قرار داده‌ایم. بنابراین، وقتی فوتون با ماده برهم‌کنش می‌کند، انرژی *و* اندازه حرکت انتقال می‌یابند، *مانند اینکه* بین فوتون و ماده در برداشت کلاسیکی برخوردی روی داده است (مانند آنچه که در فصل ۹ دیدیم، جلد اول).

در سال ۱۹۲۳/۱۳۰۱، آرتور کامپتون[1] در دانشگاه واشینگتن در سنت لوئیس آزمایشی انجام داد که این نظریه را که اندازه حرکت و انرژی از طریق فوتونها انتقال می‌یابند تأیید می‌کرد. همانطور که در شکل ۳۸-۳ نشان داده شده است، او باریکه‌ای از پرتوهای x با طول موج λ را به یک هدف ساخته شده از کربن تاباند. پرتو x شکلی از تابش الکترومغناطیسی است که بسامدی بالا و بنابراین، طول موجی کوچک دارد. کامپتون طول موج و شدت پرتوهای x را که در جهتهای مختلف از هدف کربن پراکنده می‌شدند اندازه‌گیری کرد.



شکل ۳۸-۳ وسیلهٔ کامپتون. باریکه‌ای از پرتوهای x با طول موج λ=71/1pm بر هدف T از کربن می‌تابد. پرتوهای x که از این هدف پراکنده می‌شوند در زاویه‌های ϕ مختلف نسبت به باریکهٔ فرودی دیده می‌شوند. آشکارساز هم شدت پرتوهای x و هم طول موج آنها را اندازه می‌گیرد.

شکل ۳۸-۴ نتایج او را نشان می‌دهد. اگرچه در باریکهٔ پرتو x فرودی فقط یک طول موج تنها $(\lambda = 71/1pm)$ وجود دارد، ولی می‌بینیم که پرتوهای x پراکنده شده شامل گستره‌ای از طول موجها با دو قلهٔ شدت قابل توجه است. یک قله در اطراف طول موج λ فرودی و قلهٔ دیگر در اطراف یک طول موج λ' است که از λ به اندازهٔ $\Delta\lambda$ بیشتر است و **جابه‌جایی کامپتون** نامیده می‌شود. مقدار جابه‌جایی کامپتون به زاویه‌ای که در آن پرتوهای x پراکنده شده آشکار شده‌اند بستگی دارد.



شکل ۳۸-۴ نتایج کامپتون برای چهار مقدار زاویهٔ پراکندگی ϕ. توجه کنید که جابه‌جایی کامپتون $\Delta\lambda$ وقتی زاویهٔ پراکندگی بیشتر شود افزایش می‌یابد.

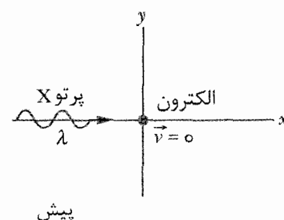
شکل ۳۸-۴ هم‌چنین معمای دیگری برای فیزیک کلاسیک است. به طور کلاسیکی باریکهٔ پرتو x فرودی یک موج الکترومغناطیسی است که به طور سینوسی نوسان می‌کند. یک الکترون در هدف کربن به واسطهٔ نیروی الکتریکی نوسانی وارد

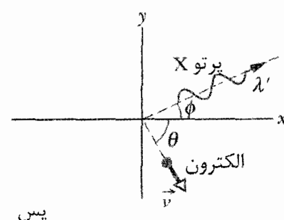
1. Arthur Compton

بر آن از میدان الکتریکی موج، به طور سینوسی نوسان می‌کند. افزون بر این، الکترون باید با همان بسامد موج نوسان کند و موجها را با همین *بسامد*، مانند حالتی که در یک آنتن فرستندهٔ کوچک وجود دارد، ارسال کند. بنابراین، پرتوهای x پراکنده شده توسط الکترون باید بسامد یکسان و طول موج یکسان مانند پرتوهای x در باریکهٔ فرودی داشته باشند — ولی این طور نیست.

کامپتون پراکندگی پرتوهای x از کربن را برحسب انتقال انرژی و اندازه حرکت توسط فوتونها، بین باریکهٔ پرتو x فرودی و الکترونهای مقید ضعیف در هدف کربن تفسیر کرد. نخست به طور مفهومی و سپس به طور کمی بررسی می‌کنیم که چگونه تفسیر فیزیک کوانتومی به درکی از نتایج کامپتون می‌انجامد.

فرض کنید یک فوتون تنها (با انرژی $E=hf$) به برهم‌کنش بین باریکه پرتو فرودی پرتو x و یک الکترون ساکن مربوط باشد. در حالت کلی، جهت حرکت پرتو x تغییر خواهد کرد (پرتو x پراکنده می‌شود) و الکترون پس خواهد زد، که بدان معناست که الکترون مقداری انرژی جنبشی به دست آورده است. انرژی در این برهم‌کنش منزوی پایسته است. بنابراین، انرژی فوتون پراکنده شده $(E'=hf')$ باید کمتر از فوتون فرودی باشد. پس، پرتوهای x پراکنده شده باید بسامدی کمتر از f' داشته باشند و از این رو طول موج λ' بلندتر از طول موج پرتوهای x فرودی است، درست مانند نتایج تجربی کامپتون که شکل ۳۸-۴ نشان می‌دهد.





شکل ۳۸-۵ پرتو x با طول موج λ با الکترون ساکن برهم‌کنش می‌کند. پرتو x با زاویهٔ ϕ، با طول موج افزایش یافته λ' پراکنده می‌شود. الکترون در زاویهٔ θ با تندی v حرکت می‌کند.

برای قسمت کمی، اول قانون پایستگی انرژی را به کار می‌بریم. شکل ۳۸-۵ «برخوردی» بین پرتو x و الکترون آزاد ساکن در هدف را نشان می‌دهد. بر اثر برخورد، پرتو x با طول موج λ' در زاویهٔ ϕ و الکترون با زاویهٔ θ نشان داده شده حرکت می‌کنند. بنابراین، پایستگی انرژی به دست می‌دهد

$$hf = hf' + K$$

که در آن hf انرژی فوتون پرتو x فرودی، hf' انرژی فوتون پرتو x پراکنده شده، و K انرژی جنبشی الکترون پس زده شده است. چون الکترون ممکن است با تندی قابل مقایسه‌ای با تندی نور پس زده شود، باید معادلهٔ نسبیتی ۳۷-۵۲ را برای انرژی جنبشی الکترون به کار ببریم

$$K = mc^2(\gamma - 1)$$

در اینجا m جرم الکترون و γ عامل لورنتس است

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

با قراردادن K در معادلهٔ پایستگی انرژی خواهیم داشت

$$hf = hf' + mc^2(\gamma - 1)$$

با قراردادن c/λ به جای f و c/λ' به جای f' به معادلهٔ جدید پایستگی انرژی می‌رسیم

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} + mc(\gamma - 1) \qquad (۳۸\text{-}۸)$$

حال قانون پایستگی اندازه حرکت را برای برخورد پرتو x – الکترون شکل ۳۸-۵ به کار می‌بریم. از معادلهٔ ۳۸-۷ $(p=h/\lambda)$، بزرگی اندازه حرکت فوتون فرودی h/λ و اندازه حرکت فوتون پراکنده شده h/λ' است. از معادلهٔ ۳۷-۴۱، بزرگی اندازه حرکت الکترون پس زده شده برابر $p=\gamma mv$ است. چون یک وضعیت دو بعدی داریم، معادلهٔ جداگانه‌ای برای پایستگی اندازه حرکت در امتداد محورهای x و y می‌نویسیم و به دست می‌آوریم

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos\phi + \gamma mv\cos\theta \qquad (\text{محور } x) \quad (۳۸\text{-}۹)$$

و

$$0 = \frac{h}{\lambda'}\sin\phi - \gamma mv\sin\theta \qquad (\text{محور } y) \quad (۳۸\text{-}۱۰)$$

می‌خواهیم $\Delta\lambda(=\lambda'-\lambda)$، جابه‌جایی کامپتون پرتوهای x پراکنده شده را پیدا کنیم. از پنج متغیر برخورد $(\lambda, \lambda', v, \phi, \theta)$ که در معادله‌های ۳۸-۸، ۳۸-۹ و ۳۸-۱۰ ظاهر شده‌اند، v و θ را حذف می‌کنیم که فقط مربوط به الکترون پس زده است. با انجام عملیات جبری (که قدری پیچیده است) معادلهٔ جابه‌جایی کامپتون برحسب تابعی از زاویهٔ پراکندگی ϕ به صورت زیر به دست می‌آید

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\phi) \qquad (\text{جابه‌جایی کامپتون}) \quad (۳۸\text{-}۱۱)$$

معادلهٔ ۳۸-۱۱ با نتایج تجربی کامپتون دقیقاً توافق دارد.

کمیت h/mc در معادلهٔ ۳۸-۱۱ ثابتی است که **طول موج کامپتون** نامیده می‌شود. مقدار آن به جرم m ذره‌ای که پرتو x از آن پراکنده شده است بستگی دارد. در اینجا این ذره یک الکترون مقید ضعیف است و بنابراین، جرم الکترون را به جای m قرار می‌دهیم و *طول موج کامپتون را برای پراکندگی از الکترون به دست می‌آوریم.*

یک مطلب باقی مانده

قلهٔ واقع در طول موج فرودی $(\lambda = ۷۱/۱\text{pm})$ در شکل ۳۸-۴ هنوز نیاز به توضیح دارد. این قله نه از برهم‌کنشهای بین پرتوهای x و الکترونهای خیلی سست در هدف بلکه از برهم‌کنشهای بین پرتوهای x و الکترونهایی که پیوند محکمی با اتمهای کربن تشکیل دهندهٔ هدف دارند حاصل می‌شود. به طور مؤثر هر برخوردی از نوع اخیر بین پرتو x فرودی و تمام اتم کربن رخ می‌دهد. اگر m جرم یک اتم کربن (تقریباً ۲۲۰۰۰ برابر یک الکترون) را در معادلهٔ ۳۸-۱۱ قرار دهیم، می‌توان دید که $\Delta\lambda$ تقریباً ۲۲۰۰۰ برابر کوچکتر از جابه‌جایی کامپتون برای الکترون است — که به دلیل زیاد کوچک بودن آشکار نمی‌شود. بنابراین، پرتوهای x پراکنده شده در این برخوردها همان طول موج پرتوهای x فرودی را دارند.

✔ نکتهٔ وارسی ۳ پراکندگی کامپتون را در مورد پرتوهای x $(\lambda \approx ۲۰\text{pm})$ با نور مرئی $(\lambda \approx ۵۰۰\text{nm})$ در یک زاویهٔ معین پراکندگی مقایسه کنید. کدامیک بزرگتر است (الف) جابه‌جایی کامپتون، (ب) جابه‌جایی کسر طول موج، (پ) کسر اتلاف انرژی و (ت) انرژی منتقل شده به الکترون؟

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸-۴

پرتوهای x با طول موج $\lambda = ۲۲\text{pm}$ (انرژی فوتون $= ۵۶\text{keV}$) از یک هدف کربنی پراکنده و پرتوهای پراکنده شده در زاویهٔ $۸۵°$ نسبت به باریکهٔ فرودی آشکار می‌شوند.

(الف) جابه‌جایی کامپتون پرتوهای پراکنده شده چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی جابه‌جایی کامپتون عبارت است از تغییر طول موج پرتوهای x به واسطهٔ پراکندگی از الکترونهای دارای پیوند ضعیف در یک هدف. افزون بر این، این جابه‌جایی بنابر معادلهٔ ۳۸-۱۱ به زاویه‌ای که پرتوهای x پراکنده آشکار می‌شوند بستگی دارد.

محاسبه‌ها: با قراردادن $۸۵°$ برای این زاویه و $۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱}\text{kg}$ برای جرم الکترون (چون پراکندگی از الکترونهاست) در معادلهٔ ۳۸-۱۱، خواهیم داشت

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\phi)$$

$$= \frac{(۶/۶۳\times ۱۰^{-۳۴}\,\text{J.s})(1-\cos ۸۵°)}{(۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱}\,\text{kg})(۳/۰۰\times ۱۰^{۸}\,\text{m/s})}$$

$$= ۲/۲۱\times ۱۰^{-۱۲}\text{m} \approx ۲/۲\text{pm} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) در چنین پراکندگی چه درصدی از انرژی فوتون پرتو x اولیه به الکترون انتقال می‌یابد؟

نکتهٔ کلیدی لازم است کسر *اتلاف انرژی* برای فوتونهایی که از الکترونها پراکنده می‌شوند را پیدا کنیم

$$\text{کسر} = \frac{\text{اتلاف انرژی}}{\text{انرژی اولیه}} = \frac{E-E'}{E}$$

محاسبه‌ها: از معادلهٔ ۳۸-۲ $(E=hf)$، انرژی اولیهٔ E و انرژی آشکار شدهٔ E' پرتوهای x را برحسب بسامدها قرار می‌دهیم. بنابراین، از معادلهٔ ۳۸-۱ $(f=c/\lambda)$، می‌توانیم این بسامدها را برحسب طول موجها قرار دهیم. پیدا می‌کنیم

$$\text{کسر} = \frac{hf-hf'}{hf} = \frac{c/\lambda - c/\lambda'}{c/\lambda} = \frac{\lambda'-\lambda}{\lambda'}$$

$$= \frac{\Delta\lambda}{\lambda+\Delta\lambda} \qquad (۳۸\text{-}۱۲)$$

با قراردادن داده‌های معلوم خواهیم داشت

$$\text{کسر} = \frac{۲/۲۱\text{ pm}}{۲۲\text{ pm} + ۲/۲۱\text{ pm}} = ۰/۰۹۱ \text{ یا } ٪۹/۱ \qquad \text{(پاسخ)}$$

اگرچه جابه‌جایی کامپتون $\Delta\lambda$ مستقل از طول موج λ پرتوهای فرودی است (به معادلهٔ ۳۸-۱۱ نگاه کنید)، ولی کسر اتلاف انرژی پرتوهای x به λ بستگی دارد، و به طوری که معادلهٔ ۳۸-۱۲ نشان می‌دهد با کاهش طول موج تابش فرودی، افزایش می‌یابد.

۳۸-۵ نور به عنوان موج احتمال

یک راز اصلی در فیزیک این است که چگونه نور در فیزیک کلاسیک می‌تواند یک موج باشد (که در ناحیه‌ای گسترده می‌شود) ولی در فیزیک کوانتومی به صورت فوتونهایی (که در نقطه‌هایی ایجاد و از بین می‌رود) گسیل یا جذب شود. آزمایش دو شکاف در بخش ۳۵-۴ در قلب این راز قرار دارد. دربارهٔ سه صورت آن آزمایش بحث می‌کنیم.

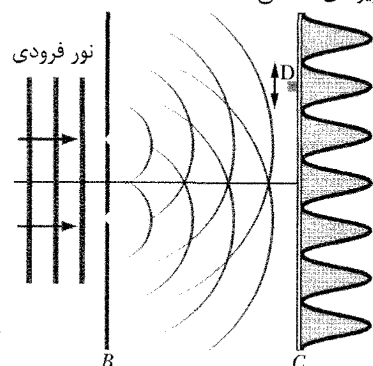
صورت استاندارد

شکل ۳۸-۶ نموداری از آزمایش اصلی انجام شده به وسیلهٔ توماس یانگ در سال ۱۸۰۱/۱۱۷۹ است (همچنین به شکل ۳۵-۸ نگاه کنید). نور بر پردهٔ B می‌تابد، که دو شکاف موازی باریک دارد. موجهای نوری که از دو شکاف بیرون می‌آیند به وسیلهٔ پراش پخش می‌شوند و روی صفحهٔ مشاهدهٔ C به علت تداخل همپوشانی می‌کنند، و نقشی از بیشینه‌ها و کمینه‌های متناوب شدت را تشکیل می‌دهند. در بخش ۳۵-۴ وجود این فریزهای تداخلی را به عنوان دلیلی برای طبیعت موجی نور در نظر گرفتیم.

اکنون آشکارساز ظریف فوتون D را در نقطه‌ای در صفحهٔ C قرار می‌دهیم. آشکارساز یک وسیلهٔ فوتوالکتریکی است که وقتی فوتونی را جذب کند صدا می‌کند. درمی‌یابیم که آشکارساز دسته‌ای از صداها را ایجاد می‌کند که از نظر زمانی کاتوره‌ای هستند و هر صدا به سیگنال انتقال انرژی از موج نوری به صفحه از طریق جذب یک فوتون مربوط است.

اگر آشکارساز را همانطور که در شکل ۳۸-۶ با پیکان سیاه نشان داده شده است، به آهستگی بالا یا پایین ببریم، درمی‌یابیم که با گذشتن از بیشینه‌ها و کمینه‌های متناوب که دقیقاً به

بیشینه‌ها و کمینه‌های فریزهای تداخلی مربوط می‌شوند آهنگ ایجاد صدا زیاد و کم می‌شود.



شکل ۳۸-۶ نور بر پردهٔ B، که شامل دو شکاف موازی است می‌تابد. نور خارج شده از این شکافها به وسیلهٔ پراش به طرف بیرون پخش می‌شود. دو موج پراشیده روی صفحهٔ مشاهدهٔ C همپوشانی می‌کنند و نقشی از فریزهای تداخلی را تشکیل می‌دهند. آشکارساز فوتونی کوچک D در صفحهٔ C به ازای هر فوتونی که جذب می‌کند صدای واضحی ایجاد می‌کند.

نکتهٔ این آزمایش به صورت زیر است. نمی‌توانیم پیش‌بینی کنیم که فوتونها چه موقع در نقطهٔ خاصی روی صفحهٔ C آشکار می‌شوند: فوتونها در نقطه‌هایی منفرد در زمانهایی کاتوره‌ای آشکار می‌شوند. با این وجود، می‌توانیم پیش‌بینی کنیم که *احتمال* نسبی اینکه یک فوتون تنها در بازهٔ زمانی معینی در نقطه‌ای خاص آشکار شود متناسب با شدت نور در آن نقطه است.

از معادلهٔ ۲۹-۲۶ ($I = E_{\text{rms}}^{2} / c\mu_0$) در بخش ۲۹-۵ (جلد دوم) می‌دانیم که شدت I هر موج نوری در هر نقطه متناسب با مربع E_m، دامنهٔ بردار میدان الکتریکی نوسانی موج در آن نقطه است. بنابراین،

> احتمال (در یکای بازهٔ زمانی) اینکه فوتونی در حجم کوچکی واقع در نقطهٔ معینی در یک موج نوری آشکار شود متناسب با مربع دامنهٔ بردار میدان الکتریکی موج در آن نقطه است.

حال به یک توصیف احتمالی از موج نوری و از این رو دید دیگری نسبت به نور می‌پردازیم. نور نه تنها یک موج الکترومغناطیسی است بلکه یک **موج احتمال** است. یعنی، به هر نقطه در یک موج نوری می‌توان یک احتمال عددی (در یکای بازهٔ زمانی) نسبت داد که یک فوتون می‌تواند در حجم کوچک واقع در آن نقطه آشکار شود.

صورت تک فوتون

صورت تک فوتون در آزمایش دو شکاف اولین بار به وسیلهٔ تیلور[1] در سال ۱۹۰۹/۱۲۸۸ انجام شد و تا کنون به دفعات زیادی تکرار شده است. این صورت با صورت استاندارد این فرق را دارد که در آزمایش تیلور چشمهٔ نور آنچنان ضعیف است که در بازه‌های کاتوره‌ای در یک لحظه فقط یک فوتون گسیل می‌کند. در کمال شگفتی، اگر زمان آزمایش به اندازهٔ کافی زیاد باشد (چند ماه برای آزمایش اولیهٔ تیلور) باز هم فریزهای تداخلی روی صفحهٔ C تشکیل خواهند شد.

چه توصیفی برای نتیجهٔ آزمایش دو شکاف تک فوتون می‌توان ارائه داد؟ پیش از آنکه حتی این نتیجه را بررسی کنیم، پرسش‌هایی مانند اینها مطرح است: اگر در یک لحظه یکی از فوتونها از وسیله عبور کنند، این فوتون معین از کدام دو شکاف در پردهٔ B می‌گذرد؟ حتی این فوتون معین چگونه «می‌داند» که شکاف دیگری وجود دارد به گونه‌ای که تداخلی امکان‌پذیر گردد؟ و اینکه آیا یک تک فوتون می‌تواند به طریقی از هر دو شکاف بگذرد و با خودش تداخل کند؟

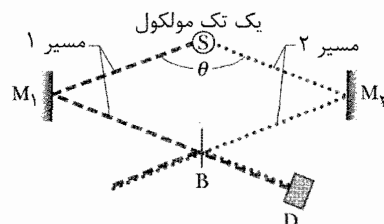
به خاطر داشته باشید که تنها چیزی که دربارهٔ فوتونها می‌دانیم موقع برهم‌کنش نور با ماده است — هیچ راهی برای آشکارسازی آنها بدون برهم‌کنش با ماده، مانند یک آشکارساز یا یک صفحه وجود ندارد. بنابراین، در آزمایش شکل ۳۸-۶، تمام آن چیزی که می‌دانیم این است که فوتونها از چشمهٔ نوری سرچشمه گرفته‌اند و در صفحه محو می‌شوند. بین چشمه و صفحه، نمی‌دانیم فوتون چیست و چه می‌کند. چون سرانجام یک نقش تداخلی روی پرده تشکیل می‌شود، مسلم فرض می‌کنیم که هر فوتون فاصلهٔ چشمه تا صفحه را *به صورت موجی* طی می‌کند که فضای بین چشمه و صفحه را پر می‌کند و سپس با انتقال انرژی و اندازه حرکت به یک نقطه از صفحه، با جذب فوتون در آن نقطه محو می‌شود.

نمی‌توانیم پیش‌بینی کنیم که به ازای هر فوتون معین که از چشمه منشأ می‌گیرد این انتقال در کجا رخ خواهد داد (در کجا یک فوتون آشکار خواهد شد). ولی، *می‌توانیم* احتمالی را پیش‌بینی کنیم که یک انتقال در هر نقطهٔ معین روی پرده رخ خواهد داد. انتقالها تمایل دارند در ناحیه‌هایی با فریزهای روشن در نقش تداخلی رخ دهند (و بنابراین، فوتونها تمایل دارند جذب شوند). انتقالها تمایل *ندارند* در ناحیه‌هایی با فریزهای تاریک در نقش تداخلی رخ دهند (و بنابراین، فوتونها تمایل *ندارند* جذب شوند). پس، می‌توانیم بگوییم موجی که از چشمه تا صفحه حرکت می‌کند یک *موج احتمال* است که نقشی از «فریزهای احتمال» روی صفحه ایجاد می‌کند.

1. G. I. Taylor

تک فوتون، صورت زاویهٔ باز

در گذشته، فیزیکدانان سعی کردند آزمایش دو شکاف با تک فوتون را برحسب بسته‌های کوچک موجهای نوری کلاسیکی که به طور جداگانه به طرف شکافها فرستاده می‌شوند توصیف کنند. آنها این بسته‌های کوچک را فوتون نامیدند. ولی، آزمایشهای جدید این توضیح و تعریف را نامعتبر کردند. شکل ۳۸-۷ آرایشی از یکی از این آزمایشها را نشان می‌دهد که در سال ۱۳۶۱/۱۹۹۲ به وسیلهٔ مینگ لای[1] و جین کلود دایلز[2] از دانشگاه نیومکزیکو گزارش شده است. چشمهٔ S مولکولهایی دارد که فوتونهایی را در زمانهای کاملاً مجزا گسیل می‌کند. آینه‌های M_1 و M_2 طوری قرار گرفته‌اند که نوری را که چشمه در امتداد دو مسیر مشخص ۱ و ۲ با فاصلهٔ زاویه‌ای θ نزدیک به $180°$ گسیل می‌کند، بازتاب می‌دهند. این آرایش با آزمایش دو شکاف استاندارد که در آن زاویهٔ بین مسیرهای نوری که به دو شکاف می‌رسند خیلی کوچک است تفاوت دارد.



شکل ۳۸-۷ نور حاصل از گسیل تک فوتون در چشمهٔ S روی دو مسیری حرکت می‌کند که با زاویهٔ بازی از یکدیگر قرار دارند و پس از ترکیب دوباره توسط باریکه شکاف B در آشکارساز D با خودش تداخل می‌کند. (از مقالهٔ
Ming Lai and Jean-Claude Diels, *Journal of the Optical Society of America B*, 9, 2290-2294. December 1992.)

موجهای نوری پس از بازتاب از آینه‌های M_1 و M_2، در امتداد مسیرهای ۱ و ۲ حرکت می‌کنند و در باریکه شکاف B به هم می‌رسند. (باریکه شکاف یک وسیلهٔ نوری است که نصف نور فرودی به آن را عبور و نصف دیگر را بازتاب می‌دهد.) در سمت راست باریکه شکاف در شکل ۳۸-۷، موج نوری در امتداد مسیر ۲ حرکت می‌کند و به وسیلهٔ B بازتابیده می‌شود و با موج نوری که در امتداد مسیر ۱ حرکت می‌کند و از B می‌گذرد ترکیب می‌شود. سپس این دو موج وقتی در آشکارساز D (یک *لامپ تکثیر فوتون* که تک فوتونها را می‌تواند آشکار کند) به یکدیگر می‌رسند با هم تداخل می‌کنند.

در خروجی آشکارساز دسته تپهای الکترونیکی با فاصله‌های کاتوره‌ای وجود دارد که مربوط به هر فوتون آشکار شده است. در این آزمایش، باریکه شکاف به آرامی در جهت افقی جابه‌جا (در آزمایش گزارش شده این جابه‌جایی حداکثر $50\,\mu m$ بوده است)، و خروجی آشکارساز روی یک نمودار ثبات ثبت می‌شود. با حرکت باریکه شکاف طول مسیرهای ۱ و ۲ تغییر می‌کند و این تغییر فازی بین موجهای نوری که به آشکارساز D می‌رسند ایجاد می‌کند. بیشینه‌ها و کمینه‌های تداخلی در سیگنال خروجی آشکارساز ظاهر می‌شوند.

درک این آزمایش با اصطلاحهای متعارف دشوار است. برای مثال، وقتی مولکولی در چشمه یک تک فوتون گسیل کند، آیا این فوتون در امتداد مسیر ۱ در شکل ۳۸-۷ حرکت می‌کند یا مسیر ۲ (یا در امتداد یک مسیر دیگر)؟ یا آیا می‌تواند در امتداد هر دو مسیر در یک لحظه حرکت کند؟ برای پاسخ به این، فرض می‌کنیم که هرگاه مولکولی یک فوتون گسیل کند، یک موج احتمال در تمام جهتها از آن تابش می‌شود. این آزمایش این موج را در دو جهت، که تقریباً در خلاف جهت یکدیگر انتخاب شده‌اند نشان می‌دهد.

می‌بینیم که اگر فرض کنیم که (۱) نور در چشمه به صورت فوتونها ایجاد می‌شود، (۲) نور در آشکارساز به صورت فوتونها جذب می‌شود، و (۳) نور بین چشمه و آشکارساز به صورت یک موج احتمال حرکت می‌کند، می‌توانیم هر سه صورت آزمایش دو شکاف را تفسیر کنیم.

۳۸-۶ موجهای الکترون و ماده

در سال ۱۳۰۳/۱۹۲۴ فیزیکدان فرانسوی لویی دوبروی[3] برای تقارن این نظر را ارائه کرد: یک باریکهٔ نور یک موج است، ولی انرژی و اندازه حرکت فقط از طریق فوتونها در نقطه‌هایی به ماده منتقل می‌شود. چرا باریکه‌ای از ذره‌ها نمی‌تواند خواص مشابهی داشته باشد؟ یعنی، چرا یک الکترون متحرک — یا هر ذرهٔ دیگر — را به صورت **موج ماده** که انرژی و اندازه حرکت را به مادهٔ دیگر منتقل می‌کند تصور نکنیم؟

به خصوص دوبروی پیشنهاد کرد که معادلهٔ ۳۸-۷ $(p = h/\lambda)$ را نه تنها می‌توان برای فوتونها بلکه برای الکترونها نیز اعمال کرد. در بخش ۳۸-۴ از این معادله برای نسبت دادن اندازه حرکت p به یک فوتون نور با طول موج λ استفاده کردیم. اکنون آن را در شکل زیر

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad \text{(طول موج دوبروی)} \qquad (۳۸-۱۳)$$

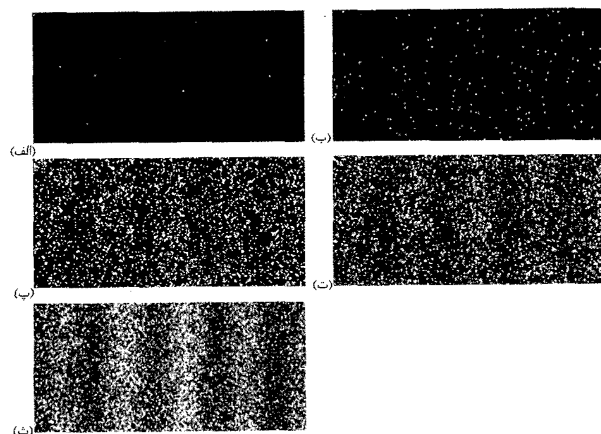
برای نسبت دادن طول موج به یک ذره با اندازه حرکت p به کار می‌بریم. طول موج محاسبه شده از معادلهٔ ۳۸-۱۳ **طول موج دوبروی** ذرهٔ متحرک نامیده می‌شود. پیش‌بینی دوبروی برای وجود موجهای ماده نخستین بار در ۱۳۰۶/۱۹۲۷ توسط داویسون[4] و جرمر[5] در آزمایشگاههای بل تلفن و توسط تامسون[6] در دانشگاه آبردین در اسکاتلند به طور تجربی بررسی شد.

---

1. Ming Lai
2. Jean Claude Diels
3. Louis de Broglie
4. C.J. Davisson
5. L.H.Genmer
6. C.J. Davisson

شکل ۳۸-۸ تصویرهایی از اثبات وجود موجهای ماده را در آزمایشی که اخیراً انجام شده نشان می‌دهد. در این آزمایش وقتی الکترونها یک *به* یک به وسیلهٔ دو شکاف فرستاده شدند یک نقش تداخلی به وجود آمد. این وسیله مشابه وسیله‌ای است که قبلاً برای اثبات تداخل نوری به کار برده شده بود، ولی صفحهٔ مشاهدهٔ آن شبیه به صفحهٔ تلویزیون معمولی بود. وقتی الکترونی به صفحه برخورد کند، یک جرقهٔ نوری را به وجود می‌آورد که مکان آن ثبت می‌شود.

چند الکترون اول (دو شکل بالا) چیز قابل توجهی نشان نمی‌دهد و به نظر می‌رسد در محل برخورد نقطه‌هایی به طور کاتوره‌ای روی صفحه وجود دارد. ولی، پس از اینکه هزاران الکترون به میان دستگاه فرستاده شدند، نقشی روی صفحه ایجاد می‌شود، در جاهایی که الکترونهای زیادی به صفحه برخورد کرده‌اند فریزهایی و در جاهایی که الکترونهای کمی به صفحه برخورد کرده‌اند فریزهایی روی صفحه ظاهر می‌شوند. این نقش دقیقاً همان چیزی است که برای تداخل موج انتظار داشتیم. بنابراین، هر الکترونی که از دستگاه می‌گذرد به عنوان موج ماده می‌گذرد – قسمتی از موج ماده که از یک شکاف می‌گذرد با قسمتی که از شکاف دیگر می‌گذرد تداخل می‌کند. بنابراین، این تداخل احتمالی را تعیین می‌کند که الکترون در نقطهٔ معینی روی صفحه با برخورد با آن نقطه از صفحه خود را به صورت عینی نشان می‌دهد. الکترونهای زیاد که در ناحیه‌هایی صورت عینی پیدا کرده‌اند متناظر با فریزهای روشن در تداخل نوری هستند و الکترونهای اندک که در ناحیه‌هایی به صورت عینی خود را نشان داده‌اند متناظر با فریزهای تاریک‌اند.



شکل ۳۸-۸ تصویرهایی که تشکیل نقش تداخلی توسط باریکه‌ای از الکترونها را در یک آزمایش تداخل دو شکاف مانند شکل ۳۸-۶ نشان می‌دهد. موجهای ماده، مانند موجهای نوری، موجهای احتمال هستند. تعداد تقریبی الکترونها عبارت‌اند از (الف) ۷، (ب) ۱۰۰، (پ) ۳۰۰۰، (ت) ۲۰۰۰۰و (ث) ۷۰۰۰۰.

تداخل مشابهی با پروتونها، نوترونها و اتمهای مختلف به نمایش گذاشته شده است. در سال ۱۹۹۴/۱۳۶۳ این تداخل با مولکولهای ید I_2 ، که ۵۰۰۰۰۰ برابر سنگینتر از الکترون ولی خیلی پیچیده‌ترند، به اثبات رسید. در سال ۱۹۹۹/۱۳۷۸ این امر حتی با *فولرنهای* (یا *بوکی‌بالها*) خیلی پیچیده C_{60} و C_{70} نشان داده شده است. (فولرنها مولکولهای اتمهای کربن هستند که در ساختاری شبیه به توپ ۶۰ اتم کربن در C_{60} و ۷۰ اتم کربن در C_{70} ، آرایش یافته‌اند.)* ظاهراً، چنین مواد کوچکی مانند الکترونها، پروتونها، اتمها و مولکولها به صورت موجهای ماده حرکت می‌کنند. ولی، وقتی اجسام بزرگتر و خیلی پیچیده‌تر را در نظر بگیریم، به این نکته می‌رسیم که بررسی طبیعت موجی یک جسم دیگر توجیه‌پذیر نخواهد بود. در این مورد، به جهان آشنای غیر کوانتومی خود یعنی فیزیک فصلهای آغازین این کتاب (جلد اول) برمی‌گردیم. سخن کوتاه اینکه یک الکترون یک موج ماده است و می‌تواند با خودش تداخل کند، ولی یک گربه موج ماده نیست و نمی‌تواند با خودش تداخل کند (که باید خاطر گربه‌ها از این نظر آسوده باشد!)

طبیعت موجی ذره‌ها و اتمها اکنون در حوزه‌های علمی و مهندسی امری پذیرفته شده است. برای مثال، پراش الکترون و نوترون برای مطالعهٔ ساختارهای اتمی جامدها و مایعها مورد استفاده قرار می‌گیرد، و پراش الکترون برای مطالعهٔ ویژگیهای اتمی سطح جامدها به کار برده می‌شود.

شکل ۳۸-۹ الف آرایشی را نشان می‌دهد که می‌تواند برای اثبات پراکندگی پرتوهای x یا الکترونها توسط بلورها به کار برده شود. باریکه‌ای از یکی یا از دیگری به هدفی مرکب از لایه‌ای از بلورهای آلومینیومی کوچک تابانده می‌شود. طول موج پرتوهای x مقدار معین λ است. الکترونها به اندازه‌ای انرژی به دست می‌آورند که طول موج دوبروی آنها یکسان با طول موج λ شود. پراکندگی پرتوهای x یا الکترونها به وسیلهٔ بلورها یک نقش تداخل دایره‌ای روی فیلم عکاسی ایجاد می‌کند. شکل ۳۸-۹ ب نقش پراکندگی پرتوهای x و شکل ۳۸-۹ پ نقش پراکندگی الکترونها را نشان می‌دهد. این نقشها یکسان هستند – هم پرتوهای x و هم الکترونها موج هستند.

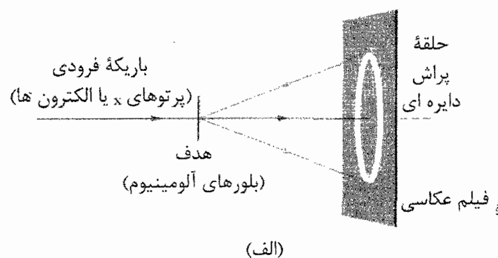
موجها و ذره‌ها

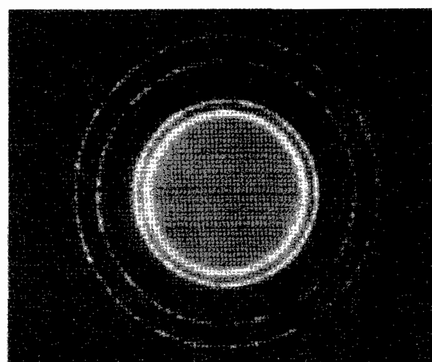
شکلهای ۳۸-۸ و ۳۸-۹ شاهد متقاعد کننده‌ای از طبیعت موجی ماده‌اند، ولی آزمایشهای بی‌شماری وجود دارد که حاکی از طبیعت *ذره‌ای* آن است. برای مثال، شکل ۳۸-۱۰ ردهایی از ذره‌ها (به جای موجها) را نشان می‌دهد که در یک اتاقک حباب ایجاد شده‌اند. وقتی ذرهٔ بارداری از هیدروژن مایع که چنین اتاقکی را پر کرده است عبور کند، این ذره موجب می‌شود که مایع در طول مسیر حرکت ذره تبخیر شود. بنابراین، تعدادی از این حبابها مسیر را مشخص می‌کنند، که به علت وجود یک میدان مغناطیسی عمود بر صفحهٔ اتاقک معمولاً به شکل منحنی است.

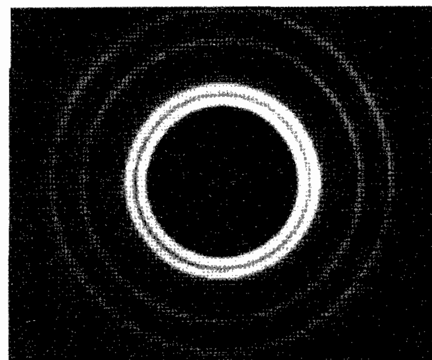
---

* فولرنها (fullerens) دسته‌ای از دگرشکلهای کربن هستند که اخیراً کشف شده‌اند و شکلی شبیه توپ خالی یا بیضوی خالی یا لوله دارند. فولرنهای شبیه توپ بوکی بال (buckyball) و فولرنهای لوله‌ای شکل بوکی تیوب (buckytube) نامیده می‌شوند. م.

در شکل ۳۸-۱۰ یک پرتو گاما که از قسمت بالا وارد شده است ردی از خود نشان نمی‌دهد چون این پرتو از نظر الکتریکی خنثی است. ولی، وقتی با یکی از اتمهای هیدروژن برخورد و الکترونی را از اتم خارج کند؛ مسیر منحنی که الکترون در پایین تصویر طی می‌کند نشان داده شده است. همزمان با برخورد، پرتو گاما به یک الکترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود که پس از آن در مسیر مارپیچی تنگی (طرف




(ب)


(پ)

شکل ۳۸-۹ (الف) یک آرایش تجربی که با استفاده از روشهای پراش، طبیعت موج گونهٔ باریکهٔ فرودی را نشان می‌دهد. تصویر نقشهای پراش وقتی باریکهٔ فرودی (ب) یک باریکهٔ پرتو x (موج نوری) و (پ) یک باریکهٔ الکترون (موج ماده) است. توجه کنید که دو نقش از نظر هندسی مشابه یکدیگرند.

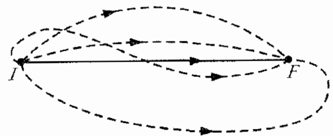
چپ برای الکترون و طرف راست برای پوزیترون) حرکت می‌کنند به طوری که بتدریج در برخوردهای تکراری با اتمهای هیدروژن انرژی خود را از دست می‌دهند. مطمئناً این ردها شواهدی از طبیعت مادی الکترون و پوزیترون است، ولی آیا شواهد دیگری از موجها در شکل ۳۸-۱۰ وجود دارد؟



شکل ۳۸-۱۰ تصویر اتاقک حباب نشان می‌دهد که دو الکترون (مسیر طرف چپ) و یک پوزیترون (طرف راست) پس از اینکه یک پرتو گاما وارد اتاقک شده است، حرکت کرده‌اند.

برای ساده‌سازی وضعیت، میدان مغناطیسی را قطع می‌کنیم به طوری که رشتهٔ حبابها مستقیم باشد. هر حبابی را می‌توان به عنوان یک نقطهٔ آشکارسازی برای الکترون در نظر گرفت. موجهای ماده بین نقطه‌های آشکارسازی شده مانند I و F در شکل ۳۸-۱۱ همهٔ مسیرهای ممکن را طی می‌کنند که چندتایی از آنها نشان داده شده‌اند.

به طور کلی، برای هر مسیری که I و F را به هم متصل می‌کند (غیر از مسیر خط مستقیم)، مسیری در مجاور آن قرار دارد به طوری که موجهای ماده که دو مسیر را طی می‌کنند توسط تداخل یکدیگر را از بین می‌برند. ولی، این برای مسیر خط راستی که I و F را به هم متصل می‌کند درست نیست؛ در این حالت، موجهای ماده که همهٔ مسیرهای مجاور هم را طی می‌کنند موجی را که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند تقویت می‌کنند. می‌توانید تصور کنید که حبابها دسته‌ای از نقطه‌های آشکارسازی شده‌ای را تشکیل داده‌اند که در آنها موج ماده تداخل سازنده کرده است.



شکل ۳۸-۱۱ چندتایی از مسیرهای زیاد که دو نقطهٔ I و F آشکارسازی شده توسط ذره‌ها را به هم وصل می‌کنند. فقط موجهای ماده که مسیرهای نزدیک به خط راست بین این نقطه‌ها را می‌پیمایند به طور سازنده تداخل می‌کنند. در مورد همهٔ مسیرهای دیگر، موجهایی که زوجی از مسیرهای مجاور را طی می‌کنند به طور ویرانگر تداخل می‌کنند. بنابراین، موج ماده یک مسیر مستقیم را به جا می‌گذارد.

✔ ***نکتهٔ وارسی ۴*** در مورد الکترون و پروتونی که (الف) انرژی جنبشی، (ب) اندازه حرکت، یا (پ) تندی یکسان دارند، کدام ذره دارای طول موج دوبروی کوتاهتری است؟

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸-۵

طول موج دوبروی الکترونی با انرژی جنبشی ۱۲۰ eV چقدر است؟

نکته‌های کلیدی (۱) اگر ابتدا بزرگی اندازه حرکت p را پیدا کنیم، می‌توانیم طول موج λ دوبروی الکترون را از معادلهٔ ۳۸-۱۳ $(\lambda = h/p)$ به دست آوریم. (۲) p را می‌توان از انرژی جنبشی K دادهٔ شدهٔ الکترون پیدا کرد. این انرژی جنبشی خیلی کمتر از انرژی سکون یک الکترون است (از جدول ۳۷-۳، ۰/۵۱۱MeV) بنابراین، می‌توانیم از تقریب کلاسیکی اندازه حرکت $p(=mv)$ و انرژی جنبشی $K\left(=\frac{1}{2}mv^2\right)$ استفاده کنیم.

با حذف تندی v بین این معادله‌ها خواهیم داشت

$$p = \sqrt{2mK}$$
$$= \sqrt{(2)(9/11\times10^{-31}\,\text{kg})(120\,\text{eV})(1/60\times10^{-19}\,\text{J/eV})}$$
$$= 5/91\times10^{-24}\,\text{kg.m/s}$$

پس از معادلهٔ ۳۸-۱۳، داریم

$$\lambda = \frac{h}{p}$$
$$= \frac{6/63\times10^{-34}\,\text{J.s}}{5/91\times10^{-24}\,\text{kg.m/s}}$$
$$= 1/12\times10^{-10}\,\text{m} = 112\,\text{pm}$$ (پاسخ)

این طول موج مربوط به الکترون تقریباً به اندازهٔ یک اتم نوعی است. اگر انرژی جنبشی الکترون را بیشتر کنیم، طول موج حتی از این هم کوچکتر می‌شود.

۳۸-۷ معادلهٔ شرودینگر

یک موج پیشروندهٔ ساده از هر نوع که باشد، موج روی ریسمان، موج صوتی یا موج نوری، برحسب کمیتی توصیف می‌شود که به صورتی موج‌گونه تغییر می‌کند. به عنوان مثال، در مورد موجهای نوری، این کمیت $\vec{E}(x,y,z,t)$، مؤلفهٔ میدان الکتریکی موج است. مقدار مشاهده شدهٔ آن در هر نقطه به مکان آن نقطه و زمانی که مشاهده انجام شده بستگی دارد.

چه کمیت متغیری را برای تفسیر موج ماده باید به کار بریم؟ باید انتظار داشته باشیم که این کمیت که **تابع موج** $\Psi(x,y,z,t)$ نامیده می‌شود پیچیده‌تر از کمیت مربوط برای یک موج نوری باشد، چون موج ماده، افزون بر انرژی و اندازه حرکت، جرم و (اغلب) بار الکتریکی را نیز منتقل می‌کند. مرسوم است که Ψ، حرف بزرگ یونانی پسای، معمولاً نمایش تابعی است که از لحاظ ریاضی مختلط است؛ یعنی همیشه می‌توان آن را به صورت $a+ib$ نوشت که در آن a و b عددهای حقیقی و $i^2=-1$ است.

در تمام وضعیتهایی که در اینجا خواهید دید، متغیرهای فضایی و زمانی را می‌توان از هم جدا کرد و Ψ را به شکل زیر نوشت

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,y,z)e^{-i\omega t} \qquad (۱۴\text{-}۳۸)$$

که در آن $\omega(=2\pi f)$ بسامد زاویه‌ای موج ماده است. توجه کنید که ψ حرف کوچک یونانی پسای، فقط قسمت فضایی تابع موج وابسته به زمان Ψ را نشان می‌دهد. اغلب ما فقط با ψ سروکار خواهیم داشت. دو پرسش پیش می‌آید: مفهوم تابع موج چیست؟ چگونه می‌توان آن را پیدا کرد؟

تابع موج چه معنی می‌دهد؟ تابع موج به این واقعیت مربوط است که موج ماده، مانند موج نوری، یک موج احتمال است. فرض کنید که یک موج ماده به آشکارساز ذره که کوچک است برسد؛ آنگاه احتمال اینکه ذره در بازهٔ زمانی خاصی آشکار شود با $|\psi|^2$ متناسب است، که $|\psi|$ قدر مطلق تابع موج در محل آشکارساز است. اگرچه ψ معمولاً یک کمیت مختلط است، ولی $|\psi|^2$ همیشه حقیقی و مثبت است. بنابراین، $|\psi|^2$ که **چگالی احتمال** نامیده می‌شود معنی *فیزیکی* دارد نه ψ. با مسامحه معنی آن این است

> احتمال (در یکای زمان) آشکارشدن یک ذره در یک حجم متمرکز در نقطهٔ معینی در موج ماده با مقدار $|\psi|^2$ در آن نقطه متناسب است.

چون ψ معمولاً یک کمیت مختلط است، با ضرب کردن ψ در ψ^* یعنی *مزدوج مختلط* ψ، مربع مقدار مطلق آن به دست می‌آید. (برای یافتن ψ^* عدد مجازی i را در هر جایی که در ψ وجود دارد با $-i$ جایگزین می‌کنیم.)

چگونه می‌توان تابع موج را پیدا کرد؟ موجهای صوتی و موجهای روی ریسمان به وسیلهٔ معادله‌های مکانیک نیوتونی و موجهای نوری به وسیلهٔ معادله‌های ماکسول توصیف می‌شوند ولی، موجهای ماده به وسیلهٔ **معادلهٔ شرودینگر** توصیف می‌شوند، که در سال ۱۹۲۶/۱۳۰۵ به وسیلهٔ فیزیکدان اتریشی اروین شرودینگر[1] توسعه یافته است.

بسیاری از وضعیتهایی که بحث خواهیم کرد شامل ذره‌ای است که در جهت x در ناحیه‌ای حرکت می‌کند که در آنجا نیروهای وارد بر ذره موجب می‌شوند که ذره انرژی پتانسیل $U(x)$ به دست آورد. در این حالت خاص، معادلهٔ شرودینگر به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[E-U(x)]\psi = 0 \qquad (۱۵\text{-}۳۸)$$

(معادلهٔ شرودینگر، حرکت یک بعدی)

1. Erwin Schrodinger

که در آن E انرژی مکانیکی کل (انرژی پتانسیل بعلاوهٔ انرژی جنبشی) ذرهٔ متحرک است. (انرژی جرم را در این معادلهٔ غیر نسبیتی درنظر *نمی‌گیریم*). معادلهٔ شرودینگر را از اصول اساسی نمی‌توان به دست آورد، آن یک اصل اساسی *است*.

اگر $U(x)$ در معادلهٔ ۳۸-۱۵ صفر باشد، این معادله یک **ذرهٔ آزاد**- یعنی ذره‌ای که هیچ نیروی خالصی بر آن وارد نمی‌شود- را توصیف می‌کند. انرژی کل ذره در این حالت تماماً جنبشی است و بنابراین، E در معادلهٔ ۳۸-۱۵ برابر $\frac{1}{2}mv^2$ است. آنگاه این معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{8\pi^2m}{h^2}\left(\frac{mv^2}{2}\right)\psi=0$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left(2\pi\frac{p}{h}\right)^2\psi=0$$

برای به دست آوردن این معادله به جای اندازه حرکت p، mv را قرار داده‌ایم و جمله‌ها را بازنویسی کرده‌ایم.

از معادلهٔ ۳۸-۱۳ $(\lambda=h/p)$، p/h را به صورت $1/\lambda$ می‌نویسیم، که λ طول موج دوبروی ذرهٔ متحرک است. هم‌چنین $2\pi/\lambda$ *عدد موج زاویه‌ای* k است، که آن را در معادلهٔ ۳۲-۵ تعریف کردیم. با قراردادن اینها، معادلهٔ بالا خواهد شد

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\psi=0 \quad \text{(معادلهٔ شرودینگر، ذرهٔ آزاد)} \quad (۳۸-۱۶)$$

جواب کلی معادلهٔ ۳۸-۱۶ عبارت است از

$$\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx} \quad (۳۸-۱۷)$$

که در آن A و B ثابتهای اختیاری هستند. می‌توان نشان داد که این معادله با قراردادن $\psi(x)$ و مشتق دوم آن در معادلهٔ ۳۸-۱۶ و با توجه به اتحاد حاصل، به واقع جوابی برای آن معادله است.

اگر معادله‌های ۳۸-۱۴ و ۳۸-۱۷ را ترکیب کنیم، برای تابع موج وابسته به زمان Ψ یک ذرهٔ آزاد که در جهت x حرکت می‌کند، پیدا می‌کنیم

$$\Psi(x,t)=\psi(x)e^{-i\omega t}=(Ae^{ikx}+Be^{-ikx})e^{-i\omega t}$$
$$=Ae^{i(kx-\omega t)}+Be^{-i(kx+\omega t)} \quad (۳۸-۱۸)$$

یافتن چگالی احتمال $|\psi|^2$

در بخش ۳۲-۵، دیدیم که هر *تابع* F به شکل $F(kx\pm\omega t)$ یک موج پیشرونده را نمایش می‌دهد. این تابع برای تابعهای نمایی مانند تابعهای معادلهٔ ۳۸-۱۸ هم‌چنین برای تابعهای سینوسی که برای توصیف موجهای روی ریسمانها به کار بردیم نیز کاربرد دارد. در واقع، این دو نحوهٔ نمایش تابعها به وسیلهٔ رابطه‌های زیر به هم مربوط‌اند

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \quad \text{و} \quad e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$$

که در آن θ هر زاویه‌ای است.

جملهٔ اول در سمت راست معادلهٔ ۳۸-۱۸ بیانگر موجی است که در جهت افزایش x و جملهٔ دوم بیانگر موجی است که در جهت منفی x حرکت می‌کند. ولی، فرض کرده‌ایم که ذرهٔ آزادی که بررسی می‌کنیم فقط در جهت مثبت x حرکت می‌کند. برای تبدیل جواب کلی (معادلهٔ ۳۸-۱۸) به حالت موردنظر خود، ثابت اختیاری B را در معادله‌های ۳۸-۱۸ و ۳۸-۱۷ صفر در نظر می‌گیریم. در عین حال ثابت A را با ψ_0 نشان می‌دهیم. پس معادلهٔ ۳۸-۱۷ خواهد شد

$$\psi(x)=\psi_0e^{ikx} \quad (۳۸-۱۹)$$

برای محاسبهٔ چگالی احتمال، مربع قدر مطلق $\psi(x)$ را حساب می‌کنیم. داریم

$$|\psi|^2=|\psi_0e^{ikx}|^2=(\psi_0^2)|e^{ikx}|^2$$

اکنون چون

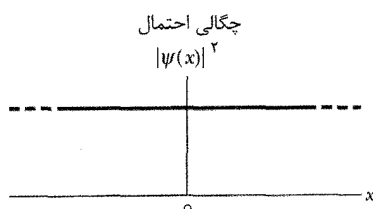
$$|e^{ikx}|^2=(e^{ikx})(e^{ikx})^*=e^{ikx}e^{-ikx}=e^{ikx-ikx}=e^0=1$$

خواهیم داشت

$$|\psi|^2=(\psi_0^2)(1)^2=\psi_0^2 \quad \text{(یک ثابت)}$$

شکل ۳۸-۱۲ نموداری از چگالی احتمال $|\psi|^2$ را برحسب x برای یک ذرهٔ آزاد خطی مستقیم موازی با محور x از $-\infty$ تا $+\infty$ نشان می‌دهد. می‌بینیم که چگالی احتمال $|\psi|^2$ به ازای تمام مقدارهای x یکسان است، که بدان معناست که ذره احتمالهای مساوی دارد که در امتداد محور x در *هر جایی* باشد. ویژگی مشخصی وجود ندارد که توسط آن بتوان محتملترین مکان ذره را پیش‌بینی کرد. یعنی همهٔ مکانها احتمال یکسانی دارند.

در بخش بعدی خواهیم دید که این به چه معنی است.



شکل ۳۸-۱۲ نموداری از چگالی احتمال $|\psi|^2$ برای یک ذرهٔ آزاد که در جهت مثبت x حرکت می‌کند. چون $|\psi|^2$ به ازای تمام مقدارهای x دارای مقدار ثابت یکسانی است، آشکارسازی ذره در تمام نقطه‌ها روی مسیرش احتمال یکسانی دارد.

۳۸-۸ اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

عدم توانایی ما در پیش‌بینی مکان یک ذرهٔ آزاد، همانطور که به وسیلهٔ شکل ۳۸-۱۲ نشان داده شد، اولین مثال ما از **اصل عدم قطعیت هایزنبرگ** است که در سال ۱۹۲۷/۱۳۰۶ توسط فیزیکدان آلمانی ورنر هایزنبرگ[1] ارائه شد. این اصل بیانگر آن

1. Werner Heisenberg

است که مقدارهای اندازه‌گیری شده با دقت نامحدود به طور همزمان نمی‌توانند به مکان $\vec{r}$ و اندازه حرکت $\vec{p}$ یک ذره نسبت داده شود.

در مورد مؤلفه‌های $\vec{r}$ و $\vec{p}$، اصل هایزنبرگ حدود را برحسب $\hbar = h/2\pi$ (به نام h بار) به دست می‌دهد

$$\Delta x.\Delta p_x \geq \hbar$$
$$\Delta y.\Delta p_y \geq \hbar \quad \text{(اصل عدم قطعیت هایزنبرگ)} \quad (۳۸-۲۰)$$
$$\Delta z.\Delta p_z \geq \hbar$$

در اینجا Δx و Δp_x عدم قطعیتهای ذاتی در اندازه‌گیری مؤلفه‌های x برای $\vec{r}$ و $\vec{p}$ و مؤلفه‌های مشابه برای y و z هستند. حتی با بهترین وسایل اندازه‌گیری که فناوری بتواند فراهم کند، هر حاصلضرب عدم قطعیت مکان و عدم قطعیت اندازه حرکت در معادلهٔ ۳۸-۲۰ بزرگتر از $\hbar$ خواهد بود و هرگز نمی‌تواند از آن کمتر شود.

ذره‌ای که چگالی احتمال آن در شکل ۳۸-۱۲ رسم شده، یک ذرهٔ آزاد است؛ یعنی هیچ نیرویی بر آن اثر نمی‌کند، و بنابراین، اندازه حرکت $\vec{p}$ آن باید ثابت باشد. قبلاً اشاره کردیم — بدون توجه خاص به آن — که می‌توانیم $\vec{p}$ را با دقت مطلق تعیین کنیم؛ به عبارت دیگر، در معادلهٔ ۳۸-۲۰ فرض کردیم که $\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z = 0$. در این صورت این فرض مستلزم آن است که $\Delta x \to \infty$ ، $\Delta y \to \infty$ و $\Delta z \to \infty$. با چنین عدم قطعیتهای بزرگ نامتناهی، مکان ذره کاملاً نامعین است.

فکر نکنید که ذره *واقعاً دارای* مکان کاملاً مشخص است که به دلایلی از نظر ما پنهان است. اگر اندازه حرکت آن را بتوان با دقت مطلق مشخص کرد، دیگر عبارت «مکان ذره» به سادگی معنی خود را از دست می‌دهد. ذره در شکل ۳۸-۱۲ می‌تواند *با احتمال یکسان* در هر جایی در امتداد محور x یافت شود.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸-۶

فرض کنید الکترونی در امتداد محور x حرکت می‌کند و شما تندی آن را برابر با $۲/۰۵ \times ۱۰^{۶}$ m/s با دقت ۰/۵۰٪ اندازه می‌گیرید. کمترین عدم قطعیتی (که از اصل عدم قطعیت در نظریهٔ کوانتومی به دست می‌آید) که با آن می‌توان به طور همزمان مکان الکترون را در امتداد محور x اندازه‌گیری کرد چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی کمترین عدم قطعیتی که از نظریهٔ کوانتومی به دست می‌آید با اصل عدم قطعیت هایزنبرگ در معادلهٔ ۳۸-۲۰ داده می‌شود. نیاز داریم که مؤلفه‌ها را فقط در امتداد محور x در نظر بگیریم چون حرکت فقط در امتداد این محور است و می‌خواهیم عدم قطعیت Δx در مکان را در امتداد این محور به دست آوریم. چون کمترین مقدار عدم قطعیت را می‌خواهیم، به جای نامساوی، در بخش محور x معادلهٔ ۳۸-۲۰ تساوی را به کار می‌بریم

$$\Delta x.\Delta p_x = \hbar$$

محاسبه‌ها: برای محاسبهٔ عدم قطعیت Δp_x در اندازه حرکت، ابتدا باید مؤلفهٔ p_x عدم قطعیت را محاسبه کنیم. چون تندی v_x الکترون خیلی کمتر از تندی نور c است، p_x را با عبارت کلاسیکی اندازه حرکت به جای استفاده از عبارت نسبیتی به کار می‌بریم. داریم

$$p_x = mv_x = (۹/۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}\text{kg})(۲/۰۵ \times ۱۰^{۶}\text{m/s})$$
$$= ۱/۸۷ \times ۱۰^{-۲۴}\ \text{kg.m/s}$$

عدم قطعیت در تندی به صورت ۰/۵۰٪ در تندی اندازه‌گیری شده داده شده است. چون p_x به طور مستقیم به تندی بستگی دارد، عدم قطعیت Δp_x در اندازه حرکت باید ۰/۵۰٪ اندازه حرکت باشد

$$\Delta p_x = (۰/۰۰۵۰)p_x$$
$$= (۰/۰۰۵۰)(۱/۸۷ \times ۱۰^{-۲۴}\text{kg.m/s})$$
$$= ۹/۳۵ \times ۱۰^{-۲۷}\text{kg.m/s}$$

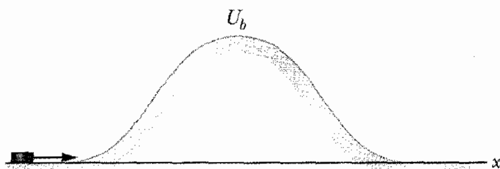
بنابراین، از اصل عدم قطعیت به دست می‌آوریم

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{(۶/۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}\ \text{J.s})/۲\pi}{۹/۳۵ \times ۱۰^{-۲۷}\ \text{kg.m/s}}$$
$$= ۱/۱۳ \times ۱۰^{-۸}\ \text{m} \approx ۱۱\text{nm} \quad \text{(پاسخ)}$$

که تقریباً ۱۰۰ قطر اتمی است. با مقدار داده شده برای تندی الکترون، بی‌معنی است که بخواهیم مکان الکترون را با دقت بیشتری به دست آوریم.

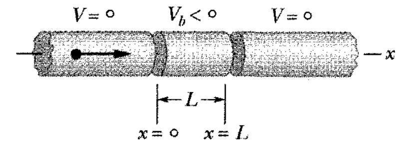
۳۸-۹ تونل زنی در سد

فرض کنید قرصی را روی یخ بدون اصطکاکی به طرف یک تپهٔ پوشیده از یخ سر می‌دهید (شکل ۳۸-۱۳). وقتی که این قرص روی تپه بالا رفت، انرژی جنبشی K آن به انرژی پتانسیل گرانشی U تبدیل می‌شود. اگر قرص به قله برسد، انرژی پتانسیل آن U_b است. بنابراین، اگر انرژی مکانیکی اولیه $E > U_b$ باشد، این قرص از قله خواهد گذشت. در غیر این صورت، قرص سرانجام از بالا رفتن متوقف می‌شود و در سمت چپ تپه بازمی‌ماند و به طرف چپ سر خواهد خورد. برای مثال، اگر $U_b = ۲۰\text{J}$ و $E = ۱۰\text{J}$ باشد، نمی‌توانید انتظار داشته باشید که قرص از تپه بگذرد. می‌گوییم این تپه به عنوان یک **سد انرژی پتانسیل** (یا به طور کوتاه یک **سد پتانسیل**) عمل می‌کند و در این مورد، *ارتفاع* سد برابر با $U_b = ۲۰\text{J}$ است.



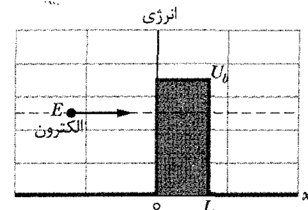
شکل ۳۸-۱۳ قرصی روی یخ بدون اصطکاکی به طرف تپه‌ای سر می‌خورد. پتانسیل گرانشی قرص در قلهٔ تپه U_b خواهد بود.

شکل ۳۸-۱۴ سد پتانسیلی را برای یک الکترون غیر نسبیتی که در امتداد یک سیم آرمانی به ضخامت ناچیز حرکت می‌کند نشان می‌دهد. این الکترون، با انرژی مکانیکی E، به ناحیه‌ای (سدی) می‌رسد که در آن پتانسیل الکتریکی V_b منفی است. چون بار آن منفی است، الکترون انرژی پتانسیل مثبت $U_b(=qV_b)$ در این ناحیه خواهد داشت (شکل ۳۸-۱۵). اگر $E>U_b$ باشد، انتظار داریم که الکترون از ناحیهٔ سد بگذرد و



شکل ۳۸-۱۴ اجزای یک سیم نازک آرمانی که در آن الکترونی (نقطهٔ سیاه) به پتانسیل الکتریکی منفی V_b در ناحیهٔ $x=0$ تا $x=L$ نزدیک می‌شود.

به سمت راست $x=L$ در شکل ۳۸-۱۴ برسد. در اینجا چیز عجیبی وجود ندارد. اگر $E<U_b$ باشد انتظار داریم که الکترون نتواند از ناحیهٔ سد بگذرد. بلکه، حرکت آن به طرف چپ شروع می‌شود، مانند قرصی که در شکل ۳۸-۱۳ اگر دارای $E<U_b$ بود به عقب تپه سر می‌خورد.



شکل ۳۸-۱۵ نمودار انرژی شامل دو نمودار برای وضعیت شکل ۳۸-۱۳: (۱) انرژی مکانیکی الکترون E وقتی الکترون در هر مختصهٔ $x<0$ باشد رسم شده است. (۲) انرژی پتانسیل الکتریکی الکترون U، *با فرض* اینکه الکترون به هر مقداری از x برسد، برحسب تابعی از مکان x الکترون رسم شده است. قسمت غیر صفر نمودار (سد پتانسیل) دارای ارتفاع U_b و ضخامت L است.

ولی، وقتی $E<U_b$ باشد چیز عجیبی می‌تواند برای الکترون اتفاق بیفتد. چون الکترون یک موج ماده است، دارای یک احتمال متناهی نشت (یا به عبارت بهتر، *تونل زنی*) از طریق سد و تبدیل شدن به ماده در طرف دیگر است، انرژی E در طرف راست حرکت می‌کند گویی چیزی (عجیب یا چیز دیگر) در ناحیهٔ $0 \le x \le L$ اتفاق نیفتاده است.

تابع موج $\psi(x)$ را که توصیف کنندهٔ الکترون است می‌توان با حل معادلهٔ شرودینگر (معادلهٔ ۳۸-۱۵) به طور جداگانه برای سه ناحیه در شکل ۳۸-۱۴: (۱) سمت چپ سد، (۲) داخل سد، و (۳) سمت راست سد، حل کرد. ثابتهای اختیاری که در جوابها ظاهر می‌شوند باید طوری انتخاب شوند که مقدارهای $\psi(x)$ و مشتقهای آن نسبت به x در نقطه‌های $x=0$ و $x=L$ به طور هموار (نه به صورت پرش، نه به صورت تابدار) به یکدیگر وصل شوند. سپس با مربع کردن مقدار مطلق $\psi(x)$، چگالی احتمال به دست می‌آید.

شکل ۳۸-۱۶ نموداری از این نتیجه را نشان می‌دهد. منحنی نوسانی در سمت چپ سد (به ازای $x<0$) ترکیبی از موج مادهٔ فرودی و موج مادهٔ بازتابیده است (که دامنهٔ کوچکتری نسبت به دامنهٔ موج فرودی دارد). نوسانها به این دلیل رخ می‌دهند که این دو موج که در جهتهای متقابل حرکت می‌کنند، با یکدیگر تداخل می‌کنند و نقش موج ایستاده‌ای را به وجود می‌آورند.

در داخل سد (به ازای $0<x<L$) چگالی احتمال به طور نمایی با x کاهش می‌یابد. البته، مشروط بر اینکه L کوچک باشد، چگالی احتمال در $x=L$ کاملاً صفر نیست.

در سمت راست سد (به ازای $x>L$)، نمودار چگالی احتمال یک موج عبوری (از طریق سد) با دامنهٔ ثابت ولی کوچک را توصیف می‌کند. بنابراین، الکترون در این ناحیه می‌تواند آشکار شود ولی احتمال آن نسبتاً کم است. (این بخش از شکل را با شکل ۳۸-۱۲ در مورد یک ذرهٔ آزاد مقایسه کنید.)

یک ضریب عبور T به موج مادهٔ فرودی و سد می‌توان نسبت داد. این ضریب احتمالی را به دست می‌دهد که با آن الکترون فرودی از میان سد عبور می‌کند — یعنی تونل زنی رخ می‌دهد. به عنوان مثال، اگر $T=0/020$ باشد، آنگاه از هر ۱۰۰۰ الکترون شلیک شده به سد، (به طور متوسط) ۲۰ الکترون از تونل خواهد گذشت و ۹۸۰ الکترون بازتاب می‌کند. ضریب عبور T تقریباً عبارت است از

$$T \approx e^{-2bL} \qquad (۳۸-۲۱)$$

که در آن

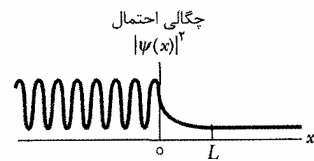
$$b=\sqrt{\frac{8\pi^2 m(U_b-E)}{h^2}} \qquad (۳۸-۲۲)$$

و e تابع نمایی است. به علت شکل نمایی معادلهٔ ۳۸-۲۱، مقدار T به سه متغیر وابسته به آن بسیار حساس است: جرم m ذره، ضخامت L سد و اختلاف انرژی U_b-E. (چون اثرهای نسبیتی را در اینجا در نظر نگرفته‌ایم، انرژی جرم در E وجود ندارد.)

تونل‌زنی از سد کاربردهای زیادی در فناوری یافته است، از میان آنها به دیود تونلی می‌توان اشاره کرد که در آن جریانی از الکترونها که از تونل‌زنی الکترونها از وسیله حاصل شده‌اند می‌توانند با کنترل ارتفاع سد به سرعت قطع و وصل شوند. چون این می‌تواند خیلی سریع انجام گیرد (در مدت 5ps)، این وسیله برای کاربردهایی که به واکنش خیلی سریع نیاز دارند مناسب است. جایزهٔ نوبل سال ۱۹۷۳/۱۳۵۲ در فیزیک به طور مشترک به سه «تونل کار»، لئو ایساکی[1] (برای تونل‌زنی در غیر رساناها)، ایوار گایور[2] (برای تونل‌زنی در ابر رساناها) و بریان جوزفسون[3] (برای پیوند جوزفسون، کلید کوانتومی سریع، وسیله‌ای بر پایهٔ تونل‌زنی)، اهدا شد. جایزهٔ نوبل سال

1. Leo Esaki
2. Ivar Giaever
3. Brian Josephson

۱۹۸۶/۱۳۶۵ به گرد بینیگ[1] و هانریش روهرر[2] به خاطر تقدیر از آنها در توسعهٔ میکروسکوپ تونل زنی روبشی اهدا شد.



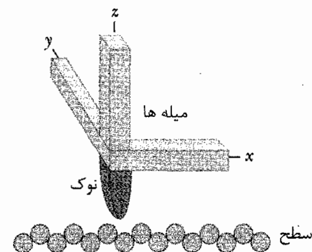
شکل ۳۸-۱۶ نموداری از چگالی احتمال $|\psi|^2$ موج مادهٔ الکترون برای وضعیت شکل ۳۸-۱۵. مقدار $|\psi|^2$ در سمت راست سد پتانسیل غیر صفر است.

> ✔ ***نکتهٔ وارسی ۵*** آیا طول موج موج عبوری در شکل ۳۸-۱۶ بزرگتر از طول موج موج فرودی است یا کوچکتر یا مساوی با آن است؟

میکروسکوپ تونل زنی روبشی (STM)

بزرگی جزئیاتی که با یک میکروسکوپ اپتیکی می‌توان دید با طول موج نوری که در میکروسکوپ به کارِ می‌رود (تقریباً ۳۰۰ nm در مورد نِور فرابنفش) محدود می‌شود. بزرگی جزئیاتی که در تصویر آغاز این فصل می‌توان دید خیلی کوچکتر است و بنابراین، مستلزم طول موجهای خیلی کوچکتری است. موجهای به کار رفته موجهای مادهٔ الکترون هستند، ولی این موجها از سطح تحت بررسی به طریقی که موجها در میکروسکوپ نوری پراکنده می‌شوند، پراکنده نمی‌شوند. در اینجا، تصویرهایی که می‌بینیم به وسیلهٔ تونل زنی الکترونها از سدهای پتانسیل واقع در نوک یک *میکروسکوپ تونل زنی روبشی* (STM) ایجاد شده‌اند.

شکل ۳۸-۱۷ قلب یک میکروسکوپ تونل زنی روبشی را نشان می‌دهد. نوک فلزی ظریفی در محل تقاطع سه میلهٔ کوارتز که دوبه‌دو برهم عمودند سوار شده است و نزدیک سطح مورد بررسی قرار دارد. اختلاف پتانسیل کوچکی شاید فقط ۱۰ mV بین نوک و سطح برقرار است.



شکل ۳۸-۱۷ اساس میکروسکوپ تونل زنی روبشی (STM). سه میلهٔ کوارتز برای روبش یک قطعه رسانای نوک تیز در سراسر سطح موردنظر و برای ثابت نگهداشتن فاصلهٔ بین نوک و سطح، به کار رفته‌اند. آنگاه نوک روی خط تراز سطح بالا و پایین می‌رود و نتیجهٔ ثبت حرکت آن نقشه‌ای مانند تصویر آغاز این فصل است.

کوارتز بلورین خاصیت جالبی به نام *پیزوالکتریسیته* دارد: هرگاه یک اختلاف پتانسیل الکتریکی به دو سر نمونه‌ای از کوارتز بلورین اعمال شود، ابعاد نمونه اندکی تغییر می‌کند. این خاصیت برای تغییر دادن طول سه میله در شکل ۳۸-۱۷، به آرامی و مقدار کم، مورد استفاده قرار می‌گیرد به طوری که نوک بتواند در سراسر سطح به عقب و جلو روبش کند (در جهتهای x و y) و هم‌چنین نسبت به سطح بالا یا پایین برود (در جهت z).

فاصلهٔ بین سطح و نوک یک سد انرژی پتانسیل تشکیل می‌دهد که خیلی شبیه سد پتانسیل رسم شده در شکل ۳۸-۱۵ است. اگر نوک به حد کافی به سطح نزدیک باشد، الکترونهای نمونه می‌توانند از این سد از سطح به نوک تونل بزنند و یک جریان تونلی تشکیل دهند.

در عمل، یک آرایش پس خور الکترونیکی وضعیت عمودی نوک را تنظیم می‌کند تا اینکه وقتی نوک روی سطح روبش می‌کند، جریان تونلی ثابت بماند. این بدان معناست که فاصلهٔ نوک – سطح نیز در ضمن روبش ثابت می‌ماند. خروجی وسیله یک نمایش ویدئویی از موضع عمودی نوک در حال تغییر و از این رو سطح تراز برحسب تابعی از مکان نوک در صفحهٔ xy است.

STM نه تنها می‌تواند از یک سطح ساکن تصویربرداری کند بلکه همچنین می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد تا اتمها و مولکولها را روی سطح دستکاری کند مانند حالتی که در تشکیل کربن مونواکسید انسان در شکل اول فصل انجام شد. در فرایندی که به دستکاری عرضی معروف شده است، کاوشگر *STM* ابتدا به نزدیکی مثلاً یک مولکول کربن منواکسید پایین آورده می‌شود، آنقدر نزدیک که بدون تماس با مولکول آنرا جذب کند. سپس کاوشگر به همراه مولکول روی سطح مورد نظر (مانند پلوتونیم) حرکت می‌کند تا اینکه مولکول را در جای مورد نظر قرار دهد. سپس کاوشگر با کاهش نیروی جاذبه و سپس حذف آن، مولکول را رها می‌کند و به عقب برمی‌گردد. هر چند این کار به کنترل بسیار ظریفی نیاز دارد ولی می‌توان با طراحی مناسب آنرا انجام داد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸-۷

فرض کنید که الکترون در شکل ۳۸-۱۵ با انرژی کل E برابر با ۵/۱eV به سدی با ارتفاع $U_b = ۶/۸\text{eV}$ و ضخامت $L = ۷۵۰\text{pm}$ نزدیک شود.

(الف) احتمال تقریبی که الکترون از سد بگذرد و در طرف دیگر سد ظاهر (و آشکار) شود چقدر است؟

نکته‌های کلیدی احتمالی که در جستجوی آن هستیم ضریب عبور T است که با معادلهٔ ۳۸-۲۱ ($T \approx e^{-2bL}$) داده می‌شود، که در آن

$$b = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(U_b - E)}{h^2}}$$

1. Gerd Binnig
2. Heinrich Rohrer

محاسبه‌ها: صورت کسر زیر رادیکال عبارت است از

$$(8\pi^2)(9/11\times10^{-31}\ \text{kg})(6/8\text{eV}-5/1\text{eV})$$
$$\times(1/60\times10^{-19}\ \text{J/eV})=1/956\times10^{-47}\ \text{J.kg}$$

بنابراین،

$$b=\sqrt{\frac{1/956\times10^{-47}\ \text{J.kg}}{(6/63\times10^{-34}\ \text{J.s})^2}}=6/67\times10^{9}\ \text{m}^{-1}$$

پس کمیت (بدون بعد) $2bL$ عبارت است از

$$2bL=(2)(6/67\times10^{9}\ \text{m}^{-1})(750\times10^{-12}\text{m})=10/0$$

و از معادلهٔ ۳۸-۲۱، ضریب عبور عبارت است از

$$T\approx e^{-2bL}=e^{-10/0}=45\times10^{-6} \qquad \text{(پاسخ)}$$

پس، از هر میلیون الکترونی که به سد برخورد می‌کنند، تقریباً ۴۵ الکترون از سد تونل می‌زنند.

(ب) احتمال تقریبی که یک پروتون با انرژی کل یکسان 5/1eV از میان سد عبور کند، و در طرف دیگر سد ظاهر (و آشکار) شود چقدر است؟

استدلال: ضریب عبور T (و بنابراین احتمال عبور) به جرم ذره بستگی دارد. در واقع، چون جرم m یکی از عوامل توان e در معادلهٔ T است، احتمال عبور به جرم ذره خیلی حساس است. در اینجا، جرم مربوط به پروتون $(1/67\times10^{-27}\text{kg})$ است که خیلی بزرگتر از جرم الکترون در بند (الف) است. با قراردادن جرم پروتون به جای جرم در (الف) و ادامه به صورتی که در اینجا دیدیم، پیدا می‌کنیم $T\approx10^{-186}$. پس اگرچه احتمال اینکه پروتون عبور کند کاملاً صفر نیست، مقدار آن به زحمت بیشتر از صفر است. در مورد ذره‌های خیلی سنگینتر با انرژی کل یکسان 5/1eV، احتمال عبور به طور نمایی کم می‌شود.

بازنگری و خلاصهٔ درس

کوانتومهای نور – فوتونها یک موج الکترومغناطیسی (نور) کوانتیده است، و کوانتوم آن *فوتون* نامیده می‌شود. در مورد یک موج نوری با بسامد f و طول موج λ، انرژی E و بزرگی اندازه حرکت p یک فوتون عبارت‌اند از

$$E=hf \qquad \text{(انرژی فوتون)} \qquad (۳۸-۲)$$

و

$$p=\frac{hf}{c}=\frac{h}{\lambda} \qquad \text{(اندازه حرکت فوتون)} \qquad (۳۸-۷)$$

اثر فوتوالکتریک وقتی نوری با بسامد به اندازهٔ کافی زیاد بر سطح تمیز یک فلز بتابد، الکترونها با برهم‌کنشهای فوتون– الکترون داخل فلز از سطح گسیل می‌شوند. رابطهٔ حاکم بر آن عبارت است از

$$hf=K_{\max}+\Phi \qquad (۳۸-۵)$$

که در آن hf انرژی فوتون، $K_{\max}$ انرژی جنبشی الکترونهای پرانرژی گسیل شده، و Φ **تابع کار** مادهٔ هدف است – یعنی، کمینهٔ انرژی که یک الکترون باید داشته باشد تا بتواند از سطح فلز خارج شود. اگر hf کمتر از Φ باشد، الکترونها گسیل نمی‌شوند.

جابه‌جایی کامپتون هرگاه پرتوهای x توسط الکترونهای با پیوند سست در هدف پراکنده شوند، برخی از پرتوهای x پراکنده شده طول موج بلندتری از پرتوهای x فرودی دارند. این *جابه‌جایی کامپتون* (بر حسب طول موج) با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\Delta\lambda=\frac{h}{mc}(1-\cos\phi) \qquad (۳۸-۱۱)$$

که در آن ϕ زاویه‌ای است که پرتوهای x با آن پراکنده می‌شوند.

موجهای نوری و فوتونها وقتی نور با ماده برهم‌کنش کند، انرژی و اندازه حرکت توسط فوتونها منتقل می‌شود. ولی، وقتی نور عبور کند، موج نوری به صورت **موج احتمال** به ما می‌رسد، که در آن احتمالی که (در یکای زمان) یک فوتون می‌تواند آشکار شود متناسب با E_m^2 است، که E_m دامنهٔ میدان الکتریکی نوسانی موج نوری در آشکارساز است.

موجهای ماده یک ذرهٔ متحرک مانند الکترون یا پروتون به صورت **موج ماده** می‌تواند توصیف شود؛ طول موج آن (به نام **طول موج دوبروی**) با $\lambda=h/p$ داده می‌شود که p بزرگی اندازه حرکت ذره است.

تابع موج موج ماده **با تابع موج** $\Psi(x,y,z,t)$ توصیف می‌شود، که می‌تواند به یک قسمت فضایی $\psi(x,y,z)$ و یک قسمت زمانی $e^{-i\omega t}$ تفکیک شود. در مورد ذره‌ای به جرم m که با انرژی کل E در جهت x حرکت می‌کند و از ناحیه‌ای می‌گذرد که در آنجا انرژی پتانسیل $U(x)$ است، $\psi(x)$ با حل **معادلهٔ شرودینگر** ساده شده به دست می‌آید

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{8\pi^2m}{h^2}[E-U(x)]\psi=0 \qquad (۳۸-۱۵)$$

موج ماده، مانند موج نوری، یک موج احتمال است به این معنا که اگر یک آشکارساز ذره در داخل موج قرار داده شود، احتمالی که آشکارساز ذره‌ای را در طی هر بازهٔ زمانی معین آشکار کند متناسب با $|\psi|^2$ است، این کمیت چگالی احتمال نامیده می‌شود.

در مورد ذرهٔ آزاد – یعنی ذره‌ای که برای آن $U(x)=0$ است – و در جهت x حرکت می‌کند، $|\psi|^2$ برای تمام مکانها در امتداد محور x مقدار ثابتی دارد.

اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

طبیعت احتمالی فیزیک کوانتومی محدودیت مهمی برای آشکارسازی مکان و اندازه حرکت ذره به وجود می‌آورد. یعنی، اندازه‌گیری مکان $\vec{r}$ و اندازه حرکت $\vec{p}$ یک ذره به طور

همزمان با دقت نامحدود امکان ندارد. عدم قطعیت در مؤلفه‌های این کمیتها با رابطه‌های زیر داده می‌شوند

$$\Delta x.\Delta p_x \geq \hbar$$
$$\Delta y.\Delta p_y \geq \hbar \qquad (۳۸-۲۰)$$
$$\Delta z.\Delta p_z \geq \hbar$$

تونل زنی از سد بنابر فیزیک کلاسیکی، یک ذرهٔ فرودی به یک سد انرژی پتانسیل که ارتفاع آن بزرگتر از انرژی جنبشی ذره باشد بازتاب می‌کند. ولی، بنابر فیزیک کوانتومی، ذره احتمال محدودی برای تونل زدن از چنین سدی را دارد. احتمالی که ذرهٔ معینی با جرم m و انرژی E از سد به ارتفاع U_b و ضخامت L تونل بزند با ضریب عبور T داده می‌شود

$$T \approx e^{-2bL} \qquad (۳۸-۲۱)$$

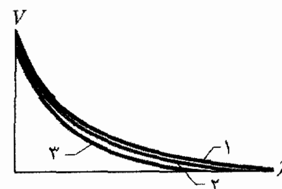
که

$$b = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(U_b - E)}{h^2}} \qquad (۳۸-۲۲)$$

پرسشها

۱- بنابر شکل نکتهٔ وارسی ۲، برای یک بسامد معین نور فرودی آیا بیشینهٔ انرژی جنبشی الکترونهای کنده شده در هدف ساخته شده از سدیم بزرگتر است یا هدف ساخته شده از پتاسیم؟

۲- اثر فوتوالکتریک: شکل ۳۸-۱۸ ولتاژ قطع V برحسب طول موج λ نور را برای سه مادهٔ مختلف به دست می‌دهد. این مواد را به ترتیب تابع کار آنها- از بزرگترین- مرتب کنید.



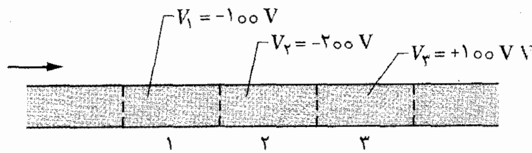
شکل ۳۸-۱۸ پرسش ۲

۳- یک صفحهٔ فلزی با نوری با بسامد معینی روشن شده است: کدامیک از موارد زیر مشخص می‌کنند که الکترونها کنده شده‌اند یا نه: (الف) شدت نور، (ب) مدت قرار داشتن صفحه در معرض نور، (پ) رسانایی گرمایی صفحه، (ت) جنس صفحه که از آن ساخته شده است.

۴- در اثر فوتوالکتریک (برای یک هدف معین و یک بسامد معین از نور فرودی)، کدامیک از کمیتهای زیر، در صورت وجود، به شدت باریکهٔ نور فرودی بستگی دارد: (الف) بیشینهٔ انرژی جنبشی الکترونها، (ب) بیشینهٔ جریان فوتوالکتریک، (پ) پتانسیل توقف، (ت) بسامد قطع؟

۵- انرژی فوتون A دو برابر انرژی فوتون B است. (الف) آیا اندازه حرکت A کمتر از B است یا بزرگتر یا با آن مساوی است؟ (ب) آیا طول موج A کمتر از B است یا بیشتر یا با آن مساوی است؟

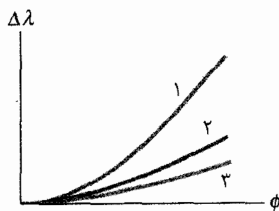
۶- شکل ۳۸-۱۹ الکترونی را نشان می‌دهد که از چه ناحیه می‌گذرد که در آنها پتانسیلهای الکتریکی یکنواخت V برقرار است. سه ناحیه را بنابر طول موج دوبروی الکترون در آنها- از بزرگترین مرتب کنید.



شکل ۳۸-۱۹ پرسش ۶

۷- (الف) اگر انرژی جنبشی یک ذرهٔ غیر نسبیتی را دو برابر کنیم، طول موج دوبروی آن چقدر تغییر می‌کند؟ (ب) اگر تندی ذره را دو برابر کنیم چه خواهد شد؟

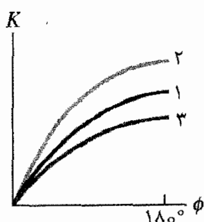
۸- *پراکندگی کامپتون:* شکل ۳۸-۲۰ انتقال $\Delta\lambda$ کامپتون را برحسب زاویهٔ پراکندگی ϕ برای سه ذرهٔ هدف ساکن و متفاوت به دست می‌دهد. این ذره‌ها را به ترتیب جرم آنها- از بزرگترین- مرتب کنید.



شکل ۳۸-۲۰ پرسش ۸

۹- در آزمایش جابه‌جایی کامپتون، نور (در گسترهٔ پرتو x) در جهت جلو با زاویهٔ $\phi = 0$ در شکل ۳۸-۳ پراکنده می‌شود. الکترون چقدر انرژی کسب می‌کند؟

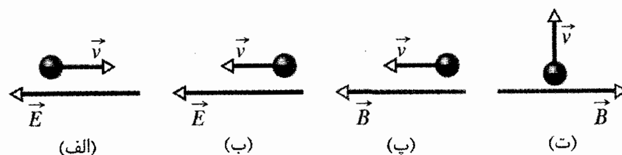
۱۰- فرض کنید K انرژی جنبشی گرفته شده توسط یک الکترون آزاد ساکن در وقتی باشد که یک فوتون از آن پراکنده شده است. می‌توان K را برحسب زاویهٔ ϕ که در آن فوتون پراکنده می‌شود رسم کرد، منحنی ۱ در شکل ۳۸-۲۱ را ببینید. اگر هدف پروتون آزاد ساکن باشد، آیا نقطهٔ انتهایی نمودار جابه‌جا می‌شود (الف) به طرف بالا مثل منحنی ۲، (ب) به طرف پایین مثل منحنی ۳، یا (پ) یکسان می‌ماند؟



شکل ۳۸-۲۱ پرسش ۱۰

۱۱- انرژی جنبشی ذره‌های غیر نسبیتی زیر یکسان است. آنها را به ترتیب بزرگی طول موج دوبروی مرتب کنید: الکترون، ذرهٔ آلفا، نوترون.

۱۲- شکل ۳۸-۲۲ الکترونی را نشان می‌دهد که (الف) در جهت مخالف میدان الکتریکی، (ب) در جهتی یکسان با جهت میدان الکتریکی، (پ) در جهتی یکسان با جهت میدان مغناطیسی، (ت) عمود بر میدان مغناطیسی، حرکت می‌کند. در هر وضعیت، آیا طول موج الکترون افزایش می‌یابد یا کاهش یا یکسان می‌ماند؟

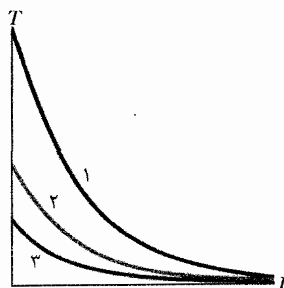


شکل ۳۸-۲۲ پرسش ۱۲

۱۳- جدول مقدارهای نسبی سه وضعیت را برای آزمایش تونل‌زنی شکلهای ۳۸-۱۴ و ۳۸-۱۵ به دست می‌دهد. این وضعیتها را به ترتیب بزرگی احتمال تونل‌زنی الکترون از سد مرتب کنید.

	انرژی الکترون	ارتفاع سد	ضخامت سد
(الف)	E	$5E$	L
(ب)	E	$17E$	$L/2$
(پ)	E	$2E$	$2L$

۱۴- شکل ۳۸-۲۳ ضریب عبور T را برای تونل‌زنی الکترون از سد پتانسیل برای سه آزمایش نشان می‌دهد که برحسب ضخامت سد L رسم شده‌اند. طول موجهای دوبروی الکترونها در سه آزمایش یکسان هستند. تنها تفاوت در تنظیم دستگاه، ارتفاع سد U_b است. سه آزمایش را به ترتیب U_b از بزرگترین مرتب کنید.



شکل ۳۸-۲۳ پرسش ۱۴

۱۵- در سمت چپ شکل ۳۸-۱۶، چرا کمینه‌ها در مقدارهای $|\psi|^2$ بزرگتر از صفرند؟

۱۶- یک الکترون و یک پروتون انرژی جنبشی یکسانی دارند. کدامیک طول موج دوبروی بزرگتری دارد؟

مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
•-••• تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

بخش ۳۸-۲

•۱- با چه آهنگی خورشید فوتون گسیل می‌کند؟ برای ساده شدن، فرض کنید که کل گسیل خورشید در طول موج منفرد ۵۵۰nm با آهنگ $3/9\times10^{26}$ W انجام می‌شود.

•۲- یک لیزر هلیوم- نئون نور قرمز در طول موج $\lambda = 633$nm به صورت باریکه‌ای به قطر ۳/۵mm و با آهنگ گسیل انرژی برابر با ۵/۰mW گسیل می‌کند. آشکارسازی در مسیر باریکه تمام باریکه را جذب می‌کند. با چه آهنگی بر یکای مساحت، آشکارساز فوتونها را جذب می‌کند؟

•۳- متر یک بار به صورت ۱۶۵۰۷۶۳/۷۳ برابر طول موج نور نارنجی گسیل شده به وسیلهٔ یک چشمه اتمهای کریپتون ۸۶ تعریف شد. انرژی فوتون این نور چقدر است؟

•۴- نور زرد از لامپ سدیم بزرگراهی در طول موج ۵۸۹nm روشنترین است. انرژی فوتون نور برای این طول موج چقدر است؟

•۵- نور تکفام (یعنی نور با یک طول موج) به وسیلهٔ یک ورقه فیلم عکاسی جذب و در نتیجه روی ثبت می‌شود. اگر انرژی فوتون برابر با ۰/۶eV یا بیشتر باشد جذب فوتون رخ می‌دهد، که کوچکترین انرژی مورد نیاز برای تجزیهٔ یک مولکول AgBr در فیلم است. (الف) بزرگترین طول موجی از نور که به وسیلهٔ فیلم بتواند ثبت شود چقدر است؟ (ب) این طول موج در کدام ناحیه از طیف الکترومغناطیسی واقع است؟

•۶- الکترون با چه سرعتی باید حرکت کند تا انرژی جنبشی آن برابر با انرژی جنبشی فوتون نور سدیم در طول موج ۵۹۰nm باشد؟

••۷- یک لامپ فرابنفش نوری با طول موج ۴۰۰nm با آهنگ ۴۰۰W گسیل می‌کند. یک لامپ فرو سرخ نیز نوری با طول موج ۷۰۰nm با آهنگ ۴۰۰W گسیل می‌کند. (الف) کدام لامپ فوتونها را با آهنگ بیشتری گسیل می‌کند و (ب) مقدار این آهنگ بیشتر چقدر است؟ **SSM WWW**

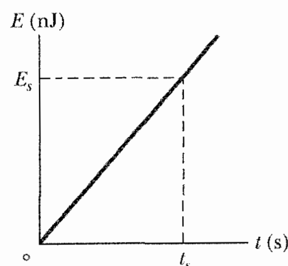
••۸- ماهواره‌ای در مدار زمین صفحهٔ سلولهای خورشیدی به مساحت $2/60\,m^2$ را عمود بر جهت پرتو نور خورشید نگه می‌دارد. شدت نور در این صفحه $1/39\,kW/m^2$ است. (الف) با چه آهنگی انرژی خورشیدی به صفحه می‌رسد؟ (ب) با چه آهنگی فوتونهای خورشیدی توسط صفحه جذب می‌شوند؟ فرض کنید که تابش خورشیدی تکفام با طول موج ۵۵۰nm است و تمام تابش خورشیدی که به صفحه برخورد می‌کند جذب می‌شود. (پ) چه مدت طول می‌کشد تا یک «مول فوتون» توسط صفحه جذب شود؟

••۹- نوع خاصی از چراغ نور تکفام با طول موج ۶۳۰nm گسیل می‌کند. انرژی الکتریکی با آهنگ ۶۰W به آن داده می‌شود و چراغ با بازده ۹۳٪ این انرژی را به انرژی نوری تبدیل می‌کند. در طول عمر ۷۳۰h این چراغ چند فوتون توسط آن گسیل می‌شود؟

••۱۰- در شرایط آرمانی، اگر نور با طول موج ۵۵۰nm توسط شبکیهٔ چشم انسان با آهنگی به کمی ۱۰۰ فوتون بر ثانیه جذب شود، دستگاه بینایی قادر به دیدن خواهد بود. آهنگ متناظری که با آن انرژی توسط شبکیه جذب می‌شود چقدر است؟

••۱۱- یک لامپ سدیم $(\lambda = ۵۸۹nm)$۱۰۰W انرژی را در تمام جهتها به طور یکنواخت تابش می‌کند. (الف) با چه آهنگی فوتونها توسط لامپ گسیل می‌شوند؟ (ب) در چه فاصله‌ای از لامپ یک صفحهٔ جذب کنندهٔ کامل فوتونها را با آهنگ $cm^2 \cdot s$/فوتون ۱/۰۰ جذب می‌کند؟ (پ) شار فوتونی (فوتون بر یکای مساحت بر یکای زمان) روی صفحهٔ کوچکی به فاصلهٔ ۲/۰۰m از لامپ چقدر است؟

••۱۲- یک آشکارساز نوری دارای سطح جذب با مساحت $۲/۰۰ \times ۱۰^{-۶}\ m^2$ است و ۵۰٪ نور فرودی با طول موج ۶۰۰nm را جذب می‌کند. آشکارساز در فاصلهٔ ۱۲/۰m از یک چشمهٔ همسانگرد قرار دارد. منحنی تغییرات انرژی E گسیل شده از چشمه برحسب زمان t در شکل ۳۸-۲۴ داده شده است. $(E_s = ۷/۲nJ, t_s = ۲/۰s)$. با چه آهنگی فوتونها جذب آشکارساز می‌شوند؟



شکل ۳۸-۲۴ مسئلهٔ ۱۲

••۱۳- یک آشکارساز نوری (چشم شما) دارای مساحت $۲/۰۰ \times ۱۰^{-۶}\ m^2$ است و ۸۰٪ نور فرودی با طول موج ۵۰۰nm را جذب می‌کند. آشکارساز در فاصلهٔ ۳/۰۰m از یک چشمهٔ همسانگرد قرار دارد. اگر آشکارساز فوتونها را با آهنگ $۴/۰۰۰ s^{-1}$ جذب کند، گسیلندهٔ نور با چه توانی نور گسیل می‌کند؟

••۱۴- قطر d باریکه‌ای که از یک لیزر آرگون $(\lambda = ۵۱۵nm)$۱/۵W بیرون می‌آید، ۳/۰mm است. باریکه به وسیلهٔ یک دستگاه عدسی با فاصلهٔ کانونی مؤثر f_L برابر با ۲/۵mm متمرکز می‌شود. باریکهٔ متمرکز شده به یک صفحهٔ کاملاً جذب کننده برخورد می‌کند، که در آنجا نقش پراش دایره‌ای با قرص مرکزی به شعاع R برابر $۱/۲۲ f_L \lambda / d$، تشکیل می‌شود. می‌توان نشان داد که ۸۴٪ انرژی فرودی در این قرص مرکزی قرار دارد. با چه آهنگی فوتونها توسط صفحه در قرص مرکزی نقش پراش جذب می‌شوند؟

بخش ۲۸-۳ اثر فوتوالکتریک

•۱۵- تابع کار تنگستن ۴/۵۰eV است. وقتی نوری با انرژی فوتون ۵/۸۰eV بر سطح آن بتابد، تندی سریعترین الکترونهای کنده شده از سطح تنگستن را محاسبه کنید.

•۱۶- می‌خواهیم عنصری را برای یک فوتوسل انتخاب کنیم که با نور مرئی توسط اثر فوتوالکتریک کار کند. کدامیک از این عنصرها مناسب هستند (داخل پرانتزها تابعهای کار نوشته شده‌اند): تانتالیوم (۴/۲eV)، تنگستن (۴/۵eV)، آلومینیوم (۴/۲eV)، باریم (۲/۵eV)، لیتیم (۲/۳eV)؟

•۱۷- نور با برخورد با سطح سدیم موجب گسیل فوتوالکتریک می‌شود. پتانسیل توقف الکترونهای کنده شده ۵/۰V و تابع کار سدیم ۲/۲eV است. طول موج نور فرودی چقدر است؟ *SSM*

•۱۸- اگر تابع کار ماده‌ای ۲/۳eV و بسامد تابش فرودی $۳/۰ \times ۱۰^{۱۵}$ Hz باشد، بیشینه انرژی جنبشی الکترونهای کنده شده از این ماده را پیدا کنید.

••۱۹- پتانسیل توقف الکترونهای گسیل شده از یک سطح روشن شده با نور به طول موج ۴۹۱*nm* برابر با ۰/۷۱۰V است. وقتی طول موج فرودی به مقدار جدیدی تغییر کند، پتانسیل توقف ۱/۴۳*V* می‌شود. (الف) طول موج جدید چقدر است؟ (ب) تابع کار سطح چقدر است؟

••۲۰- طول موج مربوط به بسامد قطع نقره ۳۲۵*nm* است. بیشینهٔ انرژی جنبشی الکترونهای کنده شده از سطح نقره به وسیلهٔ نور فرابنفش با طول موج ۲۵۴*nm* چقدر است؟

••۲۱- نوری با طول موج ۲۰۰nm بر یک سطح آلومینیومی می‌تابد؛ برای کندن الکترون ۴/۲۰eV لازم است. انرژی جنبشی (الف) سریعترین و (ب) آهسته‌ترین الکترونها چقدر است؟ (پ) پتانسیل توقف برای این وضعیت چقدر است؟ (ت) طول موج قطع برای آلومینیوم چقدر است؟ **SSM**

••۲۲- یک ماهوارهٔ در حال گردش وقتی که نور خورشید به وسیلهٔ اثر فوتوالکتریک الکترون را از سطح بیرونی آن خارج می‌کند، دارای بار می‌شود. ماهواره باید طوری طراحی شود که این باردار شدن به حداقل برسد. فرض کنید ماهواره با پلاتین، فلزی با تابع کار بسیار بالا $(\Phi = ۵/۳۲eV)$ پوشانیده شده است. بلندترین طول موجی که نور خورشید فرودی می‌تواند یک الکترون را از سطح پلاتین خارج کند به دست آورید.

••۲۳- (الف) اگر تابع کار فلز معینی ۱/۸eV باشد، پتانسیل توقف الکترونهای کنده شده از فلز به هنگام تابیدن نور با طول موج ۴۰۰nm بر آن چقدر است؟ (ب) بیشینهٔ تندی الکترونهای کنده شده چقدر است؟

••۲۴- فرض کنید *بازده کسری* سطح سدیم (با تابع کار ۱/۸۰eV) برابر با $۱/۰ \times ۱۰^{-۱۶}$ است؛ یعنی به طور متوسط یک الکترون به ازای هر $۱۰^{۱۶}$ فوتون کنده می‌شود و به سطح

می‌رسد. اگر چنین سطحی با نور ۶۰۰nm از یک لیزر ۲/۰۰mW روشن شود و تمام الکترونهای کنده شده در شارش بار شرکت کنند، جریان الکترونهای کنده شده از این سطح چقدر است؟

••۲۵- پرتوهای x با طول موج ۷۱pm بر یک ورقهٔ طلا برخورد کرده و الکترونهای با پیوند محکم را از اتم طلا می‌کند. سپس الکترونهای کنده شده در مسیری دایره‌ای به شعاع r در یک ناحیهٔ میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ حرکت می‌کنند. در مورد الکترونهای کنده شدهٔ سریع، ضرب Br برابر با $۱/۸۸\times۱۰^{-۴}$ T·m است. (الف) بیشینهٔ انرژی جنبشی این الکترونها و (ب) کار انجام شده برای جدا شدن آنها از اتمهای طلا را پیدا کنید.

••۲۶- در آزمایش فوتوالکتریک با استفاده از یک سطح سدیم، درمی‌یابیم که به ازای طول موج ۳۰۰nm پتانسیل توقف ۱/۸۵V و به ازای طول موج ۴۰۰nm پتانسیل توقف ۰/۸۲۰ V است. از این داده‌ها (الف) مقدار ثابت پلانک را پیدا کنید، (ب) تابع کار Φ سدیم، و (پ) طول موج قطع λ_0 سدیم را پیدا کنید.

بخش ۳۸-۴ فوتونها و اندازه حرکت

•۲۷- (الف) بسامد، (ب) انرژی فوتون و (پ) بزرگی اندازه حرکت فوتون (برحسب KeV/c) مربوط به پرتوهای x با طول موج ۳۵/۰pm چقدر است؟

•۲۸- (الف) برحسب MeV/c بزرگی اندازه حرکت مربوط به فوتونی که انرژی آن برابر با انرژی در حالت سکون الکترون باشد چقدر است؟ (ب) طول موج و (پ) بسامد تابش مربوط چقدر است؟

•۲۹- نوری با طول موج ۲/۴۰pm بر هدفی شامل الکترونهای آزاد می‌تابد. (الف) طول موج نور پراکنده در زاویهٔ °۳۰/۰ از امتداد فرودی را پیدا کنید. (ب) آیا این مقدار با زاویهٔ پراکندگی °۱۲۰ یکسان است؟ SSM

••۳۰- پرتوهای x با طول موج ۰/۰۱۰۰nm در جهت مثبت محور x بر هدفی شامل الکترونهایی با پیوند سست می‌تابد. در مورد پراکندگی کامپتون از یکی از این الکترونها، در زاویهٔ °۱۸۰، (الف) جابه‌جایی کامپتون، (ب) تغییر متناظر در انرژی فوتون، (پ) انرژی جنبشی الکترون پس زده شده و (ت) زاویهٔ بین جهت مثبت محور x و جهت حرکت الکترونها، چقدر است؟

••۳۱- درصد تغییر در انرژی فوتون را در ضمن برخوردی مانند شکل ۳۸-۵ به ازای $\phi=۹۰°$ و برای تابش (الف) در گسترهٔ میکروموج با $\lambda=۳/۰\text{cm}$، (ب) در گسترهٔ مرئی با $\lambda=۵۰۰\text{nm}$، (پ) در گسترهٔ پرتوهای x با $\lambda=۲۵\text{pm}$ و (ت) در گسترهٔ پرتو گاما با انرژی فوتون گاما برابر با ۱/۰MeV را محاسبه کنید. (ث) نتیجه‌گیری شما دربارهٔ امکان آشکارسازی جابه‌جایی کامپتون در این ناحیه‌های مختلف از طیف الکترومغناطیسی، فقط بر اساس معیار اتلاف انرژی در برخورد یک فوتون- الکترون منفرد، چیست؟

••۳۲- پرتوهای گاما با انرژی فوتون ۰/۵۱۱MeV بر یک هدف آلومینیومی می‌تابند و توسط الکترونهای با پیوند سست در جهتهای مختلف پراکنده می‌شوند. (الف) طول موج پرتوهای گامای فرودی چقدر است؟ (ب) طول موج پرتوهای گامای پراکنده شده در زاویهٔ °۹۰ نسبت به باریکهٔ فرودی چقدر است؟ (پ) انرژی فوتون پرتوهای پراکنده شده در این جهت چقدر است؟

••۳۳- طول موج کامپتون را برای (الف) الکترون و (ب) پروتون محاسبه کنید. انرژی فوتون برای یک موج الکترومغناطیسی با طول موج برابر با طول موج کامپتون (پ) الکترون و (ت) پروتون چقدر است؟ SSM

••۳۴- نشان دهید که هرگاه فوتونی با انرژی E از یک الکترون آزاد در حالت سکون پراکنده شود، بیشینهٔ انرژی جنبشی الکترون پس زده شده با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$K_{\max}=\frac{E^{۲}}{E+mc^{۲}/۲}$$

••۳۵- (الف) جابه‌جایی کامپتون، $\Delta\lambda$، (ب) کسر جابه‌جایی کامپتون $\Delta\lambda/\lambda$ و (پ) تغییر ΔE در انرژی فوتون نور با طول موج $\lambda=۵۹۰\text{nm}$ که از یک الکترون آزاد در حال سکون با زاویهٔ پراکندگی °۹۰ نسبت به جهت باریکهٔ فرودی پراکنده می شود، چقدر است؟ (ت) $\Delta\lambda$ (ث) $\Delta\lambda/\lambda$ و (ج) ΔE به ازای پراکندگی °۹۰ برای فوتونی با انرژی ۵۰/۰KeV (در گسترهٔ پرتو x) چقدر است؟

••۳۶- بیشینهٔ انرژی جنبشی الکترونهای خارج شده از یک ورقهٔ نازک مسی توسط پراکندگی کامپتون با یک باریکهٔ فرودی پرتوهای x با انرژی ۱۷/۵keV چقدر است؟ تابع کار را ناچیز بگیرید.

••۳۷- چند درصد افزایش در طول موج به ٪۷۵ اتلاف انرژی فوتون در برخورد فوتون- الکترون آزاد می‌انجامد؟ SSM

••۳۸- فوتونی با یک الکترون آزاد ساکن پراکندگی کامپتون پیدا می‌کند. فوتون °۹۰/۰ نسبت به جهت اولیه منحرف می‌شود؛ طول موج اولیه آن $۳/۰۰\times۱۰^{-۱۲}$ m است. انرژی جنبشی الکترون چقدر است؟

••۳۹- برخوردی بین یک فوتون پرتو x با انرژی اولیهٔ ۵۰/۰keV و یک الکترون ساکن را در نظر بگیرید که در آن فوتون به طرف عقب و الکترون کنده شده به طرف جلو حرکت می‌کنند. (الف) انرژی فوتون پراکنده شده به عقب چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی الکترون چقدر است؟

●●۴۰- بیشینهٔ جابه‌جایی طول موج برای برخورد کامپتون بین فوتون و *پروتون* آزاد چقدر است؟

●●۴۱- یک فوتون ۲۰۰keV توسط یک الکترون آزاد در چه زاویه‌ای باید پراکنده شود تا اینکه فوتون ۱۰٪ انرژی خود را از دست بدهد؟

بخش ۳۸-۶ الکترونها و موجهای ماده

●۴۲- طول موج دوبروی (الف) یک الکترون ۱/۰۰keV، (ب) یک پروتون ۱/۰۰keV و (پ) یک نوترون ۱/۰۰keV، را محاسبه کنید.

●۴۳- در تلویزیونهای قدیمی، الکترونها از طریق یک اختلاف پتانسیل ۲۵/۰ keV شتاب می‌گرفتند. طول موج دوبروی چنین الکترونهایی چقدر است؟ (به نسبیت نیازی نیست.) **SSM**

●●۴۴- جریانی از فوتونها، هر یک با تندی $0/9900c$، در آزمایش دو شکاف با فاصلهٔ شکافهای $4/00\times10^{-9}$ m، به آن می‌تابد. نقش تداخلی دو شکاف روی پرده مشاهده می‌شود. زاویهٔ بین مرکز نقش و کمینهٔ دوم (در هر طرف مرکز) چقدر است)؟

●●۴۵- طول موج (الف) فوتونی با انرژی ۱/۰۰eV، (ب) الکترونی با انرژی ۱/۰۰eV، (پ) فوتونی با انرژی ۱/۰۰eV و (ت) الکترونی با انرژی ۱/۰۰eV چقدر است؟

●●۴۶- طول موج یک الکترون و یک فوتون ۰/۲۰nm است. اندازه حرکت (برحسب kg·m/s) (الف) الکترون و (ب) فوتون چقدر است؟ انرژی (برحسب eV) (پ) الکترون و (ت) فوتون چقدر است؟

●●۴۷- یونهای سدیم یک بار یونیده تا اختلاف پتانسیل ۳۰۰V شتاب می‌گیرند. (الف) چه اندازه حرکتی توسط چنین یونی کسب می‌شود؟ (ب) طول موج دوبروی آن چقدر است؟ **SSM WWW**

●●۴۸- هستهٔ اتم در سال ۱۹۱۱/۱۲۹۹ توسط ارنست راترفورد[1] کشف شد، کسی که برخی آزمایشها را که با پراکندگی باریکهٔ ذرهٔ آلفا از اتمهای ورقهٔ نازک فلز طلا انجام داده بود به خوبی تفسیر کرد. (الف) اگر ذره‌های آلفا دارای انرژی جنبشی ۷/۵MeV باشند، طول موج دوبروی آنها چقدر است؟ (ب) توضیح دهید که آیا طبیعت موجی ذره‌های آلفای فرودی در تفسیر این آزمایشها باید به حساب آورده شوند یا نه؟ جرم یک ذرهٔ آلفا ۴/۰۰u (یکای جرم اتمی) و نزدیکترین فاصلهٔ نزدیک شدن به مرکز هسته در این آزمایشها تقریباً ۳۰fm بوده است (تا بیش از یک دهه پس از اینکه برای اولین بار این آزمایشهای قاطع انجام شد، طبیعت موجی ماده مسلم نشده بود.)

1. .Ernest Rutherford

●●۴۹- طول موج خط زرد گسیلی از سدیم ۵۹۰nm است. الکترون با چه انرژی جنبشی دارای طول موج دوبروی برابر با طول موج این خط خواهد بود؟

●●۵۰- الکترونهایی که تا انرژی ۵۰GeV شتاب گرفته‌اند دارای طول موج λ به حد کافی کوچک‌اند که برای بررسی ساختار داخل یک هسته هدف توسط پراکندگی از آنها استفاده می‌شود. فرض کنید که انرژی به قدری بزرگ است که رابطهٔ نسبیتی $p=E/c$ بین بزرگی اندازه حرکت p و انرژی E برقرار است. (در این وضعیت انرژی جنبشی الکترون خیلی بیشتر از انرژی در حال سکون آن است.) (الف) λ چقدر است؟ (ب) اگر شعاع هستهٔ هدف $R=5/0$ fm باشد، نسبت R/λ چقدر است؟

●●۵۱- یک ذرهٔ غیر نسبیتی سه برابر سریعتر از الکترون حرکت می‌کند. نسبت طول موج دوبروی ذره به طول موج الکترون $1/813\times10^{-4}$ است. با محاسبهٔ جرم ذره، آن را شناسایی کنید. **SSM**

●●۵۲- (الف) انرژی یک فوتون متناظر با طول موج ۱/۰۰nm، (ب) انرژی جنبشی یک الکترون با طول موج دوبروی ۱/۰۰nm، (پ) انرژی یک فوتون متناظر با طول موج ۱/۰۰fm و (ت) انرژی جنبشی یک الکترون با طول موج دوبروی ۱/۰۰fm چقدر است؟

●●۵۳- بالاترین توان تفکیک قابل حصول در یک میکروسکوپ فقط با طول موج به کار رفته محدود می‌شود؛ یعنی کوچکترین چیزی که می‌توان تشخیص داد دارای ابعادی تقریباً برابر با طول موج است. فرض کنید که می‌خواهیم داخل اتم را «ببینیم». با فرض اینکه قطر اتم ۱۰۰pm باشد، این بدان معنی است که باید بتوان پهنایی مثلاً ۱۰pm را تفکیک کرد. (الف) اگر یک میکروسکوپ الکترونی مورد استفاده قرار گیرد، کمینهٔ انرژی لازم الکترون چقدر است؟ (ب) اگر یک میکروسکوپ نوری به کار رود، کمینهٔ انرژی لازم فوتون چقدر است؟ (پ) کدام میکروسکوپ عملی‌تر به نظر می‌رسد؟ چرا؟

●●۵۴- اگر میکروسکوپ الکترونی بخواهد همان حد نهایی توان تفکیک را که با به کار بردن پرتوهای گاما ۱۰۰keV به دست می‌آید داشته باشد، ولتاژ شتابدهندهٔ الکترونها باید چقدر باشد؟ (به مسئله ۵۳ نگاه کنید و فرض کنید فیزیک کلاسیکی حاکم است.) **SSM**

●●●۵۵- اگر طول موج دوبروی یک پروتون ۱۰۰fm باشد، (الف) تندی پروتون چقدر است و (ب) با چه پتانسیل الکتریکی پروتون برای کسب این تندی باید شتاب بگیرد؟

بخش ۳۸-۷ معادلهٔ شرودینگر

●●۵۶- (الف) تابع موج $\psi(x)$ نشان داده شده در معادلهٔ ۳۸-۱۹ را به صورت $\psi(x)=a+ib$ بنویسید، که در آن a و b کمیتهای حقیقی‌اند. (فرض کنید که ψ_0 حقیقی است.) (ب)

تابع موج وابسته به زمان $\Psi(x,t)$ را بنویسید که متناظر با $\psi(x)$ است.

●●۵۷- نشان دهید که معادلهٔ ۳۸-۱۷ با قرار دادن $\psi(x)$ و مشتق دوم آن در معادلهٔ ۳۸-۱۶ و به دست آوردن یک نتیجهٔ اتحادی، در واقع جوابی برای معادلهٔ ۳۸-۱۶ است.

●●●۵۸- (الف) $n=a+ib$ را یک عدد مختلط در نظر بگیرید که a و b اعداد حقیقی‌اند (مثبت یا منفی). نشان دهید که حاصلضرب nn^* همیشه یک عدد حقیقی مثبت است. (ب) $m=c+id$ را یک عدد مختلط دیگر در نظر بگیرید. نشان دهید که $|nm|=|n||m|$.

●●●۵۹- نشان دهید که عدد موج زاویه‌ای k برای یک ذرهٔ آزاد غیر نسبیتی به جرم m می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$k=\frac{2\pi\sqrt{2mK}}{h}$$

که در آن K انرژی جنبشی ذره است. **SSM**

●●●۶۰- فرض کنید در معادلهٔ ۳۸-۱۷، قرار دهیم $A=0$ و B را با ψ_0 نشان دهیم. (الف) در این صورت تابع موج حاصل چگونه توصیف می‌شود؟ (ب) در صورت تغییر، شکل ۳۸-۱۲ چگونه تغییر می‌کند؟

●●●۶۱- تابع موج $\psi(x)$ نشان داده شده در معادلهٔ ۳۸-۱۹ یک ذرهٔ آزاد را توصیف می‌کند که در معادلهٔ شرودینگر (معادلهٔ ۳۸-۱۵) برای آن فرض کردیم $U(x)=0$ است. اکنون فرض کنید که در آن معادله، ثابت $U(x)=U_0=$ است. نشان دهید که معادلهٔ ۳۸-۱۹ هنوز جوابی برای معادلهٔ شرودینگر است که در آن

$$k=\frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(E-U_0)}$$

عدد موج زاویه‌ای ذره است. **SSM**

●●●۶۲- در معادلهٔ ۳۸-۱۸ دو جمله را نگهدارید و قرار دهید $A=B=\psi_0$. آنگاه معادله به صورت برهم‌نهی دو موج ماده با دامنهٔ مساوی توصیف می‌شود که در جهتهای مخالف حرکت می‌کنند. (به یاد آورید که این شرط برای یک موج ایستاده است). (الف) نشان دهید که $|\Psi(x,t)|^2$ به صورت زیر داده می‌شود.

$$|\Psi(x,t)|^2=2\psi_0^2[1+\cos 2kx]$$

(ب) این تابع را رسم کنید و نشان دهید که این مربع دامنهٔ یک موج ایستاده را توصیف می‌کند. (پ) نشان دهید که گره‌های این موج ایستاده در مکانهای زیر واقع‌اند

$$x=(2\pi+1)\left(\frac{1}{4}\lambda\right)$$

که در آن $n=0,1,2,3,\ldots$ و λ طول موج دوبروی است. (ت) عبارت مشابهی برای مکانهای خیلی محتمل این ذره بنویسید.

بخش ۳۸-۸ اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

●۶۳- عدم قطعیت در مکان الکترونی که در امتداد محور x حرکت می‌کند برابر $50\,pm$ داده شده که تقریباً برابر با شعاع اتم هیدروژن است. کمترین عدم قطعیت در اندازه‌گیری همزمان مؤلفهٔ p_x اندازه حرکت این الکترون چقدر است؟

●●۶۴- در فصل ۳۹ خواهیم دید که الکترونها نمی‌توانند در یک مدار معین داخل اتمها، مانند سیاره‌های منظومهٔ شمسی حرکت کنند. برای یافتن علت این امر، سعی می‌کنیم برای «مشاهدهٔ» چنین الکترون در حال گردشی از یک میکروسکوپ نوری برای اندازه‌گیری مدار الکترون با دقت، مثلاً $10\,pm$ (شعاع یک اتم نوعی تقریباً $100\,pm$)، استفاده کنیم. آنگاه طول موج نوری که در میکروسکوپ به کار برده می‌شود باید حدود $10\,pm$ باشد. (الف) انرژی فوتون این نور چقدر است؟ (ب) چنین فوتونی در برخورد رودررو با یک الکترون چقدر انرژی به آن منتقل می‌کند؟ (پ) این نتایج دربارهٔ امکان «مشاهدهٔ» یک الکترون اتمی در دو نقطه یا بیشتر در امتداد مسیر مدار مفروض چه چیزی به دست می‌دهند؟ (*راهنمایی:* الکترونهای بیرونی اتمها با انرژی فقط چند الکترون- ولت با اتم پیوند دارند.)

●●۶۵- شکل ۳۸-۱۲ حالتی را نشان می‌دهد که در آن مؤلفهٔ اندازه حرکت p_x یک ذرهٔ ثابت است به طوری که $\Delta p_x=0$؛ آنگاه از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ (معادلهٔ ۳۸-۲۰)، مکان x ذره کاملاً نامعلوم است. از همین اصل نتیجه می‌شود که عکس این مطلب نیز درست است؛ یعنی اگر مکان ذره‌ای دقیقاً معلوم باشد $(\Delta x=0)$، عدم قطعیت در اندازه حرکت آن نامتناهی است.

یک حالت میانی را در نظر بگیرید که در آن مکان ذره نه با دقت نامتناهی، بلکه در فاصلهٔ $\lambda/2\pi$ اندازه‌گیری می‌شود که در آن λ طول موج دوبروی ذره است. نشان دهید که عدم قطعیت در (اندازه‌گیری همزمان) مؤلفهٔ اندازه حرکت برابر با خود آن مؤلفه است؛ یعنی $\Delta p_x=p$. در این شرایط، آیا اندازه‌گیری صفر برای اندازه حرکت موجب تعجب خواهد شد؟ در مورد اندازه حرکت اندازه‌گیری شدهٔ $0/5p$، $2p$، یا $12p$ چطور؟**SSM**

بخش ۳۸-۹ تونل‌زنی از سد

●●۶۶- (الف) فرض کنید باریکه‌ای از پروتونهای $5/0\,eV$ به سد انرژی پتانسیل به ارتفاع $6/0\,eV$ و ضخامت $0/70\,nm$ با آهنگی معادل با جریان $1000\,A$ برخورد می‌کند. به طور متوسط چقدر باید منتظر بمانید تا یک پروتون از سد عبور کند؟
(ب) اگر این باریکه به جای پروتون شامل الکترون باشد، چقدر باید منتظر بمانید؟ GO

●●۶۷- وضعیت تونل‌زنی از سد مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸-۷ را در نظر بگیرید. چند درصد تغییر در ضریب عبور T به ازای ۰/۱٪ تغییر

در (الف) ارتفاع سد، (ب) ضخامت سد، و انرژی جنبشی الکترون فرودی، به وجود می‌آید؟ SSM WWW

●●۶۸- یک سد انرژی پتانسیل مانند شکل ۳۸-۱۵ را در نظر بگیرید که ارتفاع آن U_b برابر با ۶/۰eV و ضخامت آن L برابر با ۰/۷۰nm است. انرژی یک الکترون فرودی که ضریب عبور آن ۰/۰۰۱۰ باشد چقدر است؟

●●۶۹- یک پروتون ۳/۰MeV بر سد انرژی پتانسیل به ضخامت ۱۰fm و ارتفاع ۱۰MeV می‌تابد. (الف) ضریب عبور T، (ب) انرژی جنبشی K_t پروتون اگر از سد تونل بزند در طرف دیگر چقدر خواهد بود. و (پ) انرژی جنبشی K_r پروتون اگر از سد بازتاب کند، چقدر است؟ یک دوترون ۳/۰MeV (با همان بار ولی با جرم دو برابر جرم پروتون) به همان سد فرود می‌آید. (ت) T، (ث) K_t و (ج) K_r چقدر است؟

مسئله‌های اضافی

۷۰- حدود سال ۱۹۱۶/۱۲۹۵، میلیکان در آزمایشهای فوتوالکتریک خود داده‌های زیر را برای پتانسیل توقف لیتیم به دست آورد:

طول موج (nm)	۴۳۳/۹	۴۰۴/۷	۳۶۵/۰	۳۱۲/۵	۲۵۳/۵
پتانسیل توقف (V)	۰/۵۵	۰/۷۳	۱/۰۹	۱/۶۷	۲/۵۷

این داده‌ها را به کار برید و نموداری مانند شکل ۳۸-۲ (که برای سدیم است) رسم کنید و سپس از این نمودار برای به دست آوردن (الف) ثابت پلانک و (ب) تابع کار لیتیم استفاده کنید.

۷۱- از معادله‌های ۳۸-۸، ۳۸-۹ و ۳۸-۱۰ با حذف v و θ، معادلهٔ ۳۸-۱۱، معادلهٔ جابه‌جایی کامپتون را به دست آورید.

۷۲- انرژی جنبشی متوسط نوترونها در تعادل گرمایی با ماده برابر $(۳/۲)kT$ است، که k ثابت بولتزمن و T دمای محیط نوترونهاست که می‌توان آن را ۳۰۰K در نظر گرفت. (الف) انرژی جنبشی متوسط چنین نوترونی چقدر است؟ (ب) طول موج دوبروی متناظر چقدر است؟

۷۳- بالنی پر از گاز هلیوم را در نظر بگیرید که در دمای اتاق و فشار جو قرار دارد. (الف) متوسط طول موج دوبروی اتمهای هلیوم و (ب) فاصلهٔ متوسط بین اتمها در این شرایط، را محاسبه کنید. انرژی جنبشی متوسط یک اتم برابر با $(۳/۲)kT$ است، که k ثابت بولتزمن است. (پ) آیا در این شرایط می‌توان اتمها را به صورت ذره در نظر گرفت؟ توضیح دهید.

۷۴- (الف) کوچکترین مقدار انرژی مورد نیاز برای کندن الکترونی از سدیم فلزی ۲/۲۸eV است. آیا سدیم برای نور قرمز با طول موج $\lambda =$ ۶۸۰nm اثر فوتوالکتریک نشان می‌دهد؟ (ب) طول موج قطع گسیل فوتوالکتریک از سدیم چقدر است؟ (پ) این طول موج به چه رنگی مربوط است؟

۷۵- خط طیفی گسیلی یک تابش الکترومغناطیسی است که در محدودهٔ باریکی از طول موج گسیل می‌شود به طوری که می‌توان آن را به صورت تک طول موج در نظر گرفت. یک چنین خط گسیلی که در نجوم مهم است دارای طول موج ۲۱cm است. انرژی فوتون در موج الکترومغناطیسی در این طول موج چقدر است؟

۷۶- با استفاده از معادله‌های کلاسیکی برای اندازه حرکت و انرژی جنبشی، نشان دهید که می‌توان طول موج دوبروی الکترون را برحسب نانومتر به صورت $\lambda =۱/۲۲۶/\sqrt{K}$ نوشت، که در آن K انرژی جنبشی الکترون برحسب الکترون ولت است.

۷۷- گلوله‌ای به جرم ۴۰g با تندی ۱۰۰۰m/s حرکت می‌کند. هر چند که گلوله خیلی بزرگ است و نمی‌توان آن را به صورت یک موج ماده در نظر گرفت، تعیین کنید که معادلهٔ ۳۸-۱۳ برای طول موج دوبروی گلوله در این تندی چه پیش‌بینی می‌کند؟

۷۸- شکل ۳۸-۱۲ نشان می‌دهد که به علت اصل عدم قطعیت هایزنبرگ، تعیین مختصهٔ x برای مکان الکترون امکان‌پذیر نیست. (الف) آیا می‌توانید مختصهٔ y یا z را تعیین کنید؟ (*راهنمایی:* اندازه حرکت الکترون مؤلفهٔ y یا z ندارد.) (ب) گسترهٔ یک موج ماده در سه بعد را توصیف کنید.

۷۹- بازی بیسبال را در جهانی (نه جهان ما) تصور کنید که در آنجا ثابت پلانک ۰/۶۰J·s است. اگر قطعیت در تندی ۱/۰m/s باشد، عدم قطعیت در مکان توپ بیسبال به جرم ۰/۵۰J·s که با تندی ۲۰m/s در امتداد محوری حرکت می‌کند چقدر است؟

۸۰- اتومبیلی به جرم ۱۵۰۰kg که با تندی ۲۰m/s حرکت می‌کند به تپه‌ای نزدیک می‌شود که ارتفاع آن ۲۴m و طول آن ۳۰m است. هر چند که اتومبیل و تپه به قدری بزرگ‌اند که نمی‌توان آنها را به صورت موجهای ماده در نظر گرفت. تعیین کنید که معادلهٔ ۳۸-۲۱ برای ضریب عبور اتومبیل، مانند موج ماده که از میان تپه عبور کند، چه پیش‌بینی می‌کند؟ تپه را یک سد انرژی پتانسیل در نظر بگیرید که انرژی پتانسیل آن گرانشی است.

۸۱- نشان دهید که $|\psi|^۲=|\Psi|^۲$، که ψ و Ψ مانند معادلهٔ ۳۸-۱۴ به هم مرتبط‌اند. یعنی نشان دهید که چگالی احتمال به متغیر زمان بستگی ندارد.

۸۲- نشان دهید که $\Delta E/E$، کسر اتلاف انرژی یک فوتون در ضمن برخورد با ذره‌ای به جرم m با رابطهٔ زیر داده می‌شود.

$$\frac{\Delta E}{E}=\frac{hf'}{mc^۲}(۱-\cos\phi)$$

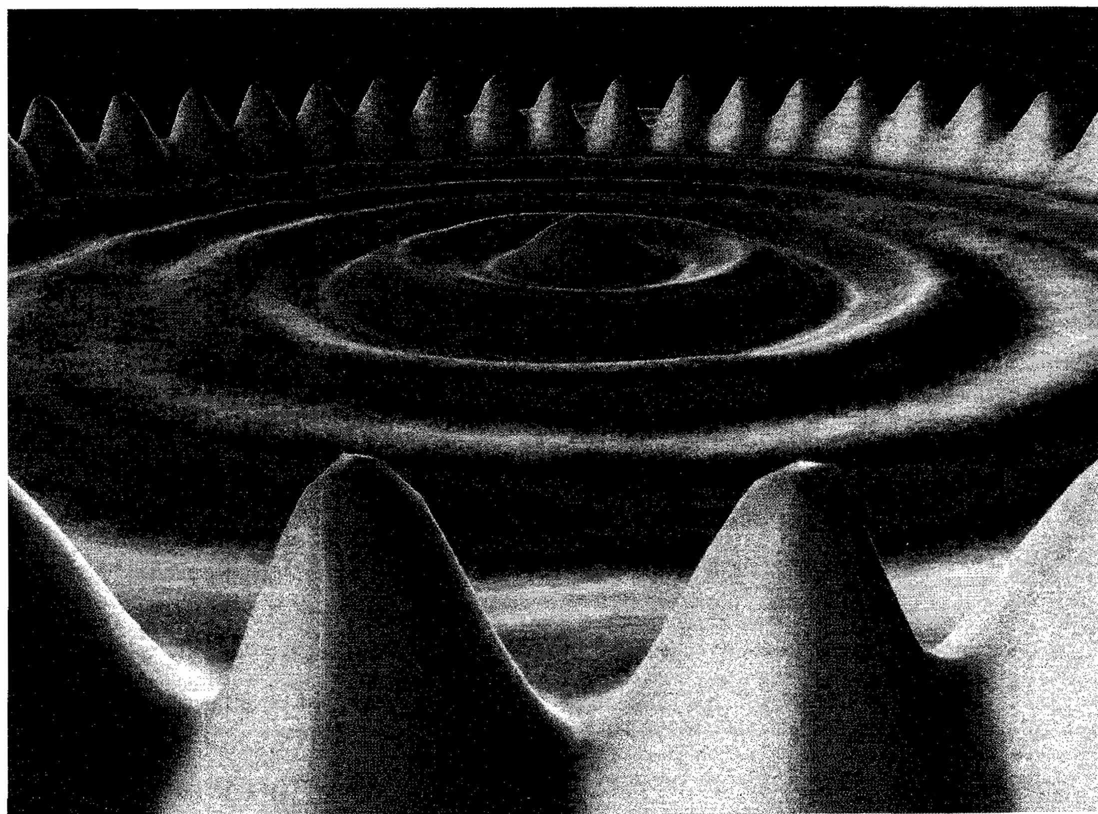
که E انرژی فوتون فرودی، f' بسامد فوتون پراکنده شده و ϕ به صورت شکل ۳۸-۵ تعریف می‌شود.

۸۳- با تحلیل برخورد بین یک فوتون و یک الکترون آزاد (با استفاده از مکانیک نسبیتی)، نشان دهید که برای فوتون امکان ندارد که تمام انرژی خود را به الکترون آزاد منتقل کند (و بنابراین فوتون از بین برود).

۸۴- الکترونی به جرم m و تندی v با یک فوتون پرتو گاما با انرژی اولیهٔ $hf_۰$، وقتی در چارچوب آزمایشگاه اندازه‌گیری شود، «برخورد» می‌کند. فوتون در جهت حرکت الکترون پراکنده می‌شود. بررسی کنید که انرژی فوتون پراکنده شده، وقتی در چارچوب آزمایشگاه اندازه‌گیری شود، عبارت است از

$$E = hf_۰\left(۱+\frac{۲hf_۰}{mc^۲}\sqrt{\frac{۱+v/c}{۱-v/c}}\right)^{-۱}$$

۳۹ بازهم دربارهٔ موجهای ماده



موجکهای داخل حصار کوانتومی چه هستند؟

وقتی این تصویر با میکروسکوپ تونل‌زنی روبشی به وسیلهٔ پژوهشگران در مرکز پژوهشهای آلمادن IBI در کالیفرنیا منتشر شد، بسیاری از دانشمندان و مهندسان را شگفت زده کرد. تصویر اتمهای آهن ۴۸ را نشان می‌دهد که پژوهشگران آنها را برای تشکیل دایره‌ای به قطر ۱۴nm روی یک سطح مسی که به طور خاصی تهیه شده است، قرار داده‌اند. این آرایش حصار کوانتومی نامیده می‌شود، چون مانند حصاری که در یک مزرعه چهار پایان را محصور می‌کند، این سد اتمهای آهن می‌تواند چیزهایی را محصور کند. این موجکها بر آن چیزها اشاره دارند.

پاسخ در همین فصل.

۳۹-۱ فیزیک چیست؟

یکی از هدفهای درازمدت فیزیک درک طبیعت اتمهاست. اوایل قرن بیستم کسی نمی‌دانست که آرایش الکترونها در اتمها چگونه است، آنها چگونه حرکت می‌کنند، اتمها چگونه نور را گسیل یا جذب می‌کنند، یا حتی چرا اتمها پایدارند. بدون این اطلاعات ممکن نیست بفهمیم که چطور اتمها برای تشکیل مولکولها ترکیب می‌شوند یا برای تشکیل جامدها به هم می‌چسبند. در نتیجه، بنیان شیمی– از جمله بیوشیمی، که شالودهٔ ماهیت خود زندگی است- کم و بیش اسرارآمیز بود.

در سال ۱۹۲۶/۱۳۰۵ همهٔ این پرسشها و خیلی از پرسشهای دیگر با پیشرفت فیزیک کوانتومی پاسخ داده شد. اساس قضیه این است که برای حرکت الکترونها، پروتونها یا هر نوع ذرهٔ دیگر بهترین دیدگاه موجهای ماده است و معادلهٔ شرودینگر حاکم بر حرکت آنهاست. اگرچه نظریهٔ کوانتومی برای ذره‌های سنگین نیز اعمال می‌شود، ولی دلیلی وجود ندارد که توپهای بیسبال، اتومبیلها، سیاره‌ها و اجسام دیگر را با نظریهٔ کوانتومی بررسی کنیم. برای چنین اجسام سنگینی، اجسامی که آهسته حرکت می‌کنند، فیزیک نیوتونی و فیزیک کوانتومی نتیجهٔ یکسانی به دست می‌دهند.

پیش از آنکه فیزیک کوانتومی را برای مسئلهٔ ساختار اتم به کار بریم، به توسعهٔ برخی دیدگاهها با اعمال نظریهٔ کوانتومی در چند وضعیت ساده‌تر نیاز داریم. برخی از این وضعیتها ممکن است ساده شده و غیر واقعی به نظر برسند، ولی با استفاده از آنها دربارهٔ اصول اساسی فیزیک کوانتومی اتمها بحث خواهیم کرد بدون آنکه پیچیدگی عظیم اتمها را در نظر بگیریم. افزون بر این، با پیشرفتهای فناوری نانو، وضعیتهایی که پیشتر فقط در کتابهای درسی وجود داشت اکنون در آزمایشگاهها ایجاد می‌شوند و در علوم نوین الکترونیک و مواد کاربرد دارند. ما در آستانهٔ توانایی استفاده از حصارهای کوانتومی که در شروع این فصل دیدیم، بعلاوهٔ نوع دیگری از ترکیب به نام *نقطه‌های کوانتومی* قرار داریم، که «*اتمهای طراحی شده*» را به وجود می‌آورند که می‌توان خواص آنها را در آزمایشگاه دستکاری کرد. در مورد اتمهای طبیعی و آنهایی که ساختگی‌اند، نقطهٔ سرآغاز بحث ما طبیعت موجی الکترون است.

۳۹-۲ موجهای ریسمان و موجهای ماده

در فصل ۳۲ دیدیم که دو نوع موج در یک ریسمان کشیده شده می‌توانند ایجاد شوند. اگر ریسمان به قدر کافی دراز باشد که بتوانیم آن را نامتناهی در نظر بگیریم، می‌توانیم *موج رونده‌ای* را اساساً با هر بسامد ایجاد کنیم. ولی، اگر ریسمان کشیده شده دارای طول محدودی باشد، شاید به دلیل آنکه دو سر آن به جایی بسته شده باشند، فقط می‌توانیم روی آن *موجهای ایستاده* ایجاد کنیم؛ علاوه بر آن، این موجهای ایستاده فقط می‌توانند بسامدهای گسسته‌ای داشته باشند. به عبارت دیگر، منحصر کردن موج به یک ناحیهٔ محدودی از فضا به *کوانتیده* کردن حرکت یعنی به وجود *حالتهای* گسسته موج می‌انجامد که هر حالت بسامد کاملاً مشخصی دارد.

این مشاهدات برای تمام انواع موجها از جمله موجهای ماده به کار می‌رود. ولی، برای موجهای ماده به جای کار کردن با بسامد f موج، خیلی راحت‌تر است که با انرژی E مربوط به ذره کار کنیم. در تمام مطالبی که در پی می‌آید توجه خود را روی موج ماده مربوط به یک الکترون معطوف می‌کنیم، ولی این نتایج برای هر موج ماده که محدود شده باشد می‌تواند به کار رود.

موج ماده مربوط به الکترون متحرک در جهت مثبت x را در نظر می‌گیریم که تحت تأثیر هیچ نیروی خالصی نیست — و به اصطلاح *ذرهٔ آزاد* نامیده می‌شود. انرژی چنین الکترونی هر مقدار قابل قبولی می‌تواند داشته باشد، درست همانطور که یک موج متحرک در امتداد ریسمان کشیده شده با طول نامتناهی می‌تواند هر بسامد قابل قبولی را داشته باشد.

سپس موج مادهٔ مربوط به یک الکترون اتمی، مثلاً الکترون *ظرفیت* (با پیوند سست) در اتم سدیم را بررسی می‌کنیم. چنین الکترونی — که تحت تأثیر نیروی جاذبهٔ کولنی بین آن و هسته با بار مثبت در اتم قرار دارد — یک ذرهٔ *آزاد* نیست. این الکترون فقط در حالتهای گسسته‌ای که هر یک انرژی گسستهٔ E دارد می‌تواند وجود داشته باشد. این خیلی شبیه به حالتهای گسسته و بسامدهای کوانتیده‌ای است که در یک ریسمان کشیده شده با طول محدود می‌تواند وجود داشته باشد.

بنابراین، در مورد موجهای ماده، مانند همهٔ انواع دیگر موجها، می‌توان یک ***اصل محدودیت*** بیان کرد:

> ☜ محدودیت موج منجر به کوانتیده شدن، یعنی وجود حالتهای گسسته با انرژیهای گسسته می‌انجامد. موج می‌تواند فقط این انرژیها را داشته باشد.

۳۹-۳ انرژیهای الکترون به تله افتاده

تله‌های یک بعدی

در اینجا موج مادهٔ مربوط به الکترون غیر نسبیتی محدود شده در یک ناحیه از فضا را بررسی می‌کنیم. این امر را با قیاس با موجهای ایستاده روی یک ریسمان با طول محدود که در امتداد محور x و بین دو نقطهٔ بسته شده کشیده شده است انجام می‌دهیم. چون نقطه‌های بسته شده محکم هستند، در دو انتهای ریسمان گره یا نقطه‌هایی قرار دارند که در آنها ریسمان همیشه

در حالت سکون است. ممکن است گره‌های دیگری نیز در امتداد ریسمان وجود داشته باشند، ولی این دو نقطه، همانطور که شکل ۳۲-۲۳ نشان می‌دهد، باید همیشه وجود داشته باشند.

حالتها، یا نقشهای گسستهٔ موج ایستاده که در آن ریسمان می‌تواند نوسان کند، آنهایی هستند که برای آنها طول L ریسمان برابر با مضرب صحیحی از نصف طول است. یعنی ریسمان فقط می‌تواند آن حالتهایی را داشته باشد که رابطهٔ زیر برقرار باشد

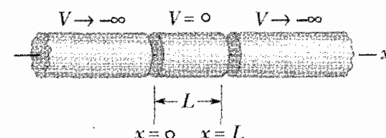
$$L = \frac{n\lambda}{۲} \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots \text{ به ازای } \quad (۳۹-۱)$$

هر مقدار n یک حالت ریسمان در حال نوسان را مشخص می‌کند؛ با به کار بردن زبان فیزیک کوانتومی، می‌توان عدد صحیح n را **عدد کوانتومی** نامید.

برای هر حالت ریسمان که بنابر معادلهٔ ۳۹-۱ مجاز است، جابه‌جایی عرضی ریسمان در هر مکان x در راستای ریسمان با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$y_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots \text{ به ازای } \quad (۳۹-۲)$$

که در آن عدد کوانتومی n نقش نوسان را مشخص می‌کند و A بستگی به زمانی دارد که ریسمان مورد بررسی قرار می‌گیرد. (معادلهٔ ۳۹-۲ صورت کوتاه شده معادلهٔ ۳۲-۶۰ است). همانطور که انتظار می‌رود می‌توان دید که برای تمام مقدارهای n و در



شکل ۳۹-۱ اجزای یک «تلهٔ» آرمانی که برای محدودکردن الکترون در استوانهٔ مرکزی طراحی شده است. استوانه‌ها را دراز نیم متناهی در نظر می‌گیریم که در یک پتانسیل منفی بزرگ کاملاً نامتناهی باشند و استوانهٔ مرکزی در پتانسیل صفر است.

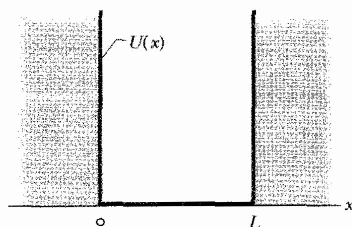
تمام مدت نقطه‌هایی با جابه‌جایی صفر (گره) در $x = ۰$ و $x = L$ وجود دارد. شکل ۳۲-۲۲ یک لحظه ثبت شده از چنین ریسمان کشیده شده‌ای را به ازای $n = ۲, ۳, ۴$ نشان می‌دهد.

اکنون توجه خود را به موج ماده معطوف می‌کنیم. اولین مسئلهٔ ما این است که به طور فیزیکی الکترونی را که در امتداد محور x حرکت می‌کند محدود کنیم به طوری که داخل یک قسمت محدود از این محور باقی بماند. شکل ۳۹-۱ *تلهٔ الکترون* یک بعدی قابل تصور را نشان می‌دهد. این شامل دو استوانه دراز نیم متناهی است که پتانسیل الکتریکی هر یک از آنها به $-\infty$ میل می‌کند؛ بین آنها یک استوانهٔ توخالی به طول L قرار دارد که پتانسیل الکتریکی آن صفر است. یک الکترون تنها را در استوانهٔ مرکزی قرار می‌دهیم تا به تله افتد.

تلهٔ شکل ۳۹-۱ برای تحلیل آسان است ولی خیلی عملی نیست. ولی، تک الکترونها را *می‌توان* در آزمایشگاه با تله‌هایی که طرح آنها خیلی پیچیده، ولی از نظر مفهوم یکسان است به تله انداخت. برای مثال، در دانشگاه واشنگتن الکترون منفردی به مدت چند ماه در تله نگهداشته شد و دانشمندان توانستند اندازه‌گیریهای خیلی دقیقی روی خواص آن انجام دهند.

به دست آوردن انرژیهای کوانتیده

شکل ۳۹-۲ انرژی پتانسیل الکترون را بر حسب تابعی از مکان آن در امتداد محور x تلهٔ آرمانی شدهٔ شکل ۳۹-۱ نشان می‌دهد. وقتی الکترون در استوانهٔ مرکزی قرار دارد، انرژی پتانسیل آن $U(=-eV)$ صفر است چون پتانسیل V در آنجا صفر است. اگر الکترون بیرون این ناحیه باشد، انرژی پتانسیل آن مثبت و مقدار آن بینهایت است چون در آنجا $V \to -\infty$ است. نقش انرژی پتانسیل شکل ۳۹-۲ را **چاه انرژی پتانسیل نامتناهی عمیق**، یا به طور کوتاه، *چاه نامتناهی پتانسیل* می‌نامیم. این یک «چاه» است چون الکترون واقع در استوانهٔ مرکزی شکل ۳۹-۱



شکل ۳۹-۲ انرژی پتانسیل الکتریکی $U(x)$ الکترون محصور در استوانهٔ مرکزی تلهٔ آرمانی شکل ۳۹-۱. می‌بینیم که به ازای $۰ < x < L$، $U = ۰$ و به ازای $x < ۰$ و $x > L$، $U \to \infty$.

نمی‌تواند از آن فرار کند. وقتی الکترون به هر یک از دو انتهای استوانه نزدیک می‌شود، نیرویی که اساساً مقدار آن بینهایت است جهت حرکت الکترون را معکوس می‌کند، بنابراین به تله می‌افتد. چون الکترون فقط در امتداد یک محور می‌تواند حرکت کند، این به تله افتادن را می‌توان *چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی* نامید.

درست مانند موج ایستاده در طول ریسمان کشیده شده، موج مادهٔ توصیف کننده الکترون محصور در $x = ۰$ و $x = L$ باید گره‌هایی داشته باشد. افزون بر این، اگر λ را در معادلهٔ ۳۹-۱ به صورت طول موج دوبروی مربوط به الکترون متحرک تعبیر کنیم، این معادله را برای چنین موج ماده‌ای می‌توان به کار برد.

طول موج دوبروی λ در معادلهٔ ۳۸-۱۳ به صورت $\lambda = h/p$ تعریف می‌شود، که p بزرگی اندازه حرکت الکترون است. چون الکترون غیر نسبیتی است، بزرگی اندازه حرکت p به انرژی جنبشی الکترون K با رابطهٔ $p = \sqrt{۲mK}$ مربوط می‌شود که m جرم الکترون است. در مورد الکترونی که داخل استوانهٔ مرکزی شکل ۳۹-۱ حرکت می‌کند، جایی که $U = ۰$ است، انرژی کل (مکانیکی) E برابر با انرژی جنبشی است. از

این رو، طول موج دوبروی این الکترون را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \qquad (۳-۳۹)$$

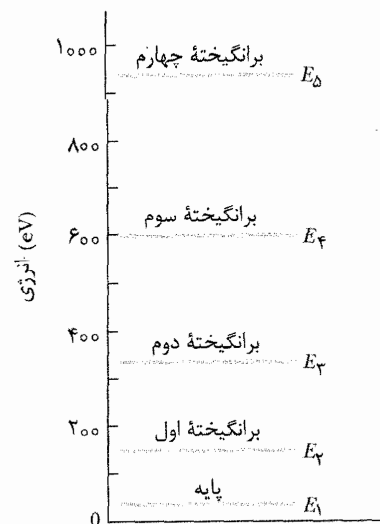
اگر معادلهٔ ۳۹-۳ را در معادلهٔ ۳۹-۱ قرار دهیم و بر حسب E حل کنیم، درمی‌یابیم که E مطابق با رابطهٔ زیر به n بستگی دارد

$$E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)n^2 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \text{ به ازای } \qquad (۴-۳۹)$$

عدد صحیح مثبت n در اینجا عدد کوانتومی حالت کوانتومی الکترون در تله است.

معادلهٔ ۳۹-۴ چند نکتهٔ مهم دارد: چون الکترون در تله محصور شده است، فقط می‌تواند انرژیهایی داشته باشد که با این معادله داده می‌شوند. الکترون *نمی‌تواند* انرژیی داشته باشد که، مثلاً، بین مقدارهای $n=1$ و $n=2$ باشد. چرا این محدودیت وجود دارد؟ چون الکترون یک موج ماده است. ولی اگر مثل فیزیک کلاسیکی ذره فرض شود، وقتی در تله محصور شود می‌تواند هر مقداری داشته باشد.

شکل ۳۹-۳ نموداری است که کمترین پنج مقدار انرژی مجاز را برای یک الکترون در یک چاه نامتناهی با $L = 100\text{pm}$ (در حدود بزرگی یک اتم نوعی) نشان می‌دهد. این مقدارها *ترازهای انرژی* نامیده می‌شوند، و در شکل ۳۹-۳ به صورت تراز، یا پله‌های نردبانی، در *نمودار تراز انرژی* رسم شده‌اند. انرژی به طور قائم رسم شده و چیزی به طور افقی وجود ندارد.



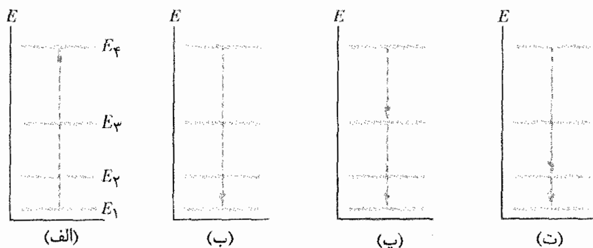
شکل ۳۹-۳ چند انرژی مجاز داده شده به وسیلهٔ معادلهٔ ۳۹-۴ را برای الکترون محصور در چاه نامتناهی شکل ۳۹-۲ نشان می‌دهد. در اینجا $L = 100\text{ pm}$ است. چنین نموداری، نمودار *تراز انرژی* نامیده می‌شود.

حالت کوانتومی با کمترین تراز انرژی ممکن و مجاز E_1 از معادلهٔ ۳۹-۴، با عدد کوانتومی $n=1$، *حالت پایهٔ* الکترون نامیده می‌شود. الکترون به بودن در پایینترین حالت تمایل دارد. تمام حالتهای کوانتومی با انرژیهای بیشتر (متناظر با عددهای کوانتومی $n=2$ و بزرگتر) *حالتهای برانگیختهٔ* الکترون نامیده می‌شود. حالتی با تراز انرژی E_2، با عدد کوانتومی $n=2$، اولین حالت برانگیخته نامیده می‌شود، چون اولین حالت برانگیخته به هنگام رفتن به بالای نمودار تراز انرژی است. هم چنین حالتی با تراز انرژی E_3 *دومین حالت برانگیخته* نامیده می‌شود.

تغییرات انرژی

الکترون به تله افتاده تمایل دارد کمترین انرژی مجاز را داشته و بنابراین، در حالت پایهٔ خود باشد. اگر یک منبع بیرونی انرژی اضافی لازم برای تغییر را فراهم کند به یک حالت برانگیخته (که در آن انرژی بیشتری دارد) می‌تواند تغییر کند. فرض کنیم E_{Low} انرژی اولیهٔ الکترون و E_{high} انرژی بیشتر در حالتی که در نمودار تراز انرژی در بالاتر است باشد. بنابراین، مقدار انرژی لازم برای تغییر حالت الکترون عبارت است از

$$\Delta E = E_{\text{high}} - E_{\text{Low}} \qquad (۵-۳۹)$$



شکل ۳۹-۴ (الف) برانگیختگی الکترون به تله افتاده از تراز انرژی حالت پایه به تراز حالت برانگیختهٔ سوم. (ب) – (ت) سه طریق از چهار طریق که الکترون می‌تواند برای برگشت به تراز انرژی حالت پایه وانگیخته شود. (کدام طریق نشان داده نشده است؟)

الکترونی که چنین انرژیی دریافت کند گفته می‌شود که یک *پرش کوانتومی (یا گذار)* یا *برانگیخته شدن* از حالت انرژی پایین به حالت انرژی بالا پیدا کرده است. شکل ۳۹-۴ الف یک پرش کوانتومی را از حالت پایه (با تراز انرژی E_1) به حالت برانگیختهٔ سوم (با تراز انرژی E_4) نشان می‌دهد. همانطور که نشان داده شده است، این پرش *باید* از یک تراز انرژی به تراز دیگر باشد، ولی می‌تواند از یک یا چند تراز انرژی میانی بگذرد.

یک روش که الکترونی بتواند به تراز انرژی بیشتر پرش کند، جذب یک فوتون است. ولی، این جذب و پرش کوانتومی فقط وقتی می‌تواند رخ دهد که شرط زیر برقرار باشد:

> اگر الکترون محصوری فوتونی جذب کند، انرژی hf فوتون باید با اختلاف انرژی ΔE بین تراز اولیه انرژی و تراز بالاتر برابر باشد.

بنابراین، برانگیختگی با جذب نور مستلزم آن است که

$$hf = \Delta E = E_{\text{high}} - E_{\text{Low}} \qquad (۶-۳۹)$$

وقتی الکترونی به حالت برانگیخته برسد، در آن حالت نمی‌ماند و با کاهش انرژیش به سرعت واانگیخته می‌شود. شکلهای ب تا ت چند پرش کوانتومی ممکن از تراز انرژی حالت برانگیختهٔ سوم به پایین را نشان می‌دهد. الکترون می‌تواند با یک پرش کوانتومی مستقیم (شکل ۳۹-۴ ب) یا با پرشهای کوتاهتر به ترازهای میانی به تراز حالت پایه برسد (شکلهای ۳۹-۴ پ و ت).

یک راه برای آنکه الکترون انرژی خود را کاهش دهد گسیل یک فوتون است و این فقط در صورتی است که شرط زیر برقرار باشد:

> اگر الکترون محصوری یک فوتون گسیل کند، انرژی hf آن فوتون باید با اختلاف انرژی ΔE بین تراز انرژی اولیه الکترون و تراز پایین برابر باشد.

بنابراین، معادلهٔ ۳۹-۶ هم برای جذب و هم برای گسیل نور توسط یک الکترون محصور به کار برده می‌شود. یعنی نور جذب شده یا گسیل شده فقط می‌تواند مقدارهای معینی از hf و بنابراین، فقط مقدارهای معینی از بسامد f و طول موج λ را داشته باشد.

نکته: اگرچه معادلهٔ ۳۹-۶ و آنچه را که دربارهٔ جذب و گسیل فوتون بحث کردیم می‌تواند برای تله‌های الکترون فیزیکی (واقعی) به کار رود، آنها در واقع نمی‌توانند برای تله‌های الکترون در یک بعد (غیر واقعی) به کار روند. دلیل آن مربوط به لزوم پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای در فرایندهای جذب یا گسیل فوتون است. در این کتاب، از این نیاز چشم‌پوشی می‌کنیم و معادلهٔ ۳۹-۶ را حتی برای تله‌های یک بعدی به کار می‌بریم.

> ✔ ***نکتهٔ وارسی ۱*** جفت حالتهای کوانتومی برای الکترون محصور در یک چاه نامتناهی متناظر با اختلافهای انرژی بین این حالتها را به ترتیب بزرگی مرتب کنید: (الف) $n=3$ تا $n=1$، (ب) $n=5$ تا $n=4$، (پ) $n=4$ تا $n=3$.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۹-۱

الکترونی در یک چاه نامتناهی عمیق انرژی پتانسیل یک بعدی با پهنای $L=100\text{pm}$ محصور شده است.

(الف) کمترین مقدار انرژی که الکترون می‌تواند داشته باشد چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی محصورسازی الکترون (یک موج ماده) در چاه به کوانتش انرژی آن می‌انجامد. چون چاه بینهایت عمیق است. انرژیهای مجاز با معادلهٔ ۳۹-۴ $(E_n=(h^2/8mL^2)n^2)$ با عدد کوانتومی مثبت n داده می‌شوند.

پایینترین تراز انرژی: در اینجا، مجموعهٔ ثابتهای جلو n^2 در معادلهٔ ۳۹-۴ عبارت است از

$$\frac{h^2}{8mL^2}=\frac{(6/63\times10^{-34}\ \text{J.s})^2}{(8)(9/11\times10^{-31}\ \text{kg})(100\times10^{-12}\text{m}^2)}=6/031\times10^{-18}\ \text{J}\qquad(39\text{-}7)$$

کمترین مقدار انرژی که یک الکترون می‌تواند داشته باشد مربوط به کمترین عدد کوانتومی برای حالت پایهٔ الکترون یعنی $n=1$ است. بنابراین، از معادله‌های ۳۹-۴ و ۳۹-۷ داریم

$$E_1=\left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)n^2=(6/031\times10^{-18}\text{J})(1^2)\approx6/03\times10^{-18}\text{J}=37/7\text{eV}\qquad(\text{پاسخ})$$

(ب) اگر این الکترون یک پرش کوانتومی از حالت پایه به حالت برانگیختهٔ دوم خود انجام دهد، چقدر انرژی باید به آن انتقال یابد؟

نکتهٔ کلیدی *ابتدا یک تذکر:* توجه کنید که از شکل ۳۹-۳ *دومین حالت* برانگیخته متناظر با *سومین* تراز انرژی با عدد کوانتومی $n=3$ است. پس اگر الکترون از تراز $n=1$ به تراز $n=3$ پرش کند، تغییر لازم در انرژی آن از معادلهٔ ۳۹-۵ عبارت است از

$$\Delta E_{31}=E_3-E_1\qquad(39\text{-}8)$$

پرش به بالا: بنابر معادلهٔ ۳۹-۴، انرژیهای E_3 و E_1 به عدد کوانتومی n بستگی دارند. بنابراین، با قراردادن این معادله در معادلهٔ ۳۹-۸ برای انرژیهای E_3 و E_1 و با استفاده از معادلهٔ ۳۹-۷ خواهیم داشت

$$\Delta E_{31}=\left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)(3)^2-\left(\frac{h}{8mL^2}\right)(1)^2=\frac{h^2}{8mL^2}(3^2-1^2)=(6/031\times10^{-18}\text{J})(8)=4/83\times10^{-17}\text{J}=302\text{eV}\qquad(\text{پاسخ})$$

(پ) اگر الکترون با جذب نور برای پرش از تراز انرژی E_1 به تراز انرژی E_3 انرژی به دست آورد، طول موج نور باید چقدر باشد؟

نکتهٔ کلیدی (۱) اگر نور به الکترون انرژی انتقال دهد، این انتقال باید به صورت جذب فوتون باشد. (۲) انرژی فوتون بنابر معادلهٔ ۳۹-۶ $(hf=\Delta E)$ باید برابر با اختلاف انرژی ΔE بین تراز انرژی اولیهٔ الکترون و یک تراز بالاتر باشد. در غیر این صورت، فوتون *نمی‌تواند* جذب شود.

طول موج: با قراردادن c/λ به جای f، معادلهٔ ۳۹-۶ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\lambda=\frac{hc}{\Delta E}$$

اختلاف انرژی ΔE_{31} را در (ب) پیدا کردیم. این معادله به دست می‌دهد

$$\lambda=\frac{hc}{\Delta E_{31}}$$

$$= \frac{(6/63\times10^{-34}\text{J.s})\ (2/998\times10^{8}\text{m/s})}{4/83\times10^{-17}\text{J}}$$

$$= 4/12\times10^{-9}\text{m}$$ (پاسخ)

(ت) هرگاه الکترون به حالت برانگیختهٔ دوم برسد، هنگام واانگیختگی چه طول موجهایی می‌تواند گسیل کند؟

نکته‌های کلیدی

۱- الکترون تمایل دارد به جای این که در حالت برانگیخته بماند به حالت پایه $(n=1)$ واانگیخته شود.

۲- اگر الکترون واانگیخته شود، باید برای پرش به یک تراز انرژی کمتر انرژی کافی از دست بدهد.

۳- اگر الکترون با گسیل نور انرژی از دست دهد، انرژی از دست رفته باید توسط یک فوتون گسیل شود.

پرش‌های رو به پایین: با شروع از حالت برانگیختهٔ دوم (در تراز $n=3$) الکترون می‌تواند هم با یک پرش کوانتومی به طور مستقیم به تراز انرژی حالت پایه (شکل ۳۹-۵ الف) و هم با دو پرش *جداگانه* از طریق تراز $n=2$ (شکلهای ۳۹-ب و پ) به حالت پایه برگردد.

پرش مستقیم متضمن همان اختلاف انرژی ΔE_{31} است که در (پ) پیدا کردیم. بنابراین، طول موج برابر با مقدار محاسبه شده در (پ) است - با این تفاوت که در آنجا طول موج برای نور گسیل شده بود نه جذب شده. پس الکترون با گسیل نور با طول موج زیر می‌تواند به طور مستقیم به حالت پایه پرش کند

$$\lambda = 4/12\times10^{-19}\text{m}$$ (پاسخ)

با دنبال کردن روش بند (ب) می‌توان نشان داد که اختلافهای انرژی برای پرسشهای شکلهای ۳۹-۵ ب و پ عبارت‌اند از

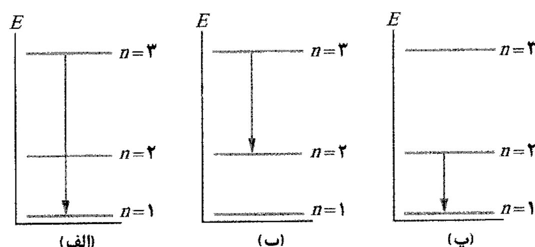
$$\Delta E_{32} = 3/016\times10^{-7}\text{J}\ ,\ \ \Delta E_{21} = 1/809\times10^{-17}\text{J}$$

پس از معادلهٔ ۳۹-۹ می‌توان دید که طول موج نور گسیل شده در اولین پرش (از $n=3$ تا $n=2$) عبارت است از

$$\lambda = 6/60\times10^{-9}\text{m}$$ (پاسخ)

و طول موج نور گسیل شده در پرش دوم (از $n=2$ تا $n=1$) عبارت است از

$$\lambda = 1/10\times10^{-8}\text{m}$$ (پاسخ)



شکل ۳۹-۵ واانگیختگی از حالت دوم برانگیخته به حالت پایه به‌طور مستقیم (الف) و از طریق حالت برانگیختهٔ اول (ب، پ).

۳۹-۴ تابعهای موج الکترون به تله افتاده

اگر معادلهٔ شرودینگر را برای الکترونی که در چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی به پهنای L به تله افتاده است حل کنیم، درمی‌یابیم که تابعهای موج در مورد الکترون به ازای $0 \le x \le L$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\psi_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n = 1,2,3,\ldots \text{ به ازای} \qquad (۳۹-۱۰)$$

(در خارج از این گستره تابع موج صفر است). به زودی دامنهٔ ثابت A را در این معادله محاسبه خواهیم کرد.

توجه کنید که شکل تابع موج $\psi_n(x)$ مانند شکل تابعهای جابه‌جایی $y_n(x)$ یک موج ساکن در یک ریسمان کشیده شده بین دو نقطهٔ سفت است (به معادلهٔ ۳۹-۲ نگاه کنید). الکترون به تله افتاده در چاه پتانسیل یک بعدی بین دیواره‌های نامتناهی را می‌توان مانند یک موج مادهٔ ساکن در نظر گرفت.

احتمال آشکارسازی

تابع موج $\psi_n(x)$ را نمی‌توان آشکار کرد یا به طور مستقیم به هر طریقی اندازه‌گیری کرد- نمی‌توان برای دیدن موج به صورتی که بتوان آن را دید، مثل موجی که در یک وان آب قابل مشاهده است، به سادگی به داخل چاه نگاه کرد. کاری که می‌توان انجام داد این است که نوعی کاوه را برای آشکارسازی الکترون در آن قرار دهیم. در لحظهٔ آشکارسازی، الکترون در نقطهٔ آشکارسازی به صورت مادی، در مکانی در امتداد محور x داخل چاه آشکار خواهد شد.

اگر این شیوهٔ آشکارسازی را در مکانهای زیادی در سراسر چاه انجام دهیم، درخواهیم یافت که احتمال آشکارشدن الکترون به مکان x کاوه در چاه بستگی دارد. در واقع آنها با *چگالی احتمال* $\psi_n^2(x)$ به یکدیگر مربوط‌اند. از بخش ۳۸-۲ به یاد دارید که در حالت کلی احتمال آشکارشدن یک ذره در حجم بینهایت کوچک مشخصی متمرکز در نقطهٔ مشخصی با $|\psi_n|^2$ متناسب است. در اینجا، با الکترون به تله افتاده در یک چاه یک بعدی، فقط با آشکارسازی الکترون در امتداد محور x سروکار داریم. بنابراین، چگالی احتمال $\psi_2^2(x)$ در اینجا عبارت است از احتمال بر یکای طول در امتداد محور x. (به علت اینکه $\psi_n(x)$ در معادلهٔ ۳۹-۱۰ یک کمیت حقیقی است نه مختلط، از علامت قدر مطلق می‌توان صرفنظر کرد.) احتمال آشکارشدن $p(x)$ یک الکترون در مکان x در داخل چاه عبارت است از

$$\begin{bmatrix}\text{احتمال } p(x) \text{ آشکارشدن}\\ \text{در پهنای } dx \text{ واقع در مکان } x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{چگالی احتمال } \psi_n^2(x)\\ \text{در مکان } x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{پهنای } dx\end{bmatrix}$$

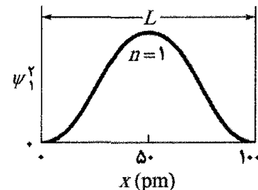
یا

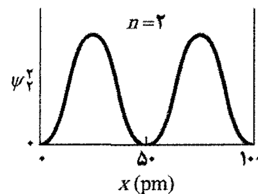
$$p(x) = \psi_n^2(x)\,dx \qquad (۳۹-۱۱)$$

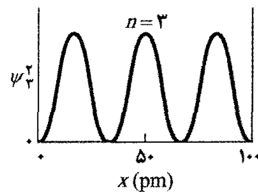
از معادلهٔ ۳۹-۱۰ می‌بینیم که چگالی احتمال $\psi_n^2(x)$ برای الکترون به تله افتاده در گسترهٔ $0 \le x \le L$ عبارت است از

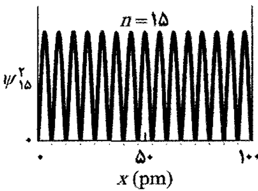
$$\psi_n^2(x) = A^2 Sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n=1,2,3,... \text{ به ازای } \quad (۳۹-۱۲)$$

(چگالی احتمال در بیرون این گستره صفر است). شکل ۳۹-۶ $\psi_n^2(x)$ را به ازای $n=1,2,3,15$ برای یک الکترون در چاه نامتناهی که پهنای L آن برابر با $100pm$ است نشان می‌دهد.









شکل ۳۹-۶ چگالی احتمال $\psi_n^2(x)$ برای چهار حالت یک الکترون به تله افتاده در یک چاه نامتناهی یک بعدی؛ عددهای کوانتومی آنها عبارت‌اند از $n = 1,2,3,15$. به احتمال زیاد الکترون در جایی که $\psi_n^2(x)$ بزرگ است پیدا می‌شود و با احتمال کم در جایی که $\psi_n^2(x)$ کوچک است یافت می‌شود.

برای یافتن احتمال آشکارشدن الکترون در هر بخش متناهی از چاه، یعنی بین نقطهٔ x_1 و نقطهٔ x_2، باید از $p(x)$ بین این نقطه‌ها انتگرال بگیریم. بنابراین، از معادله‌های ۳۹-۱۱ و ۳۹-۱۲ خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix}\text{احتمال آشکارشدن}\\ \text{بین } x_1 \text{ و } x_2\end{bmatrix} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \qquad (۳۹-۱۳)$$

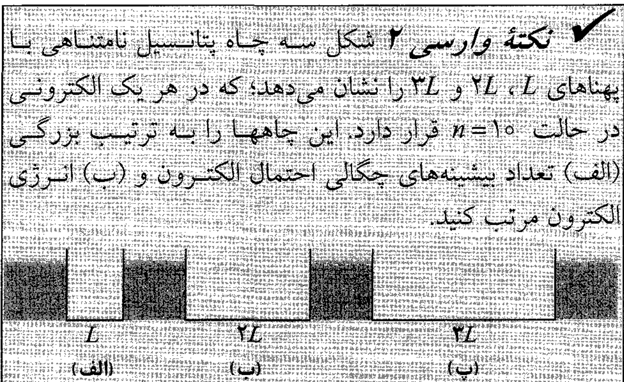
اگر فیزیک کلاسیکی برقرار باشد، باید انتظار داشته باشیم که الکترون به تله افتاده با احتمالهای مساوی در همهٔ بخشهای چاه قابل آشکارشدن باشد. از شکل ۳۹-۶ می‌بینیم که این طور نیست. برای مثال، بررسی این شکل یا معادلهٔ ۳۹-۱۲ نشان می‌دهند که به ازای حالت با $n=2$، الکترون در نزدیکی $x=25pm$ و $x=75pm$ با احتمال زیادی آشکار می‌شود. احتمال آشکارشدن الکترون در نزدیکی $x=0$ و $x=50pm$ و $x=100pm$ نزدیک به صفر است.

حالت $n=15$ در شکل ۳۹-۶ بر آن دلالت دارد که وقتی n افزایش می‌یابد، احتمال آشکارسازی در سراسر چاه بیشتر و بیشتر یکنواخت می‌شود. این نتیجه صورتی از اصل کلی به نام **اصل همخوانی** است:

> در عددهای کوانتومی به قدر کافی بزرگ، پیش‌بینیهای فیزیک کوانتومی بتدریج به پیش‌بینیهای فیزیک کلاسیکی نزدیک می‌شود.

این اصل، که نخست توسط فیزیکدان دانمارکی نیلز بور به

نکتهٔ وارسی ۲ شکل سه چاه پتانسیل نامتناهی با پهناهای L، $2L$ و $3L$ را نشان می‌دهد؛ که در هر یک الکترونی در حالت $n=10$ قرار دارد. این چاهها را به ترتیب بزرگی (الف) تعداد بیشینه‌های چگالی احتمال الکترون و (ب) انرژی الکترون مرتب کنید.



بهنجارش

ضرب $\psi_n^2(x)dx$ احتمال آشکارشدن الکترون را در یک چاه نامتناهی در بازه‌ای از محور x که بین x و $x+dx$ قرار دارد به دست می‌دهد. می‌دانیم که الکترون در این چاه نامتناهی باید در *جایی* باشد؛ پس باید داشته باشیم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x)\,dx = 1 \quad \text{(معادلهٔ بهنجارش)} \quad (۳۹-۱۴)$$

چون احتمال ۱ مطابق با قطعیت است. اگرچه انتگرال در کل محور x گرفته می‌شود، ولی فقط ناحیهٔ از $x=0$ تا $x=L$ در این احتمال سهم دارد. انتگرال معادلهٔ ۳۹-۱۴ نشان دهندهٔ مساحت زیر هر نمودار در شکل ۳۹-۶ است.

در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۹-۲ خواهیم دید که اگر $\psi_n^2(x)$ را از معادلهٔ ۳۹-۱۲ در معادلهٔ ۳۹-۱۴ قرار دهیم، تعیین مقدار مشخصی برای دامنهٔ ثابت A که در معادلهٔ ۳۹-۱۲ ظاهر شده

است، ممکن می‌شود: یعنی $A=\sqrt{2/L}$. این فرایند استفاده از معادلهٔ ۳۹-۱۴ برای محاسبهٔ دامنهٔ یک تابع موج، **هنجارش** تابع موج نامیده می‌شود. این فرایند برای *تمام* تابعهای موج یک بعدی برقرار است.

انرژی نقطهٔ صفر

با قراردادن $n=1$ در معادلهٔ ۳۹-۴ حالت پایینترین انرژی برای یک الکترون واقع در یک چاه پتانسیل نامتناهی یعنی حالت پایه مشخص می‌شود. این حالتی است که الکترون محصور آن را اشغال خواهد کرد مگر اینکه برای بالابردن آن به یک حالت برانگیخته به آن انرژی داده شود.

این پرسش پیش می‌آید: چرا احتمالهای فهرست شده برای n در معادلهٔ ۳۹-۴ شامل $n=0$ نمی‌شود؟ با قراردادن $n=0$ در این معادله در واقع به انرژی حالت پایهٔ صفر می‌رسیم. ولی، با قراردادن $n=0$ در معادلهٔ ۳۹-۱۲ برای تمام xها مقدار $\psi_n^2(x)=0$ نیز به دست می‌آید، که تعبیر آن فقط به این معنی است که هیچ الکترونی در چاه وجود ندارد. در حالی که می‌دانیم وجود دارد: بنابراین، $n=0$ یک عدد کوانتومی احتمالی نیست.

این نتیجهٔ مهمی از فیزیک کوانتومی است که دستگاههای محصور در حالتهای با انرژی صفر وجود ندارند. این دستگاهها همیشه باید انرژی کمینهٔ معینی به نام **انرژی نقطهٔ صفر** داشته باشند.

انرژی نقطهٔ صفر را با پهن کردن چاه نامتناهی – یعنی با افزایش L در معادلهٔ ۳۹-۴ به ازای $n=1$ می‌توان کوچکتر کرد. درحد وقتی $L\to\infty$ ، انرژی نقطهٔ صفر E_1 به صفر میل می‌کند. ولی، در این حد، با چاهی با پهنای نامتناهی، الکترون یک ذره آزاد است، و در امتداد x دیگر محصور نیست. هم‌چنین، چون انرژی یک ذرهٔ آزاد کوانتیده نیست، انرژی می‌تواند هر مقداری از جمله صفر را داشته باشد. فقط یک ذرهٔ محصور باید انرژی متناهی نقطهٔ صفر داشته باشد و هرگز نمی‌تواند ساکن باشد.

✔ *نکتهٔ وارسی ۳* هر یک از ذره‌های زیر در یک چاه نامتناهی محصور شده و پهنای هر چهار چاه یکسان است: (الف) یک الکترون، (ب) یک پروتون، (پ) یک دوترون و (ت) یک ذرهٔ آلفا. به ترتیب بزرگی انرژیهای نقطهٔ صفر آنها را مرتب کنید. ذره‌ها به ترتیب افزایش جرم نوشته شده‌اند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۹-۲

بزرگی ثابت A در معادلهٔ ۳۹-۱۰ را برای یک چاه پتانسیل نامتناهی از $x=0$ تا $x=L$ محاسبه کنید.

نکتهٔ کلیدی تابعهای موج معادلهٔ ۳۹-۱۰ باید الزام بهنجارش معادلهٔ ۳۹-۱۴ را برآورده کنند و این حاکی از آن است که احتمال اینکه الکترون بتواند در جایی در امتداد محور x آشکار شود ۱ است.

محاسبه‌ها: با قراردادن معادلهٔ ۳۹-۱۰ در معادلهٔ ۳۹-۱۴ و بیرون آوردن ثابت A از انتگرال خواهیم داشت

$$A^2\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=1 \qquad (۳۹\text{-}۱۵)$$

ما حدود انتگرال از $-\infty$ تا $+\infty$ را به 0 و L تغییر داده‌ایم زیرا تابع موج بیرون این حدود جدید صفر است (بنابراین به انتگرالگیری بیرون این حدود نیازی نیست.)

انتگرال نشان داده شده را با تغییر متغیر از x به متغیر بدون بعد y می‌توان ساده کرد، که در آن

$$y=\frac{n\pi}{L}x \qquad (۳۹\text{-}۱۶)$$

از این رو

$$dx=\frac{L}{n\pi}dy$$

وقتی متغیر را تغییر می‌دهیم، حدود انتگرال را نیز باید (دوباره) تغییر دهیم. از معادلهٔ ۳۹-۱۶ معلوم است که وقتی $x=0$ است $y=0$ و وقتی $x=L$ است $y=n\pi$ ؛ بنابراین، 0 و $n\pi$ حدود جدید ما هستند. با قراردادن همهٔ اینها، معادلهٔ ۳۹-۱۵ خواهد شد

$$A^2\frac{L}{n\pi}\int_0^{n\pi}(\sin^2 y)\,dy=1$$

می‌توان از انتگرال ۱۱ پیوست ث برای محاسبهٔ این انتگرال استفاده کرد، که معادلهٔ زیر را به دست می‌دهد

$$\frac{A^2L}{n\pi}\left[\frac{y}{2}-\frac{\sin 2y}{4}\right]_0^{n\pi}=1$$

با محاسبه در این حدود خواهیم داشت

$$\frac{A^2L}{n\pi}\frac{n\pi}{2}=1$$

پس

$$A=\sqrt{\frac{2}{L}} \qquad \text{(پاسخ)} \qquad (۳۹\text{-}۱۷)$$

این نتیجه حاکی از آن است که بعد A^2 و بنابراین، بعد $\psi_n^2(x)$ ، عکس طول است. همین‌طور هم باید باشد چون چگالی احتمال معادلهٔ ۳۹-۱۲ احتمال *بر یکای طول* است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۹-۳

یک الکترون حالت پایه در چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی شکل ۳۹-۲ با پهنای $L=100\text{pm}$ به تله افتاده است.

(الف) به ازای چه مقداری از a اولین کمینه برای نور قرمز با طول موج $\lambda=650\,\text{nm}$ در زاویهٔ $\theta=15°$ تشکیل خواهد شد؟

(الف) احتمال اینکه الکترون بتواند در یک سوم سمت چپ چاه آشکار شود ($x=0$ تا $x_2=\frac{L}{3}$) چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی (۱) اگر کاوه‌ای را در یک سوم سمت چپ چاه قرار دهیم، تضمینی وجود ندارد که الکترون را آشکار کنیم. ولی، می‌توانیم احتمال آشکارشدن الکترون را با انتگرالگیری از معادلهٔ ۳۹-۱۳ محاسبه کنیم. (۲) احتمال شدیداً به حالتی بستگی دارد که الکترون در آن قرار دارد، یعنی مقدار عدد کوانتومی n.

محاسبه‌ها: چون در اینجا الکترون در حالت پایه است، در معادلهٔ ۳۹-۱۳، $n=1$ را قرار می‌دهیم. همچنین حدود انتگرال را مکانهای $x_1=0$ و $x_2=L/3$ قرار می‌دهیم، و از مسئلهٔ نمونهٔ ۳۹-۲، دامنهٔ ثابت A را $\sqrt{2/L}$ قرار می‌دهیم. بنابراین، داریم

$$\begin{bmatrix}\text{احتمال آشکارشدن}\\ \text{الکترون در یک سوم چپ}\end{bmatrix}=\int_0^{L/3}\frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{1\pi}{L}x\right)dx$$

این احتمال را با قراردادن $100\times10^{-12}\,\mathrm{m}$ به جای L و سپس با استفاده از ماشین حساب گرافیکی یا رایانه با بسته نرم افزاری ریاضی جهت محاسبه انتگرال پیدا می‌کنیم. به جای این مراحل مسئلهٔ نمونهٔ ۳۹-۲ را دنبال می‌کنیم. از معادلهٔ ۳۹-۱۶، متغیر انتگرالگیری جدید y را به دست می‌آوریم

$$y=\frac{\pi}{L}x \quad , \quad dx=\frac{L}{\pi}dy$$

از اولین این معادله‌ها، حدود جدید را برای $x_1=0$ به صورت $y_1=0$ و برای $x_2=L/3$ به صورت $y_2=\pi/3$ پیدا می‌کنیم. سپس خواهیم داشت

$$\text{احتمال}=\left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{L}{\pi}\right)\int_0^{\pi/3}(\sin^2 y)\,dy$$

با استفاده از انتگرال ۱۱ در پیوست ث، داریم

$$\text{احتمال}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{y}{2}-\frac{\sin 2y}{4}\right)_0^{\pi/3}=0/20$$

پس داریم

(پاسخ) $0/20=$ (احتمال آشکارشدن در یک سوم سمت چپ)

یعنی اگر به طور مکرر در یک سوم سمت چپ چاه کاوه‌ای را قرار دهیم، آنگاه می‌توانیم به طور متوسط الکترون را با ٪۲۰ کاوه‌ها آشکار کنیم.

(ب) احتمال اینکه الکترون بتواند در یک سوم وسط چاه (بین $x_1=L/3$ و $x_2=2L/3$) آشکار شود، چقدر است؟

استدلال: اکنون می‌دانیم که احتمال آشکارشدن در یک سوم سمت چپ چاه ٪۲۰ است. بنابر تقارن، احتمال آشکارشدن در یک سوم سمت راست چاه نیز ٪۲۰ است. چون الکترون قطعاً در داخل چاه است، احتمال آشکارشدن در کل چاه ۱ است. پس، احتمال آشکارشدن در یک سوم وسط چاه عبارت است از

$$\begin{bmatrix}\text{احتمال آشکارشدن در}\\ \text{یک سوم وسط چاه}\end{bmatrix}=1-0/20-0/20=0/60 \qquad \text{(پاسخ)}$$

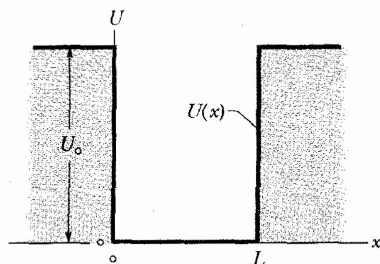
۳۹-۵ الکترون در یک چاه متناهی

یک چاه انرژی پتانسیل با عمق نامتناهی یک تصور آرمانی است. شکل ۳۹-۷ چاه انرژی پتانسیل تحقق پذیر را نشان می‌دهد – که در آن انرژی پتانسیل الکترون در بیرون چاه به طور نامحدودی بزرگ نیست بلکه مقدار مثبت محدود U_0 به نام **عمق چاه** را دارد. مقایسهٔ بین موجها در یک ریسمان کشیده شده و موجهای ماده نظر ما را دربارهٔ چاههای با عمق محدود با شکست روبه‌رو می‌کند، چون دیگر اطمینان نداریم که گره‌های موج ماده در $x=0$ و $x=L$ قرار داشته باشند. (همانطور که خواهیم دید، قرار ندارند.)

برای پیداکردن تابعهای موج توصیف کنندهٔ حالتهای کوانتومی الکترون در چاه متناهی شکل ۳۹-۷، باید به معادلهٔ شرودینگر، معادلهٔ اساسی فیزیک کوانتومی برگردیم. در بخش ۳۸-۷، برای حرکت در یک بعد، معادلهٔ شرودینگر را در شکل معادلهٔ ۳۸-۱۵ به کار بردیم:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}[E-U(x)]\psi=0 \qquad (39\text{-}18)$$

به جای تلاش جهت حل این معادله برای چاه متناهی، به طور ساده نتایج مقدارهای عددی خاص U_0 و L را بیان می‌کنیم. شکل ۳۹-۸ این نتایج را به صورت نمودارهای $\psi_n^2(x)$، چگالی

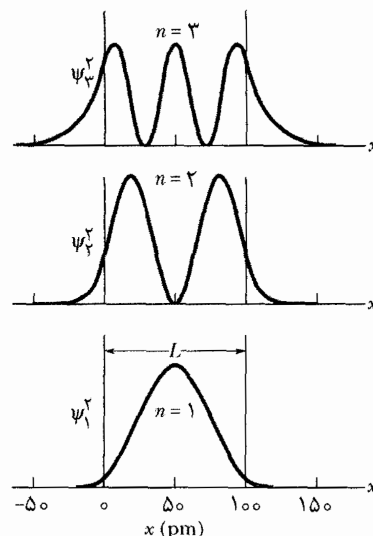


شکل ۳۹-۷ چاه انرژی پتانسیل *متناهی*. عمق چاه U_0 و پهنای آن L است. مانند چاه پتانسیل نامتناهی شکل ۳۹-۲، حرکت الکترون به تله افتاده در امتداد x محدود شده است.

احتمال برای چاهی با $U_0=450\,\mathrm{eV}$ و $L=100\,pm$ نشان می‌دهد.

چگالی احتمال $\psi_n^2(x)$ برای هر نمودار در شکل ۳۹-۸ در معادلهٔ ۳۹-۱۴، معادلهٔ بهنجارش صدق می‌کند؛ می‌دانیم که مساحتهای زیر هر سه نمودار چگالی احتمال به طور عددی برابر با ۱ است.

اگر معادلهٔ ۳۹-۸ در مورد چاه متناهی را با شکل ۳۹-۶ در مورد چاه نامتناهی مقایسه کنیم، یک اختلاف برجسته دیده خواهد شد: در مورد چاه متناهی، موج مادهٔ الکترون از دیواره‌های چاه، به داخل ناحیه‌ای که مکانیک نیوتونی می‌گوید الکترون نمی‌تواند در آنجا حضور داشته باشد، نفوذ می‌کند. این نفوذکردن جای شگفتی ندارد چون در بخش ۳۸-۹ دیدیم که الکترون می‌تواند از طریق سد انرژی پتانسیل تونل بزند. «نشت»



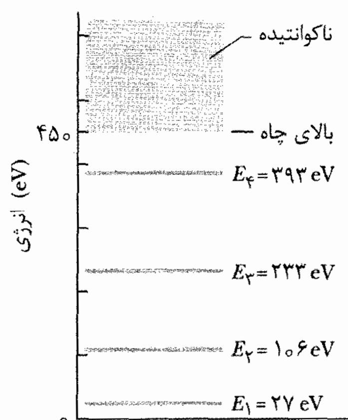
شکل ۳۹-۸ اولین سه چگالی احتمال $\psi_n(x)^۲$ برای الکترون محصور در چاه پتانسیل متناهی به عمق $U = ۴۵\ eV$ و پهنای $L = ۶۰\ pm$. تنها حالتهای کوانتومی که الکترون در این چاه می‌توانند داشته باشد حالتهایی هستند که عددهای کوانتومی $n = ۱،۲،۳$ دارند.

به داخل دیواره‌های چاه انرژی پتانسیل متناهی پدیدهٔ مشابهی است. از نمودارهای $\psi^۲$ در شکل ۳۹-۸، می‌بینیم که نشت به ازای مقدارهای بزرگتر عدد کوانتومی n بیشتر است.

چون موج ماده به داخل دیواره‌های چاه متناهی نشت *نمی‌کند*، طول موج λ برای هر حالت کوانتومی معین وقتی الکترون در تلهٔ چاه متناهی افتاده است از مقدار آن در وقتی که الکترون در تله چاه نامتناهی قرار دارد بزرگتر است. پس معادلهٔ ۳۹-۳ $(\lambda = h/\sqrt{۲mE})$ حاکی از آن است که انرژی E برای الکترون در هر حالت معین در چاه متناهی از چاه نامتناهی کمتر است.

این واقعیت به ما امکان می‌دهد تا نمودار تراز انرژی برای الکترون به تله افتاده در چاه متناهی را با تقریب پیدا کنیم. به عنوان مثال، نمودار چاه متناهی شکل ۳۹-۸ را که دارای پهنای $L = ۱۰۰pm$ و عمق $U_۰ = ۴۵۰\ eV$ است، می‌توان با تقریب پیدا کرد. نمودار تراز انرژی برای چاه *نامتناهی* با این پهنا در شکل ۳۹-۳ نشان داده شده است. ابتدا قسمت بالاتر از $۴۵۰\ eV$ را در شکل ۳۹-۳ برمی‌داریم. سپس سه تراز انرژی باقیمانده را با انتقال به تراز بیشتر $n = ۳$ به پایین منتقل می‌کنیم چون به ازای $n = ۳$ نشت موج به دیواره‌ها بیشترین مقدار را دارد. این نتیجه تقریباً نمودار تراز انرژی برای چاه متناهی است. نمودار واقعی شکل ۳۹-۹ است.

در این شکل، الکترون با انرژی بیشتر از $U_۰(=۴۵۰\ eV)$ دارای انرژی خیلی زیادی است و چاه متناهی نمی‌تواند آن را به تله اندازد. بنابراین، محصور نمی‌شود و انرژی آن کوانتیده نیست؛ یعنی، انرژی آن به مقدارهای معینی محدود نمی‌شود. برای رسیدن به این بخش *ناکوانتیده* از نمودار تراز انرژی و بنابراین، برای آزاد بودن، الکترون به تله افتاده باید به اندازهٔ کافی انرژی کسب کند تا انرژی مکانیکی $۴۵۰\ eV$ یا بیشتر داشته باشد.



شکل ۳۹-۹ نمودار تراز انرژی مربوط به چگالیهای احتمال شکل ۳۹-۸. اگر الکترونی در چاه پتانسیل متناهی به تله افتد، فقط انرژیهایی را خواهد داشت که متناظر با $n = ۱،۲،۳$ باشد. اگر انرژی آن $۴۵۰eV$ یا بیشتر باشد به تله نمی‌افتد و انرژی آن کوانتیده نیست.

مسئلهٔ نمونه ۳۶-۱

فرض کنید یک چاه متناهی با $U_۰ = ۴۵۰\ eV$ و $L = ۱۰۰pm$ الکترونی را در حالت پایه محصور کند.

(الف) اگر الکترون تک فوتونی از نور را جذب کند، طول موج نور مورد نیاز جهت آزادشدن آن از چاه پتانسیل چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی الکترونی که می‌خواهد از چاه پتانسیل فرار کند، باید به قدر کافی انرژی دریافت کند تا در ناحیه انرژی ناکوانتیدهٔ شکل ۳۹-۹ قرار گیرد. پس، باید حداقل انرژی $U_۰(=۴۵۰\ eV)$ را داشته باشد.

فرار به سختی: الکترون در آغاز در حالت پایهٔ خود با انرژی $E_۱ = ۲۴eV$ قرار دارد. بنابراین، جهت آزادشدن، به مقدار انرژی زیر نیاز دارد

$$U_۰ - E_۱ = ۴۵۰eV - ۲۴eV = ۴۲۶eV$$

اگر این انرژی را از نور دریافت کند، آنگاه باید فوتونی را با این مقدار انرژی جذب کند. از معادلهٔ ۳۹-۶ $(hf = E_{high} - E_{Low})$، با قراردادن c/λ به جای f، می‌توان نوشت

$$\frac{hc}{\lambda} = U_۰ - E_۱$$

که از آن داریم

$$\lambda = \frac{hc}{U_۰ - E_۱} = \frac{(۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴}J.s)(۳/۰۰\times۱۰^۸m/s)}{(۴۲۶eV)(۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}J/eV)} = ۲/۹۲\times۱۰^{-۹}m = ۲/۹۲nm$$

(پاسخ)

بنابراین، اگر الکترون فوتونی را از نور با طول موج $۲/۹۲nm$ جذب کند، از چاه پتانسیل فرار خواهد کرد.

(ب) آیا الکترون که از آغاز واقع در حالت پایه است، می‌تواند نور با طول موج ۲/۰۰nm را جذب کند؟ در این صورت، انرژی الکترون چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی

۱- در (الف) دریافتیم که نور ۲/۹۲nm الکترون را از چاه پتانسیل آزاد می‌کند.

۲- اکنون نوری با طول موج کوتاهتر از ۲/۰۰nm و در نتیجه با انرژی بیشتر به ازای هر فوتون $(hf = hc/\lambda)$ را بررسی می‌کنیم.

۳- بنابراین، الکترون می‌تواند یک فوتون از این نور را جذب کند. انرژی انتقال یافته نه تنها الکترون را آزاد می‌کند بلکه انرژی جنبشی خیلی زیادی به آن خواهد داد. افزون بر این، چون الکترون دیگر در تله نیست، انرژی آن کوانتیده نبوده و در نتیجه محدودیتی برای انرژی آن وجود ندارد.

بیشتر از فراز: انرژی انتقال یافته به الکترون انرژی فوتون است

$$hf = h\frac{c}{\lambda} = \frac{(۶/۶۳\times ۱۰^{-۳۴}\,\mathrm{J.s})(۳/۰۰\times ۱۰^{۸}\,\mathrm{m/s})}{۲/۰۰\times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{m}}$$
$$= ۹/۹۵\times ۱۰^{-۱۷}\,\mathrm{J} = ۶۲۲\,\mathrm{eV}$$

از (الف)، انرژی لازم برای آزادشدن الکترون از چاه پتانسیل $(U_\circ - E_۱)(=۴۲۶\mathrm{eV})$ است. باقیماندهٔ ۶۲۲eV به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود. پس انرژی جنبشی الکترون آزاد شده عبارت است از

$$K = hf - (U_\circ - E_۱)$$
$$= ۶۲۲\,\mathrm{eV} - ۴۲۶\,\mathrm{eV} = ۱۹۶\,\mathrm{eV} \qquad \text{(پاسخ)}$$

۳۹-۶ تله‌های الکترونی بیشتر

در اینجا دربارهٔ سه نوع تله الکترونی ساختگی بحث می‌کنیم.

نانو بلورکها

شاید بهترین راه برای ایجاد یک چاه انرژی پتانسیل در آزمایشگاه تهیهٔ یک نمونه از مادهٔ نیمرسانا به شکل گردی با دانه‌های کوچک، در گسترهٔ نانومتر، و اندازهٔ یکنواخت باشد. هر کدام از دانه‌ها، هر **نانوبلورک**، مانند یک چاه پتانسیل برای الکترونهای به تله افتادهٔ داخل آن عمل می‌کند.

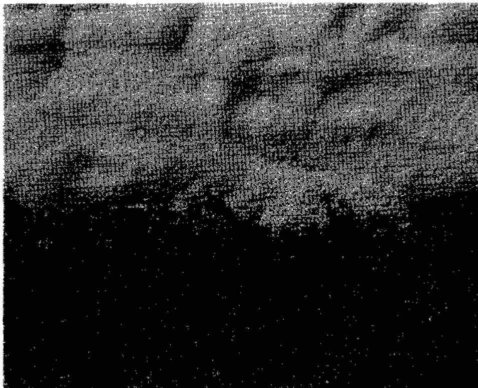
معادلهٔ ۳۹-۴، $E = (h^۲/۸mL^۲)n^۲$ نشان می‌دهد که مقدارهای تراز انرژی یک الکترون به تله افتاده در یک چاه نامتناهی را با کاهش پهنای L چاه می‌توان افزایش داد. این هم‌چنین انرژیهای فوتونی را که چاه می‌تواند جذب کند به مقدارهای بالاتر جابه‌جا می‌کند و بنابراین، طول موجهای متناظر به مقدارهای کوتاهتر جابه‌جا می‌شود.

این نتایج کلی هم‌چنین در مورد چاه تشکیل شده توسط یک نانوبلورک نیز درست است. یک نانوبلورک می‌تواند فوتونهای با انرژی بالاتر از انرژی آستانه $E_t(=hf_t)$ و در نتیجه طول موجهای زیر طول موج آستانهٔ مربوطه را جذب کند

$$\lambda_t = \frac{c}{f_t} = \frac{ch}{E_t} \qquad (۳۹\text{-}۱۹)$$

نور با هر طول موج بلندتری از λ_t به جای آنکه جذب شود توسط نانوبلورک پراکنده می‌شود. بنابراین، رنگی که به نانو بلورک نسبت می‌دهیم با ترکیب طول موج نور پراکنده شده‌ای که می‌بینیم تعیین می‌شود.

اگر اندازهٔ نانوبلورک را کاهش دهیم، مقدار E_t افزایش می‌یابد، مقدار λ_t کاهش می‌یابد، و ترکیب طول موج نوری که به طرف ما پراکنده می‌شود تغییر می‌کند. پس، رنگی که به نانو بلورک نسبت می‌دهیم تغییر می‌کند. به عنوان مثال، شکل ۳۹-۱۰ دو نمونه از نیمرسانای کادمیوم سلناید را نشان می‌دهد که هر یک شامل گردی از نانو بلورکهایی با اندازهٔ یکنواخت است. نمونهٔ پایینی نور را در انتهای قرمز طیف پراکنده می‌کند. نمونهٔ بالایی با نمونهٔ پایینی *فقط* در این فرق دارد که نمونهٔ بالایی از نانوبلورکهای کوچکتری تشکیل شده است. به این دلیل انرژی آستانهٔ E_t آن بزرگتر، و از معادلهٔ ۳۹-۱۹، طول موج آستانهٔ آن λ_t کوتاهتر و در گسترهٔ سبز نور مرئی است. بنابراین، این نمونه حالا قرمز و زرد را پراکنده می‌کند. چون مؤلفهٔ زرد روشنتر است، در رنگ نمونه زرد غلبه دارد. تمایز چشمگیر در رنگ بین دو نمونه مجاب کننده برای کوانتیدگی انرژی الکترونهای به تله افتاده و وابستگی این انرژیها به بزرگی تلهٔ الکترونی است.

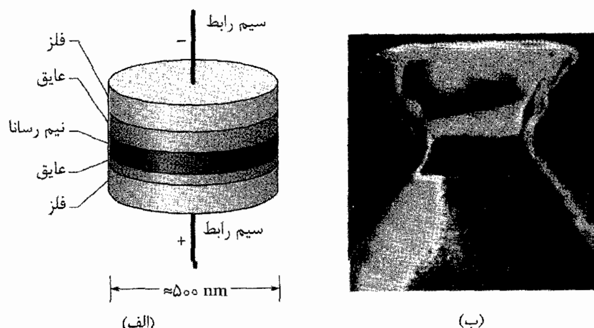


شکل ۳۹-۱۰ دو نمونه از کادمیوم سلناید گرد شده، یک نیمرسانا، که فقط در بزرگی دانه‌هایشان تفاوت دارند. هر دانه مانند یک تلهٔ الکترونی عمل می‌کند. نمونهٔ پایینی دارای دانه‌های بزرگتری است و در نتیجه فاصلهٔ کمتری بین ترازهای انرژی دارد و آستانهٔ انرژی فوتون برای جذب نور کمتر است. نور جذب نشده پراکنده شده و باعث می‌شود که نمونه نور با طول موج بزرگتر را پراکنده کند و قرمز به نظر برسد. نمونهٔ بالایی چون دانه‌هایش کوچکتر است و در نتیجه فاصلهٔ بیشتری بین ترازهای انرژی دارد، انرژی آستانه‌اش برای جذب بزرگتر است و زرد به نظر می‌رسد.

نقطه‌های کوانتومی

روشهای خیلی پیشرفته‌ای که برای ساخت تراشه‌های رایانه‌ای به کار رفته است می‌تواند برای ساخت، اتم به اتم، چاههای انرژی پتانسیل منفرد مورد استفاده قرار گیرند که در بسیاری از موارد، مانند اتمهای ساختگی رفتار می‌کنند. این **نقطه‌های کوانتومی**، که معمولاً به این نام نامیده می‌شوند، کاربردهای نویدبخشی در اپتیک الکترونی و فناوری رایانه دارند.

در یک چنین آرایشی، «ساندویچی» ساخته می‌شود که در آن یک لایهٔ نازک از یک مادهٔ نیمرسانا، که در شکل ۳۹-۱۱ الف تیره نشان داده است، بین دو لایهٔ عایق، که یکی از آنها خیلی از دیگری نازکتر است نشانده می‌شود. سرپوشهای فلزی با سیمهای رابط رسانا به دو انتها اضافه می‌شود. مواد انتخاب شده تضمین می‌کنند که انرژی پتانسیل الکترون در لایهٔ مرکزی کمتر از انرژی پتانسیل در لایهٔ عایق است، که موجب می‌شود لایهٔ مرکزی به صورت یک چاه انرژی پتانسیل عمل کند. شکل ۳۹-۱۱ (ب) تصویری از یک نقطهٔ کوانتومی واقعی را نشان می‌دهد؛ چاهی که در آن الکترونهای منفرد به تله افتاده‌اند ناحیهٔ تیره است که ارغوانی دیده می‌شود.



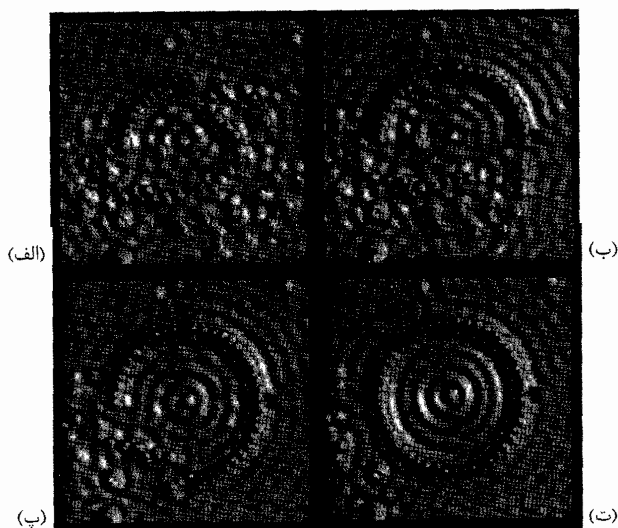
شکل ۳۹-۱۱ یک نقطهٔ کوانتومی یا «اتم مصنوعی». (الف) لایه مرکزی نیمرسانا یک چاه انرژی پتانسیل تشکیل می‌دهد که در آن الکترونها به تله افتاده‌اند. لایهٔ عایق پایینی به اندازهٔ کافی نازک است تا اگر ولتاژ مناسبی بین دو سیم رابط اعمال شود الکترونها بتوانند با تونل زدن به لایهٔ مرکزی اضافه شوند یا از آن برداشته شوند. (ب) تصویری از یک نقطهٔ کوانتومی واقعی. نوار تیرهٔ مرکزی ناحیهٔ محصور شدهٔ الکترون است.

لایهٔ عایق پایینی (ولی نه بالایی) در شکل ۳۹-۱۱ الف به اندازه‌ای نازک است که اگر اختلاف پتانسیل مناسبی بین دو سیم رابط اعمال شود، الکترونها می‌توانند از آن تونل بزنند. با این روش، تعداد الکترونهای محصور در چاه می‌تواند کنترل شود. این آرایش در واقع مانند یک اتم ساختگی با خاصیتی رفتار می‌کند که تعداد الکترونهای آن بتوانند کنترل شوند. نقطه‌های کوانتومی می‌توانند به صورت آرایه‌هایی دو بعدی ساخته شوند که به خوبی پایه‌ای برای دستگاههای محاسباتی با سرعت و ظرفیت ذخیرهٔ بالا هستند.

حصارهای کوانتومی

وقتی یک میکروسکوپ تونل‌زنی روبشی (که در بخش ۳۸-۹ توصیف شد) عمل می‌کند، نوک آن نیروی کوچکی بر اتمهای منزوی وارد می‌کند که ممکن است در سطح صاف دیگری واقع باشند. با حرکت دقیق مکان نوک، اتمهای منزوی می‌توانند در سطح «کشیده» شده و در مکان دیگر نشانده شوند. با استفاده از این روش، دانشمندان در مرکز پژوهشی IBM آلمادن اتمهای آهن را در یک سطح مسی با دقت آماده شده حرکت دادند، و با اتمها دایره‌ای را تشکیل دادند (شکل ۳۹-۱۲) که **حصار کوانتومی** نامیده می‌شود. این نتیجه در تصویر آغاز این فصل نشان داده شده است. هر اتم آهن روی دایره در فضایی خالی در سطح مسی، به فاصلهٔ مساوی از سه اتم مس مجاور قرار دارد. این حصار در دمای پایین (تقریباً ۴K) ایجاد می‌شود تا تمایل اتمهای آهن برای حرکت کاتوره‌ای بر اثر انرژی گرمایی روی سطح کمینه باشد.

موجکهای داخل حصار ناشی از موجهای ماده مربوط به الکترونهایی هستند که می‌توانند روی سطح مس حرکت کنند ولی در چاه پتانسیل حصار به تله افتاده‌اند. ابعاد این موجکها با پیش‌بینیهای نظریهٔ کوانتومی توافق خیلی خوبی دارند.



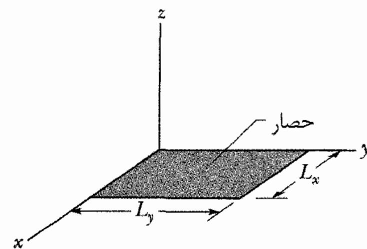
شکل ۳۹-۱۲ یک حصار کوانتومی در ضمن چهار مرحلهٔ ساخت. به وجود موجکهای ناشی از الکترونهای به تله افتاده در حصار وقتی حصار تقریباً کامل شده است توجه کنید.

۳۹-۷ تله‌های الکترونی دو و سه بعدی

در بخش بعدی دربارهٔ اتم هیدروژن به عنوان یک چاه پتانسیل سه بعدی متناهی بحث خواهیم کرد. تا به این کار برسیم، دربارهٔ چاههای پتانسیل دو و سه بعدی نامتناهی بیشتر بحث می‌کنیم.

حصار مستطیلی

شکل ۳۹-۱۳ مساحت مستطیلی را نشان می‌دهد که مشابه با شکل ۳۹-۲ یعنی یک چاه پتانسیل نامتناهی دو بعدی با ابعاد L_x و L_y، یک حصار مستطیلی را تشکیل می‌دهد، و الکترون می‌تواند در آن محصور شود. این حصار ممکن است روی سطح جسمی باشد که به ترتیبی نمی‌گذارد الکترون موازی با محور z حرکت کند و در نتیجه از ترک سطح جلوگیری می‌کند. باید تابعهای انرژی پتانسیل نامتناهی در امتداد هر ضلع حصار را تصور کنید (مانند $U(x)$ در شکل ۳۹-۲) که الکترون را در داخل حصار نگه می‌دارد.



شکل ۳۹-۱۳ یک حصار مستطیلی، مشابه دو بعدی چاه پتانسیل نامتناهی شکل ۳۹-۲، با ابعاد L_x و L_y.

حل معادلهٔ شرودینگر برای حصار مستطیل شکل ۳۹-۱۳ نشان می‌دهد که برای اینکه الکترون به تله افتد، باید موج مادهٔ آن جداگانه با هر یک از دو بعد مطابقت داشته باشد، درست همانطور که موج مادهٔ الکترون به تله افتاده باید با چاه نامتناهی یک بعدی مطابقت داشته باشد. این بدان معناست که موج در بعد L_x و بعد L_y جداگانه کوانتیده است. فرض کنیم n_x عدد کوانتومی برای مطابقت موج ماده با بعد L_x و n_y عدد کوانتومی برای مطابقت موج ماده با بعد L_y باشد. مانند چاه پتانسیل یک بعدی، این عددهای کوانتومی فقط می‌توانند عددهای صحیح مثبت باشند.

انرژی الکترون به هر دو عدد کوانتومی بستگی دارد و عبارت از مجموع انرژی الکترون در وقتی است که به تنهایی در امتداد محور x و به تنهایی در امتداد محور y محصور شده باشد. از معادله ۳۹-۴، این جمع را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E_{nx,ny}=\left(\frac{h^2}{8mL_x^2}\right)n_x^2+\left(\frac{h^2}{8mL_y^2}\right)n_y^2=\frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2}+\frac{n_y^2}{L_y^2}\right) \quad (۳۹-۲۰)$$

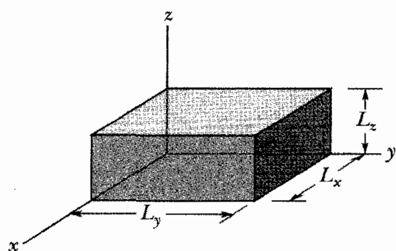
برانگیختگی الکترون توسط جذب فوتون و واانگیختگی توسط گسیل فوتون همان الزامات تله یک بعدی را دارد. تنها فرق عمده در مورد حصار کوانتومی دو بعدی این است که انرژی یک حالت معین به جای فقط یک عدد کوانتومی (n) به دو عدد کوانتومی (n_y, n_x) بستگی دارد. در حالت کلی، حالتهای متفاوت (با جفت مقدار متفاوت برای n_x و n_y) انرژیهای متفاوتی دارند. ولی، در برخی موقعیتها، حالتهای مختلف می‌توانند یک انرژی داشته باشند. به چنین حالتهایی (و ترازهای انرژی آنها) *واگن* گفته می‌شود. حالتهای واگن در چاه یک بعدی نمی‌توانند رخ دهند.

جعبهٔ مستطیل شکل

الکترون هم‌چنین می‌تواند به تلهٔ یک چاه پتانسیل نامتناهی سه بعدی یعنی یک جعبه، بیفتد. اگر جعبه مانند شکل ۳۹-۱۴ مستطیل شکل باشد، آنگاه معادله شرودینگر نشان می‌دهد که انرژی الکترون را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E_{nx,ny,nz}=\frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2}+\frac{n_y^2}{L_y^2}+\frac{n_z^2}{L_z^2}\right) \quad (۳۹-۲۱)$$

در اینجا عدد کوانتومی سوم n_z برای تطبیق موج ماده با بعد L_z است.



شکل ۳۹-۱۴ یک جعبه مستطیل شکل نظیر سه بعدی چاه پتانسیل نامتناهی شکل ۳۹-۲، با ابعاد L_x، L_y و L_z.

✔ نکتهٔ وارسی ۴ برحسب نمادهای معادلهٔ ۳۹-۲۰، آیا $E_{0,0}$، $E_{1,0}$، $E_{0,1}$ یا $E_{1,1}$ انرژی حالت پایهٔ الکترون در یک حصار مستطیل شکل (دو بعدی) است؟

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۹-۵

الکترونی در حصار مربعی یک چاه پتانسیل نامتناهی دو بعدی (شکل ۳۹-۱۳) با ابعاد $L_x = L_y$، به تله افتاده است.

(الف) انرژیهای پنج پایینترین تراز انرژی ممکن برای الکترونهای در تله افتاده را پیدا و نمودار تراز انرژی متناظر را رسم کنید.

نکتهٔ کلیدی چون الکترون در یک چاه دو بعدی مستطیل شکل به تله افتاده است، انرژی آن بنابر معادلهٔ ۳۹-۲۰ به دو عدد کوانتومی n_x و n_y بستگی دارد. چون چاه مربعی است می‌توان نوشت $L_x = L_y = L$. پس معادلهٔ ۳۹-۲۰ به این معادله ساده می‌شود

$$E_{nx,ny}=\frac{h^2}{8mL^2}\left(n_x^2+n_y^2\right) \quad (۳۹-۲۲)$$

پایینترین حالتهای انرژی مربوط به مقدارهای کم عددهای کوانتومی n_x و n_y هستند، که عبارت‌اند از عددهای صحیح مثبت ۱، ۲، ...، ∞. با قراردادن این عددهای صحیح به جای n_x و n_y در معادلهٔ ۳۹-۲۲، با شروع از پایینترین مقدار ۱،

انرژیهای نوشته شده در جدول ۳۹-۱ را می‌توان به دست آورد. در آنجا می‌توان دید که چند جفت عدد کوانتومی (n_x, n_y)، یک مقدار انرژی به دست می‌دهد. برای مثال حالتهای (۲ و ۱) و (۱ و ۲) هر دو انرژی یکسان $5(h^2/8mL^2)$ دارند. هرچنین جفتی به ترازهای انرژی واگن مربوط می‌شود. هم‌چنین توجه کنید که، به طور شگفت انگیزی، حالتهای (۱ و ۴) و (۴ و ۱) انرژی کمتری از حالت (۳ و ۳) دارند.

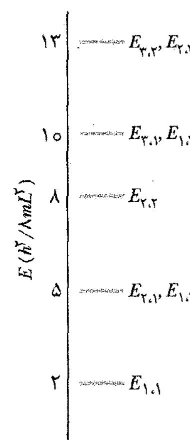
از جدول ۳۹-۱ (مسیر ترازهای واگن را با دقت دنبال کنید) می‌توان نمودار تراز انرژی شکل ۳۹-۱۵ را رسم کرد.

جدول ۳۹-۱

ترازهای انرژی

n_x	n_y	انرژی*	n_x	n_y	انرژی*
۱	۳	۱۰	۲	۴	۲۰
۳	۱	۱۰	۴	۲	۲۰
۲	۲	۸	۳	۳	۱۸
۱	۲	۵	۱	۴	۱۷
۲	۱	۵	۴	۱	۱۷
۱	۱	۵	۲	۳	۱۳
			۳	۲	۱۳

* برحسب ضریب $h^2/8mL^2$



شکل ۳۹-۱۵ نمودار تراز انرژی الکترون در تله یک حصار مربعی.

(ب) بر حسب ضریب $h^2/8mL^2$، اختلاف انرژی بین حالت پایه و حالت برانگیختهٔ سوم الکترون چقدر است؟

اختلاف انرژی: از شکل ۳۹-۱۵، می‌بینیم که حالت پایه عبارت است از (۱،۱)، با انرژی $2(h^2/8mL^2)$. هم‌چنین می‌بینیم که حالت برانگیختهٔ سوم (حالت سوم بالاتر از حالت پایه در نمودار تراز انرژی) واگن حالتهای (۳و۱) و (۱و۳) با انرژی $10(h^2/8mL^2)$ است. پس ΔE اختلاف بین این دو حالت عبارت است از

$$\Delta E = 10\left(\frac{h^2}{8mL^2}\right) - 2\left(\frac{h^2}{8mL^2}\right) = 8\left(\frac{h^2}{8mL^2}\right) \qquad \text{(پاسخ)}$$

۳۹-۸ مدل بور اتم هیدروژن

اکنون از تله‌های ساختگی و خیالی الکترون سراغ تله‌های طبیعی یعنی اتمها، می‌رویم. در این بخش توجه خود را روی ساده‌ترین مثال یعنی اتم هیدروژن معطوف می‌کنیم. این اتم شامل یک الکترون است که به طور الکتریکی به یک پروتون مقید است، که تنها تشکیل دهندهٔ هستهٔ اتم در مرکز اتم است. در اینجا چیزی دربارهٔ هسته در نظر نمی‌گیریم. بلکه، به طور ساده از این واقعیت استفاده می‌کنیم که الکترون با بار منفی با نیروی کولنی توسط پروتون با بار مثبت جذب می‌شود. چون جرم پروتون خیلی بیشتر از جرم الکترون است، فرض می‌کنیم که پروتون در جای خود ثابت و الکترون در نزدیکی پروتون محصور شده است. یعنی الکترون به تله افتاده است.

تا کنون به تفصیل بحث کرده‌ایم که انحصار الکترون به معنی آن است که انرژی E الکترون و در نتیجه هر تغییر انرژی ΔE در انرژی آن کوانتیده است. در این بخش انرژیهای کوانتیدهٔ الکترون را در اتم هیدروژن محاسبه می‌کنیم. ولی، پیش از اعمال رویکرد موجی که در چاههای پتانسیل نامتناهی و متناهی به کار بردیم، اتم هیدروژن را در آغاز پیدایش فیزیک کوانتومی، وقتی که فیزیکدانان برای اولین بار کشف کردند که اتمها سامانه‌هایی کوانتیده‌اند، بررسی می‌کنیم.

در اوایل سالهای ۱۲۸۰/۱۹۰۰، دانشمندان متوجه شده بودند که ماده به صورت خرده‌های ریزی به نام اتم بوده و اتم هیدروژن در مرکز خود یک بار مثبت $+e$ و در بیرون از مرکز بار منفی $-e$ (یک الکترون) دارد. ولی، این امر فهمیده نشده بود که چرا جاذبهٔ الکتریکی بین الکترون و بار مثبت موجب فرو ریختن این دو در یکدیگر نمی‌شود.

یک سر نخ، از این واقعیت به دست آمد که اتم هیدروژن نمی‌تواند همه طول موجهای نور مرئی را گسیل و جذب کند. بلکه، این اتم می‌تواند فقط چهار طول موج خاص از گسترهٔ مریی را گسیل و جذب کند. از روی حدس، بالمر[1] فرمولی را برای این طول موجها به دست داد:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{به ازای } n = 3, 4, 5, 6 \qquad (۳۹-۲۳)$$

که در آن R یک ثابت است. ولی، نه بالمر و نه کس دیگری نمی‌دانست که چرا گسیل و جذب مرئی توسط اتم هیدروژن به چهار طول موجی که با این فرمول داده می‌شود محدود شده است. چرا اتم هیدروژن در هر طول موج مرئی نور گسیل و جذب نمی‌کند؟

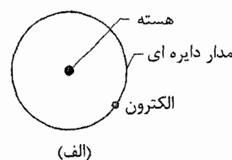
تا سال ۱۲۹۲/۱۹۱۳ کسی نمی‌دانست، تا اینکه بور معادلهٔ بالمر را دید و به سرعت پی برد که او می‌تواند به نتیجه دست یابد در صورتی که چند فرض جسورانه (کاملاً بدون توجیه) ارائه کند: (۱) الکترون در اتم هیدروژن روی دایره‌ای خیلی

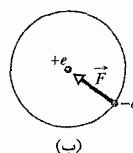
1. Johann Balmer

شبیه به مدارهای زمین دور خورشید به دور هسته می‌چرخد (شکل ۳۹-۱۶ الف). (۲) بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ الکترون در مدار خود به مقدارهای زیر محدود می‌شود

$$L = n\hbar \quad \text{به ازای} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (۳۹\text{-}۲۴)$$

که در آن $\hbar$ (h بار) $h/2\pi$ و n یک عدد کوانتومی است.
اکنون نتایج حاصل از دو فرض بور را ملاحظه می‌کنیم.





شکل ۳۹-۱۶ (الف) مدار دایره‌ای یک الکترون در مدل بور برای اتم هیدروژن. (ب) نیروی کولنی $\vec{F}$ وارد بر الکترون به طور شعاعی به طرف داخل به طرف هسته است.

شعاع مداری در مدل بور کوانتیده است

حرکت مداری الکترون در مدل بور را بررسی می‌کنیم. نیرویی که الکترون را در مداری به شعاع r نگه می‌دارد نیروی کولنی است. از معادلهٔ ۱۷-۱ (جلد دوم) می‌دانیم که بزرگی این نیرو عبارت است از

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

که در آن $k = 1/4\pi\varepsilon_0$ است. در اینجا q_1 بار $-e$ الکترون و q_2 بار $+e$ هسته (پروتون) است. شتاب الکترون شتاب رو به مرکز با بزرگی $a = v^2/r$ است، که در آن v تندی الکترون است. هم نیروی $\vec{F}$ و هم شتاب $\vec{a}$ به طور شعاعی به داخل (جهت منفی در یک محور شعاعی)، به طرف هسته قرار دارند (شکل ۳۹-۱۶ ب). بنابراین، می‌توانیم قانون دوم نیوتون $(F = ma)$ را برای یک محور شعاعی به صورت زیر بنویسیم

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m\left(-\frac{v^2}{r}\right) \qquad (۳۹\text{-}۲۵)$$

که در آن m جرم الکترون است.

سپس با استفاده از فرض بور بیان شده در معادلهٔ ۳۹-۲۴ کوانتیدگی را وارد می‌کنیم. از معادلهٔ ۱۱-۱۹ (جلد اول)، بزرگی l اندازه حرکت زاویه‌ای ذره‌ای به جرم m که با تندی v در دایره‌ای به شعاع r حرکت می‌کند عبارت است از $l = rmv\sin\phi$، که ϕ (زاویهٔ بین $\vec{r}$ و $\vec{v}$) $90°$ است. با جایگذاری L در معادلهٔ ۳۹-۲۴ با $rmv\sin 90°$ داریم

$$rmv = n\hbar$$

یا

$$v = \frac{n\hbar}{rm} \qquad (۳۹\text{-}۲۶)$$

با قراردادن این معادله در معادلهٔ ۳۹-۲۵ و با قراردادن $\hbar$ به صورت $h/2\pi$، و مرتب کردن دوباره پیدا می‌کنیم

$$r = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m e^2}n^2 \quad \text{به ازای} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (۳۹\text{-}۲۷)$$

این را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$r = an^2 \quad \text{به ازای} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (۳۹\text{-}۲۸)$$

که در آن

$$a = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m e^2} = 5/291772 \times 10^{-11}\,\text{m} \approx 52/92\,\text{pm} \qquad (۳۹\text{-}۲۹)$$

از سه معادله آخر معلوم است که، در *مدل بور اتم هیدروژن*، شعاع مداری الکترون r کوانتیده است و کوچکترین شعاع مدار ممکن (به ازای $n = 1$) برابر a است، که *شعاع بور* نامیده می‌شود. بنابر مدل بور، الکترون نمی‌تواند بیش از شعاع مداری a به هسته نزدیک شود و علت آن است که جاذبهٔ بین الکترون و هسته به سادگی موجب فرو افتادن آنها در یکدیگر نمی‌شود.

انرژی مداری کوانتیده است

اکنون انرژی اتم هیدروژن را بنابر مدل بور پیدا می‌کنیم. انرژی جنبشی الکترون $K = \frac{1}{2}mv^2$، و انرژی پتانسیل سامانهٔ الکترون – هسته $U = q_1q_2/4\pi\varepsilon_0 r$ است (معادلهٔ ۲۰-۴۳ جلد دوم). دوباره q_1 را بار الکترون $-e$ و q_2 را بار هسته $+e$ قرار می‌دهیم. بنابراین، انرژی مکانیکی عبارت است از

$$E = K + U$$
$$= \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}\right) \qquad (۳۹\text{-}۳۰)$$

با حل معادلهٔ ۳۹-۲۵ بر حسب mv^2 و قراردادن نتیجه در معادلهٔ ۳۹-۳۰، خواهیم داشت

$$E = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \qquad (۳۹\text{-}۳۱)$$

سپس به جای r معادل آن را از معادلهٔ ۳۹-۲۷ قرار می‌دهیم، داریم

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\frac{1}{n^2} \quad \text{به ازای} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (۳۹\text{-}۳۲)$$

که زیرنویس n در E نشان دهندهٔ کوانتیده بودن انرژی است. با محاسبهٔ ثابتها در معادلهٔ ۳۹-۳۲، داریم

$$E_n = -\frac{2/180 \times 10^{-18}\,\text{J}}{n^2} = -\frac{13/60\,\text{eV}}{n^2}$$
$$\text{به ازای} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (۳۹\text{-}۳۳)$$

از این معادله معلوم است که انرژی E_n اتم هیدروژن کوانتیده است؛ یعنی، E_n با وابستگی آن به عدد کوانتومی n محدود می‌شود. چون، هسته در محل خود ثابت فرض می‌شود و فقط الکترون حرکت می‌کند، مقدارهای انرژی معادلهٔ ۳۹-۳۳ را می‌توان یا به اتم به عنوان یک کل یا به تنهایی به الکترون نسبت داد.

تغییرات انرژی

انرژی اتم هیدروژن (یا به طور معادل، انرژی الکترون آن) وقتی اتم نور گسیل یا جذب کند تغییر می‌کند. همانطور که چند بار از معادلهٔ ۳۹-۶ دیدیم، گسیل و جذب به ترتیب زیر دربردارندهٔ یک کوانتوم نور است

$$hf = \Delta E = E_{\text{high}} - E_{\text{Low}} \qquad (۳۴-۳۹)$$

سه تغییر در معادلهٔ ۳۹-۳۴ ایجاد می‌کنیم. در سمت چپ، c/λ را به جای f قرار می‌دهیم. در سمت راست، در معادلهٔ ۳۹-۳۲ دو بار برای قراردادن جمله‌های مربوط به انرژی استفاده می‌کنیم. بنابراین، با یک مرتب کردن ساده، خواهیم داشت

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{me^4}{8\varepsilon_\circ^2 h^3 c}\left(\frac{1}{n_{\text{high}}^2 - n_{\text{low}}^2}\right) \qquad (۳۵-۳۹)$$

این فرمول را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_{\text{low}}^2} - \frac{1}{n_{\text{high}}^2}\right) \qquad (۳۶-۳۹)$$

که در آن

$$R = \frac{me^4}{8\varepsilon_\circ^2 h^3 c} = 1/097373 \times 10^7\,\text{m}^{-1} \qquad (۳۷-۳۹)$$

ثابت ریدبرگ نامیده می‌شود.

معادلهٔ ۳۹-۳۶ از مدل بور را با معادلهٔ ۳۹-۲۳ از کار بالمر مقایسه کنید. در معادلهٔ ۳۹-۳۶، اگر n_{Low} را ۲ قرار داده و سپس n_{high} را به ۳ و ۴ و ۵ و ۶ محدود کنیم، معادلهٔ بالمر را خواهیم داشت. این مطابقت یک پیروزی مهم برای بور و راهنمایی در فیزیک کوانتومی اتمهاست. با این وجود، این موفقیت عمر کوتاهی داشت، چون با اینکه مدل بور طول موجهای گسیل و جذب صحیحی برای اتم هیدروژن به دست می‌دهد، ولی مدل صحیحی *نیست* چون الکترون مانند سیاره‌ای که به دور خورشید می‌گردد به دور هسته *نمی‌گردد*. در واقع، پژوهشگران در تعمیم مدل بور به اتمهای خیلی پیچیده‌تر از هیدروژن موفقیت کمی پیدا کردند. دلیل این عدم موفقیت این است که الکترونی که در اتم به تله افتاده یک موج مادهٔ محصور در یک چاه پتانسیل است، و برای پیداکردن مقدارهای انرژی کوانتیده حاصل باید معادلهٔ شرودینگر را برای الکترون به کار برد.

۳۹-۹ معادلهٔ شرودینگر و اتم هیدروژن

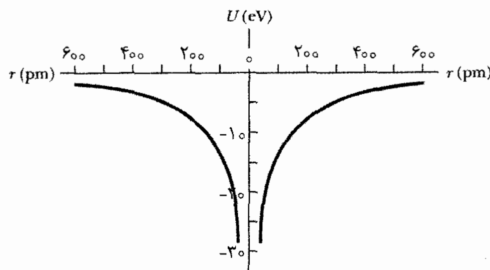
چاه پتانسیل اتم هیدروژن به تابع انرژی پتانسیل الکتریکی زیر بستگی دارد

$$U(r) = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_\circ r} \qquad (۳۸-۳۹)$$

چون این چاه سه بعدی است، این از چاههای یک بعدی و دو بعدی قبلی، پیچیده‌تر است. چون این چاه متناهی است، از چاه سه بعدی شکل ۳۹-۱۴ نیز پیچیده‌تر است. افزون بر این، دیواره‌های تعریف شدهٔ دقیقی ندارد. در عوض، دیواره‌های آن در عمق بر حسب فاصلهٔ شعاعی r تغییر می‌کند. شکل ۳۹-۱۷ بهترین کاری است که می‌توانیم در مورد ترسیم چاه پتانسیل هیدروژن انجام دهیم، ولی حتی این کار نیز برای تفسیر به تلاش زیادی نیاز دارد.

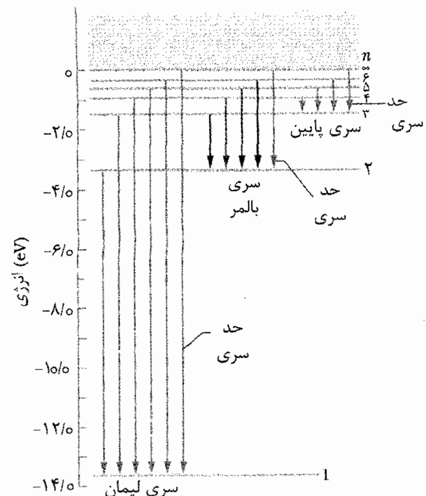
ترازهای انرژی و طیف اتم هیدروژن

اگرچه این کار را انجام نمی‌دهیم، ولی معادله شرودینگر را برای یک الکترون به تله افتاده در چاه پتانسیل که با معادلهٔ ۳۹-۳۶ داده شده است در نظر می‌گیریم. با این کار درخواهیم یافت که مقدارهای انرژی کوانتیده‌اند و جالب اینکه، این مقدارها درست مانند مدل (ناصحیح) بور با معادلهٔ ۳۹-۳۳ داده می‌شوند. بنابراین، تغییر ΔE در انرژی بر اثر گسیل یا جذب نور با معادلهٔ ۳۹-۳۴ داده می‌شود، و طول موجهای متناظر با ΔE با معادلهٔ ۳۹-۳۶ داده می‌شوند. این نتایج را بررسی می‌کنیم.



شکل ۳۹-۱۷ انرژی پتانسیل U اتم هیدروژن بر حسب تابعی از فاصلهٔ r بین الکترون و پروتون مرکزی. این نمودار دو بار نشان داده شده است (یکی در سمت چپ و یکی در سمت راست) تا تلهٔ متقارن کروی سه بعدی که الکترون در آن محصور شده است نشان داده شود.

شکل ۳۹-۱۸ ترازهای انرژی مربوط به مقدارهای مختلف n را در معادلهٔ ۳۹-۳۳ نشان می‌دهد. پایینترین تراز، به ازای $n=1$ ، حالت پایهٔ هیدروژن است. ترازهای بالاتر مربوط به حالتهای برانگیخته هستند که در تله‌های پتانسیل سادهٔ خود دیدیم. ولی، به چند تفاوت توجه کنید. (۱) اکنون ترازهای انرژی به جای مقدارهای مثبتی که قبلاً در شکلهای ۳۹-۳ و ۳۹-۹ انتخاب کردیم، منفی‌اند. (۲) حالا ترازها با حرکت به سمت ترازهای بالا به یکدیگر نزدیک می‌شوند. (۳) انرژی برای بیشترین مقدار n ، یعنی $n=\infty$ ، اکنون $E_\infty = 0$ است. به ازای هر انرژی بیشتر از $E_\infty = 0$ ، الکترون و پروتون به یکدیگر مقید نیستند (اتم هیدروژنی وجود ندارد)، و ناحیهٔ $E>0$ در شکل ۳۹-۱۸ مانند ناحیهٔ ناکوانتیده برای چاه متناهی شکل ۳۹-۹ است.



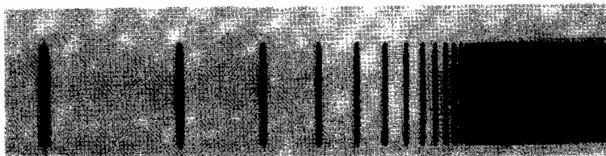
شکل ۳۹-۱۸ نموداری از شکل ۳۹-۳۳، که چند تراز انرژی اتم هیدروژن را نشان می‌دهد. این گذارها در سریهایی دسته‌بندی و هر یک با نام شخصی نامگذاری شده‌اند.

اتم هیدروژن با گسیل یا جذب نور در طول موجهای داده شده با معادلهٔ ۳۹-۳۶ می‌تواند بین ترازهای انرژی پرش کند. هر یک از چنین طول موجهایی به دلیل روشنی که با طیف‌نما آشکار می‌شوند *خط* نامیده می‌شوند؛ بنابراین، اتم هیدروژن *خطهای جذبی* و *خطهای گسیلی* دارد. مجموعه‌ای از چنین خطهایی، مانند آنچه که در گسترهٔ مرئی وجود دارد، **طیف** اتم هیدروژن نامیده می‌شود.

خطهای هیدروژن در *سریهایی*، بنابر ترازی که در آن پرشها از بالا شروع و در پایین خاتمه می‌پذیرند دسته‌بندی می‌شوند. برای مثال، خطهای گسیل و جذب برای تمام پرشهای احتمالی رو به بالا از تراز $n=1$ و رو به پایین تراز $n=1$ *سری لیمان* گفته می‌شود، که نام شخصی است که اولین بار این خطها را مطالعه کرده است. افزون بر این، می‌توان گفت که سری لیمان دارای تراز *اولیهٔ* $n=2$، و *سری پاشن* دارای تراز اولیهٔ $n=3$ هستند.

تعدادی از پرشهای کوانتومی رو به پایین برای این سه سری در شکل ۳۹-۱۸ نشان داده شده است. چهار خط در سری بالمر در گسترهٔ نور مرئی‌اند و آنهایی هستند که توسط بالمر مطالعه شده‌اند. اینها در شکل ۳۹-۱۸ با پیکانهایی مربوط به رنگ آنها نمایش داده شده‌اند. کوتاهترین پیکانها نشان دهندهٔ کوتاهترین پرش در سری از تراز $n=3$ به تراز $n=2$ است. بنابراین، این پرش دربردارندهٔ کوچکترین تغییر در انرژی الکترون و کوچکترین مقدار انرژی فوتون گسیل شده برای این سری است. این نور گسیل شده قرمز است. پرش بعدی در این سری، از $n=4$ به $n=2$ بلندتر است و در نتیجه انرژی فوتون بیشتر، طول موج گسیل شده کوتاهتر و نور سبز است. پیکانهای سوم، چهارم و پنجم نشان دهندهٔ پرشهای بلندتر و طول موجهای کوتاهتر است. در مورد پرش پنجم، نور گسیل شده در گسترهٔ فرابنفش است و بنابراین، مرئی نیست.

حد سری در یک سری خطی است که با پرش بین تراز پایه و بالاترین تراز انرژی ایجاد می‌شود، که ترازی است با عدد کوانتومی $n=\infty$. بنابراین، حد سری عبارت است از کوتاهترین طول موج سری. شکل ۳۹-۱۹ تصویری از خطهای گسیلی بالمر است که با یک طیف‌نما (مانند شکلهای ۳۶-۲۴ و ۳۶-۲۵) گرفته شده است. حد سری با مثلث کوچکی نشانه‌گذاری شده است.



شکل ۳۹-۱۹ طیف خطهای گسیلی سری بالمر اتم هیدروژن. در حالی که شکل ۳۹-۱۸ چهار گذار در این سری و حد سری را نشان می‌دهد، این شکل حدود دوازده خط سری را نشان می‌دهد؛ توجه کنید که خطها در نزدیکی حد سری به یکدیگر نزدیک می‌شوند، که با یک مثلث نشانه‌گذاری شده است.

اگر یک پرش به طرف بالا به بخش ناکوانتیدهٔ شکل ۳۹-۱۸ باشد، انرژی الکترون دیگر با معادلهٔ ۳۹-۳۳ داده نمی‌شود چون الکترون دیگر در تلهٔ اتم نیست. یعنی اتم هیدروژن یونیده شده است به این معنی که الکترون به آنچنان فاصلهٔ دوری برده شده است که نیروی کولنی وارد بر آن از طرف هسته ناچیز است. اگر اتم طول موجی بزرگتر از حد سری را جذب کند می‌تواند یونیده شود. بنابراین، الکترون آزاد فقط انرژی جنبشی (با فرض وضعیت غیر نسبیتی، $K(=\frac{1}{2}mv^2)$ دارد.

عددهای کوانتومی برای اتم هیدروژن

اگرچه انرژیهای حالتهای اتم هیدروژن با یک عدد کوانتومی n می‌تواند توصیف شود، تابعهای موج توصیف کننده این حالتها مستلزم سه عدد کوانتومی، متناظر با سه بعدی هستند که الکترون می‌تواند حرکت کند. این سه عدد کوانتومی، همراه با نام و مقدارهایی که می‌توانند داشته باشند در جدول ۳۹-۲ نشان داده شده‌اند.

هر مجموعه از عددهای کوانتومی (n,l,m_l) تابع موجی از یک حالت کوانتومی خاص را مشخص می‌کنند. عدد کوانتومی n، به نام **عدد کوانتومی اصلی**، در معادلهٔ ۳۹-۳۳ برای انرژی حالت ظاهر می‌شود. **عدد کوانتومی مداری** l معیاری از بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای وابسته به آن حالت کوانتومی است. **عدد کوانتومی مغناطیسی مداری** m_l، به سمتگیری فضایی این بردار اندازه حرکت زاویه‌ای مربوط است. محدودیت در مقدارهای عددهای کوانتومی اتم هیدروژن، به ترتیبی که در جدول ۳۹-۲

آمده است، اختیاری نیست، بلکه از حل معادلهٔ شرودینگر به دست می‌آید. توجه کنید که در مورد حالت پایه $(n=۱)$، این محدودیتها مستلزم آن است که $l=۰$ و $m_l=۰$. یعنی، اندازه حرکت زاویه‌ای اتم هیدروژن در حالت پایهٔ خود صفر است، که در مدل بور توسط معادلهٔ ۳۹-۲۴ پیش‌بینی نشده بود.

> **✔ نکتهٔ وارسی ۵** (الف) گروهی از حالتهای کوانتومی اتم هیدروژن دارای $n=۵$ هستند. چند مقدار برای حالتهای موجود در این گروه امکانپذیر است؟
> (ب) یک زیر گروه اتم هیدروژن در گروه $n=۵$ ، $l=۳$ است. چند مقدار m_l برای حالتهای این زیر گروه امکانپذیر است؟

جدول ۳۹-۲

عددهای کوانتومی برای اتم هیدروژن

نماد	نام	مقدارهای مجاز
n	عدد کوانتومی اصلی	$۱,۲,۳,\cdots$
l	عدد کوانتومی مداری	$۰,۱,۲,۳,\cdots,n-۱$
m_l	عدد کوانتومی مغناطیسی مداری	$-l,-(l-۱),\cdots,+(l-۱),+l$

تابع موج حالت پایهٔ اتم هیدروژن

تابع موج برای حالت پایهٔ اتم هیدروژن، که از حل معادلهٔ شرودینگر سه بعدی و بهنجارش نتیجه به دست می‌آید، عبارت است از

$$\psi(r)=\frac{۱}{\sqrt{\pi}a^{۳/۲}}e^{-r/a} \qquad \text{(حالت پایه)} \qquad (۳۹-۳۹)$$

که در آن a شعاع بور (معادلهٔ ۳۹-۲۹) است. این شعاع تقریباً شعاع مؤثر یک اتم هیدروژن در نظر گرفته می‌شود و معلوم شده است که یکای مناسبی از طول برای وضعیتهای دیگر موجود در ابعاد اتمی است.

مانند سایر تابعهای موج، $\psi(r)$ در معادلهٔ ۳۹-۳۹ معنی فیزیکی ندارد ولی $\psi^۲(r)$ چگالی احتمال یعنی احتمال بر یکای حجم است که الکترون می‌تواند در آن آشکار شود. به ویژه، $\psi^۲(r)dV$ احتمالی است که الکترون می‌تواند در عنصر حجم (بینهایت کوچک) dV واقع در شعاع r از مرکز اتم آشکار شود:

(حجم dV) (چگالی احتمال حجم $\psi^۲(r)$ در شعاع r) (احتمال آشکارشدن در حجم dV در شعاع r) (۳۹-۴۰)

چون $\psi^۲(r)$ فقط به r بستگی دارد، بهتر این است که برای حجم dV ، حجم بین دو پوستهٔ کروی هم مرکز به شعاع r و $r+dr$ را انتخاب کنیم. یعنی، عنصر حجم dV به صورت زیر باشد

$$dV=(۴\pi r^۲)\,dr \qquad (۳۹-۴۱)$$

که در آن $۴\pi r^۲$ مساحت سطح پوستهٔ داخلی و dr فاصلهٔ شعاعی بین دو پوسته است. حال، با ترکیب معادله‌های ۳۹-۳۹، ۳۹-۴۰ و ۳۹-۴۱ خواهیم داشت

$$\left(\text{احتمال آشکارشدن در حجم } dV \text{ در شعاع } r\right)=\psi^۲(r)\,dV=\frac{۴}{a^۳}e^{-۲r/a}r^۲dr \qquad (۳۹-۴۲)$$

اگر با **چگالی احتمال شعاعی** $P(r)$ به جای چگالی احتمال حجمی $\psi^۲(r)$ کار کنیم، توصیف احتمال آشکارشدن الکترون آسانتر می‌شود. $P(r)$ یک چگالی احتمالی خطی است به طوری که

(چگالی احتمال شعاعی $P(r)$ در شعاع r) (پهنای شعاعی dr) = (چگالی احتمال حجمی $\psi^۲(r)$ در شعاع r) (حجم dV)

یا

$$P(r)\,dr=\psi^۲(r)dV \qquad (۳۹-۴۳)$$

با قراردادن $\psi^۲(r)dV$ از معادلهٔ ۳۹-۴۲، به دست می‌آوریم

$$P(r)=\frac{۴}{a^۳}r^۲e^{-۲r/a}$$

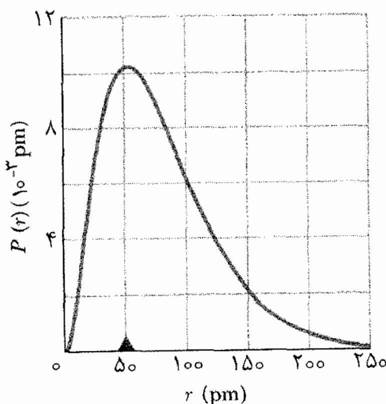
(۳۹-۴۴) (چگالی احتمال شعاعی، حالت پایهٔ اتم هیدروژن)

شکل ۳۹-۲۰ نمودار معادلهٔ ۳۹-۴۴ است. مساحت زیر نمودار برابر یک است؛ یعنی

$$\int_۰^\infty P(r)\,dr=۱ \qquad (۳۹-۴۵)$$

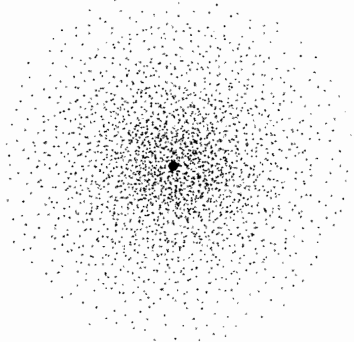
این معادله بیان می‌کند که در اتم هیدروژن، الکترون باید یک *جایی از* فضای اطراف هسته وجود داشته باشد.

علامت مثلث روی محور افقی شکل ۳۹-۲۰ در فاصلهٔ یک شعاع بور از مبدأ واقع است. از این نمودار معلوم است که در حالت پایهٔ اتم هیدروژن، الکترون با احتمال زیاد تقریباً در این فاصله از مرکز اتم یافت می‌شود.



شکل ۳۹-۲۰ نمودار چگالی احتمال شعاعی $P(r)$ برای حالت پایهٔ اتم هیدروژن. علامت مثلث در فاصلهٔ یک شعاع بور از مبدأ واقع است و مبدأ مرکز اتم را نشان می‌دهد.

شکل ۳۹-۲۰ با دیدگاه متداولی که الکترونها در اتمها مدارهای تعریف شده‌ای مانند مدار حرکت سیاره‌ها دور خورشید دارند شدیداً منافات دارد. *این دیدگاه متداول، هر چند آشنا ولی نادرست است.* شکل ۳۹-۲۰ تمام آنچه را که دربارهٔ مکان الکترون در حالت پایهٔ اتم هیدروژن باید بدانیم به دست می‌دهد. پرسش مناسب این نیست که «چه وقت الکترون به فلان نقطه می‌رسد؟» بلکه این است که «چقدر شانس وجود دارد که الکترون در یک حجم کوچک متمرکز در چنین نقطه‌ای یافت شود؟ شکل ۳۹-۲۱، که آن را نمودار نقطه‌ای می‌توان نامید، طبیعت احتمال تابع موج را بیان می‌کند و مدل ذهنی مفیدی از اتم هیدروژن در حالت پایه آن را به دست می‌دهد. اتم را در این حالت گلوله‌ای مبهم با مرزی غیرمشخص و مداری نامعلوم تصور کنید.



شکل ۳۹-۲۱ «نمودار نقطه‌ای» که چگالی احتمال حجمی $\psi^2(r)$، نه چگالی احتمال *شعاعی* $P(r)$، را برای حالت پایهٔ اتم هیدروژن نشان می‌دهد. چگالی نقطه‌ها به طور نمایی با افزایش فاصله از هسته کم می‌شود که در اینجا با لکه‌ای نشان داده شده است. چنین نمودار نقطه‌ای تصویری ذهنی از «ابر الکترونی» یک اتم را به دست می‌دهد.

برای یک فرد مبتدی ساده نیست که ذره‌های زیر اتمی را به این صورت احتمالاتی تصور کند. مشکل مواجهه طبیعی ماست که الکترون را چیزی مانند یک دانهٔ ژله‌ای ریز در نظر می‌گیریم که در مکانهای معینی در زمانهای معینی واقع شده و از مسیر کاملاً معین پیروی می‌کند. الکترونها و ذره‌های زیر اتمی دیگر به این سادگی رفتار نمی‌کنند.

انرژی حالت پایه که با قراردادن $n=1$ در معادلهٔ ۳۹-۳۳ به دست می‌آید عبارت است از $E_1 = -13/60\,\text{eV}$. اگر معادلهٔ شرودینگر را با این مقدار انرژی حل کنیم، تابع موج معادلهٔ ۳۹-۳۹ حاصل می‌شود. در واقع، به ازای هر مقداری از انرژی، مثلاً $E=-11/6\,\text{eV}$ یا $-14/3\,\text{eV}$ ، می‌توانیم جوابی برای معادلهٔ شرودینگر پیدا کنیم. این ممکن است حاکی از آن باشد که حالتهای اتم هیدروژن کوانتیده نیستند – ولی می‌دانیم که این طور نیست. معما زمانی حل شد که فیزیکدانان پی بردند که چنین جوابهایی برای معادلهٔ شرودینگر از نظر فیزیکی قابل قبول نیستند چون وقتی $r\to\infty$ میل می‌کند مقدارهای خیلی بزرگی را به دست می‌دهند. این «تابعهای موج» نشان می‌دهند که الکترون با احتمال زیاد در فاصله‌های خیلی دور از هسته نسبت به فاصله‌های نزدیک به آن پیدا می‌شود، که بی‌معنی است. با اعمال **شرایط مرزی** از این جوابهای ناخواسته راحت می‌شویم، که در آن فقط بر جوابهایی از معادلهٔ شرودینگر توافق می‌کنیم که در آن وقتی $r\to\infty$ ، $\psi(r)\to 0$ ؛ یعنی توافق می‌کنیم که فقط الکترونهای محصور را مورد بررسی قرار دهیم. با این محدودیت، جوابهای معادلهٔ شرودینگر مجموعهٔ گسسته‌ای را با انرژیهای کوانتیده‌ای که با معادلهٔ ۳۹-۳۳ داده می‌شود، تشکیل می‌دهند.

مسئلهٔ نمونه ۳۹-۶

(الف) طول موج نور برای کمترین انرژی فوتون گسیل شده در سری لیمان خطهای طیف اتم هیدروژن چقدر است؟

نکته‌های کلیدی (۱) برای هر سری، گذاری که کمترین انرژی را ایجاد کند گذار بین تراز پایه است که سری و ترازهای بلافاصله بالای آن را معین می‌کند. (۲) در مورد سری لیمان، تراز پایه در $n=1$ است (شکل ۳۹-۱۸). بنابراین، گذاری که کمترین انرژی فوتون را ایجاد می‌کند عبارت است از گذار از تراز $n=2$ به تراز $n=1$.

محاسبه‌ها: از معادلهٔ ۳۹-۳۳ اختلاف انرژی عبارت است از

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -(13/60\,\text{eV})\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{1^2}\right) = 10/20\,\text{eV}$$

بنابراین، از معادلهٔ ۳۹-۶ $(\Delta E = hf)$ با قراردادن f به جای c/λ خواهیم داشت

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{(6/63\times10^{-34}\,\text{J.s})(3/00\times10^{8}\,\text{m/s})}{(10/20\,\text{eV})(1/6\times10^{-19}\,\text{J/eV})}$$
$$= 1/22\times10^{-7}\,\text{m} = 122\,\text{nm} \quad \text{(پاسخ)}$$

نور با این طول موج در گسترهٔ فرابنفش قرار دارد.

(ب) طول موج حد سری برای سری لیمان چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی حد سری متناظر با پرش بین تراز پایه (برای سری لیمان $n=1$) و تراز واقع در حد $n=\infty$ است.

محاسبه‌ها: اکنون که مقدارهای n را برای گذار شناسایی کرده‌ایم، مانند (الف) طول موج متناظر با λ را پیدا می‌کنیم. ولی به جای آن از روش مستقیم‌تری استفاده می‌کنیم. از معادلهٔ ۳۹-۳۶ داریم

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_{\text{Low}}^2}-\frac{1}{n_{\text{high}}^2}\right) = (1/0973731\times10^{7}\,\text{m}^{-1})\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{\infty^2}\right)$$

که از آن به دست می‌آید

$$\lambda = 9/11\times10^{-8}\,\text{m} = 91/1\,\text{nm} \quad \text{(پاسخ)}$$

نور با این طول موج نیز در گسترهٔ فرابنفش قرار دارد.

مسئلهٔ نمونه ۳۹-۷

نشان دهید که چگالی احتمال شعاعی حالت پایهٔ اتم هیدروژن در $r=a$ یک بیشینه دارد.

نکتهٔ کلیدی (۱) چگالی احتمال شعاعی برای حالت پایهٔ اتم هیدروژن با معادلهٔ ۳۹-۴۴ داده می‌شود

$$P(r)=\frac{۴}{a^{۳}}r^{۲}e^{-۲r/a}$$

(۲) برای پیداکردن بیشینه (یا کمینه) از هر تابع، باید از تابع مشتق بگیریم و نتیجه را برابر با صفر قرار دهیم. اگر از $P(r)$، با استفاده از مشتق ۷ پیوست ث و قاعدهٔ زنجیره‌ای مؤلفه‌های مشتق، مشتق بگیریم خواهیم داشت

$$\frac{dP}{dr}=\frac{۴}{a^{۳}}r^{۲}\left(\frac{-۲}{a}\right)e^{-۲r/a}+\frac{۴}{a^{۳}}۲re^{-۲r/a}$$
$$=\frac{۸r}{a^{۳}}e^{-۲r/a}-\frac{۸r^{۲}}{a^{۴}}e^{-۲r/a}$$
$$=\frac{۸}{a^{۴}}r(a-r)e^{-۲r/a}$$

اگر طرف راست را برابر با صفر قرار دهیم، معادله‌ای به دست می‌آوریم که به ازای $r=a$ صحیح است. به عبارت دیگر، $\frac{dP}{dr}$ وقتی $r=a$ باشد برابر با صفر است. (توجه کنید که در $r=۰$ و $r=\infty$ نیز $\frac{dP}{dr}=۰$ است. ولی، این شرایط همانطور که در شکل ۳۹-۲۰ می‌توان دید، متناظر با *کمینه‌ای* در $P(r)$ است.)

مسئلهٔ نمونه ۳۹-۸

می‌توان نشان داد که احتمال $P(r)$ که الکترونی در حالت پایهٔ اتم هیدروژن در داخل کره‌ای به شعاع r آشکار شود با

$$P(r)=۱-e^{-۲x}(۱+۲x+۲x^{۲})$$

داده می‌شود، که در آن x کمیت بدون بعدی برابر با r/a است. r را به ازای $P(r)=۰/۹۰$ پیدا کنید.

نکتهٔ کلیدی هیچ تضمینی وجود ندارد که الکترون بتواند در فاصلهٔ شعاعی r معینی از مرکز اتم هیدروژن آشکار شود. ولی، با تابع داده شده، احتمالی را می‌توان محاسبه کرد که الکترون در *جایی* از کره‌ای به شعاع r بتواند آشکار شود.

محاسبه‌ها: شعاع کره‌ای را پیدا می‌کنیم که به ازای آن $P(r)=۰/۹۰$ شود. با قراردادن این مقدار در عبارت $P(r)$ خواهیم داشت

$$۰/۹۰=۱-e^{-۲x}(۱+۲x+۲x^{۲})$$

یا

$$۱۰e^{-۲x}(۱+۲x+۲x^{۲})=۱$$

باید مقداری را برای x پیدا کنیم که این تساوی برقرار باشد. حل صریح بر حسب x وجود ندارد، ولی با استفاده از یک ماشین حساب $x=۲/۶۶$ به دست می‌آید. این بدان معناست که شعاع کره‌ای که در داخل آن الکترون می‌تواند در ۹۰ درصد زمان آشکار شود برابر با $۲/۶۶a$ است. این مکان را روی محور افقی شکل ۳۹-۲۰ مشخص کنید، آیا این پاسخ منطقی است؟

حالتهای اتم هیدروژن با $n=۲$

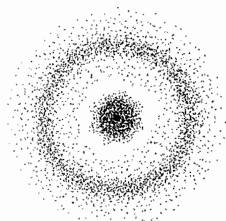
بنابر الزامات جدول ۳۹-۲، چهار حالت اتم هیدروژن با $n=۲$ وجود دارد؛ این عددهای کوانتومی در جدول ۳۹-۳ نوشته شده‌اند. نخست حالت $n=۲$ و $l=m=۰$ را در نظر می‌گیریم؛ چگالی احتمال آن با نمودار نقطه‌ای شکل ۳۹-۲۲ نشان داده شده است. توجه کنید که این نمودار، مانند نمودار حالت پایه نشان داده شده در شکل ۳۹-۲۱، تقارن کروی دارد. یعنی در یک دستگاه مختصات کروی مانند شکل ۳۹-۲۳، چگالی احتمال تابعی از فقط مختصهٔ شعاعی r است و از مختصه‌های زاویه‌ای θ و ϕ مستقل است.

جدول ۳۹-۳

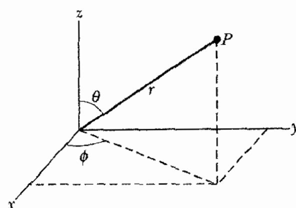
عددهای کوانتومی حالتهای اتم هیدروژن با $n=۲$

n	l	m_l
۲	۰	۰
۲	۱	+۱
۲	۱	۰
۲	۱	−۱

معلوم شده است که همهٔ حالتهای کوانتومی با $l=۰$ دارای تابعهای موج با تقارن کروی هستند. این منطقی است چون عدد کوانتومی l معیاری از اندازه حرکت زاویه‌ای مربوط به یک حالت معین است. اگر $l=۰$ باشد، اندازه حرکت زاویه‌ای نیز صفر است، و این ایجاب می‌کند که چگالی احتمال نمایش دهندهٔ حالت هیچ محور تقارن ترجیحی ندارد.



شکل ۳۹-۲۲ نمودار نقطه‌ای که چگالی احتمال حجمی $\psi^{۲}(r)$ را برای اتم هیدروژن در حالت کوانتومی با $n=۲$، $l=۰$ و $m_l=۰$ نشان می‌دهد. این نمودار دارای تقارن کروی نسبت به هستهٔ مرکزی است. فاصله در مدل چگالی نقطه‌ای یک سطح کروی را مشخص می‌کند که در آن $\psi^{۲}(r)=۰$ است.

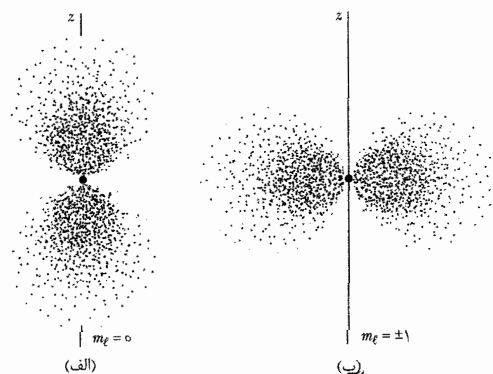


شکل ۳۹-۲۳ رابطهٔ بین مختصه‌های x، y و z دستگاه مختصات قائم و مختصه‌های r، θ و ϕ دستگاه مختصات کروی. دستگاه اخیر برای تحلیل وضعیتهای شامل تقارن کروی، مانند اتم هیدروژن مناسبتر است.

نمودارهای نقطه‌ای ψ^2 برای سه حالت با $n=2$ و $l=1$ در شکل ۳۹-۲۴ نشان داده شده‌اند. چگالیهای احتمال برای حالتهای با $m_l=+1$ و $m_l=-1$ یکسان هستند. اگرچه این نمودارها نسبت به محور z تقارن دارند، ولی تقارن کروی *ندارند*. یعنی، چگالیهای احتمال این سه حالت تابعهایی از r و مختصهٔ زاویه‌ای θ هستند.

در اینجا معمایی وجود دارد: چه چیزی دربارهٔ اتم هیدروژن وجود دارد که محور تقارنی را در شکل ۳۹-۲۴ می‌سازد که چنین آشکار است؟ پاسخ: *مطلقاً* هیچ چیز.

پاسخ به این معما تقریباً زمانی به دست می‌آید که دریابیم هر سه حالت نشان داده شده در شکل ۳۹-۲۴ انرژی یکسانی دارند. به خاطر آورید که انرژی یک حالت داده شده با معادلهٔ ۳۹-۳۳، فقط به عدد کوانتومی اصلی n بستگی دارد و مستقل از l و m_l است. در واقع در مورد یک اتم هیدروژن *منزوی* روشی وجود ندارد که از نظر تجربی میان سه حالت شکل ۳۹-۲۴ اختلافی قائل شود.



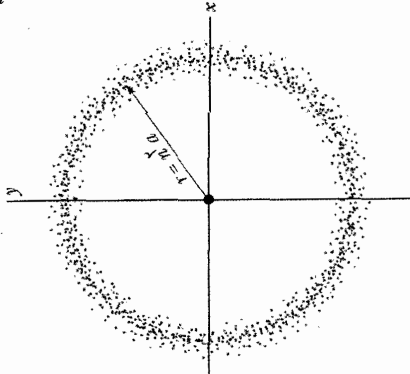
شکل ۳۹-۲۴ نمودارهای نقطه‌ای چگالی احتمال حجمی $\psi^2(r,\theta)$ برای اتم هیدروژن در حالت با $n=2$ و $l=1$. (الف) نمودار برای $m_l=0$. (ب) نمودار برای $m_l=+1$ و $m_l=-1$. هر دو نمودار نشان می‌دهند که چگالی احتمال حول محور z متقارن است.

اگر چگالیهای احتمال حجمی را برای سه حالت که برای آنها $n=2$ و $l=1$ است جمع کنیم، معلوم می‌شود که چگالی احتمال مرکب دارای تقارن کروی است و محور منحصر به فردی وجود ندارد. بنابراین، می‌توان تصور کرد که الکترون یک سوم زمان خود را در هر یک از سه حالت شکل ۳۹-۲۴ می‌گذراند، و می‌توان جمع سنگینی سه تابع موج مستقل را به عنوان تعریف یک **زیر لایه** متقارن کروی در نظر گرفت که با عددهای کوانتومی $n=2$ و $l=1$ مشخص می‌شود. فقط اگر اتم هیدروژن را در یک میدان الکتریکی یا مغناطیسی خارجی قرار دهیم حالتهای منفرد وجود جداگانهٔ خود را نشان خواهند داد. بنابراین، سه حالت زیر لایه $n=2$، $l=1$ انرژیهای متفاوتی خواهند داشت، و جهت میدان محور تقارن لازم را ایجاد خواهد کرد.

حالت $n=2$ و $l=0$، که چگالی احتمال حجمی آن در شکل ۳۹-۲۲ نشان داده شده است، *نیز* در هر سه حالت شکل ۳۹-۲۴ انرژی یکسانی دارد. می‌توانیم تمام چهار حالت را که عددهای کوانتومی آنها در جدول ۳۹-۳ آمده است به عنوان تشکیل دهندهٔ یک لایهٔ متقارن کروی در نظر بگیریم که تنها با یک عدد کوانتومی n تعریف می‌شود. اهمیت لایه‌ها و زیر لایه‌ها در فصل ۴۰، که دربارهٔ اتمهایی با بیش از یک الکترون بحث می‌کنیم، روشن خواهد شد.

برای تکمیل تصویر خود از اتم هیدروژن، در شکل ۳۹-۲۵ یک نمودار نقطه‌ای از چگالی احتمال *شعاعی* برای حالتی از اتم هیدروژن با عدد کوانتومی نسبتاً بالا $(n=45)$ و بالاترین عدد کوانتومی مداری که محدودیتهای جدول ۳۹-۲ اجازه می‌دهد $(l=n-1=44)$ نشان داده شده است. چگالی احتمال حلقه‌ای را تشکیل می‌دهد که حول محور z متقارن است و خیلی نزدیک به صفحهٔ xy قرار دارد. شعاع میانگین این حلقه n^2a است، که در آن a شعاع بور است. این شعاع میانگین ۲۰۰۰ برابر از شعاع مؤثر اتم هیدروژن در حالت پایه‌اش بیشتر است.

شکل ۳۹-۲۵ مدار الکترونی در فیزیک کلاسیکی را نشان می‌دهد. بنابراین، تصویر دیگری از اصل همخوانی بور را به دست می‌آوریم، یعنی در عددهای کوانتومی بزرگ پیش‌بینیهای مکانیک کوانتومی به آرامی به موارد فیزیک کلاسیکی تبدیل می‌شود. تصور کنید که یک نمودار نقطه‌ای مانند شکل ۳۹-۲۵ برای عددهای واقعاً بزرگ n و l مانند $n=1000$ و $l=999$ به چه



شکل ۳۹-۲۵ نمودار نقطه‌ای از چگالی احتمال شعاعی $P(r)$ برای اتم هیدروژن در حالت کوانتومی نسبتاً بزرگ عدد کوانتومی اصلی، یعنی $n=45$، و عدد کوانتومی زاویه‌ای $l=n-1=44$. نقطه‌ها نزدیک به صفحهٔ xy قرار دارند، حلقه نقطه‌های مدار کلاسیکی الکترون را نشان می‌دهد.

بازنگری و خلاصهٔ درس

اصل انحصار **اصل انحصار** برای هر نوع موجی از جمله موجهای یک ریسمان و موجهای ماده در فیزیک کوانتومی اعمال می‌شود. این اصل حاکی از آن است که انحصار به کوانتیدگی، یعنی به وجود حالتهای گسسته با انرژیهای معین، می‌انجامد. حالتهای با مقدارهای میانی انرژی، مجاز نیستند.

الکترون در چاه پتانسیل نامتناهی

چاه پتانسیل نامتناهی وسیله‌ای برای محصور کردن الکترون است. از اصل انحصار انتظار داریم که موج مادهٔ نمایش دهندهٔ الکترون به تله افتاده می‌تواند فقط به صورت مجموعه‌ای از حالتهای گسسته باشد. در مورد چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی، انرژیهای وابسته به این *حالتهای کوانتومی* عبارت‌اند از

$$E_n = \left(\frac{h^۲}{۸mL^۲}\right)n^۲, n = ۱,۲,۳,... \quad \text{به ازای} \qquad (۳۹-۴)$$

که در آن L پهنای چاه و n یک **عدد کوانتومی** است. اگر الکترون از یک حالت به حالت دیگر تغییر کند، انرژی آن باید به مقدار

$$\Delta E = E_{\text{high}} - E_{\text{Low}} \qquad (۳۹-۵)$$

تغییر کند، که در آن E_{high} انرژی بالاتر و E_{Low} انرژی پایینتر است. اگر این تغییر توسط جذب یا گسیل فوتون انجام شود، انرژی فوتون عبارت است از

$$hf = \Delta E = E_{\text{high}} - E_{\text{Low}} \qquad (۳۹-۶)$$

تابعهای موج وابسته به حالتهای کوانتومی عبارت‌اند از

$$\psi_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n = ۱,۲,۳,... \quad \text{به ازای} \qquad (۳۹-۱۰)$$

چگالی احتمال $\psi_n^۲(x)$ برای یک حالت مجاز به این معنی است که $\psi_n^۲(x)dx$ احتمالی است که الکترون در بازهٔ بین x و $x+dx$ آشکار خواهد شد. در مورد الکترون در چاه نامتناهی، چگالیهای احتمال عبارت‌اند از

$$\psi_n^۲(x) = A^۲\sin^۲\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \text{ ، } n = ۱,۲,۳,... \quad \text{به ازای} \qquad (۳۹-۱۲)$$

در عدد کوانتومی n بالا، الکترون به رفتار کلاسیکی میل می‌کند که در آن تمام بخشهای چاه با احتمال برابر اشغال می‌شود. این واقعیت به **اصل همخوانی** می‌انجامد. در عددهای کوانتومی به اندازهٔ کافی زیاد، پیش‌بینی فیزیک کوانتومی به آرامی به فیزیک کلاسیکی میل می‌کند.

بهنجارش و انرژی نقطهٔ صفر دامنهٔ A در معادلهٔ ۳۹-۱۲ را می‌توان از معادلهٔ بهنجارش زیر به دست آورد

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^۲(x)\,dx = ۱ \qquad (۳۹-۱۴)$$

که بر این تأکید دارد که الکترون در داخل چاه باید در یک جایی باشد چون احتمال ۱ بر قطعیت دلالت دارد.

از معادلهٔ ۳۹-۴ می‌بینیم که کمترین انرژی مجاز برای الکترون صفر نیست بلکه انرژیی است متناظر با $n=۱$. این انرژی کمترین **انرژی نقطهٔ صفر** سامانهٔ الکترون – چاه نامیده می‌شود.

الکترون در چاه پتانسیل متناهی چاه پتانسیل متناهی چاهی است که برای آن انرژی پتانسیل الکترون داخل آن به اندازهٔ $U_۰$ کمتر از مقدار آن در بیرون چاه است. تابع موج برای الکترون به تله افتاده طوری است که چاه به طرف دیواره‌های آن گسترش یافته است.

تله‌های الکترونی دو و سه بعدی انرژیهای کوانتیده برای الکترون به تله افتاده در چاه پتانسیل نامتناهی دو بعدی که یک حصار کوانتومی تشکیل می‌دهد عبارت‌اند از

$$E_{nx,ny} = \frac{h^۲}{۸m}\left(\frac{n_x^۲}{L_x^۲} + \frac{n_y^۲}{L_y^۲}\right) \qquad (۳۹-۲۰)$$

که در آن n_x عدد کوانتومی است که به ازای آن موج مادهٔ الکترون با بعد L_x چاه و n_y عدد کوانتومی است که به ازای آن موج مادهٔ الکترون با بعد L_y چاه مطابقت دارد. همچنین، انرژیهای الکترون به تله افتاده در چاه پتانسیل نامتناهی سه بعدی که یک جعبهٔ مستطیلی را تشکیل می‌دهد عبارت است از

$$E_{nx,ny,nz} = \frac{h^۲}{۸m}\left(\frac{h_x^۲}{L_x^۲} + \frac{n_y^۲}{L_y^۲} + \frac{n_z^۲}{L_z^۲}\right) \qquad (۳۹-۲۱)$$

در اینجا n_z عدد کوانتومی سومی است که به ازای آن موج ماده با بعد L_z چاه مطابقت دارد.

اتم هیدروژن هم مدل (نادرست) بور از اتم هیدروژن و هم کاربرد (درست) معادلهٔ شرودینگر برای این اتم ترازهای انرژی کوانتیدهٔ اتم را به صورت زیر به دست می‌دهند

$$E_n = -\frac{me^۴}{۸\varepsilon_۰^۲h^۲}\frac{۱}{n^۲} = -\frac{۱۳/۶۰\,\text{eV}}{n^۲} \qquad (۳۹-۳۳ \text{ و } ۳۹-۳۲)$$

به ازای $n = ۱,۲,۳,...$

از این درمی‌یابیم که اگر اتم گذاری بین هر دو تراز انرژی به دلیل گسیل یا جذب نور انجام دهد، طول موج نور با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\frac{۱}{\lambda} = R\left(\frac{۱}{n_{\text{Low}}^۲} - \frac{۱}{n_{\text{high}}^۲}\right) \qquad (۳۹-۳۶)$$

که در آن

$$R = \frac{me^۴}{۸\varepsilon_۰^۲h^۳c} = ۱/۰۹۷۳۷۳\times۱۰^۷\,\text{m}^{-۱} \qquad (۳۹-۳۷)$$

ثابت ریدبرگ است.

چگالی احتمال شعاعی $P(r)$ برای حالتی از اتم هیدروژن طوری تعریف می‌شود که $P(r)dr$ احتمالی است که الکترون یک جایی در فضای بین دو پوستهٔ هم مرکز به شعاعهای r و $r+dr$ به مرکز هستهٔ اتم بتواند آشکار می‌شود. در مورد حالت پایهٔ اتم هیدروژن،

$$P(r) = \frac{۴}{a^۳}r^۲e^{-۲r/a} \qquad (۳۹-۴۴)$$

که در آن a ، **شعاع بور**، یکای طول برابر با $۵۲/۹۲\text{pm}$ است. شکل ۳۹-۲۰ نمودار $P(r)$ برای حالت پایه است.

شکلهای ۳۹-۲۲ و ۳۹-۲۴ چگالیهای احتمال حجمی (نه چگالیهای احتمال *شعاعی*) برای چهار حالت اتم هیدروژن با $n=۲$ را نشان می‌دهند. نمودار شکل ۳۹-۲۲

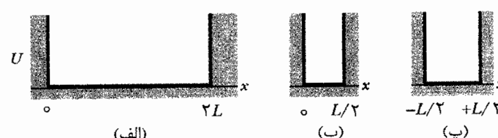
$(n=2, l=0, m_l=0)$ تقارن کروی دارد. نمودارهای شکل ۳۹-۲۴ $(n=2, l=1, m_l=0,+1,-1)$ حول محور z متقارن هستند ولی وقتی به هم اضافه شوند، نیز تقارن کروی خواهند داشت.

هر چهار حالت با $n=2$ انرژی یکسان دارند و در ساختار **لایه‌ای** که با لایهٔ $n=2$ مشخص می‌شود مفید در نظر گرفته می‌شوند. سه حالت شکل ۳۹-۲۴، با هم **زیر لایهٔ** $n=2$، $l=1$ را تشکیل می‌دهند. جداکردن چهار حالت $n=2$ به طور تجربی امکان‌پذیر نیست مگر اینکه اتم هیدروژن در یک میدان الکتریکی یا مغناطیسی قرار داده شود، که در این صورت محور تقارن مشخصی برقرار می‌شود.

پرسشها

۱- الکترونی در یک چاه پتانسیل در حالت $n=17$ به تله افتاده است. موج مادهٔ آن (الف) چه تعداد احتمال صفر و (ب) چه تعداد احتمال بیشینه دارد؟

۲- شکل ۳۹-۲۶ سه چاه پتانسیل نامتناهی روی محور x را نشان می‌دهد. بدون محاسبه، تابع موج ψ را برای حالت پایهٔ الکترون به تله افتاده در هر چاه را تعیین کنید.



شکل ۳۹-۲۶ پرسش ۲

۳- سه الکترون در سه چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی مختلف با پهناهای (الف) ۵۰pm، (ب) ۲۰۰pm و (پ) ۱۰۰pm به تله افتاده‌اند. این الکترونها را به ترتیب بزرگی انرژیهای حالت پایهٔ آنها بنویسید.

۴- اگر پهنای یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی را دو برابر کنیم، (الف) انرژی حالت پایهٔ الکترون به تله افتاده ضربدر ۴، ۲، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ می‌شود یا عدد دیگری؟ (ب) بسته به عدد کوانتومی آنها آیا انرژیهای حالتهای بالاتر انرژی در این عددها ضرب می‌شوند یا عدد دیگری؟

۵- اگر بخواهید تله آرمانی شکل ۳۹-۱ تله‌ای برای پوزیترون باشد، آیا (الف) هندسهٔ تله، (ب) پتانسیل الکتریکی استوانهٔ مرکزی یا (پ) پتانسیل الکتریکی دو استوانهٔ نیم نامتناهی، تغییر می‌کند؟ (جرم پوزیترون برابر با جرم الکترون ولی بار آن مثبت است.)

۶- الکترونی در چاه پتانسیل متناهی و به قدر کافی عمیقی به تله افتاده است که اجازه می‌دهد الکترون در حالت با $n=4$ وجود داشته باشد. موج مادهٔ آن در داخل چاه چند نقطه (الف) با احتمال صفر و (ب) با احتمال بیشینه دارد؟

۷- یک پروتون و یک الکترون در تلهٔ چاههای پتانسیل نامتناهی مشابه یک بعدی افتاده‌اند؛ هر ذره در حالت پایهٔ خود قرار دارد. در مرکز چاهها، آیا چگالی احتمال پروتون بیشتر از چگالی احتمال الکترون است یا کمتر یا با آن مساوی است؟

۸- آیا انرژی حالت پایهٔ یک پروتون به تله افتاده در چاه پتانسیل یک بعدی از انرژی حالت پایهٔ یک الکترون به تله افتاده در همان چاه پتانسیل بیشتر است یا کمتر یا مساوی آن است؟

۹- جدول (۳۹-۴) عددهای کوانتومی را برای پنج حالت اتم هیدروژن نشان می‌دهد. کدامیک امکانپذیر نیست؟

جدول ۳۹-۴

	n	l	m
(الف)	۳	۲	۰
(ب)	۲	۳	۱
(پ)	۴	۳	−۴
(ت)	۵	۵	۰
(ث)	۵	۳	−۲

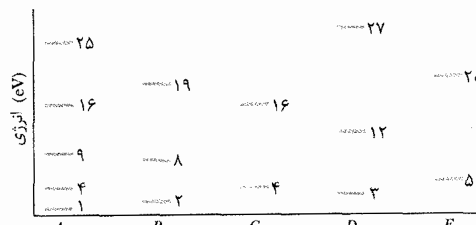
۱۰- می‌خواهیم چاه پتانسیل متناهی شکل ۳۹-۷ را تغییر دهیم تا الکترون به تله افتاده در آن در بیش از سه حالت کوانتومی وجود داشته باشد. این کار با (الف) پهن کردن یا باریک کردن چاه انجام می‌شود یا (ب) با عمیق کردن یا کم عمق کردن آن؟

۱۱- با نگاهی به شکل ۳۹-۸ عددهای کوانتومی سه حالت کوانتومی مربوط به طول موج دوبروی الکترون را به ترتیب بزرگی بنویسید.

۱۲- الکترونی در چاه انرژی پتانسیل متناهی مانند چاه شکل ۳۹-۷، در حالت پایینترین انرژی خود به تله افتاده است. آیا (الف) طول موج دوبروی آن، (ب) بزرگی اندازه حرکت آن و (پ) انرژی آن، بزرگتر، مساوی یا کمتر از حالتی است که چاه پتانسیل مانند شکل ۳۹-۲ نامتناهی باشد؟

۱۳- الکترونی که در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی به پهنای L به تله افتاده است از حالت پایه به حالت برانگیختهٔ اول برانگیخته شده است. آیا برانگیختگی احتمال آشکارشدن الکترون در یک طول کوچک از محور x (الف) در مرکز چاه و (ب) نزدیک یکی از دیواره‌های چاه را افزایش می‌دهد یا کاهش یا اثری ندارد؟

۱۴- شکل ۳۹-۲۷ پایینترین تراز انرژی (بر حسب الکترون ولت) را برای پنج وضعیت نشان می‌دهد که در آن الکترونی در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی به تله افتاده است. در چاههای B، C، D و E، الکترون در حالت پایه است. الکترون را در چاه A به حالت چهارم برانگیخته (در ۲۵eV) برمی‌انگیزیم. سپس، الکترون با گسیل یک یا چند فوتون، با یک پرش بلند یا چند پرش کوتاه به حالت پایه واانگیخته می‌شود. کدام انرژیهای *گسیلی* فوتون این واانگیختگی با انرژی *جذب* یک فوتون (از حالت پایه) از چهار الکترون دیگر مطابقت دارد؟ مقدارهای n را مشخص کنید.



شکل ۳۹-۲۷ پرسش ۱۴

۱۵- اتم هیدروژنی در حالت برانگیختهٔ سوم قرار دارد. تا چه حالتی (با عدد کوانتومی معین n) این اتم باید پرش کند تا (الف) گسیل نور با بیشترین طول موج ممکن، (ب) گسیل نور با کوتاهترین طول موج ممکن و (پ) جذب نور با بلندترین طول موج ممکن صورت گیرد؟

مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
•-••• تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

بخش ۳۹-۳ انرژیهای الکترون به تله افتاده

•۱- انرژی حالت پایهٔ یک الکترون به تله افتاده در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی ۲/۶eV است. اگر پهنای چاه پتانسیل دو برابر شود، این کمیت چقدر می‌شود؟

•۲- الکترونی که در تلهٔ یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی با پهنای ۲۵۰۰pm افتاده است، در حالت پایهٔ خود قرار دارد. اگر این الکترون به حالت $n=۴$ پرش کند، چقدر انرژی باید جذب کند؟

•۳- اگر الکترون به تله افتاده در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی در حالت $n=۳$ دارای انرژی ۴/۷eV باشد، پهنای چاه باید چقدر باشد؟

•۴- پروتونی در یک چاه پتانسیل یک بعدی با پهنای ۱۰۰pm محصور شده است. انرژی حالت پایهٔ آن چقدر است؟

•۵- یک هستهٔ اتمی را معادل با یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی با پهنای $L=۱/۴\times۱۰^{-۱۴}$m، یعنی قطر یک هسته نوعی در نظر بگیرید. اگر الکترون در تلهٔ چنین چاه پتانسیلی افتاده باشد، انرژی حالت پایهٔ آن چقدر است؟ (*توجه:* هسته‌ها الکترون ندارند.) **SSM**

•۶- انرژی حالت پایهٔ (الف) الکترون و (ب) پروتون وقتی هر کدام در تلهٔ یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی با پهنای ۲۰۰pm افتاده باشند، چقدر است؟

•۷- انرژی الکترون در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی به طول L در حالت پایه $E_۱$ است. طول به L' تغییر می‌کند به طوری که انرژی حالت پایه $E'_۱=۰/۵۰۰E_۱$ شود. نسبت L'/L چقدر است؟

••۸- الکترونی در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی به تله افتاده است. به ازای چه (الف) عدد کوانتومی بزرگتر و (ب) عدد کوانتومی کوچکتر، اختلاف انرژی مربوط برابر با اختلاف $\Delta E_{۴۳}$ بین ترازهای $n=۴$ و $n=۳$ می‌شود؟ (پ) نشان دهید که هیچ جفت تراز مجاوری اختلاف انرژیی برابر با $۲\Delta E_{۴۳}$ را ندارد.

••۹- الکترونی در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی به تله افتاده است. به ازای چه (الف) عدد کوانتومی بزرگتر و (ب) عدد کوانتومی کوچکتر، اختلاف انرژی مربوط برابر با انرژی تراز $n=۵$ است؟ (پ) نشان دهید که هیچ جفت تراز مجاوری اختلاف انرژی برابر با انرژی تراز $n=۶$ را ندارد.

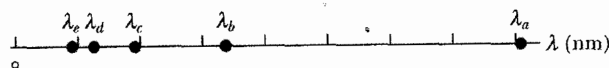
•••۱۰- الکترونی در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی با پهنای ۲۵۰pm و در حالت پایهٔ خود به تله افتاده است. (الف) بلندترین طول موج، (ب) دومین طول موج بلند و (پ) سومین طول موج بلند نوری که می‌تواند الکترون را از طریق جذب یک فوتون تنها از حالت پایهٔ آن برانگیخته کند چقدر است؟

•••۱۱- فرض کنید که یک الکترون به تله افتاده در چاه نامتناهی یک بعدی با پهنای ۲۵۰pm از حالت برانگیختهٔ اول به حالت برانگیختهٔ سوم برسد. (الف) در این پرش چه مقدار انرژی باید به الکترون داده شود؟ سپس الکترون با گسیل نور به حالت پایه واانگیخته می‌شود. با راههای متعددی این کار انجام پذیر است، (ب) کوتاهترین طول موج، (پ) دومین طول موج کوتاه، (ت) بلندترین و (ث) دومین بلندترین طول موج که می‌تواند گسیل کند چقدر است؟ (ج) این راههای متعدد ممکن را روی نمودار تراز انرژی نشان دهید. اگر نور با طول موج ۲۹/۴nm گسیل شود، (چ) بلندترین طول موج و (ح) کوتاهترین طول موج که پس از آن می‌تواند گسیل کند چقدر است؟

●●۱۲- الکترونی در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی در حالت برانگیختهٔ اول خود به تله افتاده است. شکل ۳۹-۲۸ پنج طول موج بزرگتر نور را که در گذار از این حالت اولیه با جذب یک فوتون تنها می‌تواند انجام گیرد نشان می‌دهد: پهنای چاه پتانسیل چقدر است؟

$\lambda_a = ۸۰/۷۸\text{nm}, \lambda_b = ۳۳/۶۶\text{nm}, \lambda_c = ۱۹/۲۳\text{nm}$

$\lambda_d = ۱۲/۶۲\text{nm}\ , \lambda_e = ۸/۹۸\text{nm}$



شکل ۳۹-۲۸ مسئلهٔ ۱۲.

بخش ۳۹-۴ تابعهای موج الکترون به تله افتاده

۱۳- الکترونی در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی با پهنای ۱۰۰pm به تله افتاده است، الکترون در حالت پایهٔ خود قرار دارد. احتمال اینکه بتوان این الکترون را در بازه‌ای به پهنای $x = ۵/۰\text{pm}$ متمرکز در (الف) $x = ۲۵\text{pm}$ ، (ب) $x = ۵۰\text{pm}$، و (پ) $x = ۹۰\text{pm}$ آشکار کرد چقدر است؟ (*راهنمایی*: بازهٔ Δx به اندازه‌ای باریک است که می‌توان چگالی احتمال را داخل آن ثابت در نظر گرفت.) **WWW SSM**

●●۱۴- ذره‌ای در چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی شکل ۳۹-۲ محصور است. اگر این ذره در حالت پایهٔ خود باشد، چگالی احتمال آن بین (الف) $x = ۰$ و $x = ۱/۲۵L$ ، (ب) $x = ۰/۷۵L$ و $x = L$ و (پ) $x = ۰/۲۵L$ و $x = ۰/۷۵L$ ، چقدر است؟

●●۱۵- یک چاه پتانسیل یک بعدی به طول ۲۰۰pm شامل الکترونی است که در سومین حالت برانگیخته قرار دارد. یک کاوهٔ آشکار کنندهٔ الکترون به پهنای ۲/۰۰pm طوری قرار داده می‌شود که مرکز آن روی نقطهٔ چگالی احتمال بیشینه باشد. (الف) احتمالی آشکارسازی به وسیلهٔ کاوه چقدر است؟ (ب) اگر کاوه به روشی که گفته شد ۱۰۰۰ بار قرار داده شود، چند بار انتظار داریم که الکترون روی انتهای کاوه شکل مادی بگیرد (و در نتیجه آشکار شود)؟

●●۱۶- الکترونی در حالت انرژی معینی در یک چاه پتانسیل یک بعدی نامتناهی از $x = ۰$ تا $x = L = ۲۰۰\text{pm}$ قرار دارد. چگالی احتمال الکترون در $x = ۰/۳۰۰L$ و $x = ۰/۴۰۰L$، صفر است؛ ولی در مقدارهای میانی x صفر نیست. سپس الکترون با گسیل نور به تراز انرژی پایینتر بعدی پرش می‌کند. تغییر انرژی الکترون چقدر است؟

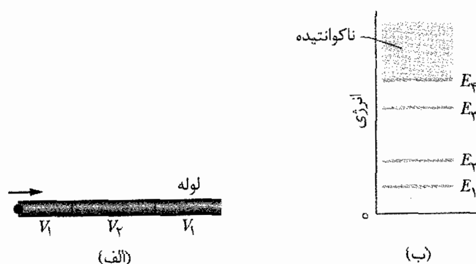
بخش ۳۹-۵ الکترون در چاه متناهی

●●۱۷- الکترونی در حالت $n = ۲$ در چاه پتانسیل متناهی شکل ۳۹-۷ انرژیی برابر ۴۰۰eV را از یک منبع خارجی جذب می‌کند. با استفاده از نمودار تراز انرژی شکل ۳۹-۹، با فرض اینکه الکترون به مکانی که برای آن $x > L$ حرکت می‌کند، انرژی جنبشی آن را پس از این جذب تعیین کنید.

●●۱۸- شکل ۳۹-۹ ترازهای انرژی یک الکترون به تله افتاده در یک چاه انرژی پتانسیل متناهی با عمق ۴۵۰eV را نشان می‌دهد. اگر الکترون در حالت $n = ۳$ باشد، انرژی جنبشی آن چقدر است؟

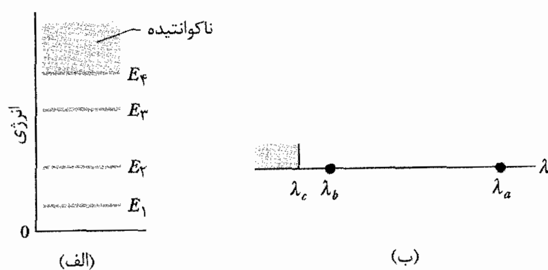
●●۱۹- (الف) نشان دهید که در ناحیهٔ $x > L$ در چاه پتانسیل متناهی شکل ۳۹-۷، $\psi(x) = De^{۲kx}$ جوابی برای معادلهٔ شرودینگر در شکل یک بعدی آن است، که در آن D ثابت و k مثبت است. (ب) بر چه اساسی این جواب ریاضی قابل قبول را پیدا می‌کنیم که از نظر فیزیکی غیر قابل قبول است؟

●●۲۰- شکل ۳۹-۲۹ الف یک لولهٔ نازک را نشان می‌دهد که در آن یک تلهٔ پتانسیل متناهی با $V_۲ = ۰\text{V}$ برقرار است. الکترون نشان داده شده با انرژی جنبشی ۲/۰۰eV مستقیم به سمت تله حرکت می‌کند و وارد ناحیه‌ای با $V_۱ = -۹/۰۰\text{V}$ می‌شود. وقتی الکترون وارد ناحیهٔ تله می‌شود، اگر با گسیل یک فوتون به قدر کافی انرژی از دست بدهد می‌تواند در تله گیر بیافتد. ترازهای انرژی در تله عبارت‌اند از: $E_۱ = ۱/۰$ ، $E_۲ = ۲/۰$ ، $E_۳ = ۴/۰\text{eV}$، و همانطور که در نمودار ترازهای انرژی در شکل ۳۹-۲۹ نشان داده شده، ناحیهٔ ناکوانتیده از $E_۴ = ۹/۰\text{eV}$ شروع می‌شود. کمترین انرژی (eV) چنین فوتونی چقدر است؟



شکل ۳۹-۲۹ مسئلهٔ ۲۰.

●●۲۱- شکل ۳۹-۳۰ الف نمودار تراز انرژی را برای یک چاه انرژی یک بعدی متناهی نشان می‌دهد که شامل یک الکترون است. ناحیهٔ ناکوانتیده از $E_۴ = ۴۵۰/۰\text{eV}$ شروع می‌شود. شکل ۳۹-۳۰ ب طیف جذبی الکترون را وقتی در حالت پایه است، نشان می‌دهد. جذب در طول موجهای نشان داده شدهٔ $\lambda_a = ۱۴/۵۸۸\text{nm}$ و $\lambda_b = ۴/۸۴۳۷\text{nm}$ و برای هر طول موج کمتر از $\lambda_c = ۲/۹۱۰۸\text{nm}$ رخ می‌دهد. انرژی اولین حالت برانگیخته چقدر است؟



شکل ۳۹-۳۰ مسئلهٔ ۲۱

بخش ۳۹-۷ تله‌های الکترونی دو و سه بعدی

•۲۲- الکترونی در حصار مستطیلی شکل ۳۹-۱۳ با ابعاد $L_x = ۸۰۰\text{pm}$ و $L_y = ۱۶۰۰\text{pm}$ محصور است. انرژی حالت پایهٔ الکترون چقدر است؟ GO

•۲۳- الکترونی در جعبهٔ مستطیلی شکل ۳۹-۱۴ با ابعاد $L_x = ۸۰۰\text{pm}$ و $L_y = ۱۶۰۰\text{pm}$ و $L_z = ۳۹۰\text{pm}$ محصور است. انرژی حالت پایهٔ الکترون چقدر است؟

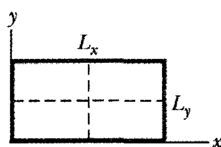
••۲۴- یک حصار مستطیلی با ابعاد $L_x = L$ و $L_y = ۲L$ شامل یک الکترون است. چه ضریبی از $h^۲/۸mL^۲$ (الف) انرژی حالت پایهٔ الکترون، (ب) انرژی حالت برانگیختهٔ اول، (پ) انرژی پایینترین حالتهای واگن و (ت) اختلاف بین انرژیهای حالتهای برانگیختهٔ دوم و سوم آن را به دست می‌دهد؟ جرم الکترون m است.

••۲۵- الکترونی (با جرم m) در یک حصار مستطیلی با ابعاد $L_x = L$ و $L_y = ۲L$ محصور است. (الف) اگر الکترون گذاری بین یک جفت پایینترین پنج تراز انرژی انجام دهد چند بسامد نوری مختلف می‌تواند گسیل یا جذب کند؟ چه ضریبی از $h^۲/۸mL^۲$ (ب) پایینترین بسامد، (پ) دومین بسامد پایین، (ت) سومین بسامد پایین، (ث) بالاترین بسامد، (ج) دومین بسامد بالا، و (چ) سومین بسامد بالا را به دست می‌دهد؟ WWW SSM

••۲۶- جعبهٔ مکعبی به ابعاد $L_x = L_y = L_z = L$ حاوی یک الکترون است. چه ضریبی از $h^۲/۸mL^۲$ (الف) انرژی حالت پایهٔ الکترون، (ب) انرژی دومین حالت برانگیخته و (پ) اختلاف بین انرژیهای حالتهای برانگیختهٔ اول و سوم را به دست می‌دهد؟ m جرم الکترون است. انرژی (ت) حالت برانگیختهٔ اول و (ث) حالت برانگیختهٔ پنجم چند حالت واگن دارد؟ GO

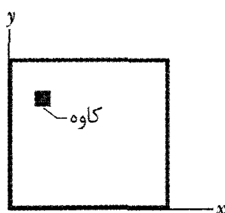
••۲۷- الکترونی (با جرم m) در جعبهٔ مکعبی با ابعاد $L_x = L_y = L_z$ محصور است. (الف) اگر الکترون گذاری بین یک جفت از پایینترین پنج تراز انرژی انجام دهد، چند بسامد مختلف نوری گسیل یا جذب می‌کند؟ چه ضریبی از $h^۲/۸mL^۲$ (ب) پایینترین بسامد، (پ) دومین بسامد پایین، (ت) سومین بسامد پایین، (ث) بالاترین بسامد، (ج) دومین بسامد بالا و (چ) سومین بسامد بالا را به دست می‌دهد؟

••۲۸- شکل ۳۹-۳۱ یک چاه پتانسیل دو بعدی را نشان می‌دهد که در صفحهٔ xy واقع بوده و شامل یک الکترون است. کاوه برای الکترون را در امتداد خطی که L_x را قطع می‌کند قرار می‌دهیم و سه نقطه پیدا می‌کنیم که در آنها احتمال آشکارسازی بیشینه است. این نقطه‌ها به فاصلهٔ ۲/۰ nm از هم قرار دارند. سپس وقتی کاوه را در امتداد خطی که L_y را قطع می‌کند می‌گذاریم پنج نقطه پیدا می‌کنیم که در آنها احتمال آشکارسازی بیشینه است. این نقطه‌ها به فاصلهٔ ۳/۰۰ nm از هم قرار دارند. انرژی الکترون چقدر است؟



شکل ۳۹-۳۱ مسئلهٔ ۲۸

••۲۹- حصار نامتناهی دو بعدی شکل ۳۹-۳۲ یک مربع با ضلع $L = ۱۵۰\text{pm}$ است. یک کاوهٔ مربعی در مختصات xy $(۰/۲۰۰L, ۰/۸۰۰L)$ قرار داده می‌شود که پهنای x آن ۵/۰۰pm و پهنای y آن ۵/۰۰pm است. احتمال آشکارسازی الکترون وقتی در حالت انرژی $E_{۱,۳}$ قرار دارد، چقدر است؟ GO



شکل ۳۹-۳۲ مسئلهٔ ۲۹

••۳۰- الکترونی در حالت پایه در یک چاه پتانسیل دو بعدی مربع شکل به ضلع L قرار دارد. الکترون را در یک ناحیه مربعی به مساحت $۴۰۰\text{pm}^۲$ کاوش می‌کنیم که در $x = L/۸$ و $y = L/۸$ واقع است. احتمال آشکارسازی ۰/۰۴۵۰ به دست می‌آید. طول L ضلع چقدر است؟

•۳۱- برای اتم هیدروژن در حالت پایه (الف) چگالی احتمال $\psi^۲(r)$ و (ب) چگالی احتمال شعاعی $P(r)$ به ازای $r = a$ را محاسبه کنید، که a شعاع بور است.

•۳۲- چگالی احتمال شعاعی $P(r)$ را برای اتم هیدروژن در حالت پایهٔ خود در (الف) $r = ۰$ ، (ب) $r = a$ و (پ) $r = ۲a$ محاسبه کنید که در آن a شعاع بور است.

•۳۳- نوترونی با انرژی جنبشی ۶/۰ eV با اتم هیدروژن که در حالت پایهٔ خود ساکن است برخورد می‌کند. توضیح دهید که چرا برخورد باید کشسان باشد، یعنی چرا انرژی جنبشی باید پایسته بماند. (*راهنمایی:* نشان دهید که اتم هیدروژن در نتیجهٔ برخورد نمی‌تواند برانگیخته شود.) SSM

•۳۴- (الف) انرژی E الکترون اتم هیدروژن که چگالی احتمال آن در نمودار نقطه‌ای شکل ۳۹-۲۲ نشان داده شده چقدر است؟ (ب) کمینهٔ انرژی مورد نیاز برای خارج کردن این الکترون از اتم چقدر است؟

•۳۵- وقتی یک اتم هیدروژن گذاری از حالت $n = ۳$ به حالت $n = ۱$ پیدا کند (الف) انرژی، (ب) بزرگی اندازه حرکت و (پ) طول موج فوتون گسیل شده چقدر است؟

•۳۶- اتمی (نه اتم هیدروژن) فوتونی جذب می‌کند که بسامد مربوط به آن $۶/۲ \times ۱۰^{۱۴}\text{Hz}$ است. انرژی اتم چقدر افزایش می‌یابد؟

●۳۷- نسبت کوتاهترین طول موج سری بالمر به کوتاهترین طول موج سری لیمن چقدر است؟ **SSM**

بخش ۳۹-۹ معادلهٔ شرودینگر و اتم هیدروژن

●۳۸- اتمی (نه اتم هیدروژن) فوتونی جذب می‌کند که طول موج آن ۳۷۵nm و بلافاصله فوتونی گسیل می‌کند که طول موج آن ۵۸۰nm است. انرژی خالص جذب شده توسط اتم در این فرایند چقدر است؟

●●۳۹- چقدر کار باید انجام گیرد تا الکترون و پروتونی را که اتم هیدروژنی را تشکیل داده‌اند از هم جدا کنیم، در صورتی که اتم ابتدا (الف) در حالت پایه، و (ب) در حالت $n=۲$ باشد؟ **SSM**

●●۴۰- یک اتم هیدروژن از حالت پایه به حالت $n=۴$ برانگیخته می‌شود. (الف) چقدر انرژی توسط اتم باید جذب شود؟ انرژیهای فوتونی را که توسط اتم بر اثر واانگیختگی به حالت پایه به روشهای ممکن مختلف می‌توانند گسیل کنند در نظر بگیرید. (ب) چند انرژی مختلف امکانپذیر است؛ (پ) بالاترین انرژی، (ت) دومین انرژی بالا (ث) سومین انرژی بالا، (ج) پایینترین انرژی، (چ) دومین انرژی پایین، (ح) سومین انرژی پایین، چقدر است؟

●●۴۱- احتمال اینکه در حالت پایهٔ اتم هیدروژن، الکترون در شعاعی بزرگتر شعاع بور یافت شود چقدر است؟ (*راهنمایی:* به مسئلهٔ نمونهٔ ۳۹-۸ نگاه کنید.)

●●۴۲- نوری با طول موج ۱۲۱/۶nm توسط اتم هیدروژن گسیل می‌شود. (الف) بزرگترین عدد کوانتومی و (ب) کوچکترین عدد کوانتومی گذاری که این گسیل را ایجاد می‌کند چقدر است؟ (پ) نام سری مربوط به این گذار چیست؟

●●۴۳- معادلهٔ شرودینگر در مورد حالتهای اتم هیدروژن با عدد کوانتومی مداری l برابر با صفر عبارت است از

$$\frac{۱}{r^۲}\frac{d}{dr}\left(r^۲\frac{d\psi}{dr}\right)+\frac{۸\pi^۲ m}{h^۲}[E-U(r)]\psi=۰$$

ثابت کنید که معادلهٔ ۳۹-۳۹، که حالت پایه اتم هیدروژن را توصیف می‌کند، جوابی برای این معادله است. **WWW SSM**

●●۴۴- (الف) گسترهٔ طول موج و (ب) گسترهٔ بسامد سری لیمان چقدر است؟ (پ) گسترهٔ طول موج و (ت) گسترهٔ بسامد سری بالمر چقدر است؟

●●۴۵- انرژی کل اتم هیدروژن در حالت پایه ۱۳/۶eV– است. اگر الکترون در یک شعاع بور از هستهٔ مرکزی باشد (الف) انرژی جنبشی آن و (ب) انرژی پتانسیل آن چقدر است؟

●●۴۶- یک اتم هیدروژن که در آغاز در حالت کوانتومی $n=۴$ قرار دارد با گذار به حالت پایه یک فوتون گسیل می‌کند. تندی پس‌زنی اتم هیدروژن چقدر است؟

●●۴۷- ثابت کنید که معادلهٔ ۳۹-۴۴، چگالی احتمال شعاعی حالت پایهٔ اتم هیدروژن بهنجار شده است. یعنی ثابت کنید که

$$\int_۰^\infty P(r)\,dr=۱$$

درست است. **SSM**

●●●۴۸- یک اتم هیدروژن در حالتی که دارای *انرژی پیوندی* (انرژی لازم برای برداشتن الکترون) ۰/۸۵eV است گذاری به حالت *با انرژی برانگیختهٔ* (اختلاف بین انرژی حالت و حالت پایه) ۱۰/۲eV انجام می‌دهد. (الف) انرژی فوتون گسیل شده در نتیجهٔ این گذار چقدر است؟ (ب) بزرگترین عدد کوانتومی و (پ) کوچکترین عدد کوانتومی گذاری که این گسیل را ایجاد می‌کند چقدر است؟

●●●۴۹- تابعهای موج برای سه حالت با نمودارهای نقطه‌ای نشان داده شده در شکل ۳۹-۲۴، که برای آن $n=۲$ ، $l=۱$ و $m_l=۰,+۱,-۱$ است، عبارت‌اند از

$$\psi_{۲۱۰}(r,\theta)=\left(\frac{۱}{۴\sqrt{۲/۶}}\right)(a^{-۳/۲})(r/a)e^{-r/۲a}\cos\theta$$

$$\psi_{۲۱-۱}(r,\theta)=\left(\frac{۱}{۸\sqrt{۱۶}}\right)(a^{-۳/۲})(r/a)e^{-r/۲a}(\sin\theta)e^{+i\phi}$$

$$\psi_{۲۱-۱}(r,\theta)=\left(\frac{۱}{۸\sqrt{\pi}}\right)(a^{-۳/۲})(r/a)e^{-r/۲a}(\sin\theta)e^{-i\phi}$$

که زیرنویسهای $\psi(r,\theta)$ مقدارهای عددهای کوانتومی n ، l، m و زاویهٔ θ و ϕ تعریف شده در معادلهٔ ۳۹-۲۳ را به دست می‌دهند. توجه کنید که تابع موج اول حقیقی و بقیه، که شامل عدد موهومی i هستند، مختلط‌اند. چگالی احتمال شعاعی $P(r)$ را برای (الف) $\psi_{۲۱۰}$ و (ب) $\psi_{۲۱+۱}$ (یکسان با $\psi_{۲۱-۱}$) پیدا کنید. (پ) نشان دهید که هر $P(r)$ با نمودار نقطه‌ای متناظر در شکل ۳۹-۲۴ مطابقت دارد. (ت) چگالیهای احتمال شعاعی برای $\psi_{۲۱۰}$ ، $\psi_{۲۱-۱}$ و $\psi_{۲۱-۱}$ را اضافه کنید و سپس نشان دهید که مجموع دارای تقارن کروی است و فقط به r بستگی دارد. **SSM**

●●●۵۰- احتمالی را که الکترون در اتم هیدروژن در حالت پایه، بین دو پوستهٔ کروی با شعاعهای a و $۲a$ یافت شود محاسبه کنید، که a شعاع بور است. (*راهنمایی:* به مسئلهٔ نمونهٔ ۳۹-۸ نگاه کنید.)

●●●۵۱- احتمال اینکه یک الکترون در حالت پایهٔ اتم هیدروژن بین دو پوستهٔ کروی با شعاعهای r و $r+\Delta r$ ، (الف) در صورتی که $r=۰/۵۰۰a$ و $\Delta r=۰/۰۱۰a$ و (ب) $r=۱/۰۰a$ و $\Delta r=۰/۰۱a$ ، یافت شود چقدر است؟ a شعاع بور است. (*راهنمایی:* Δr به اندازه‌ای کوچک است که چگالی احتمال شعاعی بین r و $r+\Delta r$ ثابت در نظر گرفته می‌شود.)

●●●۵۲- نوری با طول موج ۱۰۲/۶nm توسط اتم هیدروژن گسیل می‌شود. (الف) بزرگترین عدد کوانتومی و (ب) کوچکترین عدد کوانتومی گذاری که این گسیل را ایجاد می‌کند چقدر است؟ (پ) نام سری شامل این گذار چیست؟

●●●۵۳- به ازای چه مقداری از عدد کوانتومی اصلی n، به صورت داده شده در نمودار نقطه‌ای چگالی احتمال برای اتم هیدروژن، شعاع مؤثر ۱/۰ mm است؟ فرض کنید که l دارای بیشینهٔ مقدار خود برابر با n-۱ است (*راهنمایی*: به شکل ۳۹-۲۵ نگاه کنید.)

●●●۵۴- تابع موج برای حالت کوانتومی اتم هیدروژن که با نمودار نقطه‌ای شکل ۳۹-۲۲ نشان داده شده و در آن ۲ = n و ۰ = $l = m_l$ عبارت است از

$$\psi_{۲۰۰}(r) = \frac{۱}{۴\sqrt{۲\pi}} a^{-۳/۲}\left(۲ - \frac{r}{a}\right) e^{-r/۲a}$$

که در آن a شعاع بور و زیرنویس $\psi(r)$ مقدارهای عددهای کوانتومی n، l و m_l است. (الف) $\psi^۲_{۲۰۰}(r)$ را رسم کنید و نشان دهید که این نمودار با نمودار نقطه‌ای شکل ۳۹-۲۲ سازگار است. (ب) به طور تحلیلی نشان دهید که $\psi^۲_{۲۰۰}(r)$ در $r = ۴a$ یک بیشینه دارد. (پ) چگالی احتمال شعاعی $P_{۲۰۰}(r)$ را برای این حالت پیدا کنید. (ت) نشان دهید که

$$\int_۰^\infty P_{۲۰۰}(r)\, dr = ۱$$

و بنابراین، عبارت بالا برای تابع موج $\psi_{۲۰۰}(r)$ کاملاً بهنجار شده است.

●●●۵۵- در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۹-۷ نشان دادیم که چگالی احتمال شعاعی برای حالت پایهٔ اتم هیدروژن وقتی بیشینه است که $r = a$ باشد، که در آن a شعاع بور است. نشان دهید که مقدار *متوسط* r، که به صورت

$$r_{\text{avg}} = \int P(r) r\, dr$$

تعریف می‌شود، دارای مقدار $۱/۵a$ است. در عبارت r_{avg}، هر مقدار $P(r)$ معیاری از مقدار r است که در آن اتفاق می‌افتد. توجه کنید که مقدار متوسط r از مقدار r که به ازای آن $P(r)$ بیشینه می‌شود، بزرگتر است.

مسئله‌های اضافی

۵۶- الکترونی در یک لامپ خلاء باریک به طول ۳/۰ m محصور شده است؛ لامپ به صورت یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی عمل می‌کند. (الف) اختلاف انرژی بین حالت پایهٔ الکترون و اولین حالت برانگیختهٔ آن چقدر است؟ (ب) در چه عدد کوانتومی n اختلاف انرژی بین ترازهای انرژی مجاور ۱/۰ eV می‌شود — که بر خلاف نتیجهٔ (الف) قابل اندازه‌گیری است؟ در این عدد کوانتومی، (پ) چه ضریبی از انرژی در حال سکون الکترون انرژی کل الکترون و (ت) الکترون نسبیتی را به دست می‌دهد؟

۵۷- همانطور که شکل ۳۹-۸ پیشنهاد می‌کند، چگالی احتمال در ناحیهٔ $x > L$ در چاه پتانسیل متناهی شکل ۳۹-۷ بنابر $\psi^۲(x) = Ce^{-۲kx}$ به طور نمایی افت می‌کند، که در آن C ثابت است. (الف) نشان دهید که تابع موج $\psi(x)$ که از این معادله می‌توان به دست آورد جوابی برای معادلهٔ شرودینگر در شکل یک بعدی آن است. (ب) عبارتی برای k به دست آورید که این امر درست باشد. **SSM**

۵۸- همانطور که شکل ۳۹-۸ پیشنهاد می‌کند، چگالی احتمال الکترون در ناحیهٔ $۰ < x < L$ برای چاه پتانسیل متناهی شکل ۳۹-۷ سینوسی است و با $\psi^۲(x) = B\sin^۲ kx$ داده می‌شود، که در آن B ثابت است. (الف) نشان دهید که تابع موج $\psi(x)$ که از این معادله می‌توان به دست آورد جوابی برای معادلهٔ شرودینگر در شکل یک بعدی آن است. (ب) عبارتی برای k به دست آورید که این امر درست باشد.

۵۹- (الف) به ازای یک مقدار معین از عدد کوانتومی اصلی n، چند مقدار از عدد کوانتومی مداری l امکانپذیر است؟ (ب) به ازای مقدار معینی از l، چند مقدار از عدد کوانتومی مغناطیسی مداری m_l امکانپذیر است؟ (پ) به ازای مقدار معین n، چند مقدار از m_l امکانپذیر است؟

۶۰- فرض کنیم ΔE_{adj} اختلاف انرژی بین دو تراز انرژی مجاور برای یک الکترون به تله افتاده در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی باشد. E را انرژی هر یک از دو تراز در نظر بگیرید. (الف) نشان دهید که نسبت $\Delta E_{\text{adj}}/E$ در مقدارهای بزرگ عدد کوانتومی n به مقدار $\frac{۲}{n}$ میل می‌کند. وقتی $n \to \infty$ میل می‌کند، آیا (ب) ΔE_{adj}، (پ) E، یا (ت) $\Delta E_{\text{adj}}/E$ به صفر میل می‌کند؟ (ث) معنی این نتایج برحسب اصل همخوانی چیست؟

۶۱- الکترونی در یک چاه پتانسیل یک بعدی به تله افتاده است. نشان دهید که اختلاف انرژی ΔE بین ترازهای کوانتومی n و n+۲ آن عبارت است از $(h^۲/۲mL^۲)(n+۱)$.

۶۲- ثابت کنید که مقدار مرکب ثابتهای ظاهر شده در معادلهٔ ۳۹-۳۲ برابر ۱۳/۶eV است.

۶۳- (الف) نشان دهید که جمله‌های معادلهٔ شرودینگر (معادلهٔ ۳۹-۱۸) دارای ابعاد یکسان هستند. (ب) یکای مشترک SI برای این جمله‌ها چیست؟

۶۴- مسئلهٔ نمونهٔ ۳۹-۶ را برای سری بالمر اتم هیدروژن تکرار کنید.

۴۰ همه چیز دربارهٔ اتمها



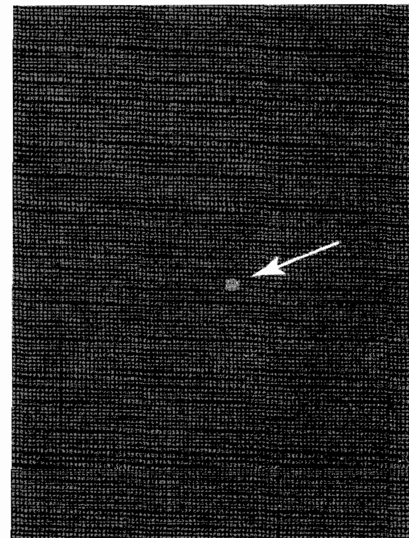
پس از اختراع لیزرها در سالهای دههٔ ۶۰ میلادی، طولی نکشید که آنها چشمه‌های جدید نور در آزمایشگاه‌های پژوهشی شدند. امروزه، لیزرها در همه جا حاضرند و کاربردهای متنوعی پیدا کرده‌اند؛ از قبیل تراگسیل صدا و داده‌ها، نقشه‌برداری، جوشکاری، و پویش قیمتها در فروشگاههای بزرگ. تصویر بالا یک عمل جراحی لیزیک را نشان می‌دهد. شکل‌دهی قرنیه به کمک لیزر که قرنیه چشمهای یک زن با پرتو فرابنفش لیزر جراحی شده و موجب دید بهتر او می‌شود. نور حاصل از یک لیزر و نور حاصل از هر چشمهٔ دیگری، هر دو از گسیل توسط اتمها ناشی می‌شوند.

پس، دلیل تفاوت فاحش نور حاصل از یک لیزر با سایر چشمه‌های نوری در چیست؟

پاسخ در همین فصل.

۴۰-۱ فیزیک چیست؟

در این فصل، یک هدف اصلی فیزیک را پی می‌گیریم: کشف و درک ویژگیهای اتمها. حدود ۱۰۰ سال پیش، پژوهشگران کوششهای زیادی به عمل آوردند تا آزمایشهایی را بیابند که وجود اتمها را به اثبات رسانند. امروزه، وجود اتمها مسلم شده است و حتی از آنها تصویرهایی هم داریم (تصویرهای حاصل از میکروسکوپ تونل زنی پویشی). می‌توانیم آنها را روی سطوح، به اطراف حرکت دهیم، مثل ساختن حصار کوانتومی نشان داده شده در تصویر آغازین فصل ۳۹. حتی می‌توانیم یک اتم منفرد را به طور نامحدودی در یک تله نگهداریم (شکل ۴۰-۱) تا ویژگیهای آن را هنگامی که کاملاً از سایر اتمها منزوی شده است، مطالعه کنیم.



شکل ۴۰-۱ نقطه، عکسی از نورگسیل شده از یک اتم باریم است که برای مدتی طولاتی در تله‌ای در دانشگاه واشنگتن نگهداشته شده است. روشهای ویژه‌ای باعث می‌شود که یون به هنگام گذارهایی از میان جفت ترازهای انرژی یکسانی، دوباره و دوباره نورگسیل کند. نقطه، نشان دهندهٔ گسیل فزاینده‌ای از تعداد زیادی فوتون است.

۴۰-۲ برخی از ویژگیهای اتمها

ممکن است تصور کنید که جزئیات فیزیک اتمی به دور از زندگی روزانهٔ ماست. ولی توجه کنید که چگونه ویژگیهای اتمها که در پی خواهند آمد، و آنقدر بنیادی‌اند که کمتر به آنها می‌اندیشیم- بر شیوهٔ زندگی ما در جهان تأثیر می‌گذارند.

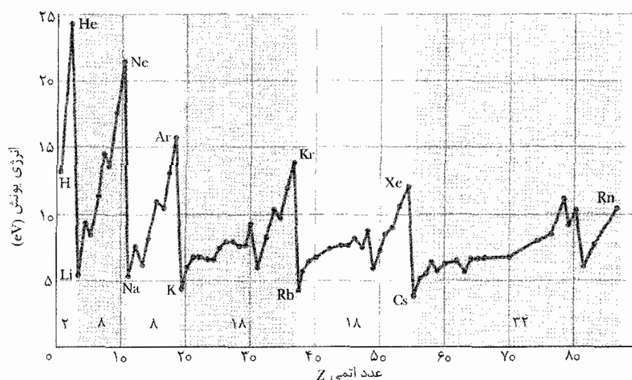
اتمها پایدارند. اساساً همهٔ اتمهایی که جهان واقعی ما را می‌سازند برای میلیاردها سال بدون تغییر وجود داشته‌اند. اگر اتمها به طور مدام، مثلاً هر چند هفته یا هر چند سال، به شکلهای دیگری تغییر می‌کردند، جهان به چه چیزی شبیه می‌شد؟

اتمها با یکدیگر ترکیب می‌شوند. آنها برای ساختن مولکولهایی پایدار به یکدیگر می‌چسبند و از روی هم انباشته شدن انها، اجسام صلب ساخته می‌شود. فضای یک اتم عمدتاً خالی است، ولی می‌توانید روی کف اتاق- که از اتمها ساخته شده است- بایستید، بی آنکه از میان آنها فرو افتید.

این ویژگیهای بنیادین اتمها را می‌توان با فیزیک کوانتومی توضیح داد، همان گونه که می‌توان سه ویژگی کمتر آشکاری که در پی خواهد آمد را نیز با آن توضیح داد.

اتمها به طرز نظام‌مندی گرد هم می‌آیند

شکل ۴۰-۲ مثالی از یک ویژگی تکرار شوندهٔ عنصرها را برحسب تابعی از مکان آنها در جدول تناوبی (پیوست چ) نشان می‌دهد. این شکل نموداری از **انرژی یونش** عنصرهاست؛ انرژیی که برای کندن سست‌ترین الکترون مقید از یک اتم خنثی مورد نیاز است برحسب تابعی از مکان در جدول تناوبی عنصرها که آن اتم به آن تعلق دارد، رسم شده است. شباهتهای قابل ملاحظه در ویژگیهای شیمیایی و فیزیکی عنصرها در هر ستون عمودی جدول تناوی شاهدی بر این مدعاست که اتمها بنا بر قاعده‌هایی نظام‌مند ساخته شده‌اند.



شکل ۴۰-۲ نمودار انرژیهای یونش عنصرها برحسب تابعی از عدد اتمی، تکرار دوره‌ای ویژگیها در طی شش دورهٔ افقی کامل از جدول تناوبی را نشان می‌دهد. تعداد عنصرها در هر یک از این دوره‌ها مشخص شده است.

عنصرها در جدول تناوبی در شش **دورهٔ** افقی مرتب شده‌اند؛ به جز اولی، هر دوره از سمت چپ با فلز قلیایی بسیار واکنش‌پذیری (لیتیم، سدیم، پتاسیم، و غیره) شروع و در سمت راست با یک گاز بی‌اثر شیمیای (نئون، آرگون، کریپتون، و غیره) ختم می‌شود. فیزیک کوانتومی، ویژگیهای شیمیایی این عنصرها را توضیح می‌دهد. تعداد عنصرها در شش دوره عبارت‌اند از

۲، ۸، ۸، ۱۸، ۱۸ و ۳۲

فیزیک کوانتومی این عددها را پیش‌بینی می‌کند.

اتمها، نور را گسیل و جذب می‌کنند

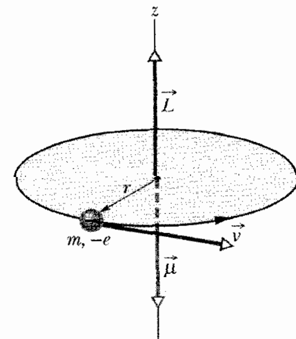
تا اینجا دیده‌ایم که اتمها فقط در حالتهای کوانتومی گسسته، که هر حالت دارای انرژی معینی است، می‌توانند وجود داشته باشند. هر اتم می‌تواند از یک حالت به حالتی دیگر گذار پیدا کند، با گسیل نور (با پرش به تراز انرژی پایینتر $E_{\text{پایین}}$) یا با جذب نور (با پرش به تراز انرژی بالاتر $E_{\text{بالا}}$). همانطور که پیشتر در بخش ۳۹-۳ برای نخستین بار مطرح کردیم، نور به صورت فوتونی با انرژی زیر گسیل یا جذب می‌شود

$$hf = E_{\text{بالا}} - E_{\text{پایین}} \qquad (۴۰-۱)$$

بنابراین، مسئلهٔ یافتن بسامدهای نور گسیل شده یا جذب شده توسط یک اتم به مسئلهٔ یافتن انرژیهای حالتهای کوانتومی آن اتم، برمی‌گردد. فیزیک کوانتومی این امکان را فراهم می‌آورد تا- دست کم در اصول- این انرژیها را محاسبه کنیم.

اتمها دارای اندازه حرکت زاویه‌ای و خاصیت مغناطیسی هستند

شکل ۴۰-۳ یک ذرهٔ باردار منفی را نشان می‌دهد که در حال حرکت بر یک مدار دایره‌ای حول یک مرکز ثابت است. همانطور که در بخش ۲۸-۷ مطرح کردیم، ذرهٔ در حال



شکل ۴۰-۳ مدل کلاسیکی که ذره‌ای به جرم m و بار $-e$ را نشان می‌دهد که در حال حرکت با تندی v در مداری به شعاع r است. ذرهٔ متحرک دارای اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ است که با رابطهٔ $\vec{r} \times \vec{p}$ داده می‌شود، که در آن $\vec{p}$ اندازه حرکت خطی آن، $m\vec{v}$ است. حرکت ذره معادل با یک حلقهٔ جریان است که دارای گشتاور مغناطیسی وابستهٔ $\vec{\mu}$ است که جهت آن در خلاف جهت $\vec{L}$ است.

چرخش، هم یک اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ و هم (به دلیل آنکه مسیر آن معادل یک حلقهٔ جریان کوچک است) یک گشتاور دو قطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ دارد. به طوری که شکل ۴۰-۳ نشان می‌دهد، بردارهای $\vec{L}$ و $\vec{\mu}$ هر دو بر صفحهٔ مدار عمودند، ولی چون بار منفی است، جهت آنها در خلاف یکدیگر است.

مدل شکل ۴۰-۳ صرفاً کلاسیکی است و وجود یک الکترون در اتم را به طور دقیق نمایش نمی‌دهد. در فیزیک کوانتومی، مدل مدار معین با مدل چگالی احتمال، که بهترین تجسم آن به صورت یک نمودار نقطه‌ای است، جایگزین می‌شود. با این حال، در فیزیک کوانتومی باز هم به طور کلی هر حالت کوانتومی یک الکترون در اتم شامل یک اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ و یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ در خلاف جهت آن است، (به این کمیتهای برداری *جفتیده* گفته می‌شود).

آزمایش اینشتین- دوهاس

در سال ۱۹۱۵/۱۲۹۴، خیلی پیش از کشف فیزیک کوانتومی، *آلبرت اینشتین* و فیزیکدان هلندی *دو هاس*[1] آزمایش هوشمندانه‌ای را برای نشان دادن جفتیدگی اندازه حرکت زاویه‌ای و گشتاور مغناطیسی اتمهای مجزا، طراحی کردند.

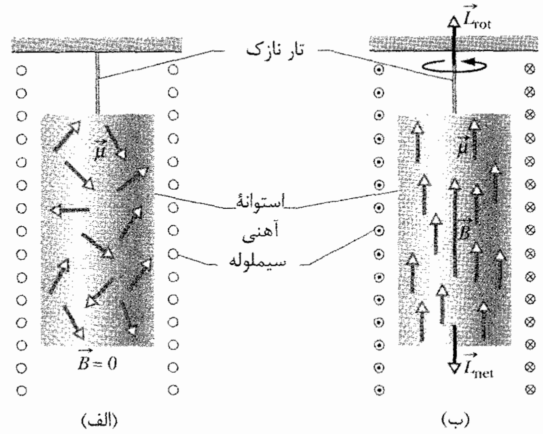
اینشتین و دو هاس، یک استوانهٔ آهنی را از تاری نازک، به ترتیبی که در شکل ۴۰-۴ نشان داده شده است، آویزان کردند. یک سیملوله به دور استوانه قرار داده شده بود، بی آنکه با آن در تماس باشد. در ابتدا، گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ اتمهای استوانه در جهتهایی کاتوره‌ای قرار دارند و بنابراین، اثرهای مغناطیسی خارجی آنها خنثی می‌شود (شکل ۴۰-۴ الف). ولی، وقتی جریان در سیملوله برقرار شود (شکل ۴۰-۴ ب)، به طوری که یک میدان مغناطیسی $\vec{B}$ موازی با جهت محور بلند استوانه به وجود آید، گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی اتمهای استوانه دوباره سمتگیری می‌کنند و خود را در جهت میدان قرار می‌دهند. اگر اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ هر اتم با گشتاور مغناطیسی آن جفت شود، آنگاه این همردیفی گشتاور مغناطیسی اتمی باید باعث همردیفی اندازه حرکتهای زاویه‌ای اتمی در خلاف جهت میدان مغناطیسی شود.

درابتدا هیچ گشتاور نیروی خارجی بر استوانه اثر نمی‌کند؛ بنابراین، اندازه حرکت زاویه‌ای آن باید در همان مقدار صفر اولیه باقی بماند. ولی، وقتی $\vec{B}$ برقرار شود و اندازه حرکتهای زاویه‌ای اتمی، پادموازی با میدان $\vec{B}$ قرار گیرند، آنگاه آنها یک اندازه حرکت زاویه‌ای خالص $\vec{L}_{\text{net}}$ به کلّ استوانه می‌دهند (که جهت آن در شکل ۴۰-۴ ب رو به پایین است). برای آنکه اندازه حرکت زاویه‌ای صفر بماند، استوانه شروع به چرخش حول محور مرکزی خود می‌کند تا بدین ترتیب یک گشتاور زاویه‌ای $\vec{L}_{\text{rot}}$ در جهت مخالف ایجاد کند (رو به بالا در شکل ۴۰-۴ ب).

اگر تار وجود نداشته باشد، استوانه تا هنگامی که میدان مغناطیسی برقرار باشد به چرخش خود ادامه می‌دهد. ولی، تاب خوردن تار به‌سرعت گشتاور نیرویی ایجاد می‌کند که به طور لحظه‌ای چرخش استوانه را متوقف می‌کند و سپس آن را در جهت مخالف می‌چرخاند تا اینکه تار به وضعیتی که تاب نخورده است بازگردد. از آن پس، تا هنگامی که استوانه حول سمتگیری اولیه‌اش با حرکت هماهنگ سادهٔ زاویه‌ای نوسان می‌کند، تار تاب می‌خورد و باز می‌شود.

---

1. W. J. de Haas



شکل ۴۰-۴ ترتیب آزمایشگاهی اینشتین- دو هاس. (الف) در ابتدا، میدان مغناطیسی در استوانهٔ آهنی برابر صفر است و بردارهای گشتاور دو قطبی مغناطیسی اتمهای آن به طور کاتوره‌ای سمتگیری کرده‌اند. بردارهای اندازه حرکت زاویه‌ای اتمی (نشان داده نشده است) در خلاف جهت بردارهای گشتاور دوقطبی مغناطیسی‌اند و بنابراین، آنها نیز به طور کاتوره‌ای سمتگیری کرده‌اند. (ب) وقتی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در امتداد محور استوانه برقرار شود، بردارهای گشتاو دوقطبی مغناطیسی موازی با $\vec{B}$ همسو می‌شوند، که این بدان معنی است که بردارهای گشتاور زاویه‌ای در خلاف جهت $\vec{B}$ همسو می‌شوند. چون استوانه در ابتدا از گشتاورهای نیروی خارجی منزوی شده است، اندازه حرکت زاویه‌ای آن پایسته است و کلّ استوانه، همانگونه که در شکل نشان داده شده است، باید شروع به چرخش کند.

مشاهدهٔ چرخش استوانه ثابت می‌کند که اندازه حرکت زاویه‌ای و گشتاور دو قطبی یک اتم، در جهتهای مخالفِ هم جفت شده‌اند. افزودن بر این، این آزمایش به روشنی نشان می‌دهد که اندازه حرکتهای زاویه‌ای وابسته به حالتهای کوانتومی اتمها می‌توانند به چرخش *قابل مشاهدهٔ* جسمی با اندازهٔ معمولی، بیانجامند.

۴۰-۳ اسپین الکترون

همانطور که در بخش ۲۸-۷ مطرح کردیم، الکترون چه در یک اتم *به تله افتاده باشد* و چه *آزاد* باشد، دارای **اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی** ذاتی $\vec{S}$ است که غالباً به سادگی **اسپین** نامیده می‌شود. (به خاطر آورید که *ذاتی* بدان معنی است که $\vec{S}$ مشخصهٔ بنیادین الکترون، نظیر جرم و بار الکتریکی آن است). همانطور که در بخش بعد مطرح خواهیم کرد، بزرگی $\vec{S}$ کوانتیده و به **عدد کوانتومی اسپینی** s، که همواره برای الکترونها (و پروتونها و نوترونها) برابر $\frac{1}{2}$ است، وابسته است. افزون بر این، مؤلفهٔ $\vec{S}$ در امتداد هر محوری که اندازه‌گیری شود کوانتیده است و به **عدد کوانتومی مغناطیسی اسپینی** m_s، که فقط می‌تواند یکی از دو مقدار $+\frac{1}{2}$ یا $-\frac{1}{2}$ را داشته باشد، وابسته است.

وجود اسپین الکترون بر اساس کار تجربی دو دانشجوی کارشناسی هلندی، *جرج الن‌بک*[1] و *ساموئل گوداسمیت*[2]، از مطالعات آنها روی طیفهای اتمی حاصل شد. مبنای فیزیک کوانتومی اسپین الکترون چند سال بعد، توسط فیزیکدان انگلیسی *دیراک*[3] ارائه شد، کسی که نظریهٔ کوانتومی نسبیتی الکترون را (در سال ۱۹۲۹/۱۳۰۸) گسترش داد.

تصور اینکه برای توصیف اسپین الکترون، الکترون را به صورت کرهٔ کوچک در حال چرخش به دور یک محور در نظر بگیریم، وسوسه‌انگیز است. ولی، این مدل کلاسیکی، مشابه مدل کلاسیکی مدارها، درست نیست. در فیزیک کوانتومی، اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی به صورت یک ویژگی ذاتی و قابل اندازه‌گیری برای الکترون در نظر گرفته می‌شود، که نمی‌توان آن را با مدل کلاسیکی تجسم کرد.

در بخش ۳۹-۹، به طور خلاصه عددهای کوانتومی را که با اعمال معادلهٔ *شرودینگر* به الکترونی در یک اتم هیدروژن حاصل می‌شوند، بررسی کردیم (جدول ۳۹-۲). اکنون می‌توانیم فهرست عددهای کوانتومی را با اضافه کردن s و m_s، به ترتیبی که در جدول ۴۰-۱ نشان داده شده است، گسترش دهیم. این فهرست شامل پنج عدد کوانتومی است که حالت کوانتومی یک الکترون در اتم هیدروژن یا هر اتم دیگری را به طور کامل مشخص می‌کند. تمام حالتها با مقدار n یکسان تشکیل یک **لایه** را می‌دهند. با شمارش مقدارهای مجاز ℓ و m_ℓ، و سپس دو برابر کردن این مقدار به دلیل دو مقدار مجاز m_s، می‌توان ثابت کرد لایه‌ای که با عدد کوانتومی n تعریف می‌شود دارای $2n^2$ حالت است. تمام حالتها با مقدار یکسان n و ℓ تشکیل یک **زیر لایه** می‌دهند و دارای انرژی یکسانی هستند. می‌توان ثابت کرد که هر زیرلایهٔ تعریف شده با عدد کوانتومی ℓ دارای $2(2\ell+1)$ حالت است.

جدول ۴۰-۱

حالت‌های الکترون برای یک اتم

عدد کوانتومی	نماد	مقدارهای مجاز	مربوط به
اصلی	n	$1, 2, 3, \ldots$	فاصله از هسته
مداری	ℓ	$0, 1, 2, \ldots, (n-1)$	اندازه حرکت زاویه‌ای مداری
مغناطیسی مداری	m_ℓ	$0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm\ell$	اندازه حرکت زاویه‌ای مداری (مؤلفهٔ z)
اسپینی	s	$\frac{1}{2}$	اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی
مغناطیسی اسپینی	m_s	$\pm\frac{1}{2}$	اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی (مؤلفهٔ z)

1. George Uhlenbeck
2. Samuel Goudsmit
3. P. A. M. Dirac

۴۰-۴ انــدازه حرکتهــای زاویــه‌ای و گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی

به هر حالت کوانتومی الکترون در اتم، یک اندازه حرکت زاویه‌ای مداری و یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری وابسته است. هر الکترون، چه در یک اتم به تله افتاده باشد و چه آزاد باشد، دارای یک اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی و یک گشتاور دو قطبی مغناطیسی اسپینی است. این کمیتها را ابتدا به طور جداگانه و سپس در ترکیب با هم بررسی می‌کنیم.

اندازه حرکت زاویه‌ای مداری و مغناطیسی

بزرگی L **اندازه حرکت زاویه‌ای مداری** $\vec{L}$ یک الکترون در *اتم کوانتیده است*؛ یعنی، فقط می‌تواند مقدارهای معینی داشته باشد. این مقدارها عبارت‌اند از

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar \qquad (۴۰-۲)$$

که در آن ℓ عدد کوانتومی مداری و $\hbar$ برابر با $h/2\pi$ است. بنابر جدول ۴۰-۱، ℓ باید یا صفر یا عدد درست مثبتی باشد که بزرگتر از $n-1$ نیست. مثلاً برای حالتی با $n=3$ ، فقط $\ell=2$ ، $\ell=1$ و $\ell=0$ مجازند.

همانطور که در بخش ۲۸-۷ مطرح کردیم، به اندازه حرکت زاویه‌ای مداری $\vec{L}$ یک الکترون در اتم یک دوقطبی مغناطیسی وابسته است. این دوقطبی مغناطیسی دارای یک **گشتاور دو قطبی مغناطیسی مداری** $\vec{\mu}_{\text{orb}}$ است که با معادلهٔ ۲۸-۲۸ به گشتاور زاویه‌ای مربوط می‌شود

$$\vec{\mu}_{\text{orb}} = -\frac{e}{2m}\vec{L} \qquad (۴۰-۳)$$

علامت منفی در این رابطه بدان معنی است که $\vec{\mu}_{\text{orb}}$ در خلاف جهت $\vec{L}$ است. چون بزرگی $\vec{L}$ کوانتیده است (معادلهٔ ۴۰-۲)، بزرگی $\vec{\mu}_{\text{orb}}$ نیز باید کوانتیده باشد که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\mu_{\text{orb}} = \frac{e}{2m}\sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar \qquad (۴۰-۴)$$

نه $\vec{\mu}_{\text{orb}}$ و نه $\vec{L}$ را نمی‌توان به هیچ روشی اندازه گرفت. ولی، می‌توان مؤلفه‌های این دو بردار را در امتداد یک محور معین اندازه گرفت. اتمی در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را در نظر می‌گیریم؛ فرض کنید که محور z در جهت خطهای این میدان در مکان اتم قرار دارد. بنابراین، می‌توانیم مؤلفه‌های z بردارهای $\vec{\mu}_{\text{orb}}$ و $\vec{L}$ را در امتداد این محور اندازه بگیریم.

مؤلفه‌های $\mu_{\text{orb},z}$ این گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری کوانتیده‌اند و با رابطهٔ زیر داده می‌شوند

$$\mu_{\text{orb},z} = -m_\ell\,\mu_B \qquad (۴۰-۵)$$

که در آن m_ℓ عدد کوانتومی مغناطیسی مداری جدول ۴۰-۱، و μ_B **مگنتون بور** است:

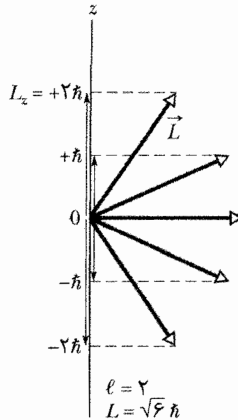
$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m} = \frac{e\hbar}{2m} = ۹/۲۷۴\times ۱۰^{-۲۴}\ \text{J/T} \qquad \text{(مگنتون بور)} \qquad (۴۰-۶)$$

که در آن m جرم الکترون است.

مؤلفه‌های L_z اندازه حرکت زاویه‌ای نیز کوانتیده‌اند، و با رابطهٔ زیر داده می‌شوند

$$L_z = m_\ell\,\hbar \qquad (۴۰-۷)$$

شکل ۴۰-۵ ، پنج مؤلفهٔ کوانتیدهٔ L_z اندازه حرکت زاویه‌ای مداری یک الکترون با $\ell=2$ را، به همراه سمتگیریهای وابسته به اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ نشان می‌دهد. ولی، *این شکل را واقعی در نظر نگیرید*، زیرا نمی‌توانیم $\vec{L}$ را به هیچ طریقی آشکارسازی کنیم. بنابراین، ترسیم آن در شکلی نظیر شکل



شکل ۴۰-۵ مقدارهای مجاز L_z برای الکترون در حالت کوانتومی با $l=2$. برای هر بردار اندازه حرکت زاویه‌ای مداری $\vec{L}$ در شکل، برداری با سمتگیری در خلاف جهت آن وجود دارد که نشان دهندهٔ بزرگی و جهت گشتاور دو قطبی مغناطیسی مداری $\vec{\mu}_{\text{orb}}$ است.

۴۰-۵ صرفاً یک کمک دیداری است. این کمک دیداری را می‌توان با بیان اینکه $\vec{L}$ با محور z زاویهٔ معین θ می‌سازد، تعمیم داد؛ به گونه‌ای که

$$\cos\theta = \frac{L_z}{L} \qquad (۴۰-۸)$$

θ را *زاویهٔ نیم-کلاسیکی* میان بردار $\vec{L}$ و محور z می‌نامیم، زیرا θ اندازه‌گیری کلاسیکی چیزی است که نظریهٔ کوانتومی آن را قابل اندازه‌گیری نمی‌داند.

اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی و گشتاور دوقطبی مغناطیسی

بزرگی S اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی $\vec{S}$ هر الکترون، *چه آزاد باشد و چه به تله افتاده باشد*، دارای مقداری یگانه است که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}\,\hbar = ۰/۸۶۶\hbar \qquad (۴۰-۹)$$

که در آن $s\,(=\frac{1}{2})$ عدد کوانتومی اسپینی الکترون است.

همانطور که در بخش ۲۸-۷ مطرح کردیم، الکترون چه مقید باشد و چه آزاد، دارای یک دوقطبی مغناطیسی ذاتی است که به اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی $\vec{S}$ آن وابسته است. این دوقطبی مغناطیسی دارای **گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی** $\vec{\mu}_s$ است که با معادلهٔ ۲۸-۲۲ به اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی $\vec{S}$ مربوط است

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m}\vec{S} \qquad (۴۰\text{-}۱۰)$$

علامت منفی در این رابطه مبین آن است که سمتگیری $\vec{\mu}_s$ در خلاف جهت $\vec{S}$ است. چون بزرگی $\vec{S}$ کوانتیده است (معادلهٔ ۴۰-۹)، بزرگی $\vec{\mu}_s$ نیز باید کوانتیده باشد که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\mu_s = \frac{e}{m}\sqrt{s(s+1)}\,\hbar \qquad (۴۰\text{-}۱۱)$$

نه $\vec{S}$ و نه $\vec{\mu}_s$ را نمی‌توان به هیچ طریقی اندازه گرفت. ولی، *می‌توان* مؤلفه‌های آنها را در امتداد هر محور معینی، مثلاً محور z، اندازه گرفت. مؤلفه‌های S_z اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی کوانتیده‌اند و با رابطهٔ زیر داده می‌شوند

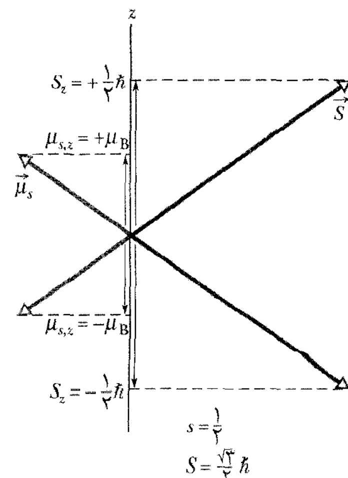
$$S_z = m_s\,\hbar \qquad (۴۰\text{-}۱۲)$$

که در آن m_s عدد کوانتومی مغناطیسی اسپینی جدول ۴۰-۱ است. این عدد کوانتومی می‌تواند فقط دو مقدار داشته باشد: $m_s = +\frac{1}{2}$ (که در این صورت گفته می‌شود الکترون، *اسپین بالا* دارد) و $m_s = -\frac{1}{2}$ (که در این صورت گفته می‌شود الکترون، *اسپین پایین* دارد).

مؤلفه‌های $\mu_{s,z}$ گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی نیز کوانتیده‌اند، و با رابطهٔ زیر داده می‌شوند

$$\mu_{s,z} = -2m_s\,\mu_B \qquad (۴۰\text{-}۱۳)$$

شکل ۴۰-۶ دو مؤلفهٔ کوانتیدهٔ S_z اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی و سمتگیریهای وابستهٔ بردار $\vec{S}$ را نشان می‌دهد. این شکل همچنین مؤلفه‌های کوانتیدهٔ $\mu_{s,z}$ گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی و سمتگیریهای وابستهٔ بردار $\vec{\mu}_s$ را نشان می‌دهد.



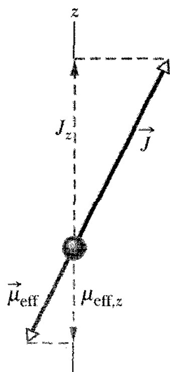
شکل ۴۰-۶ مقدارهای مجاز S_z و μ_z برای الکترون.

ترکیب اندازه حرکتهای زاویه‌ای مداری و اسپینی

برای اتمی که بیش از یک الکترون دارد، اندازه حرکت زاویه‌ای کلّ $\vec{J}$ را تعریف می‌کنیم که جمع برداری اندازه حرکتهای زاویه‌ای الکترونهای منفرد- هم اندازه حرکت زاویه‌ای مداری و هم اسپینی- آنهاست. هر عنصر در جدول تناوبی با تعداد پروتونها در هستهٔ اتم آن عنصر معرفی می‌شود. این تعداد پروتونها **عدد اتمی** (یا **عدد باری**) Z عنصر نامیده می‌شود. چون اتمی که از لحاظ الکتریکی خنثی است دارای تعداد برابری پروتون و الکترون است، Z همچنین تعداد الکترونها در اتم خنثی است و ما از این واقعیت برای مشخص کردن مقدار $\vec{J}$ یک اتم خنثی استفاده می‌کنیم:

$$\vec{J} = (\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \cdots + \vec{L}_Z) + (\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \cdots + \vec{S}_Z) \qquad (۴۰\text{-}۱۴)$$

به همین ترتیب، گشتاور دوقطبی مغناطیسی کلّ یک اتم چند الکترونی برابر با جمع برداری گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی (هم مداری و هم اسپینی) الکترونهای منفرد آن است. ولی، به دلیل وجود عامل ۲ در معادلهٔ ۴۰-۱۳، گشتاور دوقطبی مغناطیسی برایند اتم در جهت بردار $-\vec{J}$ نیست؛ بلکه با آن بردار زاویهٔ معینی را می‌سازد. **گشتاور دوقطبی مغناطیسی مؤثر** $\vec{\mu}_{\text{eff}}$ اتم، مؤلفهٔ جمع برداری گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی منفرد در جهت $-\vec{J}$ است (شکل ۴۰-۷). همانطور که در بخش بعد خواهیم دید، جمع برداری اندازه حرکتهای زاویه‌ای مداری و اندازه حرکتهای زاویه‌ای اسپینی بیشتر الکترونها در اتمهای نوعی برابر با صفر است. بنابراین، $\vec{J}$ و $\vec{\mu}_{\text{eff}}$ این اتمها ناشی از تعداد نسبتاً کمی از الکترونها، غالباً یک الکترون ظرفیت تنهاست.



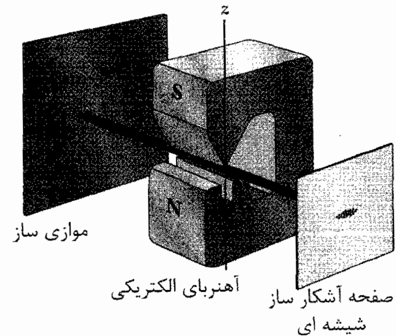
شکل ۴۰-۷ مدل کلاسیکی که بردار اندازه حرکت زاویه‌ای کل $\vec{J}$ و بردار گشتاور مغناطیسی مؤثر $\vec{\mu}_{\text{eff}}$ را نشان می‌دهد.

> ✔ ***نکتهٔ وارسی ۱*** الکترونی در یک حالت کوانتومی است که در آن بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای مداری الکترون $\vec{L}$ برابر با $2\sqrt{3}\,\hbar$ است. چه تعداد تصویر گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری الکترون روی محور z مجاز هستند؟

۴۰-۵ آزمایش اشترن- گرلاخ

در سال ۱۹۲۲/۱۳۰۱، *اتو اشترن*[1] و *والتر گرلاخ*[2] در دانشگاه هامبورگ آلمان به طور تجربی نشان دادند که گشتاور مغناطیسی اتمهای نقره کوانتیده‌اند. در آزمایش اشترن- گرلاخ، به طوری که امروزه شناخته شده است، نقره در اجاقی تبخیر شده و برخی از اتمهای آن در این بخار از طریق شکاف باریکی در دیوارهٔ اجاق فرار می‌کنند و وارد لولهٔ تخلیه شده‌ای می‌شوند. آنگاه برخی از این اتمهای فراری از میان شکاف باریک دیگری عبور می‌کنند و باریکهٔ نازکی از اتمها را تشکیل می‌دهند (شکل ۴۰-۸). (این اتمها *موازی شده*- به شکل باریکه‌ای درآمده‌اند- و شکاف دوم *موازی ساز* نامیده می‌شود). این باریکه از میان قطبهای یک آهنربای مغناطیسی عبور می‌کند و سپس روی یک صفحهٔ آشکارساز شیشه‌ای فرود می‌آید، جایی که رسوبی از نقره را تشکیل می‌دهد.

وقتی آهنربای الکتریکی خاموش باشد، رسوب نقره به صورت یک لکهٔ باریک است. ولی، وقتی آهنربای الکتریکی به کار افتد، رسوب نقره به طور قائم گسترش می‌یابد. دلیل آن



شکل ۴۰-۸ دستگاهی که اشترن و گرلاخ به کار بردند.

این است که اتمهای نقره، دوقطبیهای الکتریکی هستند و بنابراین، هنگامی که از میان میدان مغناطیسی قائم آهنربای الکتریکی می‌گذرند، نیروهای مغناطیسی قائمی بر آنها وارد می‌شود؛ این نیروها آنها را کمی به بالا یا پایین منحرف می‌کنند. بنابراین، با تحلیل رسوب نقره روی صفحه، می‌توانیم تعیین کنیم که اتمها دستخوش چه انحرافهایی در میدان مغناطیسی شده‌اند. وقتی اشترن و گرلاخ نقش نقرهٔ روی صفحهٔ آشکارساز را تحلیل کردند، شگفت زده شدند. ولی، پیش از آنکه آن شگفتی و کاربردهای کوانتومی آن را بررسی کنیم، به نیروی منحرف کنندهٔ مغناطیسی وارد بر اتمهای نقره می‌پردازیم.

نیروی منحرف کنندهٔ مغناطیسی وارد بر یک اتم نقره

تا اینجا دربارهٔ نوع نیروی مغناطیسی منحرف کنندهٔ اتمهای نقره در آزمایش اشترن- گرلاخ بحث نکرده‌ایم. این نیرو از نوع نیروی منحرف کنندهٔ مغناطیسی *نیست*، که بنابر معادلهٔ ۲۴-۲ ($\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$) بر یک ذرهٔ باردار متحرک وارد می‌شود. دلیل آن ساده است: اتم نقره از لحاظ الکتریکی خنثی است (بار خالص q آن برابر با صفر است) و بنابراین، این نوع نیروی مغناطیسی نیز صفر است.

نوع نیروی مغناطیسی که در پی آن هستیم ناشی از برهم‌کنش بین میدان مغناطیسی $\vec{B}$ آهنربای الکتریکی و دو قطبی مغناطیسی اتم نقرهٔ منفرد است. با شروع از انرژی پتانسیل U دوقطبی در میدان مغناطیسی، می‌توانیم عبارتی را برای نیرو در این برهم‌کنش به دست آوریم. معادلهٔ ۲۴-۳۸ بیان می‌دارد که

$$U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B} \qquad (۴۰-۱۵)$$

که در آن $\vec{\mu}$ گشتاور دو قطبی مغناطیسی یک اتم نقره است. در شکل ۴۰-۸، جهت مثبت محور z و جهت $\vec{B}$ به طور قائم رو به بالا هستند. بنابراین، معادلهٔ ۴۰-۱۵ را می‌توانیم برحسب مؤلفهٔ μ_z گشتاور دو قطبی مغناطیسی اتم در جهت $\vec{B}$ بنویسیم

$$U=-\mu_z B \qquad (۴۰-۱۶)$$

آنگاه، با استفاده از معادلهٔ ۸-۱۸ $(F=-dU/dx)$ برای محور z نشان داده شده در شکل ۴۰-۸، چنین به دست می‌آوریم

$$F_z=-\frac{dU}{dz}=\mu_z\frac{dB}{dz} \qquad (۴۰-۱۷)$$

این همان چیزی است که به دنبالش بودیم- معادله‌ای برای نیروی مغناطیسی منحرف کنندهٔ اتم نقره به هنگام عبور از میدان مغناطیسی.

جملهٔ dB/dz در معادلهٔ ۴۰-۱۷ *گرادیان* میدان مغناطیسی در امتداد محور z است. اگر میدان مغناطیسی در امتداد محور z تغییر نکند (مثل مورد میدان مغناطیسی یکنواخت یا بدون حضور میدان مغناطیسی)، آنگاه $dB/dz=0$ و اتم نقره به هنگام حرکت در میان قطبهای آهنربا منحرف نمی‌شود. در آزمایش اشترن- گرلاخ، قطبها برای بیشینه کردن گرادیان dB/dz طوری طراحی شده‌اند که انحراف قائم اتمهای نقره به هنگام عبور از میان قطبها به بیشترین مقدار ممکن برسد و در نتیجه، انحراف آنها در رسوب روی صفحهٔ شیشه‌ای آشکار شود.

بنابر فیزیک کلاسیکی، محدودهٔ مقدارهای مؤلفه‌های μ_z اتمهای نقره که از میدان مغناطیسی شکل ۴۰-۸ می‌گذرند باید از $-\mu$ (که گشتاور دوقطبی $\vec{\mu}$ در جهت رو به پایین محور z است) تا $+\mu$ (که گشتاور دوقطبی $\vec{\mu}$ در جهت رو به بالای محور z است) باشد. بنابراین، از معادلهٔ ۴۰-۱۷ درمی‌یابیم که باید محدوده‌ای از نیروها بر اتمها وارد شوند و در نتیجه باید محدوده‌ای از انحراف اتمها، از بیشترین انحراف رو به پایین تا بیشترین انحراف رو به بالا را داشته باشیم. این بدان معنی است که انتظار داریم اتمها در امتداد یک خط قائم روی صفحهٔ شیشه‌ای فرود آیند، ولی آنها *بدین گونه فرود نمی‌آیند*.

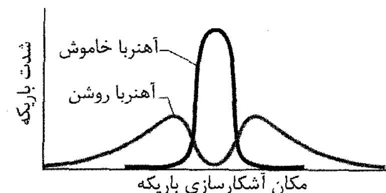
1. Otto Stern
2. Walther Gerlach

شگفتی تجربی

آنچه اشترن و گرلاخ دریافتند این بود که اتمها دو لکهٔ متمایز را روی صفحهٔ شیشه‌ای تشکیل می‌دادند، یکی بالای نقطه‌ای که وقتی منحرف نشوند به آن برمی‌خورند، و دیگری درست به همان فاصله، زیر آن نقطه. این لکه‌ها در ابتدا برای مشاهده بسیار ضعیف بودند، اما وقتی اشترن به طور تصادفی دود سیگارش را روی شیشه دمید قابل مشاهده شدند. سولفور موجود در این تنفس (از سیگار) با نقره ترکیب شده سولفید نقرهٔ سیاه قابل ملاحظه‌ای ایجاد کرده بود.

این نتیجهٔ دو لکه‌ای را میتوان در منحنیهای شکل ۴۰-۹ مشاهده کرد، که نتیجهٔ نوع جدیدتری از آزمایش اشترن- گرلاخ را نشان می‌دهد. در این آزمایش اخیر، باریکه‌ای از اتمهای سزیوم (دوقطبیهای مغناطیسی نظیر اتمهای نقره در آزمایش اولیهٔ اشترن- گرلاخ) از میان یک میدان مغناطیسی با گرادیان قائم بزرگ dB/dz عبور داده شدند. میدان می‌توانست روشن یا خاموش باشد، و می‌شد آشکارساز را در سرتاسر باریکه، رو به بالا و رو به پایین حرکت داد.

وقتی میدان خاموش باشد، بدیهی است که باریکه منحرف نمی‌شود و آشکارساز نقش قلهٔ مرکزی نشان داده شده در شکل ۴۰-۹ را ثبت می‌کند. وقتی میدان روشن باشد، باریکهٔ اولیه توسط میدان مغناطیسی به طور قائم به دو باریکهٔ کوچکتر تقسیم می‌شود، یکی بالاتر از باریکهٔ منحرف نشدهٔ پیشین و دیگری پایینتر از آن. وقتی آشکارساز در سرتاسر این دو باریکهٔ کوچکتر به طور قائم و رو به بالا حرکت کند، نقشِ دو قله‌ای نشان داده شده در شکل ۴۰-۹ ثبت می‌شود.



شکل ۴۰-۹ نتایج حاصل از تکرار امروزی آزمایش اشترن- گرلاخ. وقتی آهنربای الکتریکی خاموش است، فقط یک باریکهٔ تنها وجود دارد؛ وقتی آهنربای الکتریکی روشن شود، باریکهٔ اولیه به دو زیر باریکه تقسیم می‌شود. این دو زیرباریکه به همردیفی موازی یا پادموازی گشتاورهای مغناطیسی اتمهای سزیوم با میدان مغناطیسی خارجی مربوط است.

مفهوم این نتایج

در آزمایش اولیهٔ اشترن- گرلاخ، نه یک خط عمودی از نقره، بلکه دو لکهٔ نقره روی صفحهٔ شیشه‌ای تشکیل می‌شدند. این بدان معنی است که مؤلفهٔ μ_z در امتداد $\vec{B}$ (و در امتداد z) به ترتیبی که فیزیک کلاسیکی پیش‌بینی می‌کند نمی‌تواند هر مقداری میان $-\mu$ و $+\mu$ را داشته باشد. بلکه μ_z فقط به دو مقدار محدود می‌شود، هر یک برای یکی از دو لکهٔ روی صفحهٔ شیشه‌ای. بنابراین، آزمایش اولیهٔ اشترن- گرلاخ نشان می‌داد که μ_z کوانتیده است، که این (دقیقاً) دلالت بر آن دارد که $\vec{\mu}$ نیز کوانتیده است. افزون بر این، چون اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ اتم به $\vec{\mu}$ وابسته است، این اندازه حرکت زاویه‌ای و مؤلفهٔ L_z آن نیز کوانتیده‌اند.

با نظریهٔ کوانتومی نوین می‌توانیم به توضیح این دو لکه در آزمایش اشترن- گرلاخ بیافزاییم. امروزه می‌دانیم که یک اتم نقره شامل تعداد زیادی الکترون، هر یک با یک گشتاور مغناطیسی اسپینی و یک گشتاور مغناطیسی مداری، است. همچنین می‌دانیم که همهٔ این گشتاورها، به جز برای یک تکْ الکترون، یکدیگر را به طور برداری خنثی می‌کنند و گشتاور دوقطبی مداری آن تکْ الکترون برابر صفر است. بنابراین، گشتاور دوقطبی ترکیبی $\vec{\mu}$ یک اتم نقره برابر با گشتاور دو قطبی مغناطیسی *اسپینی* آن تکْ الکترون است. بنا بر معادلهٔ ۴۰-۱۳، این بدان معنی است که μ_z فقط دو مؤلفه در امتداد محور z شکل ۴۰-۸ دارد. یک مؤلفه برای عدد کوانتومی $m_s = +\frac{1}{2}$ (اسپین تکْ الکترون رو به بالا)، و مؤلفهٔ دیگر برای عدد کوانتومی $m_s = -\frac{1}{2}$ (اسپین تکْ الکترون رو به پایین). با قرار دادن در معادلهٔ ۴۰-۱۳ خواهیم داشت

$$\mu_{s,z} = -2\left(+\frac{1}{2}\right)\mu_B = -\mu_B \quad \text{و} \quad \mu_{s,z} = -2\left(-\frac{1}{2}\right)\mu_B = +\mu_B \qquad (۱۸-۴۰)$$

آنگاه با قرار دادن این عبارتها به جای μ_z در معادلهٔ ۴۰-۱۷، در می‌یابیم مؤلفهٔ نیروی F_z که اتمهای نقره را به هنگام عبور از میدان مغناطیسی منحرف می‌کند فقط می‌تواند دو مقدار زیر را داشته باشد

$$F_z = -\mu_B\left(\frac{dB}{dz}\right) \quad \text{و} \quad F_z = +\mu_B\left(\frac{dB}{dz}\right) \qquad (۱۹-۴۰)$$

که دو لکهٔ نقرهٔ روی صفحهٔ شیشه‌ای را به دست می‌دهد.

مسئلهٔ نمونه ۴۰-۱

در آزمایش اشترن- گرلاخ شکل ۴۰-۸، باریکه‌ای از اتمهای نقره از گرادیان میدان مغناطیسی dB/dz به بزرگی $(1/4)\,\mathrm{T/mm}$ که در امتداد محور z برقرار شده است، می‌گذرد. این ناحیه دارای طول w برابر با $3/5\,\mathrm{cm}$ در جهت باریکهٔ اولیه است. تندی اتمها برابر با $750\,\mathrm{m/s}$ است. وقتی اتمها ناحیهٔ گرادیان مغناطیسی را ترک می‌کنند، مسافت d منحرف شده چقدر است؟

جرم M یک اتم نقره برابر با $1/8\times10^{-25}\,\mathrm{kg}$ است.

نکته‌های کلیدی (۱) انحراف یک اتم نقره در باریکه ناشی از برهم‌کنش میان دوقطبی مغناطیسی اتم و میدان مغناطیسی، به دلیل گرادیان dB/dz است. جهت نیروی منحرف کننده در راستای گرادیان میدان (در امتداد محور z) است و با معادله‌های ۴۰-۱۹ داده می‌شود. فقط انحراف در جهت مثبت محور z را در نظر می‌گیریم؛ بنابراین، از میان معادله‌های ۴۰-۱۹، از

$F_z = \mu_B(dB/dz)$ استفاده می‌کنیم. (۲) فرض می‌کنیم گرادیان میدان dB/dz در سرتاسر ناحیه‌ای که اتمهای نقره از آن می‌گذرند دارای مقدار یکسانی است. بنابراین، مؤلفهٔ نیروی F_z در این ناحیه ثابت است و در نتیجه بنا بر قانون دوم نیوتون، شتاب a_z یک اتم ناشی از F_x در راستای محور z نیز ثابت است

محاسبه‌ها: با جمع این نظرات شتاب را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_z = \frac{F_z}{M} = \frac{\mu_B(dB/dz)}{M}$$

چون این شتاب ثابت است، از معادلهٔ ۲-۱۵ (از جدول ۲-۱) برای نوشتن انحراف d موازی با محور z استفاده می‌کنیم

$$d = v_{\circ z}t + \frac{۱}{۲}a_z t^۲ = \circ t + \frac{۱}{۲}\left(\frac{\mu_B(dB/dz)}{M}\right)t^۲ \qquad (۴۰-۲۰)$$

چون نیروی منحرف کنندهٔ وارد بر اتم بر جهت حرکت اولیهٔ اتم عمود است، مؤلفهٔ v سرعت اتم در امتداد جهت اولیهٔ حرکت، بر اثر این نیرو تغییر نمی‌کند. بنابراین، اتم به زمان $t = w/v$ برای پیمودن مسیری به طول w در ان جهت نیاز دارد. با قرار دادن w/v به جای t در معادلهٔ ۴۰-۲۰، درخواهیم یافت

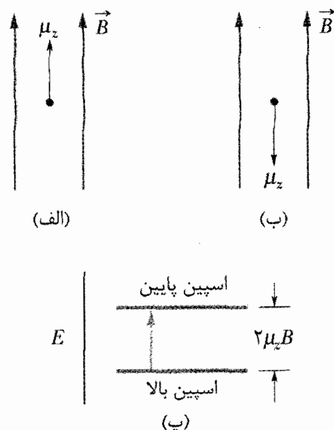
$$\begin{aligned} d &= \frac{۱}{۲}\left(\frac{\mu_B(dB/dz)}{M}\right)\left(\frac{w}{v}\right)^۲ = \frac{\mu_B(dB/dz)w^۲}{۲Mv^۲} \\ &= (۹/۲۷\times ۱۰^{-۲۴}\ \mathrm{J/T})(۱/۴\times ۱۰^{۳}\ \mathrm{T/m}) \\ &\quad\times \frac{(۳/۵\times ۱۰^{-۲}\ \mathrm{m})^۲}{(۲)(۱/۸\times ۱۰^{-۲۵}\ \mathrm{kg})(۷۵۰\ \mathrm{m/s})^۲} \\ &= ۷/۸۵\times ۱۰^{-۵}\ \mathrm{m} \approx ۰/۰۸\ \mathrm{mm} \end{aligned} \qquad \text{(پاسخ)}$$

فاصلهٔ جدایی بین دو زیر باریکه، دو برابر این مقدار، یعنی ۰/۱۶mm است. این فاصلهٔ زیادی نیست، ولی به سادگی اندازه گرفته می‌شود.

۴۰-۶ تشدید مغناطیسی

همانطور که به طور مختصر در بخش ۲۸-۷ مطرح کردیم، پروتون دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی $\vec{\mu}$ است که به اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی ذاتی $\vec{S}$ آن وابسته است. گفته می‌شود که این دو بردار به یکدیگر جفت شده‌اند و چون پروتون دارای بار مثبت است، آنها در یک جهت‌اند. فرض کنید پروتونی در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ که در جهت مثبت محور z امتداد یافته است، قرار داشته باشد. آنگاه $\vec{\mu}$ دارای دو مؤلفهٔ کوانتیدهٔ ممکن در امتداد آن محور است: این مؤلفه می‌تواند $+\mu_z$ یا $-\mu_z$ باشد، بسته به آنکه $\vec{\mu}$ در جهت $\vec{B}$ (شکل ۴۰-۱۰ الف) یا در خلاف جهت $\vec{B}$ (شکل ۴۰-۱۰ ب) باشد.

از معادلهٔ ۲۴-۳۸، $(U(\theta) = -\vec{\mu}\cdot\vec{B})$، به یاد آورید که به سمتگیری هر گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ واقع در یک میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$، یک انرژی پتانسیل وابسته است. بنابراین، انرژی به دو سمتگیری نشان داده شده در شکلهای ۴۰-۱۰ الف و ب وابسته است. سمتگیری در شکل ۴۰-۱۰ الف، حالت انرژی- پایینتر است و چون مؤلفهٔ S_z اسپین



شکل ۴۰-۱۰ مؤلفهٔ z بردار μ برای پروتونی واقع در حالت (الف) انرژی پایینتر (اسپین- بالا) و (ب) انرژی- بالاتر (اسپین- پایین). (پ) نمودار تراز- انرژی برای حالتها، که نشان می‌دهد هنگامی که اسپین پروتون ناگهان از بالا به پایین وارونه شود، جهش کوانتومی رو به بالایی رخ می‌دهد.

پروتون (نشان داده نشده است) نیز همسو با $\vec{B}$ است، *حالت اسپین- بالا* نامیده می‌شود. سمتگیری در شکل ۴۰-۱۰ ب (*حالت اسپین- پایین*)، حالت انرژی- بالاتر $(\mu_z B)$ است. در نتیجه، اختلاف انرژی بین این دو حالت برابر است با

$$\Delta E = \mu_z B - (-\mu_z B) = ۲\mu_z B \qquad (۴۰-۲۱)$$

اگر نمونه‌ای از آب را در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار دهیم، پروتونها در بخشهای هیدروژنی هر ملکول آب مایل‌اند در حالت انرژی- پایینتر قرار گیرند. (بخشهای اکسیژنی را در نظر نمی‌گیریم). هر یک از این پروتونها می‌توانند با جذب یک فوتون با انرژی hf برابر با ΔE به حالت انرژی- بالاتر پرش کنند. یعنی، پروتون می‌تواند با جذب فوتونی با انرژی

$$hf = ۲\mu_z B \qquad (۴۰-۲۲)$$

پرش کند. چنین جذبی **تشدید مغناطیسی** یا، به طور کلی، **تشدید مغناطیسی هسته‌ای** (NMR)[1] نامیده می‌شود، و وارونگی مؤلفهٔ S_z اسپین پیامد آن، *وارونگی ناگهانی اسپینی* خوانده می‌شود.

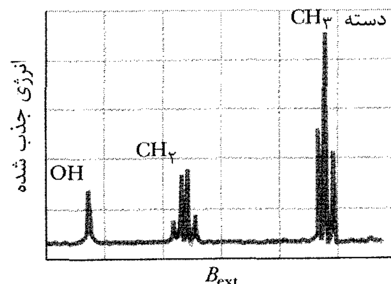
در عمل، فوتونهای مورد نیاز برای تشدید مغناطیسی دارای بسامد وابسته‌ای در گسترهٔ بسامد رادیویی (RF) هستند که توسط پیچهٔ کوچکی ایجاد می‌شوند که به دور نمونه‌ای که در آن تشدید صورت می‌گیرد پیچانده شده است. یک نوسانگر الکترومغناطیسی که یک *چشمهٔ* RF نامیده می‌شود، جریانی سینوسی را با بسامد f در پیچه راه می‌اندازد. بر اثر میدان الکترومغناطیسی (EM) که در داخل پیچه ایجاد می‌شود، نمونه نیز در بسامد f نوسان می‌کند. اگر f شرط معادلهٔ ۴۰-۲۲ را

1. Nuclear magnetic resonance

برآورده کند، میدان EM نوسانی می‌تواند یک کوانتوم انرژی را از طریق جذب فوتون، به پروتون نمونه منتقل کند و موجب وارونگی ناگهانی اسپینی پروتون شود.

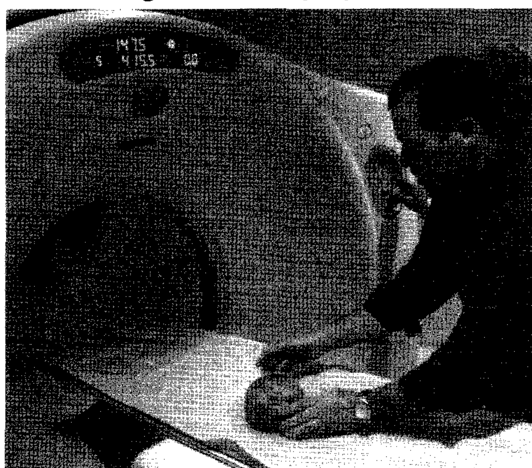
بزرگی میدان مغناطیسی B که در معادلهٔ ۴۰-۲۲ ظاهر می‌شود در واقع بزرگی میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ در محلی است که یک پروتون معین دچار وارونگی ناگهانی اسپین می‌شود. این میدان خالص، جمع برداری میدان خارجی $\vec{B}_{ext}$ ایجاد شده توسط ابزار تشدید مغناطیسی (عمدتاً یک آهنربای بزرگ) و میدان داخلی $\vec{B}_{int}$ ایجاد شده توسط گشتاورهای دو قطبی مغناطیسی اتمها و هسته‌های نزدیک به آن پروتون است. بنا به دلایل عملی که در اینجا به آنها نخواهیم پرداخت، تشدید مغناطیسی معمولاً با تغییر بزرگی B_{ext} در گستره‌ای از مقدارها، در حالی که بسامد f چشمهٔ RF در مقداری از پیش تعیین شده ثابت نگاه داشته شده است، آشکارسازی می‌شود و بدین ترتیب است که انرژی چشمهٔ RF به نمایش درمی‌آید. نموداری از اتلاف انرژی چشمهٔ RF برحسب B_{ext}، به هنگام تغییر B_{ext} در گستره‌ای از مقدارها که در آن وارونی ناگهانی اسپین رخ می‌دهد، یک قلهٔ تشدید را نشان می‌دهد. چنین نموداری، *طیف تشدید مغناطیسی هسته‌ای یا طیف NMR* نامیده می‌شود.

شکل ۴۰-۱۱، طیف NMR اتانول را نشان می‌دهد که مولکولی است شامل سه دسته اتم: CH_3، CH_2 و OH. پروتونها در هر دسته می‌توانند تشدید مغناطیسی پیدا کنند، ولی چون این دسته‌ها به دلیل طرز قرار گرفتن خود در داخل مولکول CH_3CH_2OH، در میدانهای داخلی $\vec{B}_{int}$ متفاوتی قرار گرفته‌اند، هر دسته دارای مقدار تشدید مغناطیسی B_{ext} یگانه‌ای مربوط به خودش است. بنابراین، قله‌های تشدید در طیف شکل ۴۰-۱۱ تشکیل مشخصهٔ NMR یگانه‌ای می‌دهند که با آنها اتانول را می‌توان تشخیص داد.



شکل ۴۰-۱۱ طیف تشدید مغناطیسی برای اتانول CH_3CH_2OH. خطهای طیفی، نشان دهندهٔ جذب انرژی وابسته به وارونگی ناگهانی اسپین پروتونهاست. همانطور که نشان داده شده است، این سه دسته از خطها مربوط به پروتونهای دستهٔ OH، دستهٔ CH_2، و دستهٔ CH_3 مولکول اتانول هستند. توجه کنید که دو پروتون در دستهٔ CH_2 چهار محیط محلی مختلف را اشغال می‌کنند. کل محور افقی کمتر از $10^{-4}T$ را پوشش می‌دهد.

چون بسیاری از مواد دارای مشخصه‌های NMR یگانه‌ای هستند، تشدید مغناطیسی برای تشخیص مواد ناشناخته، از قبیل کارهای پزشکی قانونی در بررسیهای جنایی، کاربرد دارد. افزون بر این، روش موسوم به **تصویربرداری با تشدید مغناطیسی** (MRI)[1] برای تشخیصهای پزشکی با موفقیت زیادی به کار گرفته شده است. پروتونها در بافتهای مختلف بدن انسان در محیطهای مغناطیسی داخلی مختلفی قرار گرفته‌اند. وقتی بدن، یا بخشی از آن در یک میدان مغناطیسی خارجی قوی قرار داده شود، این اختلافهای محیطی را می‌توان با روشهای وارونگی ناگهانی اسپینی آشکار، و با پردازش رایانه‌ای به تصویری مشابه تصویرهای ایجاد شده توسط پرتوهای x تبدیل نمود. مثلاً شکل ۴۰-۱۲ نمونه‌ای از کاربرد مربوطه را نشان می‌دهد.



شکل ۴۰-۱۲ یک فسیل تخم (متعلق به اردک گیاه‌خوار) از سومالی با قدمت ۷۰ میلیون سال را در یک روبشگر MRI قرار می‌دهند تا داخل آن را بررسی کنند. چون داخل به جای استخوان آهکی شده تکه‌های صدف در خمیره‌ای وجود دارند تخم وقتی در ابتدا دفن شده تر و تازه بوده است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۰-۲

در یک آزمایش NMR، قطرهٔ آبی در میدان مغناطیسی خارجی یکنواخت $\vec{B}_{ext}$ معلق شده است. فرض کنید میدان داخلی $\vec{B}_{int}$ قابل چشم‌پوشی است. بزرگی μ_z برای پروتون در اتمهای هیدروژن مولکولهای آب برابر با $1/41 \times 10^{-26}$ J/T است. تشدید مغناطیسی هنگامی که $B_{ext} = 1/80$ T است، ظاهر می‌شود. بسامد f چشمهٔ RF که باعث وارونگی ناگهانی اسپینی پروتونها می‌شود، و طول موج λ وابسته به یک فوتون جذب شده در این وارونگی اسپینی چقدر است؟

نکته‌های کلیدی (۱) وقتی یک پروتون در میدان خارجی $\vec{B}_{ext}$ قرار می‌گیرد، به خاطر آنکه یک دوقطبی مغناطیسی است، دارای انرژی پتانسیل است. (۲) این انرژی پتانسیل به دو مقدار با اختلاف $2\mu_z B$ محدود شده است. (۳) اگر پروتون بین این

1. Magnetic Resonance Imaging

دو انرژی پرش کند (وارونگی ناگهانی اسپینی)، انرژی فوتون hf باید بنا بر معادلهٔ ۴۰-۲۲ برابر با اختلاف انرژی $2\mu_z B$ باشد.

محاسبه‌ها: با قرار دادن $B = B_{ext} = 1/80\,T$ خواهیم داشت

$$f = \frac{2\mu_z B}{h} = \frac{(2)(1/41\times10^{-26}\,J/T)(1/80\,T)}{6/63\times10^{-34}\,J\cdot s}$$
$$= 7/66\times10^{7}\,Hz = 76/6\,MHz \qquad \text{(پاسخ)}$$

این بسامد وابسته به فوتونهای جذب شده در وارونگی ناگهانی اسپینی است؛ همچنین بسامد چشمهٔ RF و بنابراین، میدانهای الکترومغناطیس نوسانی ایجاد شده توسط آن چشمه است. طول موج وابسته به فوتون جذب شده در وارونگی ناگهانی اسپینی برابر است با

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3/00\times10^{8}\,m/s}{7/66\times10^{7}\,Hz} = 3/92\,m \qquad \text{(پاسخ)}$$

این طول موج در ناحیهٔ طول موج FM رادیویی است.

۴۰-۷ اصل طرد پاؤلی

در فصل ۳۹ تله‌های الکترونی گوناگونی، از تله‌های یک بعدی تخیلی تا تلهٔ سه بعدی واقعی یک اتم هیدروژن، را بررسی کردیم. در تمام این مثالها، فقط یک الکترون به تله افتاده بود. ولی، وقتی تله‌هایی را که شامل دو یا چند الکترون می‌شوند بررسی می‌کنیم (همانطور که در دو بخش بعد چنین خواهیم کرد)، آنگاه باید اصلی را در نظر بگیریم که هر ذره‌ای که عدد کوانتومی اسپینی s آن صفر یا عدد درست نباشد از آن تبعیت کند. این اصل نه فقط برای الکترونها بلکه همچنین برای پروتونها و نوترونها، که همگی دارای عدد کوانتومی اسپینی $s = \frac{1}{2}$ هستند، به کار می‌رود. این اصل به یاد *ولفگانگ پاؤلی*[1]، کسی که این اصل را در سال ۱۹۲۵/۱۳۰۴ فرمولبندی کرد، به نام **اصل طرد پاؤلی** شناخته می‌شود. این اصل برای الکترونها مبین آن است که

> ☞ هیچ دو الکترون محصور شده در تلهٔ یکسانی نمی‌توانند دارای مجموعهٔ مقدارهای یکسانی برای عددهای کوانتومی خود باشند.

همانطور که در بخش ۴۰-۹ مطرح خواهیم کرد، این اصل بدان معنی است که هیچ دو الکترونی در یک اتم نمی‌توانند دارای چهار مقدار یکسان برای عددهای کوانتومی n، ℓ، m_ℓ، و m_s باشند. تمام الکترونها دارای عدد کوانتومی یکسان $s = \frac{1}{2}$ هستند. بنابراین، هر دو الکترون در یک اتم باید دست کم در یکی از عددهای کوانتومی دیگر تفاوت داشته باشند. اگر چنین نبود، اتمها می‌رُمبیدند، و در آن صورت شما و کل جهان نمی‌توانستید وجود داشته باشید.

1. Wolfgang Pauli

۴۰-۸ الکترونهای چندگانه در تله‌های مستطیلی

برای آنکه برای بحث در مورد الکترونهای چندگانه در اتمها آماده شویم، دو الکترون محبوس شده در تله‌های مستطیلی فصل ۳۹ را بررسی می‌کنیم. دوباره از عددهای کوانتومی که برای این تله‌ها در هنگامی به دست آوردیم که فقط یک الکترون در آنها محبوس شده بود، استفاده می‌کنیم. ولی، در اینجا باید اندازه حرکتهای زاویه‌ای اسپینی دو الکترون را نیز در نظر بگیریم. برای این منظور، فرض می‌کنیم که تله‌ها در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار گرفته‌اند. آنگاه بنا بر معادلهٔ ۴۰-۱۲ ($S_z = m_s\hbar$) یک الکترون می‌تواند با اسپین بالا با $m_s = \frac{1}{2}$ یا اسپین پایین با $m_s = -\frac{1}{2}$ داشته باشد (فرض می‌کنیم که میدان مغناطیسی بسیار ضعیف است، به گونه‌ای که می‌توانیم از انرژیهای پتانسیل الکترونها بر اثر این میدان چشم‌پوشی کنیم).

هنگام محبوس کردن دو الکترون در یکی از این تله‌ها، باید اصل طرد پاؤلی را به یاد داشته باشیم؛ یعنی، الکترونها نمی‌توانند دارای مجموعهٔ یکسانی از مقدارها برای عددهای کوانتومی خود باشند.

۱. *تلهٔ یک بعدی.* در تلهٔ یک بعدی شکل ۳۹-۲، برای انطباق موج الکترون بر پهنای L تله، به تکْ عدد کوانتومی n نیاز داریم. بنابراین، هر الکترون محبوس شده در تله باید دارای یک مقدار معین n باشد، و عدد کوانتومی m_s آن می‌تواند $+\frac{1}{2}$ یا $-\frac{1}{2}$ باشد. دو الکترون می‌توانند یا با عددهای کوانتومی n مقدارهای متفاوتی داشته باشند، یا اینکه اگر یکی اسپین بالا و دیگری اسپین پایین داشت مقدار n یکسانی داشته باشند.

۲. *حصار مستطیلی.* در حصار مستطیلی شکل ۳۹-۱۳، برای انطباق موج الکترون به پهناهای L_x و L_y حصار، به دو عدد کوانتومی n_x و n_y نیاز داریم. از این رو، هر الکترون محبوس شده در تله باید دارای مقدارهای معینی برای این دو عدد کوانتومی باشد، و عدد کوانتومی m_s آنها می‌تواند $+\frac{1}{2}$ یا $-\frac{1}{2}$ باشد. بنابراین، اکنون سه عدد کوانتومی وجود دارد. بنابر اصل طرد پاؤلی، دست کم یکی از این سه عدد کوانتومی دو الکترون محبوس شده در تله باید با هم متفاوت باشند.

۳. *جعبهٔ مستطیلی.* در جعبهٔ مستطیلی شکل ۳۹-۱۴، برای انطباق موج الکترون به پهناهای L_x و L_y و L_z جعبه، به سه عدد کوانتومی n_x، n_y، و n_z نیاز داریم. از این رو، هر الکترون محبوس شده در تله باید دارای مقدارهای معینی برای این سه عدد کوانتومی باشد، و عدد کوانتومی m_s آنها می‌تواند $+\frac{1}{2}$ یا $-\frac{1}{2}$ باشد. بنابراین، اکنون چهار عدد کوانتومی وجود دارد. بنا بر اصل طرد پاؤلی، دست کم یکی از این چهار عدد کوانتومی دو الکترون محبوس شده در تله باید با هم متفاوت باشند.

حال فرض کنید بیش از دو الکترون را، یکی یکی، به ترازهای پیشین یک تلهٔ مستطیلی بیافزاییم. طبیعتاً اولین الکترونها به پایینترین تراز انرژی ممکن می‌روند- گفته می‌شود که الکترونها این تراز را *اشغال می‌کنند*. ولی، سرانجام اصل طرد پاؤلی مانع از آن می‌شود که الکترونهای بیشتری پایینترین تراز انرژی را اشغال کنند، و الکترون بعدی باید تراز انرژی بالاتر بعدی را اشغال کند. وقتی یک تراز انرژی به دلیل اصل طرد پاؤلی نتواند با الکترونهای بیشتری اشغال شود، می‌گوییم این تراز انرژی **پر** یا **کاملاً اشغال شده** است. در مقابل، ترازی که با هیچ الکترونی اشغال نشده است، **خالی** یا **اشغال نشده** نامیده می‌شود. برای حالتهای حدّ واسط این دو حالت، تراز را **اشغال شدهٔ جزئی** می‌نامند. *پیکربندی الکترونی* یک دستگاه الکترونهای محبوس شده، فهرست یا نمایشی از ترازهای انرژی اشغال شده توسط الکترونها، یا دسته‌ای از عددهای کوانتومی الکترونهاست.

محاسبهٔ انرژی کل

حال می‌خواهیم انرژی *دستگاهی* شامل دو یا چند الکترون محبوس شده در یک تلهٔ مستطیلی را محاسبه کنیم. به عبارتی دیگر، می‌خواهیم انرژی کل را برای هر پیکربندی از الکترونهای محبوس شده به دست آوریم.

برای سادگی کار، فرض می‌کنیم که الکترونها به طور الکتریکی با یکدیگر برهم‌کنش نمی‌کنند؛ یعنی از انرژیهای پتانسیل جفت الکترونها چشم‌پوشی می‌کنیم. در این حالت، می‌توانیم انرژی کل هر پیکربندی الکترونی را با محاسبهٔ انرژی هر الکترون، همان‌گونه که در فصل ۳۹ انجام دادیم، محاسبه و سپس این انرژیها را با هم جمع کنیم. (در مسئلهٔ نمونهٔ ۴۰-۳، این کار را برای هفت الکترون محبوس شده در یک حصار مستطیلی انجام می‌دهیم).

یک راه مناسب برای ساماندهی مقدارهای انرژی دستگاهی معین از الکترونها، ترسیم نمودار تراز- انرژی *برای این دستگاه* است؛ درست مانند همان کاری که برای تکْ الکترون در تله‌های فصل ۳۹ انجام دادیم. پایینترین تراز، با انرژی E_{gr}، مربوط به حالت پایهٔ دستگاه است. تراز انرژی بالاتر بعدی، با انرژی E_{fe}، مربوط به اولین حالت برانگیختهٔ دستگاه، و تراز بعد از آن، با انرژی E_{se}، مربوط به دومین حالت برانگیخته دستگاه است و این روند به همین ترتیب ادامه می‌یابد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۰-۳

هفت الکترون در حصار مربعی مسئلهٔ نمونهٔ ۳۹-۵ محبوس شده‌اند. این حصار، یک چاه پتانسیل نامتناهی دو بعدی با پهناهای $L_x = L_y = L$ است (شکل ۳۹-۱۳). فرض کنید که الکترونها به طور الکتریکی با یکدیگر برهم‌کنش نمی‌کنند. (الف) پیکربندی الکترونی حالت پایهٔ دستگاه هفت الکترونی چیست؟

نمودار تک- الکترون: برای تشکیل این دستگاه می‌توانیم پیکربندی الکترونی دستگاه را با قرار دادن تک تک هفت الکترون در حصار تعیین کنیم. چون فرض می‌کنیم الکترونها به طور الکتریکی با یکدیگر برهم‌کنش نمی‌کنند، می‌توانیم از نمودار تراز- انرژی یک تکْ الکترون محبوس شده برای نحوهٔ چیدن این هفت الکترون در حصار استفاده کنیم. *نمودار تراز- انرژی تکْ الکترون* در شکل ۳۹-۱۵، و بخشی از آن در اینجا به صورت شکل ۴۰-۱۳ الف ارائه شده است. به خاطر آورید این ترازها برای نمایش انرژی وابسته به آنها به صورت $E_{nx,ny}$ نمایش داده شدند. برای مثال، پایینترین تراز انرژی، $E_{1,1}$ است که در آن عددهای کوانتومی n_x و n_y برابر ۱ هستند.

اصل پاؤلی: الکترونهای به تله افتاده باید از اصل طرد پاؤلی تبعیت کنند؛ یعنی، هیچ دو الکترونی نمی‌توانند مجموعه مقدارهای یکسانی برای عددهای کوانتومی n_x ، n_y و m_s داشته باشند. نخستین الکترون به تراز انرژی $E_{1,1}$ می‌رود و می‌تواند دارای $m_s = \frac{1}{2}$ یا $m_s = -\frac{1}{2}$ باشد. به طور دلخواه، حالت دوم را انتخاب می‌کنیم و یک پیکان رو به پایین (برای نمایاندن اسپین پایین) روی تراز $E_{1,1}$ شکل ۴۰-۱۳ الف می‌کشیم. دومین الکترون نیز به تراز $E_{1,1}$ می‌رود، ولی چون یکی از عددهای کوانتومی آن باید با الکترون اول متفاوت باشد، برای آن باید داشته باشیم $m_s = \frac{1}{2}$. این الکترون دوم را با یک پیکان رو به بالا (برای نمایاندن اسپین بالا) روی تراز $E_{1,1}$ شکل ۴۰-۱۳ ب نمایش می‌دهیم.

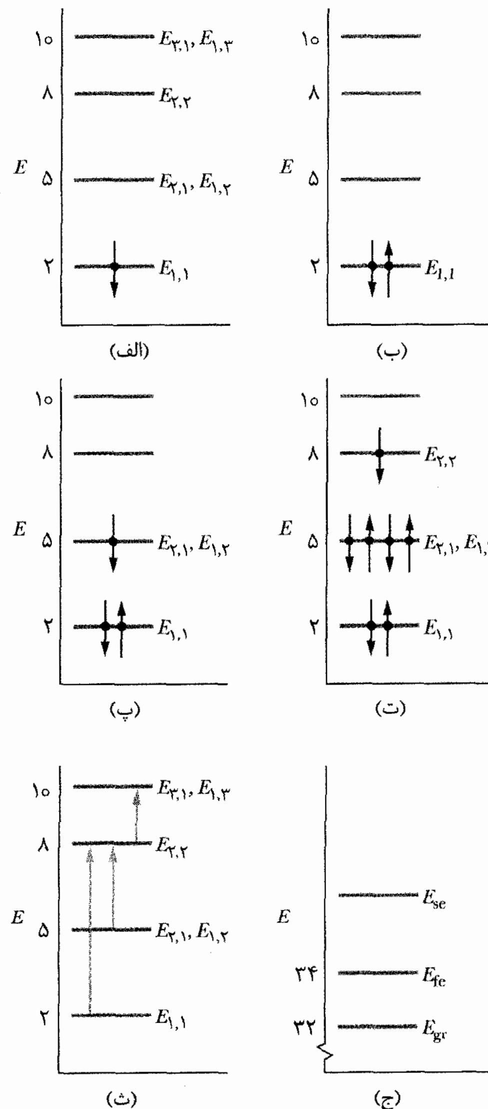
الکترون‌ها، یک به یک: تراز انرژی $E_{1,1}$ کاملاً اشغال شده است و بنابراین، سومین الکترون نمی‌تواند همان انرژی را داشته باشد. از این رو، سومین الکترون به تراز بالاتر بعدی با انرژیهای برابر $E_{2,1}$ و $E_{1,2}$ می‌رود (تراز، واگِن است). برای سومین الکترون، عددهای کوانتومی n_x و n_y می‌توانند به ترتیب ۱ و ۲ یا ۲ و ۱ باشند. همچنین عدد کوانتومی m_s می‌تواند $+\frac{1}{2}$ یا $-\frac{1}{2}$ باشد. به طور اختیاری عددهای کوانتومی $n_x = 2$ ، $n_y = 1$ ، و $m_s = -\frac{1}{2}$ را به این الکترون نسبت می‌دهیم. این وضعیت را با یک پیکان رو به پایین برای $E_{2,1}$ و $E_{1,2}$ در شکل ۴۰-۱۳ پ نمایش می‌دهیم.

می‌توانید نشان دهید که سه الکترون بعدی نیز می‌توانند به تراز انرژیهای $E_{2,1}$ و $E_{1,2}$ بروند، به شرط آنکه هیچ مجموعه‌ای از سه عدد کوانتومی، دو بار تکرار نشود. آنگاه این تراز شامل چهار الکترون، با عددهای کوانتومی (n_x, n_y, m_s) زیرند

$$\left(2,1,-\frac{1}{2}\right),\left(2,1,+\frac{1}{2}\right),\left(1,2,-\frac{1}{2}\right),\left(1,2,+\frac{1}{2}\right)$$

و تراز کاملاً اشغال شده است. بنابراین، هفتمین الکترون به تراز بالاتر بعدی که تراز $E_{2,2}$ است می‌رود. به طور اختیاری فرض می‌کنیم که اسپین این الکترون رو به پایین با $m_s = -\frac{1}{2}$ است.

شکل ۴۰-۱۳ت تمام هفت الکترون را روی نمودار تراز- انرژی تکْ الکترون نشان می‌دهد. اکنون هفت الکترون در حصار داریم که پیکربندی آنها برای پایینترین انرژی از اصل طرد پاؤلی تبعیت می‌کند. پیکربندی حالت پایهٔ دستگاه در شکل ۴۰-۱۳ت نمایش داده شده و در جدول ۴۰-۲ فهرست شده است.



شکل ۴۰-۱۳ (الف) نمودار تراز- انرژی برای الکترون واقع در یک حصار مربعی به اضلاع L. (انرژی E مضربی از $h^2/8mL^2$ است). یک الکترون با اسپین پایین، پایینترین تراز را اشغال می‌کند. (ب) دو الکترون (یکی با اسپین پایین و دیگری با اسپین بالا) پایینترین تراز تکْ الکترونی نمودار تراز- انرژی را اشغال می‌کنند. (پ) الکترون سوم، تراز بعدی را اشغال می‌کند. (ت) پیکربندی حالت پایهٔ دستگاه برای کل هفت الکترون. (ث) سه گذار محتمل برای دستگاه هفت الکترونی به اولین حالت برانگیختهٔ آن. (ج) نمودار تراز- انرژی دستگاه برای سه پایینترین انرژی کل دستگاه (برحسب مضربی از $h^2/8mL^2$).

جدول ۴۰-۲

پیکربندی حالت پایه و انرژی‌ها

n_x	n_y	m_s	انرژی*
۲	۲	$-\frac{1}{2}$	۸
۲	۱	$+\frac{1}{2}$	۵
۲	۱	$-\frac{1}{2}$	۵
۱	۲	$+\frac{1}{2}$	۵
۱	۲	$-\frac{1}{2}$	۵
۱	۱	$+\frac{1}{2}$	۲
۱	۱	$-\frac{1}{2}$	۲
			مجموع ۳۲

* مضربی از $h^2/8mL^2$

(ب) انرژی کل دستگاه هفت الکترونی در حالت پایه‌اش برحسب $h^2/8mL^2$ چقدر است؟

نکته‌های کلیدی انرژی کل E_{gr} دستگاه در حالت پایه‌اش مجموعی از انرژی الکترونهای مجزا در پیکربندی حالت پایهٔ دستگاه است. انرژی هر الکترون را می‌توان از جدول ۳۹-۱، که بخشی از آن دوباره در جدول ۴۰-۲ آمده است، یا از شکل ۴۰-۱۳ ت به دست آورد. چون دو الکترون در نخستین (پایینترین) تراز، چهار الکترون در دومین تراز، و یک الکترون در سومین تراز قرار دارند، خواهیم داشت

$$E_{gr}=2\left(2\frac{h^2}{8mL^2}\right)+4\left(5\frac{h^2}{8mL^2}\right)+1\left(8\frac{h^2}{8mL^2}\right)$$

$$=32\frac{h^2}{8mL^2} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(پ) چه مقدار انرژی باید به این دستگاه داده شود تا به نخستین حالت برانگیخته‌اش پرش کند؟ انرژی این حالت چقدر است؟

نکته‌های کلیدی

۱. اگر دستگاه برانگیخته شود، یکی از هفت الکترون در نمودار تراز- انرژی تکْ الکترونیِ شکل ۴۰-۱۳ ت باید پرش کوانتومی کند.

۲. اگر این جهش رخ دهد، تغییر انرژی ΔE الکترون (و بنابراین دستگاه) باید $\Delta E = E_{\text{بالا}} - E_{\text{پایین}}$ (معادلهٔ ۳۹-۵) باشد که در آن $E_{\text{پایین}}$ انرژی ترازی است که پرش از آن شروع و $E_{\text{بالا}}$ انرژی ترازی است که جهش به آن ختم می‌شود.

۳. اصل طرد پاؤلی باید کماکان به کار گرفته شود؛ به ویژه یک الکترون *نمی‌تواند* به ترازی که کاملاً اشغال شده است پرش کند.

اولین حالت برانگیختهٔ انرژی: حال سه پرش نشان داده شده در شکل ۴۰-۱۳ ث را در نظر می‌گیریم؛ چون همهٔ این پرشها به حالتهای خالی یا اشغال شدهٔ جزئی صورت می‌پذیرند، از لحاظ اصل طرد پاؤلی مجاز هستند. در یکی از این پرشهای ممکن، الکترون از تراز $E_{1,1}$ به تراز اشغال شدهٔ جزیی $E_{2,2}$ پرش می‌کند. تغییر انرژی برابر است با

$$\Delta E = E_{2,2} - E_{2,1} = 8\frac{h^2}{8mL^2} - 2\frac{h^2}{8mL^2} = 6\frac{h^2}{8mL^2}$$

(فرض می‌کنیم که سمتگیری اسپین الکترون که موجب پرش می‌شود، می‌تواند بنا بر نیاز تغییر کند).

در پرشهای ممکن دیگر در شکل ۴۰-۱۳ ث، یک الکترون از تراز واگن $E_{2,1}$ و $E_{1,2}$ به تراز اشغال شدهٔ جزیی $E_{2,2}$ پرش می‌کند. تغییر انرژی برابر است با

$$\Delta E = E_{2,2} - E_{2,1} = 8\frac{h^2}{8mL^2} - 5\frac{h^2}{8mL^2} = 3\frac{h^2}{8mL^2}$$

در سومین پرش ممکن در شکل ۴۰-۱۳ ث، الکترون از تراز $E_{2,2}$ به تراز اشغال نشدهٔ واگن $E_{1,3}$ و $E_{3,1}$ پرش می‌کند. تغییر انرژی برابر است با

$$\Delta E = E_{1,3} - E_{2,2} = 10\frac{h^2}{8mL^2} - 8\frac{h^2}{8mL^2} = 2\frac{h^2}{8mL^2}$$

از این سه پرش ممکن، کمترین تغییر انرژی ΔE مورد نیاز، برای اولین آنها از همه بیشتر است. می‌توانستیم پرشهای حتی محتملتری را نیز در نظر بگیریم، ولی همهٔ آنها به انرژی بیشتری نیاز دارند. بنابراین، برای آنکه دستگاه از حالت پایه‌اش به نخستین حالت برانگیخته‌اش پرش کند، الکترون در تراز $E_{2,2}$ باید به تراز واگن $E_{3,1}$ و $E_{1,3}$ که اشغال نشده است پرش کند و از این رو، انرژی مورد نیاز چنین می‌شود

$$\Delta E = 2\frac{h^2}{8mL^2} \qquad \text{(پاسخ)}$$

آنگاه انرژی E_{fe} نخستین حالت برانگیختهٔ دستگاه برابر است با

$$E_{\text{fe}} = E_{\text{gr}} + \Delta E$$

$$= 32\frac{h^2}{8mL^2} + 2\frac{h^2}{8mL^2} = 34\frac{h^2}{8mL^2} \qquad \text{(پاسخ)}$$

می‌توانیم این انرژی و انرژی E_{gr} حالت پایهٔ دستگاه را روی یک نمودار تراز- انرژی، همان گونه که در شکل ۴۰-۱۳ ج نشان داده شده است، نمایش دهیم.

۴۰-۹ بنا کردن جدول تناوبی

چهار عدد کوانتومی n، ℓ، m_ℓ و m_s حالتهای کوانتومی الکترونهای منفرد را در یک اتم چند الکترونی مشخص می‌کنند. ولی، تابعهای موج این حالتها همان تابعهای موج برای حالتهای مربوط به اتم هیدروژن نیستند، زیرا در اتمهای چند الکترونی انرژی پتانسیل وابسته به یک الکترون معین نه تنها به بار و مکان هستهٔ اتم، بلکه به بارها و مکانهای همهٔ الکترونهای دیگر در اتم نیز بستگی دارد. حلهای معادلهٔ *شرودینگر* برای اتمهای چند الکترونی را می‌توان- دست کم در اصول- با استفاده از یک رایانه به طور عددی به انجام رساند.

همانطور که در بخشهای ۳۹-۹ و ۴۰-۳ مطرح کردیم، همهٔ حالتها با مقدارهای یکسان عددهای کوانتومی n و ℓ تشکیل یک زیر لایه می‌دهند. برای یک مقدار معین ℓ، تعداد $2\ell+1$ مقدار ممکن برای عدد کوانتومی مغناطیسی m_ℓ، و برای هر m_ℓ، دو مقدار ممکن برای عدد کوانتومی اسپینی m_s وجود دارد. بنابراین، تعداد $2(2\ell+1)$ حالت در یک زیرلایه وجود دارد. از اینها نتیجه می‌شود که *همهٔ حالتها در یک زیرلایهٔ معین دارای انرژی یکسانی هستند* که مقدار آن عمدتاً با مقدار n و به میزان کمتری با مقدار ℓ تعیین می‌شود.

به منظور مشخص کردن زیر لایه‌ها، مقدارهای ℓ با حروف نشان داده می‌شوند:

$$\begin{matrix} \ell = 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ s & p & d & f & g & h & \cdots \end{matrix}$$

مثلاً، زیرلایهٔ با $n=3$ و $\ell=2$، با زیرلایهٔ $3d$ نشان داده می‌شود.

وقتی الکترونها را به حالتهایی در یک اتم چند الکترونی اختصاص می‌دهیم، باید اصل طرد پاؤلی (بخش ۴۰-۷) را مدّ نظر قرار دهیم؛ یعنی، هیچ دو الکترونی در یک اتم نمی‌توانند دارای مجموعهٔ عددهای کوانتومی n، ℓ، m_ℓ و m_s یکسانی باشند. اگر این اصل مهم برقرار نبود، همهٔ الکترونها در هر اتمی می‌توانستند به پایینترین تراز انرژی آن اتم پرش کنند، که این موجب نابودی ویژگیهای شیمیایی اتمها و مولکولها، و نیز نابودی حیات شیمیایی و خود ما می‌شد. حال اتمهای چند عنصر را بررسی می‌کنیم تا دریابیم که چگونه اصل طرد پاؤلی در بنا کردن جدول تناوبی به کار می‌آید.

نئون

اتم نئون دارای ۱۰ الکترون است. فقط دو تا از این الکترونها در زیرلایهٔ پایینترین انرژی، زیرلایهٔ $1s$، قرار دارند. هر دو این الکترونها دارای $n=1$ و $\ell=0$ و $m_\ell=0$ هستند، ولی یکی از آنها دارای $m_s=+\frac{1}{2}$ و دیگری دارای $m_s=-\frac{1}{2}$ است. زیر لایهٔ 1s شامل $2[2(0)+1]=2$ حالت است. چون این زیرلایه شامل همهٔ الکترونهایی است که بنا بر اصل طرد پاؤلی مجاز هستند، گفته می‌شود که این زیر لایه **بسته** است.

دو تا از هشت الکترون باقیمانده، پایینترین زیر لایهٔ انرژی بعدی، زیر لایهٔ $2s$، را پر می‌کنند. بقیهٔ شش الکترون، زیرلایهٔ $2p$ را به طور کامل پر می‌کنند که با $\ell=1$، $2[2(1)+1]=6$ حالت دارد.

در یک زیرلایهٔ بسته، همهٔ تصویرهای z مجاز بردار اندازه حرکت زاویه‌ای مداری $\vec{L}$ وجود دارند، و همانطور که از شکل

۴۰-۵ برمی‌آید، این تصویرها بـرای ایـن زیـر لایـه کـلاً خنثـی می‌شوند؛ زیرا برای هر تصویر مثبت، یک تصویر منفی متناظر با همان بزرگی وجود دارد. به همین ترتیب، تـصویرهای z انـدازه حرکتهای زاویه‌ای اسپینی نیز خنثی می‌شوند. بنابراین، یک زیـر لایهٔ بسته هیچ نوع اندازه حرکت زاویه‌ای و گشتاور مغناطیـسی ندرد. افزون بر این، چگالی احتمال آن تقارن کروی دارد. از این رو، نئون با سه زیرلایهٔ بسته‌اش ($1s$ ، $2s$ و $2p$) هـیچ "الکتـرون نامقید سستی" ندارد که بتواند با سایر اتمها برهم‌کنش شـیمیایی داشته باشد. نئون، مانند سایر **گازهای بی اثر** کـه سـتون سـمت راسـت جـدول تنـاوبی را تـشکیل مـی‌دهنـد، تقریباً از لحـاظ شیمیایی بی اثر است.

سدیم

پس از نئون در جدول تناوبی، سدیم با ۱۱ الکتـرون قـرار دارد. ده تا از این الکترونهـا، مغـزی شـبه نئـونی بـسته‌ای را تـشکیل می‌دهند، که همانطور که دیدیم دارای انـدازه حرکـت زاویـه‌ای صفر است. الکترون باقیمانده کاملاً در بیرون این مغزی بی اثـر، در زیرلایهٔ $3s$ که پایینترین زیر لایهٔ انرژی بعدی است قرار دارد. چون این **الکترون ظرفیت** سدیم در حالت بـا $\ell = 0$ قـرار دارد (یعنی، حالـت s بـا اسـتفاده از روش نمادگـذاری بـالا)، انـدازه حرکت زاویه‌ای و گشتاور دوقطبی مغناطیسی سدیم باید کـاملاً ناشی از اسپین این تکْ الکترون باشد.

سدیم به‌سادگی با سایر اتمهایی کـه دارای یـک "تهـی‌جـا" هستند، و الکترون ظرفیت سدیم که به سستی به آن مقیـد شـده می‌تواند در آن جا بگیرد، ترکیب می‌شـود. سـدیم، ماننـد سـایر **فلزهای قلیایی** که ستون سمت چپ جدول تنـاوبی را تـشکیل می‌دهند، از لحاظ شیمیایی فعال است.

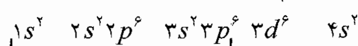
کلر

اتم کلر که دارای ۱۷ الکترون است، دارای یک مغزی شبه نئونی ۱۰ الکترونی بسته همراه با ۷ الکترون در بیرون آن است. دو تـا از این ۷ الکترون، زیرلایـهٔ $3s$ را پـر مـی‌کننـد و پـنج الکتـرون باقیمانده در زیرلایهٔ $3p$ قرار دارند که زیرلایهٔ بعدی با پـایینترین انرژی است. این زیرلایه که برای آن $\ell = 1$ است می‌تواند دارای $2[2\ell(0)+1] = 6$ الکترون باشد، و از ایـن رو یـک تهـی‌جـا، یـا "حفره" در این زیر لایه وجود دارد.

کلر پذیرندهٔ برهم‌کنش با سایر اتمهایی است که دارای یـک الکترون ظرفیت هستند و می‌توانند این حفره را پـر کننـد. مـثلاً سدیم کلراید (NaCl) ترکیب بسیار پایداری اسـت. کلـر، ماننـد سایر **هالوژنها** که ستون VIIA جدول تنـاوبی را مـی‌سـازند، از لحاظ شیمیایی فعال است.

آهن

آرایش ۲۶ الکترون اتم آهن را می‌توان به صورت زیر نشان داد:



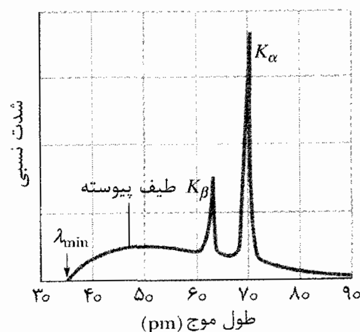
$$\underline{1s^2 \quad 2s^2 2p^6 \quad 3s^2 3p^6} \quad 3d^6 \quad 4s^2$$

زیرلایه‌ها به ترتیب عددی فهرست شده‌انـد و، بنـا بـر قـرارداد، شاخص بالا تعداد الکترونها در هر زیرلایه را به دست می‌دهـد. از جدول ۴۰-۱ می‌توان دریافت که زیرلایهٔ s ($\ell = 0$) می‌توانـد ۲ الکترون، زیرلایهٔ p ($\ell = 1$) می‌تواند ۶ الکترون، و زیرلایـهٔ d ($\ell = 2$) می‌تواند ۱۰ الکترون داشته باشـد. در نتیجـه، نخـستین ۱۸ الکترون آهن پنج زیر لایهٔ پر شده را تشکیل می‌دهند کـه در بالا با خطیِ مشخص شده است، و ۸ الکتـرون بـاقی مـی‌ماننـد. شش تا از این ۸ الکترون به زیرلایهٔ $3d$، و دو الکترون باقیمانده به زیرلایهٔ $4s$ می‌روند.

دلیل اینکه دو الکترون آخر نیز به زیر لایهٔ $3d$ نمی‌روند (که می‌تواند ۱۰ الکترون را در خود جای دهد) این اسـت کـه کـلاً پیکربنـدی $3d^6 4s^2$ بـه حـالتی بـا انـرژی پـایینتر نـسبت بـه پیکربندی $3d^8$ برای اتم می‌انجامد. یک اتم آهن با ۸ الکتـرون (بـه جـای ۶ الکتـرون) در زیرلایـهٔ $3d$، بـا گـسیل تـابش الکترومغناطیسی، به سرعت به پیکربندی $3d^6 4s^2$ گـذار انجـام می‌دهد. نتیجهٔ آموزنده این است که بـه جـز بـرای سـاده‌تـرین عنصرها، حالتها ممکن است به آن ترتیبی که ما تصور مـی‌کنـیم "منطقی" است، پر نشوند.

۴۰-۱۰ پرتوهای x و ترتیب عنصرها

وقتی یک هـدف جامـد، از قبیـل مـس یـا تنگـستن جامـد، بـا الکترونهایی که انرژی جنبشی آنها در گسترهٔ کیلوالکترون- ولت است بمباران شود، تابشی الکترومغناطیسی گسیل شـده **پرتـو x** نامیده می‌شود. دلیل آنکه در اینجا به این پرتوها- که سـودمندی آنها در پزشکی، دندانپزشکی، و صنعت به‌خوبی شناخته شـده و گسترش یافته است- می‌پردازیم آن است که مـی‌تواننـد دربـارهٔ



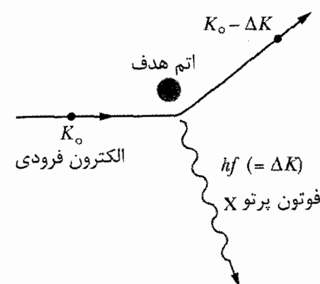
شکل ۴۰-۱۴ توزیع طول موج پرتوهای x ایجاد شـده، هنگـامی کـه الکترونهای ۳۵ keV به یک هدف مولیبدن برخـورد مـی‌کننـد. طیـف پیوسته و قله‌های تیز برآمده در آن، بـا سـازوکارهای مختلفـی ایجـاد شده‌اند.

اتمهایی که آنها را جذب یا گسیل می‌کنند چیزهایی به ما بیاموزند. شکل ۴۰-۱۴ طیف طول موج پرتوهای x را نشان می‌دهد که به هنگام فرود باریکهٔ الکترونهای 35keV روی هدف مولیبدن ایجاد شده است. طیف گستردهٔ پیوسته‌ای از تابش را می‌بینیم که روی آن دو قلهٔ تیز با طول موج معین وجود دارد. طیف پیوسته و قله‌ها به روشهای مختلفی به وجود می‌آیند که بعداً به طور جداگانه به آنها خواهیم پرداخت.

طیف پرتو x پیوسته

در اینجا طیف پرتو x شکل ۴۰-۱۴ را، فعلاً با چشم‌پوشی از دو قلهٔ بارزی که از آن برآمده است، بررسی می‌کنیم. الکترونی با انرژی جنبشی اولیهٔ $K_\circ$ را در نظر می‌گیریم که با یکی از اتمهای هدف، آنگونه در شکل ۴۰-۱۵ نشان داده شده است، برخورد (برهم‌کنش) می‌کند. این الکترون ممکن است مقداری انرژی ΔK را از دست بدهد، که به صورت انرژی یک فوتون پرتو x که از محل برخورد تابش می‌شود، پدیدار خواهد شد. (به دلیل جرم نسبتاً بزرگ اتم پس‌زده شده، انرژی بسیار ناچیزی به این اتم منتقل می‌شود؛ در اینجا از این انتقال انرژی چشم‌پوشی می‌کنیم).

الکترون پراکنده شده در شکل ۴۰-۱۵ ، که انرژی آن اکنون کمتر از $K_\circ$ است، ممکن است با اتم هدف برخورد دومی داشته باشد و بدین ترتیب فوتون دومی ایجاد شود که انرژی آن در حالت کلی با انرژی فوتون تولید شده در برخورد اول متفاوت است. این فرایند پراکندگی الکترون می‌تواند تا هنگامی که الکترون به طور تقریبی به حالت سکون در آید، ادامه پیدا کند. همهٔ فوتونهایی که بر اثر این برخوردها ایجاد شده‌اند بخشی از طیف پرتو x پیوسته را تشکیل می‌دهند.



شکل ۴۰-۱۵ الکترونی که با انرژی جنبشی $K_\circ$ از نزدیکی اتم هدف می‌گذرد، ممکن است یک فوتون پرتو x تولید کند؛ الکترون در این فرایند بخشی از انرژی خود را از دست می‌دهد. طیف پرتو x پیوسته به این روش ایجاد می‌شود.

ویژگی بارز طیف شکل ۴۰-۱۴، **طول موج قطع** کاملاً مشخص λ_{min} است که پایینتر از آن، طیف پیوسته وجود ندارد. این طول موج کمینه مربوط به برخوردی است که در آن الکترون فرودی همهٔ انرژی جنبشی اولیهٔ $K_\circ$ خود را در برخورد رو در رو با اتم هدف از دست می‌دهد. لزوماً تمام این انرژی به صورت انرژی یک فوتون پدیدار می‌شود، که طول موج وابسته به آن، کمترین طول موج ممکن پرتو x ، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$K_\circ = hf = \frac{hc}{\lambda_{min}}$$

یا

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{K_\circ} \qquad \text{(طول موج قطع)} \qquad (۴۰-۲۳)$$

طول موج قطع کلاً مستقل از مادهٔ هدف است. مثلاً اگر هدف مولیبدن را با هدف مسی جایگزین کنیم، همهٔ ویژگیهای طیف پرتو x شکل ۴۰-۱۴، به جز طول موج قطع، تغییر خواهند کرد.

> ✔ **نکتهٔ وارسی ۲** اگر (الف) انرژی جنبشی الکترونهایی را که با هدف پرتو x برخورد می‌کنند، افزایش دهیم، (ب) الکترونها را به جای برخورد با یک قطعهٔ ضخیم به یک ورقهٔ نازک برخورد دهیم، (پ) هدف را با عنصری با عدد اتمی بزرگتر جایگزین کنیم، آیا طول موج قطع λ_{min} طیف پرتو x پیوسته افزایش می‌یابد یا کاهش یا ثابت می‌ماند؟

مسئلهٔ نمونه ۴۰-۴

از برخورد باریکهٔ الکترونهای 35/0keV با هدف مولیبدن، پرتوهای x ایجاد می‌شوند که طیف آنها در شکل ۴۰-۱۴ نشان داده شده است. طول موج قطع چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی طول موج قطع λ_{min} مربوط به الکترون است که (تقریباً) همهٔ انرژی آن به یک فوتون پرتو x منتقل می‌شود، و بدین ترتیب فوتونی با بیشترین بسامد ممکن و کمترین طول موج ممکن ایجاد می‌شود.

محاسبه‌ها: از معادلهٔ ۴۰-۲۳ داریم

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{K_\circ} = \frac{(۴/۱۴\times۱۰^{-۱۵}\ \text{eV.s})(۳/۰۰\times۱۰^{۸}\ \text{m/s})}{۳۵/۰\times۱۰^{۳}\ \text{eV}}$$
$$= ۳/۵۵\times۱۰^{-۱۱}\ \text{m} = ۳۵/۵\,\text{pm} \qquad \text{(پاسخ)}$$

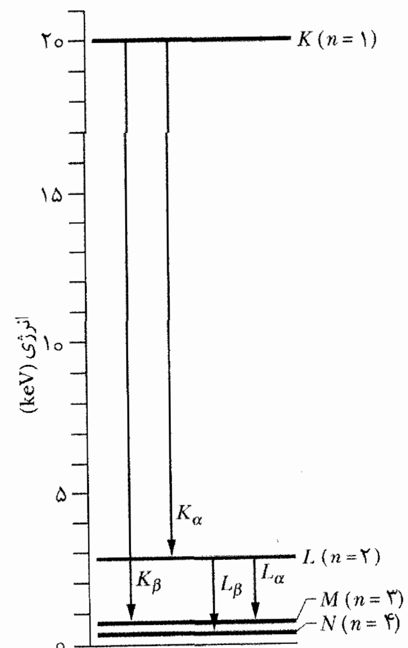
طیف مشخصهٔ پرتو x

اکنون توجهٔ خود را به دو قلهٔ شکل ۴۰-۱۴، که با K_α و K_β مشخص شده‌اند، معطوف می‌کنیم. این دو قله (و سایر قله‌هایی که در طول موجهایی فراتر از گسترهٔ نشان داده شده در شکل ۴۰-۱۴ پدیدار می‌شوند) تشکیل **طیف مشخصهٔ پرتو x** مادهٔ هدف را می‌دهند.

قله‌ها در یک فرایند دو مرحله‌ای ایجاد می‌شوند. (۱) یک الکترون فرودی پرانرژی به اتمی در هدف برخورد می‌کند و ، در همان حالی که پراکنده می‌شود، یکی از الکترونهای واقع در عمق اتم (مقدار n کم) را می‌کند. اگر این الکترون عمقی، در لایه‌ای که با $n=۱$ مشخص شده است (که بنا به دلایل تاریخی

لایۀ K نامیده می‌شود) واقع باشد، آنگاه یک تهی‌جا، یا *حفره*، در این لایه بر جای می‌ماند. (۲) الکترونی واقع در یکی از لایه‌های با انرژی بالاتر به لایۀ K پرش می‌کند و بدین ترتیب حفرۀ این لایه را پر می‌کند. در حین این پرش، اتم یک فوتون پرتو x مشخصه را گسیل می‌کند. اگر الکترونی که تهی‌جای لایۀ K را پر می‌کند از لایۀ $n=۲$ (موسوم به لایۀ L) باشد، تابش گسیل شده خط K_α در شکل ۴۰-۱۴ است؛ اگر از لایۀ $n=۳$ (موسوم به لایۀ M) پرش کند، خط K_β را ایجاد می‌کند، و نظایر آن. حفرۀ به جای مانده در لایۀ L یا M با الکترونی باز هم دورتر در اتم پر خواهد شد.

در مطالعۀ پرتوهای x، آسانتر آن است که به جای در نظر گرفتن تغییرات حالت کوانتومی الکترونهایی که برای پر کردن حفره پرش می‌کنند، مسیری را پی بگیریم که در آن یک حفره در عمق "ابر الکترونی" اتم ایجاد می‌شود. شکل ۴۰-۱۶ دقیقاً همین کار را انجام می‌دهد؛ این شکل، یک نمودار تراز- انرژی برای مولیبدن است، عنصری که شکل ۴۰-۱۴ مربوط به آن است. خط پایۀ $(E=۰)$ اتم خنثی را در حالت پایه‌اش نشان می‌دهد. ترازی که با K $(E=۲۰\text{keV})$ مشخص شده است، نشان‌دهندۀ انرژی اتم مولیبدن با حفره‌ای در لایۀ K آن، و ترازی که با L (در $E=۲/۷\text{keV}$) مشخص شده است، نشان دهندۀ این اتم با حفره‌ای در لایۀ L آن است، و نظایر آن.



شکل ۴۰-۱۶ نمودار تراز- انرژی ساده شده‌ای برای اتم مولیبدن، که گذارهایی (از حفره‌ها به جای الکترونها) را نشان می‌دهد که برخی از پرتوهای x مشخصۀ آن عنصر را به دست می‌دهد. هر خط افقی نشان دهندۀ انرژی اتم با یک حفره (الکترون از دست رفته) در لایۀ مشخص شده است.

گذارهای مشخص شدۀ K_α و K_β در شکل ۴۰-۱۶ همان گذارهایی هستند که دو قلۀ پرتو x شکل ۴۰-۱۴ را ایجاد می‌کنند. مثلاً، خط طیفی K_α هنگامی ایجاد می‌شود که یک الکترون از لایۀ L، حفرۀ لایۀ K را پر کند. حرکت حفره‌ای که از لایۀ K در ابتدا به لایۀ L می‌رود، گذار نشان داده شده با پیکانهای شکل ۴۰-۱۶ را توضیح می‌دهد.

ترتیب عنصرها

در سال ۱۹۱۳/۱۲۹۲، فیزیکدان انگلیسی *موزلی*[1] با استفاده از آن تعداد عنصرهایی که توانست بیابد- ۳۸ تا- به عنوان هدف برای بمباران الکترونی در یک لولۀ تخلیه شده از هوا که توسط خود او طراحی شده بود، پرتوهای x مشخصه را برای آن عنصرها به دست آورد. موزلی به وسیلۀ یک سکوی کوچک چرخدار که به طرز ماهرانه‌ای با ریسمانهایی به حرکت در می‌آمد توانست تکْ تکْ هدفها را در مسیر یک باریکۀ الکترونی حرکت دهد. او طول موج پرتوهای x گسیل شده را با روش پراش بلور که در بخش ۳۶-۱۰ توضیح داده شد، اندازه گرفت.

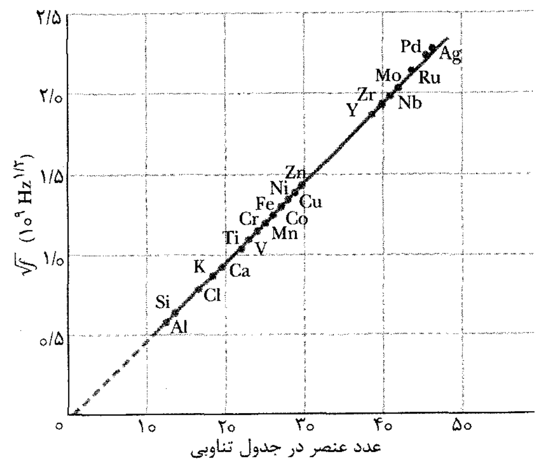
آنگاه موزلی به دنبال نظم و قاعده‌ای در این طیفها، هنگامی که از یک عنصر به عنصری دیگر در جدول تناوبی می‌رفت، گشت (و در این مهم موفق شد). او بخصوص دریافت که اگر برای یک خط طیفی معین مثل K_α، ریشۀ مربعی بسامد f را برحسب مکان هر عنصر در جدول تناوبی رسم کند، یک خط راست به دست می‌آید. شکل ۴۰-۱۷ بخشی از داده‌های گستردۀ او را نشان می‌دهد. نتیجه‌گیری موزلی چنین بود:

> *اکنون نشانه‌ای بر وجود یک کمیت بنیادی در اتم داریم، که وقتی از عنصری به عنصر بعدی می‌رویم به طور نظام‌مندی افزایش می‌یابد. این کمیت فقط می‌تواند بار روی هستۀ مرکزی باشد.*

در نتیجۀ کار موزلی، طیف پرتو x مشخصه‌ای، مشخصۀ پذیرفته شدۀ جهانی برای یک عنصر شد و بدین ترتیب حل تعدادی از معماهای جدول تناوبی ممکن گردید. تا پیش از آن زمان (۱۹۱۳)، مکان عنصرها در جدول به ترتیب جرم اتمی آنها مشخص می‌شد، اگر چه برای چندین جفت عنصر، به دلیل الزامات ناشی از شواهد شیمیایی لازم بود که این ترتیب وارونه شود؛ موزلی نشان داد که این بار هسته‌ای (یعنی، عدد اتمی Z) است که مبنای واقعی برای ترتیبِ عنصرهاست.

در سال ۱۹۱۳/۱۲۹۲، جدول تناوبی چند خانۀ خالی داشت، و چندین ادعای شگفت‌انگیز برای عنصرهای جدید پیشنهاد داده شده بود. طیف پرتو x آزمونی قاطع برای چنین ادعاهایی بود. عنصرهای لانتانید که اغلب عنصرهای خاکی نادر نامیده می‌شوند، فقط به طور ناقص مرتب شده بودند و به دلیل

1. H. G. J. Moseley



شکل ۴۰-۱۷ نمودار موزلی برای خط K_α طیفهای پرتو x مشخصه‌ای ۲۱ عنصر. بسامد از روی طول موج اندازه‌گیری شده محاسبه شده است.

ویژگیهای شیمیایی مشابه، مرتب کردن آنها دشوار بود. وقتی کار موزلی گزارش شد، این عنصرها به طور دقیقی مرتب شدند. در سالهای پس از آن، هنگامی که تعداد عنصرهای بعد از اورانیم برای مطالعهٔ طیف پرتو x مجزایشان به حد کافی قابل دسترس شدند، شناسایی این عنصرها به دقت و بدون هیچ مجادله‌ای صورت پذیرفت.

مشکل نیست که دریابیم چرا طیف پرتو x مشخصه‌ای، چنین نظام‌مندیهای مشخصی را از عنصری به عنصر دیگر نشان می‌دهد، در حالی‌که برای طیف نور مرئی و ناحیهٔ نزدیک به آن چنین نیست: کلید تشخیص یک عنصر، بار روی هستهٔ آن است. مثلاً، طلا، به این دلیل طلاست که اتمهای آن دارای بار هسته‌ای $+79e$ (یعنی، $Z=79$) هستند. اتمی با یک بار بنیادی بیشتر روی هستهٔ آن، جیوه است؛ و با یک بار بنیادی کمتر، پلاتین. الکترونهای لایهٔ K، که چنین نقش بزرگی را در ایجاد طیف پرتو x بازی می‌کنند، در فاصلهٔ خیلی نزدیکی به هسته قرار دارند و بنابراین، به بار آن حساس هستند. از سوی دیگر، طیف نوری، شامل گذارهایی از بیرونیترین الکترونهاست که به طور قابل ملاحظه‌ای توسط الکترونهای به جای مانده از اتم پنهان شده‌اند و بنابراین، به بار هسته‌ای حساس *نیستند*.

توضیح نمودار موزلی

داده‌های تجربی موزلی، که نمودار موزلی شکل ۴۰-۱۷ فقط بخشی از آن است، می‌تواند مستقیماً برای مشخص کردن جای عنصرها در جدول تناوبی به کار گرفته شود. این عمل را می‌توان حتی اگر مبنای نظری نتایج موزلی به اثبات نرسیده بود، نیز انجام داد. البته، چنین مبنایی وجود دارد.

بنابر معادله‌های ۳۹-۳۲ و ۳۹-۳۳، انرژی اتم هیدروژن برابر است با

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{13/60\,\mathrm{eV}}{n^2} \quad \text{به ازای} \quad n=1,2,3,\ldots \qquad (۴۰-۲۴)$$

اکنون یکی از دو داخلی‌ترین الکترونها در لایهٔ K یک اتم چند الکترونی را در نظر می‌گیریم. به دلیل حضور الکترون دیگر در لایهٔ K، الکترون بار هسته‌ای مؤثر تقریبی $e(Z-1)$ را "می‌بیند" که در آن e بار بنیادی و Z عدد اتمی عنصر است. عامل e^4 در معادلهٔ ۴۰-۲۴ حاصلضرب e^2، مربع بار هسته‌ای هیدروژن، و $(-e)^2$، مربع بار الکترون، است. برای اتم چند الکترونی، می‌توان در انرژی مؤثر اتم به جای عامل e^4 در معادلهٔ ۴۰-۲۴ تقریباً $(Z-1)^2e^2\times(-e)^2$ یا $e^4(Z-1)^2$ را قرارداد. از آنجا داریم

$$E_n = -\frac{(13/60\,\mathrm{eV})(Z-1)^2}{n^2} \qquad (۴۰-۲۵)$$

دیدیم که فوتون پرتو x خط K_α (با انرژی hf) هنگامی ایجاد می‌شود که یک الکترون، گذاری از لایهٔ L (با $n=2$ و انرژی E_2) به لایهٔ K (با $n=1$ و انرژی E_1) انجام دهد. در نتیجه، با استفاده از معادلهٔ ۴۰-۲۵، تغییر انرژی را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_2 - E_1\\ &= \frac{-(13/60\,\mathrm{eV})(Z-1)^2}{2^2} - \frac{-(13/60\,\mathrm{eV})(Z-1)^2}{1^2}\\ &= (10/2\,\mathrm{eV})(Z-1)^2\end{aligned}$$

آنگاه بسامد f خط K_α چنین می‌شود

$$\begin{aligned}f &= \frac{\Delta E}{h} = \frac{(10/2\,\mathrm{eV})(Z-1)^2}{(4/14\times10^{-15}\,\mathrm{eV\cdot s})}\\ &= (2/46\times10^{15}\,\mathrm{Hz})(Z-1)^2\end{aligned} \qquad (۴۰-۲۶)$$

با گرفتن ریشهٔ مربعی از دو طرف این معادله، خواهیم داشت

$$\sqrt{f} = CZ - C \qquad (۴۰-۲۷)$$

که در آن C یک ثابت $(= 4/96\times10^7\,\mathrm{Hz}^{1/2})$ است. معادلهٔ ۴۰-۲۷، معادلهٔ یک خط راست است و نشان می‌دهد که اگر ریشهٔ مربعی بسامد خط طیفی K_α پرتوx را برحسب عدد اتمی Z رسم کنیم، باید یک خط راست به دست آید. همان گونه که شکل ۴۰-۱۷ نشان می‌دهد، این دقیقاً همان است که موزلی به دست آورد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۰-۵

یک هدف کبالت با الکترونها بمباران شده، و طول موجهای طیف پرتو x مشخصهٔ آن اندازه‌گیری می‌شود. همچنین یک طیف مشخصهٔ ضعیفتر وجود دارد که ناشی از ناخالصی در کبالت است. طول موجهای خطهای K_α عبارت‌اند از ۱۷۸/۹pm (کبالت) و ۱۴۳/۵pm (ناخالصی)، و عدد پروتونی کبالت $Z_{Co}=27$ است. با استفاده از فقط این داده‌ها، ناخالصی را تعیین کنید.

نکتهٔ کلیدی طول موجهای خطهای K_α، هم برای کبالت (Co) و هم برای ناخالصی (X) روی یک نمودار موزلی K_α می‌افتند، و معادلهٔ ۴۰-۲۷، معادله‌ای برای این نمودار است.

محاسبه‌ها: با قرار دادن c/λ به جای f در این معادله خواهیم داشت

$$\sqrt{\frac{c}{\lambda_{Co}}} = CZ_{Co} - C \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{c}{\lambda_X}} = CZ_X - C$$

با تقسیم معادلهٔ دوم بر معادلهٔ اول، C به سادگی حذف می‌شود و چنین به دست می‌آید

$$\sqrt{\frac{\lambda_{Co}}{\lambda_X}} = \frac{Z_X - ۱}{Z_{Co} - ۱}$$

که با قرار دادن داده‌های مسئله، خواهیم داشت

$$\sqrt{\frac{۱۷۸/۹\,\text{pm}}{۱۴۳/۵\,\text{pm}}} = \frac{Z_X - ۱}{۲۷ - ۱}$$

با حل آن برای مجهول Z_X ، داریم

$$Z_X = ۳۰/۰ \quad \text{(پاسخ)}$$

با نگاهی به جدول تناوبی در می‌یابیم که ناخالصی از جنس روی است. توجه کنید که با مقدار بزرگتر z از کبالت، روی مقدار کوچکتری از خط K_α دارد.

۴۰-۱۱ لیزرها و نور لیزر

در اوایل دههٔ ۱۹۶۰/۱۳۴۰، فیزیک کوانتومی یکی از چندین سهم خود را به فناوری ادا کرد: **لیزر**. نور لیزر، همچون نور حاصل از یک لامپ معمولی، به هنگام گذار اتمها از یک حالت کوانتومی به حالتی کوانتومی با انرژی پایینتر، گسیل می‌شود. ولی در لیزر، برخلاف چشمه‌های نوری دیگر، اتمها برای تولید نوری با چندین مشخصهٔ ویژه، با هم عمل می‌کنند. این مشخصه‌های ویژه عبارت‌اند از:

۱. **نور لیزر بسیار تکفام است.** نور حاصل از یک لامپ التهابی معمولی در محدودهٔ پیوسته‌ای از طول موجها گسترده است و یقیناً تکفام نیست. البته، تابش حاصل از یک لامپ نئون با تقریب ۱ بخش در $۱۰^{۶}$ تکفام است، ولی تیزی معرف نور لیزر می‌تواند بسیار بزرگتر، به مقدار ۱ بخش در $۱۰^{۱۵}$ ، باشد.

۲. **نور لیزر بسیار همدوس است.** موجهای بلند مجزا (*قطارهای موج*) در نور لیزر می‌توانند به طول چندین کیلومتر باشند. وقتی دو باریکهٔ جدا از هم که چنین مسافتهایی را در دو مسیر جداگانه طی کرده‌اند، دوباره ترکیب شوند، آنها منشاء مشترک خود را "به یاد می‌آورند" و می‌توانند نقش فریزهای تداخلی را تشکیل دهند. *طول همدوسی* مربوط به قطارهای موج گسیل شده از یک لامپ معمولی، نوعاً کمتر از یک متر است.

۳. **نور لیزر بسیار جهتمند است.** یک باریکهٔ لیزر خیلی کم پخش می‌شود؛ انحراف آن از موازی بودن کامل فقط ناشی از پراش در روزنهٔ خروجی لیزر است. مثلاً یک تپ لیزر که برای اندازه‌گیری فاصله تا ماه به کار گرفته می‌شود، لکه‌ای با قطر فقط چند متر روی سطح ماه ایجاد می‌کند. نور حاصل از یک لامپ معمولی را می‌توان با یک عدسی به صورت یک باریکهٔ تقریباً موازی درآورد، ولی واگرایی این باریکه بسیار بیشتر از واگرایی نور لیزر است. هر نقطه روی رشتهٔ یک لامپ معمولی، باریکهٔ مجزای خودش را تشکیل می‌دهد، و واگرایی زاویه‌ای کلّ باریکهٔ مرکب به اندازهٔ رشته بستگی دارد.

۴- **نور لیزر می‌تواند شدیداً کانونی شود.** اگر دو باریکهٔ نور، مقدار انرژی یکسانی را منتقل کنند، آن باریکه‌ای که بتواند در نقطهٔ کوچکتری کانونی شود، شدت بیشتری در آن نقطه خواهد داشت. برای نور لیزر، نقطهٔ کانونی شده می‌تواند آنقدر کوچک باشد که شدت $۱۰^{۱۷}\ \text{W/cm}^۲$ به‌سادگی به دست آید. در مقابل، شعلهٔ اکسید استیلن دارای شدتی حدود فقط $۱۰^{۳}\ \text{W/cm}^۲$ است.

لیزرها دارای کاربردهای زیادی هستند

کوچکترین لیزرها که برای تراگسیل صدا و داده‌ها در تارهای نوری به کار می‌روند، به عنوان محیط فعال دارای یک بلور نیمرسانا با اندازهای حدود سر یک سوزن هستند. چنین لیزرهایی به این کوچکی می‌توانند توانی حدود ۲۰۰mW را تولید کنند. بزرگترین لیزرها که برای پژوهشهای همجوشی هسته‌ای و برای کاربردهای نجومی و نظامی به کار گرفته می‌شوند، به اندازهٔ یک ساختمان بزرگ هستند. بزرگترین نوع چنین لیزرهایی، می‌توانند تپهای کوتاهی از نور لیزر با توانی حدود $۱۰^{۱۴}$ W ، در حین تپ، تولید کنند. این چند صد برابر بزرگتر از کل ظرفیت تولید توان الکتریکی در کشور امریکاست. برای جلوگیری از قطع موقت در حین تپ، انرژی مورد نیاز برای هر تپ با آهنگ پایایی در حین بازهٔ نسبتاً طولانی تپ ذخیره می‌شود.



شکل ۴۰-۱۸ سر بیمار به وسیلهٔ لیزر روشن و مشاهده می‌شود تا برای جراحی روی مغز آماده شود. در حین جراحی، تصویر ایجاد شده توسط لیزر از سر روی مدل مغز نشان داده شده روی نمایشگر قرار داده می‌شود تا تیم جراحی را برای انجام عمل هدایت کند.

برخی از کاربردهای لیزرها عبارت‌اند از خواندن رمزینه‌های روی کالاها، ساختن و خوانش دیسکهای فشرده و DVDها، انجام انواع عملهای جراحی (تصویر آغازین این فصل و شکل ۴۰-۱۸ را ببینید)، نقشه‌برداری، برش پارچه در صنعت پوشاک (چند صد برش در آنِ واحد)، جوشکاری بدنهٔ اتومبیلها، و تولید هولوگرام.

۴۰-۱۲ لیزرها چگونه کار می‌کنند

چون واژهٔ "لیزر"[1] سر واژهٔ [عبارت انگلیسی] "تقویت نور به وسیلهٔ گسیل القایی تابش"[2] است، پس نباید از اینکه گسیل القایی کلید کار لیزر است تعجب کنید. اینشتین این مفهوم را در سال ۱۹۱۷/۱۲۹۶ معرفی کرد. اگر چه جهانیان مجبور شدند تا ۱۹۶۰/۱۳۴۹ صبر کنند تا عمل لیزر را مشاهده کنند، با این حال کارهای بنیادی برای توسعهٔ آن از دهه‌های قبل شروع شده بود.

اتمی منزوی را در نظر بگیرید که می‌تواند یا در پایینترین حالت انرژی خود (حالت پایه‌اش) که انرژی آن E_0 است، یا در حالتی با انرژی بالاتر (یک حالت برانگیخته)، که انرژی آن E_x است، قرار داشته باشد. در اینجا سه فرایندی که با آنها این اتم می‌تواند از یکی از این حالتها به حالتی دیگر گذار کند، آورده شده است:

۱. ***جذب.*** شکل ۴۰-۱۹ الف اتمی را نشان می‌دهد که در ابتدا در حالت پایهٔ خود قرار دارد. اگر این اتم در یک میدان الکترومغناطیسی متناوب با بسامد f قرار داده شود، این اتم می‌تواند مقدار انرژی hf را از آن میدان جذب کند و به حالتی با انرژی بالاتر منتقل شود. از اصل پایستگی انرژی داریم

$$hf = E_x - E_0 \qquad (۴۰-۲۸)$$

این فرایند را **جذب** می‌نامیم.

۲. ***گسیل خود به خود.*** در شکل ۴۰-۱۹ ب، اتم در حالت برانگیختهٔ خود قرار دارد و هیچ تابش خارجی حضور ندارد. پس از مدتی، این اتم با گسیل فوتونی با انرژی hf با گذار از این حالت به میل خود به حالت پایه‌اش برمی‌گردد. این فرایند **گسیل خود به خود** نامیده می‌شود. خود به خود از آنرو که این گذار به وسیلهٔ هیچ عامل خارجی به پا نشده است. نور حاصل از رشتهٔ یک لامپ معمولی به این طریق تولید می‌شود.

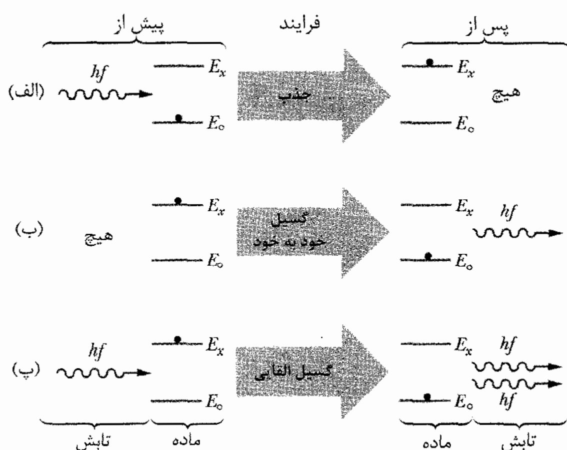
معمولاً، عمر میانگین اتمهای برانگیخته پیش از آنکه گسیل خود به خود رخ دهد، حدود 10^{-8} s است. ولی برای برخی از حالتهای برانگیخته، شاید این عمر میانگین 10^5 بار طولانیتر باشد. چنین حالتهایی با عمر بلند را حالتهای **شبه پایدار** می‌نامند؛ آنها نقش مهمی را در کارکرد لیزر بازی می‌کنند.

۳. ***گسیل القایی.*** در شکل ۴۰-۱۹ پ، اتم دوباره در حالت برانگیخته‌اش قرار دارد، ولی این بار تابشی که بسامد آن با معادلهٔ ۴۰-۲۸ داده می‌شود، نیز حضور دارد. فوتونی با انرژی hf میتواند با تحریک اتم، آن را به حالت پایه‌اش منتقل کند؛ فرایندی که اتم در حین آن یک فوتون اضافی، که انرژی آن نیز برابر با hf است، گسیل می‌کند. این فرایند **گسیل القایی** نامیده می‌شود-*گسیل القایی* از آنرو که این گذار به وسیله یک فوتون خارجی به پا شده است. فوتون گسیل شده از هر نظر مشابه با فوتون القا کننده است. بنابراین، موجهای وابسته به این فوتونها، دارای انرژی، فاز، قطبش، و جهت حرکت یکسانی هستند.

شکل ۴۰-۱۹ پ، گسیل القایی را برای یک تکْ اتم نشان می‌دهد. اکنون فرض کنید که نمونه‌ای شامل تعداد زیادی اتم در تعادل گرمایی، در دمای T باشد. پیش از آنکه هر تابشی به نمونه بتابد، تعداد N_0 از این اتمها در حالت پایهٔ خود با انرژی E_0، و تعداد N_x از آنها در حالت با انرژی بالاتر E_x قرار دارند. *لودویک بولتزمن*[3] نشان داد که N_x برحسب N_0 با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$N_x = N_0 e^{-(E_x - E_0)/kT} \qquad (۴۰-۲۹)$$

که در آن k ثابت بولتزمن است. این معادله معقول به نظر می‌رسد. کمیت kT انرژی جنبش میانگین یک اتم در دمای T است. با افزایش دما، اتمها بیشتری- به طور میانگین- توسط اغتشاش گرمایی (یعنی، توسط برخوردهای اتم با اتم) به حالت



شکل ۴۰-۱۹ برهم کنش تابش و ماده در فرایندهای (الف) جذب، (ب) گسیل خود به خود و (پ) گسیل القایی. اتم (ماده) با نقطه مشخص شده است؛ اتم یا در حالت کوانتومی پایینتر با انرژی E یا در حالت کوانتومی بالاتر با انرژی E_x قرار دارد. در (الف) اتم، فوتونی با انرژی hf را از موج نوری عبوری جذب می‌کند. در (ب) اتم با گسیل فوتونی با انرژی hf، یک موج نوری گسیل می‌کند. در (پ) موج نوری عبوری با فوتونی به انرژی hf باعث می‌شود که اتم، فوتونی را با همان انرژی گسیل کند، که این به افزایش انرژی موج نوری می‌انجامد.

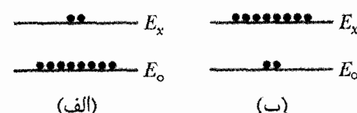
---

1. Laser
2. Light amplification by stimulated emission of radiation
3. Ludwing Boltzmann

انرژی بالاتر E_x "پمپ می‌شوند". همچنین، چون $E_x > E_\circ$ است، معادلهٔ ۴۰-۲۹ ایجاب می‌کند که $N_x < N_\circ$ باشد؛ یعنی، همواره در حالت برانگیخته، اتمهای کمتری از حالت پایه وجود خواهند داشت. این آن چیزی است که توقع داریم، در صورتی که جمعیت ترازهای $N_\circ$ و N_x فقط توسط عمل اغتشاش گرمایی تعیین شده باشند. شکل ۴۰-۲۰ الف، این وضعیت را نشان می‌دهد.

اگر اکنون به اتمهای شکل ۴۰-۲۰ الف فوتونهایی با انرژی $E_x - E_\circ$ به طور فزاینده‌ای بتابند، این فوتونها از طریق جذب به وسیلهٔ اتمهای حالت پایه، ناپدید و فوتونهای فراوانی از طریق گسیل القایی اتمهای واقع در حالت برانگیخته، تولید می‌شوند. اینشتین نشان داد احتمال بر اتمِ این دو فرایند، یکسان است. بنابراین، به دلیل آنکه اتمهای بیشتری در حالت پایه قرار دارند، اثر *خالص* این دو فرایند، جذب فوتونها خواهد بود.

برای تولید نور لیزر، باید فوتونهای گسیل شده بیشتر از فوتونهای جذب شده باشد؛ یعنی، باید وضعیتی را داشته باشیم که در آن گسیل القایی غالب باشد. روش مستقیم رسیدن به چنین وضعیتی این است که مانند شکل ۴۰-۲۰ ب با اتمهای بیشتری در حالت برانگیخته نسبت به حالت پایه، شروع کنیم. ولی، چون چنین **وارونی جمعیتی** با تعادل گرمایی سازگار نیست، باید روشهای هوشمندانه‌ای را برای ایجاد و تداوم چنین وضعیتی بیندیشیم.

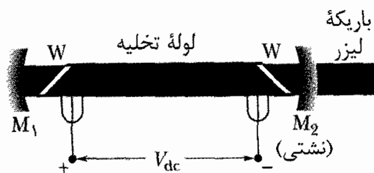


شکل ۴۰-۲۰ (الف) توزیع متوازن اتمها بین حالت پایهٔ $E_\circ$ و حالت برانگیخته E_x ناشی از اغتشاش گرمایی است. (ب) با روشهای ویژه‌ای جمعیت وارون می‌شود. چنین وارونی جمعیتی برای عمل لیزر، امری اساسی است.

لیزر گازی هلیوم- نئون

شکل ۴۰-۲۱ نوعی از لیزر را که معمولاً در آزمایشگاه‌های دانشجویی یافت می‌شود، نشان می‌دهد، لیزری که *علی جوان* و همکارانش در سال ۱۹۶۱/۱۳۴۰ آن را ساختند. لولهٔ تخلیه شدهٔ شیشه‌ای با مخلوط ۸۰ : ۲۰ از گازهای هلیوم و نئون پر شده است، که نئون محیطی است که در آن عمل لیزری رخ می‌دهد.

شکل ۴۰-۲۲ نمودارهای تراز- انرژی ساده شده‌ای را برای دو نوع اتم نشان می‌دهد. یک جریان الکتریکی که از میان مخلوط گازی هلیوم- نئون می‌گذرد، از طریق برخوردهای بین اتمهای هلیوم و الکترونهای جریان، باعث بالا رفتن بسیاری از اتمهای هلیوم به حالت $E_۳$، که حالتی شبه پایدار است، می‌شود.

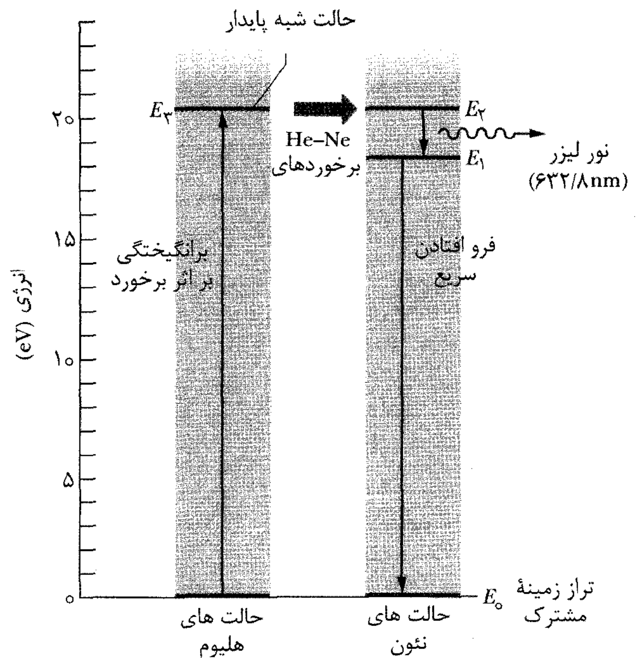


شکل ۴۰-۲۱ اجزای یک لیزر گازی هلیوم- نئون. پتانسیل برقرار شدهٔ V_{dc}، الکترونها را به میان یک لولهٔ تخلیهٔ الکتریکی که شامل مخلوطی از گازهای هلیوم و نئون است می‌فرستد. الکترونها پس از آنکه با اتمهای هلیوم برخورد کردند با اتمهای نئون برخورد می‌کنند که این منجر به گسیل نوری در امتداد طول لوله می‌شود. این نور از میان پنجره‌های شفاف W می‌گذرد و در سرتاسر لوله از آینه‌های $M_۱$ و $M_۲$ به چپ و راست بازتابیده می‌شود تا بدین ترتیب منجر به گسیلهای بیشتر اتم نئون شود. بخشی از نور برای تشکیل باریکهٔ لیزر از آینهٔ $M_۲$ خارج می‌شود.

انرژی حالت $E_۳$ هلیوم (۲۰/۶۱eV) به انرژی حالت $E_۲$ نئون (۲۰/۶۶eV) بسیار نزدیک است. بنابراین، وقتی یک اتم هلیوم در حالت شبه پایدار ($E_۳$) به یک اتم نئون در حالت پایدار ($E_\circ$) برخورد کند، انرژی برانگیختگی اتم هلیوم غالباً به اتم نئون منتقل می‌شود، که در پی آن به حالت $E_۲$ گذار می‌کند. به این ترتیب، تراز $E_۲$ نئون در شکل ۴۰-۲۲ به طور فاحش دارای جمعیت بیشتری نسبت به تراز $E_۱$ می‌شود.

این وارونی جمعیت به طور نسبتاً ساده‌ای برقرار می‌شود، زیرا (۱) در ابتدا اساساً هیچ اتمی در حالت $E_۱$ وجود ندارد، (۲) شبه پایداری تراز $E_۳$ هلیوم، وجود یک منبع اتمهای نئون در تراز $E_۲$ را تضمین می‌کند، و (۳) اتمهای نئون در تراز $E_۱$ به سرعت (از طریق ترازهایی که نشان داده نشده است) به حالت پایهٔ $E_\circ$ نئون فرو می‌افتند.

اکنون فرض کنید که در گذار یک اتم نئون از حالت $E_۲$ به حالت $E_۱$ یک تکْ فوتون به طور خود به خود گسیل شود. چنین فوتونی می‌تواند منجر به یک گسیل القایی شود، که آن نیز به نوبهٔ خود منجر به گسیلهای القایی دیگری می‌شود. از طریق چنین واکنش زنجیره‌ای، یک باریکهٔ همدوس نور لیزر، که موازی با محور لوله حرکت می‌کند، می‌تواند به‌سرعت ایجاد شود. این نور، با طول موج ۶۳۲/۸nm (قرمز)، بر اثر بازتابهای پی در پی از آینه‌های $M_۱$ و $M_۲$ نشان داده شده در شکل ۴۰-۲۱، چندین و چند بار از میان لولهٔ تخلیه می‌گذرد، و با هر عبور فوتونهای گسیل القایی بیشتری انباشته می‌شود. $M_۱$ کاملاً بازتاب دهنده است، ولی $M_۲$ کمی "نشتی" دارد، به گونه‌ای که بخش کوچکی از نور لیزر برای تشکیل یک باریکهٔ خارجی قابل استفاده از آن می‌گریزد.



شکل ۴۰-۲۲ پنج تراز انرژی اساسی برای اتمهای هلیوم و نئون در یک لیزر گازی هلیوم- نئون. عمل لیزری بین ترازهای E_2 و E_1 نئون، هنگامی که اتمهای واقع در تراز E_2 بیشتر از تراز E_1 است، رخ می‌دهد.

> ✔ **نکتهٔ وارسی ۳** طول موج نور حاصل از لیزر A (یک لیزر گازی هلیوم- نئون) برابر با ۶۳۲/۸nm ، طول موج نور حاصل از لیزر B (یک لیزر گازی کربن دی اکسید) برابر با ۱۰/۶μm ، و طول موج نور حاصل از لیزر C (یک لیزر نیمرسانای گالیوم آرسناید) برابر با ۸۴۰nm است. این لیزرها را بنا بر بازهٔ انرژی میان دو حالت کوانتومی که مسئول عمل لیزری است، از بزرگترین تا کوچکترین مرتب کنید.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۰-۶

در لیزر هلیوم- نئون شکل ۴۰-۲۱، عمل لیزری بین دو حالت برانگیختهٔ اتم نئون رخ می‌دهد. ولی، در بسیاری از لیزرها، عمل لیزری (*لیزکردن*) بین حالت پایه و یک حالت برانگیخته، آن گونه که در شکل ۴۰-۲۰ (ب) نشان داده شده است، رخ می‌دهد. (الف) چنین لیزری را در نظر بگیرید که طول موجی برابر $\lambda = ۵۵۰\text{nm}$ گسیل می‌کند. اگر وارونی جمعیت تولید نشده باشد، نسبت جمعیت اتمها در حالت E_x به جمعیت در حالت پایهٔ $E_\circ$ در دمای اتاق، چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی (۱) به طور طبیعی نسبت جمعیت $N_x / N_\circ$ در دو حالت ناشی از اغتشاش گرمایی اتمهای گاز است که بنا بر معادلهٔ ۴۰-۲۹ آن را می‌توان چنین نوشت

$$N_x / N_\circ = e^{-(E_x - E_\circ)/kT} \qquad (۴۰-۳۰)$$

برای آنکه نسبت $N_x / N_\circ$ را با استفاده از معادلهٔ ۴۰-۳۰ به دست آوریم، لازم است جدایی انرژی $E_x - E_\circ$ بین دو حالت را بیابیم. (۲) $E_x - E_\circ$ را می‌توانیم از طول موج ۵۵۰nm برای عمل لیزری بین این دو حالت به دست آوریم.

محاسبه‌ها: طول موج لیزر دست می‌دهد

$$E_x - E_\circ = hf = \frac{hc}{\lambda}$$
$$= \frac{(۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴}\ \text{J.s})(۳/۰۰\times۱۰^{۸}\ \text{m/s})}{(۵۵۰\times۱۰^{-۹}\ \text{m})(۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}\ \text{J/eV})}$$
$$= ۲/۲۶\,\text{eV}$$

برای حل معادلهٔ ۴۰-۳۰، همچنین به انرژی میانگین اغتشاش گرمایی kT برای یک اتم در دمای اتاق (که برابر ۳۰۰K فرض می‌شود) نیاز داریم. این انرژی برابر است با

$$kT = (۸/۶۲\times۱۰^{۵}\ \text{eV/K})(۳۰۰\text{K}) = ۰/۰۲۵۹\,\text{eV}$$

که در آن k ثابت بولتزمن است.

با قرار دادن دو نتیجهٔ آخر در معادلهٔ ۴۰-۳۰، نسبت جمعیت در دمای اتاق به دست می‌آید

$$N_x / N_\circ = e^{-(۲/۲۶\text{eV})/(۰/۰۲۵۹\text{eV})}$$
$$\approx ۱/۳\times۱۰^{-۳۸} \qquad \text{(پاسخ)}$$

که این، مقدار فوق‌العاده کوچکی است. ولی، نامعقول نیست. اتمهایی با اغتشاش گرمایی برابر با فقط ۰/۰۲۵۹eV غالباً نمی‌توانند در یک برخورد، انرژی ۲/۲۶eV را به اتم دیگر منتقل کنند.

(ب) برای شرایط قسمت (الف)، در چه دمایی نسبت $N_x / N_\circ$ برابر ۱/۲ می‌شود؟

محاسبه: اکنون دمای T را به گونه‌ای می‌خواهیم که اغتشاش گرمایی که اتمهای نئون را به حد کافی به حالت انرژی بالاتر پمپ کرده است، نسبت $N_x/N_\circ = ۱/۲$ را به دست دهد. با قرار دادن این نسبت در معادلهٔ ۴۰-۳۰، گرفتن لگاریتم طبیعی از دو طرف، و حل آن برای T خواهیم داشت

$$T = \frac{E_x - E_\circ}{k(\ln ۲)} = \frac{۲/۲۶\,\text{eV}}{(۸/۶۲\times۱۰^{-۵}\ \text{eV})(\ln ۲)}$$
$$= ۳۸۰۰۰\text{K} \qquad \text{(پاسخ)}$$

این خیلی داغتر از سطح خورشید است. بدیهی است که اگر بخواهیم در این دو تراز، وارونی جمعیت رخ دهد به سازوکار مشخصی برای رسیدن به چنین وضعیتی نیاز داریم- یعنی، باید اتمها را "پمپ" کنیم. هیچ دمایی، هر قدر زیاد، به طور طبیعی وارونی جمعیت را بر اثر اغتشاش گرمایی ایجاد نخواهد کرد.

بازنگری و خلاصهٔ درس

برخی از ویژگیهای اتمها انرژی اتمها کوانتیده است؛ یعنی، اتمها فقط دارای مقدارهای ویژهٔ معینی از انرژی وابسته به حالتهای کوانتومی مختلف هستند. اتمها می‌توانند با گسیل یا جذب فوتون بین حالتهای مختلف گذار پیدا کنند؛ بسامد f وابسته به آن نور با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$hf = E_{\text{بالا}} - E_{\text{پایین}} \qquad (۴۰-۱)$$

که در آن $E_{\text{بالا}}$ انرژی بالاتر و $E_{\text{پایین}}$ انرژی پایینتر جفت حالتهای کوانتومی مربوط به این گذار هستند. اتمها همچنین دارای اندازه حرکتهای زاویه‌ای و گشتاورهای دو قطبی مغناطیسی کوانتیده‌اند.

اندازه حرکتهای زاویه‌ای و گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی الکترونی که در یک اتم به تله افتاده است، دارای *اندازه حرکت زاویه‌ای* مداری $\vec{L}$ است که بزرگی آن با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar \qquad (۴۰\text{–}۲)$$

که در آن ℓ *عدد کوانتومی مداری* (که می‌تواند مقدارهای داده شده در جدول ۴۰–۱ را داشته باشد) و ثابت "h– بار" برابر با $\hbar = h/2\pi$ است. تصویر L_z بردار $\vec{L}$ روی محور دلخواه z، کوانتیده و قابل اندازه‌گیری است و می‌تواند دارای مقدارهای زیر باشد

$$L_z = m_\ell\,\hbar \qquad (۴۰\text{–}۷)$$

که در آن m_ℓ عدد کوانتومی مغناطیسی مداری است (که می‌تواند مقدارهای داده شده در جدول ۴۰–۱ را دارا باشد).

یک دوقطبی مغناطیسی، به اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ الکترون در یک اتم وابسته است. این دوقطبی مغناطیسی دارای **گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری** $\vec{\mu}_{\text{orb}}$ است که جهت آن در خلاف جهت $\vec{L}$ است

$$\vec{\mu}_{\text{orb}} = -\frac{e}{2m}\vec{L} \qquad (۴۰\text{–}۳)$$

که در آن علامت منفی، جهت مخالف را نشان می‌دهد. تصویر $\mu_{\text{orb},z}$ گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری روی محور z کوانتیده و قابل اندازه‌گیری است و می‌تواند این مقدارها را داشته باشد

$$\mu_{\text{orb},z} = -m_\ell\,\mu_{\text{B}} \qquad (۴۰\text{–}۵)$$

که در آن μ_{B} مگنتون بور است

$$\mu_{\text{B}} = \frac{eh}{4\pi m} = \frac{e\hbar}{2m} = 9/274 \times 10^{-24}\ \text{J/T} \qquad (۴۰\text{–}۶)$$

یک الکترون، چه در تله افتاده باشد و چه آزاد، دارای *اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی* ذاتی (یا فقط *اسپین*) $\vec{S}$ است که بزرگی آن با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar \qquad (۴۰\text{–}۹)$$

که در آن s *عدد کوانتومی اسپینی* الکترون و همواره برابر با $\frac{1}{2}$ است. تصویر S_z بردار $\vec{S}$ روی محور دلخواه z کوانتیده و قابل اندازه‌گیری است و می‌تواند مقدارهای زیر را داشته باشد

$$S_z = m_s\,\hbar \qquad (۴۰\text{–}۱۲)$$

که در آن m_s، *عدد کوانتومی مغناطیسی اسپینی* الکترون است که می‌تواند برابر با $+\frac{1}{2}$ یا $-\frac{1}{2}$ باشد.

یک الکترون، چه در اتم محبوس شده باشد و چه آزاد، دارای یک دوقطبی مغناطیسی ذاتی است که به اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی $\vec{S}$ آن وابسته است. این دوقطبی مغناطیسی دارای **گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی** $\vec{\mu}_s$ است که جهت آن در خلاف جهت $\vec{S}$ است

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m}\vec{S} \qquad (۴۰\text{–}۱۰)$$

تصویر $\mu_{s,z}$ گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی $\vec{\mu}_s$ روی یک محور دلخواه کوانتیده و قابل اندازه‌گیری است و می‌تواند مقدارهای زیر را داشته باشد

$$\mu_{s,z} = -2m_s\,\mu_{\text{B}} \qquad (۴۰\text{–}۱۳)$$

اسپین و تشدید مغناطیسی پروتون دارای اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی ذاتی $\vec{S}$ و گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی وابسته است که همواره در *همان* جهت $\vec{S}$ قرار دارد. اگر پروتون در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار داده شود، تصویر μ_z بردار $\vec{\mu}$ روی محور z (که در امتداد جهت $\vec{B}$ تعریف شده است) می‌تواند فقط دارای دو جهت کوانتیده باشد: موازی با $\vec{B}$ یا پادموازی با آن. اختلاف انرژی میان این دو سمتگیری برابر با $2\mu_z B$ است. انرژی مورد نیاز فوتون برای *وارونگی ناگهانی اسپینی* پروتون بین این دو سمتگیری برابر است با

$$hf = 2\mu_z B \qquad (۴۰\text{–}۲۲)$$

در حالت کلی، $\vec{B}$ جمع برداری میدان خارجی $\vec{B}_{\text{ext}}$ ایجاد شده توسط ابزار تشدید مغناطیسی و میدان داخلی $\vec{B}_{\text{int}}$ ایجاد شده توسط اتمها و هسته‌های در برگرفتهٔ پروتون است. آشکارسازی چنین وارونگی ناگهانی اسپینی می‌تواند به *طیفهای تشدید مغناطیسی هسته‌ای* بیانجامد که توسط آن می‌توان مواد ویژه‌ای را شناسایی کرد.

اصل طرد پاؤلی الکترونها در اتمها و سایر تله‌ها از **اصل طرد پاؤلی** پیروی می‌کنند، که لازم می‌دارد *هیچ دو الکترونی در یک اتم یا هر نوع تلهٔ دیگر نمی‌توانند دارای مجموعهٔ عددهای کوانتومی یکسانی باشند.*

بنا کردن جدول تناوبی عنصرها در جدول تناوبی به ترتیب افزایش عدد اتمی Z مرتب شده‌اند؛ بار هسته‌ای Ze است، و Z هم تعداد پروتونها در هسته و هم تعداد الکترونها در اتم خنثی است.

حالتهای با مقدار یکسان n تشکیل یک **لایه**، و آنهایی که هم مقدارهای n و هم مقدارهای ℓ آنها یکسان است یک **زیر لایه** را تشکیل می‌دهند. در لایه‌ها و زیرلایه‌های بسته، که آنهایی هستند که شامل بیشترین تعداد الکترونها می‌شوند، مجموع گشتاورهای زاویه‌ای و مجموع اندازه حرکتهای مغناطیسی الکترونهای منفرد برابر با صفر است.

پرتوهای x و شماره‌گذاری عنصرها **طیف پیوسته** پرتوهای x هنگامی گسیل می‌شود که الکترونهای پر انرژی بخشی از انرژی خود را در برخورد با هسته‌های اتمی از دست بدهند. **طول موج قطع** $\lambda_{\min}$، طول موج گسیل شده به

هنگامی است که چنین الکترونهایی *کلّ* انرژی اولیهٔ خود را در یک برخورد از دست بدهند و برابر است با

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{K_\circ} \qquad (۴۰-۲۳)$$

که در آن $K_\circ$ انرژی جنبشی اولیهٔ الکترونهایی است که به هدف بر می‌خورند.

طیف پرتو x مشخصه‌ای هنگامی به دست می‌آید که الکترونهای پر انرژی، الکترونهایی را از عمق داخل اتم بکَنند؛ وقتی یک "حفره" به جای مانده با الکترون دورتر در اتم پر شود، یک فوتون طیف پرتو x مشخصه‌ای ایجاد می‌شود.

در سال ۱۹۱۳/۱۲۹۲، *موزلی* فیزیکدان انگلیسی بسامدهای پرتوهای x مشخصه‌ای حاصل از تعدادی عنصر را اندازه‌گیری کرد. او متوجه شد هنگامی که ریشهٔ مربعی بسامد برحسب مکان عنصر در جدول تناوبی رسم شود، خط مستقیمی به دست می‌آید که **نمودار موزلی** شکل ۴۰-۱۷ آن را نشان می‌دهد. از اینجا موزلی نتیجه گرفت که ویژگی تعیین کنندهٔ مکان عنصر در جدول تناوبی، نه جرم اتمی آن بلکه عدد اتمی Z آن است- یعنی، تعداد پرتونها در هسته.

لیزرها و نور لیزر نور لیزر از فرایند **گسیل القایی** به دست می‌آید. یعنی، تابش که بسامد آن با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$hf = E_x - E_\circ \qquad (۴۰-۲۸)$$

و می‌تواند باعث شود یک اتم، با گسیل فوتونی با بسامد f، از یک تراز انرژی بالاتر (با انرژی E_x) به تراز انرژی پایینتر گذار کند. فوتون القاکننده و فوتون گسیل شده که از هر لحاظ یکسان هستند، برای تشکیل نور لیزر با هم ترکیب می‌شوند.

برای آنکه فرایند گسیل غالب شود، باید قاعدتاً یک **وارونی جمعیت** ایجاد شود؛ یعنی، باید اتمهای بیشتری در تراز انرژی بالاتر نسبت به تراز انرژی پایینتر وجود داشته باشد.

پرسشها

۱- الکترون در اتم جیوه در زیرلایهٔ $3d$ قرار دارد. کدامیک از این مقدارهای m_ℓ برای آن امکان پذیر است: ۳، -۱، ۰، ۱، ۲ ؟

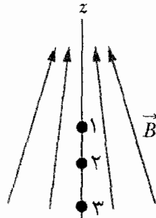
۲- اتم اورانیوم دارای زیرلایه‌های $6p$ و $7s$ بسته است. کدام زیرلایه دارای تعداد بیشتری الکترون است؟

۳- اتم نقره دارای زیرلایه‌های $3d$ و $4d$ بسته است. کدامیک از این زیرلایه‌ها دارای تعداد الکترون بیشتری است، یا آیا تعداد آنها برابر است؟

۴- الکترونی در اتم طلا در حالتی با $n = ۴$ قرار دارد. کدامیک از این مقدارهای ℓ برای آن ممکن است: ۳-، ۰، ۲، ۳، ۴، ۵ ؟

۵- چه تعداد (الف) زیرلایه و (ب) حالتهای الکترونی در لایهٔ $n = ۲$ قرار دارند؟ چه تعداد (پ) زیرلایه و (ت) حالتهای الکترونی در لایهٔ $n = ۵$ قرار دارند؟

۶- شکل ۴۰-۲۳ سه نقطه را نشان می‌دهد که یک الکترون اسپین- بالا می‌تواند در یک میدان مغناطیسی غیر یکنواخت آنها قرار گیرد (تغییرات میدان در راستای محور z است). (الف) این نقطه‌ها را بنا بر انرژی پتانسیل U گشتاور دوقطبی مغناطیسی ذاتی الکترون $\vec{\mu}_s$، مرتب کنید. (ب) اگر الکترون اسپین- بالا در نقطهٔ ۲ باشد، نیروی وارد بر الکترون ناشی از میدان مغناطیسی در چه جهتی است؟



شکل ۴۰-۲۳ پرسش ۶

۷- تعیین کنید کدامیک از این عبارتها درست و کدامیک نادرست است: (الف) یکی (و فقط یکی) از این زیرلایه‌ها نمی‌تواند وجود داشته باشد: $2p$ ، $4f$ ، $3d$ ، $1p$. (ب) تعداد مقدارهای m_ℓ که مجازند فقط به ℓ بستگی دارند و به n بستگی ندارند. (پ) چهار زیرلایه با $n = ۴$ وجود دارد. (ت) کوچکترین مقدار n برای یک مقدار معین ℓ برابر با $\ell + 1$ است. (ث) تمام حالتها با $\ell = \circ$ دارای $m_\ell = \circ$ نیز هستند. (ج) n زیر لایه برای هر مقدار n وجود دارد.

۸- از کدام اتم از هر جفت اتم زیر، کندن یک الکترون ساده‌تر است؟ (الف) کریپتون یا برُم، (ب) روبیدیم یا سزیوم، (پ) هلیوم یا هیدروژن؟

۹- انرژی الکترون در (الف) اتم هیدروژن و (ب) اتم وانادیوم، به کدام عددهای کوانتومی بستگی دارد؟

۱۰- طیف پرتو x شکل ۴۰-۱۴ ناشی از برخورد الکترونهای ۳۵/۰ keV با یک هدف مولیبدن $(Z = ۴۲)$ است. اگر هدف نقره $(Z = ۴۷)$ را جایگزین هدف مولیبدن کنیم، آیا (الف) $\lambda_{\min}$ ، (ب) طول موج خط K_α ، و (پ) طول موج خط K_β ، افزایش می‌یابد یا کاهش، یا بدون تغییر باقی می‌ماند؟

۱۱- شکل ۴۰-۲۲ قسمتی از نمودارهای تراز- انرژی را برای اتمهای هلیوم و نئون که در عمل لیزر هلیوم- نئون نقش دارند، نشان می‌دهد. گفته شده است که اتم هلیوم در حالت E_3 می‌تواند با اتم نئون در حالت پایه‌اش برخورد کند و اتم نئون را به حالت E_2 بالا ببرد. انرژی حالت E_3 هلیوم (۲۰/۶۱eV) نزدیک، ولی نه دقیقاً برابر با، انرژی حالت E_2 اتم نئون (۲۰/۶۶eV) است. اگر این دو انرژی *دقیقاً* برابر هم نیستند، پس چگونه انتقال انرژی می‌تواند صورت بپذیرد؟

۱۲- عنصرهای کریپتون و روبیدیوم را در نظر می‌گیریم. (الف) کدامیک برای استفاده در آزمایش اشترن- گرلاخ از نوعی که در

ارتباط با شکل ۴۰-۸ توضیح داده شد، مناسبتر است؟ (ب) کدامیک، یا هر دو کلاً کار نخواهد کرد؟

۱۳- خط K_α پرتو x برای هر عنصر به دلیل گذار بین لایهٔ K ($n=۱$) و لایهٔ L ($n=۲$) رخ می‌دهد. شکل ۴۰-۱۴، این خط را (برای یک هدف مولیبدن) که در یک تکْ طول موج رخ داده، نشان می‌دهد. ولی، با یک توان تفکیک بالاتر، این خط به مؤلفه‌های طول موج مختلفی شکافته می‌شود، زیرا لایهٔ L دارای انرژی واحدی نیست. (الف) خط K_α دارای چند مؤلفه است؟ (ب) به همین ترتیب، خط K_β دارای چند مؤلفه است؟

۱۴- کدامیک (در صورت وجود) از این موارد برای آنکه عمل لیزری بین دو تراز انرژی یک اتم رخ دهد ضروری است؟ (الف) در تراز بالاتر، اتمهای بیشتری نسبت به تراز پایینتر وجود داشته باشد. (ب) تراز بالاتر شبه پایدار باشد. (پ) تراز پایینتر شبه پایدار باشد. (ت) تراز پایینتر، حالت پایهٔ اتم باشد. (ث) محیط عمل لیزری، یک گاز باشد.

مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس).
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
●-●●● تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

بخش ۴۰-۴ اندازه حرکتهای زاویه‌ای و گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی

●۱- الکترونی در یک اتم چند الکترونی دارای $m_\ell=+۴$ است. برای این الکترون (الف) مقدار ℓ، (ب) کوچکترین مقدار ممکن n، و (پ) تعداد مقدارهای ممکن m_s چقدر است؟

●۲- در زیر لایهٔ $\ell=۳$، (الف) بزرگترین (مثبت‌ترین) مقدار m_ℓ چقدر است؟ (ب) چند حالت به ازای این بزرگترین مقدار m_ℓ وجود دارند، و (پ) تعداد کل حالتهای موجود در این زیرلایه چقدر است؟

●۳- (الف) چه تعداد مقدارهای ℓ به $n=۳$ وابسته است؟ (ب) چه تعداد مقدارهای m_ℓ به $\ell=۱$ وابسته است؟

●۴- چند حالت الکترونی در این زیر لایه‌ها قرار دارند: (الف) $n=۴$، $\ell=۳$؛ (ب) $n=۳$، $\ell=۱$؛ (ت) $n=۲$، $\ell=۰$؟

●۵- (الف) بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای مداری در حالتی با $\ell=۳$ چقدر است؟ (ب) اندازهٔ بزرگترین تصویر آن روی محور z چقدر است؟

●۶- چند حالت الکترونی در لایه‌های زیر قرار دارند: (الف) $n=۴$، (ب) $n=۱$، (پ) $n=۳$، (ت) $n=۲$؟

●۷- الکترونی در اتم هیدروژن در حالتی با $\ell=۵$ قرار دارد. کمترین مقدار ممکن زاویهٔ نیم کلاسیکی بین $\vec{L}$ و L_z چقدر است؟

●۸- چند حالت الکترونی در لایه‌ای که با عدد کوانتومی $n=۵$ مشخص شده است، وجود دارد؟

●●۹- اگر اندازه حرکت زاویه‌ای مداری $\vec{L}$ در امتداد، مثلاً، محور z اندازه‌گیری شود تا مقداری برای L_z به دست آید، نشان دهید که

$$(L_x^۲+L_y^۲)^{۱/۲}=[\ell(\ell+۱)-m_\ell^۲]^{۱/۲}\hbar$$

بیشترین چیزی است که می‌توان دربارهٔ دو مؤلفهٔ دیگر اندازه حرکت زاویه‌ای مداری گفت. **SSM**

●●۱۰- الکترونی در حالتی با $n=۳$ قرار دارد. (الف) تعداد مقدارهای ممکن ℓ، (ب) تعداد مقدارهای ممکن m_ℓ، (پ) تعداد مقدارهای ممکن m_s، (ت) تعداد حالتها در لایهٔ $n=۳$، و (ث) تعداد زیر لایه‌ها در لایهٔ $n=۳$ چقدر است؟

●●۱۱- الکترونی در حالتی با $\ell=۳$ قرار دارد. (الف) چه مضربی از $\hbar$، بزرگی $\vec{L}$ را به دست می‌دهد؟ (ب) چه مضربی از μ_B، بزرگی $\vec{\mu}$ را به دست می‌دهد؟ (پ) بزرگترین مقدار ممکن m_ℓ چقدر است؟ (ت) چه مضربی از $\hbar$، مقدار مربوط L_z را به دست می‌دهد؟ و (ث) چه مضربی از μ_B، مقدار مربوط $\mu_{orb,z}$ را به دست می‌دهد؟ (ج) مقدار زاویهٔ نیم کلاسیکی θ میان جهتهای L_z و $\vec{L}$ چقدر است؟ مقدار زاویهٔ θ برای (چ) دومین بزرگترین مقدار m_ℓ و (ح) کوچکترین (یعنی، منفی‌ترین) مقدار ممکن m_ℓ چقدر است؟ **SSM WWW**

●●●۱۲- یک کرهٔ شناور آهنی به شعاع $R=۲/۰۰\text{mm}$ در یک میدان مغناطیسی قرار دارد. کره در ابتدا دارای گشتاور مغناطیسی نیست ولی میدان ۱۲٪ گشتاور مغناطیسی اتمها را ردیف می‌کند (یعنی، ۱۲٪ از گشتاورهای مغناطیسی الکترونها با پیوند سست در کره با یک چنین الکترونی در هر اتم). گشتاور دوقطبی الکترونهایی که ردیف شده‌اند، گشتاور دوقطبی ذاتی کره $\vec{\mu}_s$ است. تندی زاویه‌ای ω حاصل از کره چقدر است؟

●۱۳- مقدار (الف) کوچکتر و (ب) بزرگتر زاویهٔ نیم‌کلاسیکی بین بردار اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی الکترون و میدان مغناطیسی را در مسئلهٔ نمونهٔ ۴۰-۱ محاسبه کنید. به خاطر داشته باشید که اندازه حرکت زاویه‌ای مداری الکترون ظرفیت در اتم نقره برابر با صفر است.

بخش ۴۰-۵ آزمایش اشترن- گرلاخ

●۱۴- فرض کنید در آزمایش اشترن- گرلاخ که برای اتمهای نقرهٔ خنثی توضیح داده شد، میدان مغناطیسی $\vec{B}$ دارای بزرگی $0/50\,T$ باشد. (الف) اختلاف انرژی بین سمتگیریهای گشتاور مغناطیسی اتمهای نقره در دو زیرباریکه چقدر است؟ (ب) بسامد تابشی که گذار بین این دو حالت را القا می‌کند چقدر است؟ (پ) طول موج این تابش، چقدر است، و (ت) به چه بخشی از طیف الکترومغناطیسی مربوط است؟

●۱۵- شتاب اتم نقره هنگای که از میان آهنربای منحرف‌کنندهٔ آزمایش اشترن- گرلاخ مسئلهٔ نمونهٔ ۴۰-۱ می‌گذرد، چقدر است؟ **SSM**

●۱۶- فرض کنید اتم هیدروژن در حالت پایه‌اش عمود بر میدان مغناطیسی قائمی که دارای گرادیان میدان مغناطیسی $dB/dz = 1/6\times10^{2}\,T/m$ است، به اندازهٔ $80\,cm$ حرکت کند. (الف) بزرگی نیرویی که این گرادیان میدان بر اثر گشتاور مغناطیسی الکترون اتم، که ۱ مگنتون بور فرض می‌شود، بر اتم وارد می‌کند چقدر است؟ (ب) اگر تندی اتم برابر $1/2\times10^{5}\,m/s$ باشد، جابه‌جایی قائم اتم در طی مسافت $80\,cm$ چقدر است؟

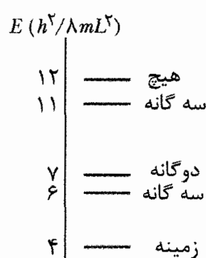
بخش ۴۰-۶ تشدید مغناطیسی

●۱۷- طول موج وابسته به فوتونی که گذار اسپین یک الکترون از سمتگیری موازی به سمتگیری پادموازی با یک میدان مغناطیسی به بزرگی $0/200\,T$ را القا می‌کند، چقدر است؟ فرض کنید $\ell = 0$ است. **SSM**

●۱۸- اتم هیدروژن در حالت پایه‌اش به خاطر آنکه الکترون آن در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ پروتون (هسته) قرار گرفته است، واقعاً دارای دو تراز انرژی ممکن است که از لحاظ فضایی نزدیک هم قرار گرفته‌اند. از این‌رو، یک انرژی پتانسیل به سمتگیری گشتاور مغناطیسی $\vec{\mu}$ الکترون نسبت به $\vec{B}$ وابسته است و گفته می‌شود الکترون در این میدان، در اسپین بالا (انرژی بالاتر) یا اسپین پایین (انرژی پایینتر) است. اگر الکترون به تراز انرژی بالاتر برانگیخته شود، می‌تواند با وارونگی ناگهانی اسپینی و گسیل یک فوتون، واانگیخته شود. طول موج وابسته به این فوتون برابر $21\,cm$ است. (چنین فرایندی به طور گسترده در کهکشان راه شیری رخ می‌دهد، و دریافت تابشهای ۲۱ سانتی‌متری با تلسکوپهای رادیویی، مکان گاز هیدروژن در میان ابرها را آشکار می‌کند). بزرگی مؤثر $\vec{B}$ که بر الکترون واقع در حالت پایهٔ اتم هیدروژن اثر می‌کند، چقدر است؟

●۱۹- در یک آزمایش NMR، چشمهٔ RF در بسامد $34\,MHz$ نوسان می‌کند و هنگامی که میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_{ext}$ دارای بزرگی $0/78\,T$ است، تشدید مغناطیسی اتمهای هیدروژن در نمونهٔ مورد بررسی، رخ می‌دهد. فرض کنید $\vec{B}_{int}$ و $\vec{B}_{ext}$ هم جهت‌اند و مؤلفهٔ μ_z گشتاور مغناطیسی پروتون برابر با $1/41\times10^{-26}\,J/T$ است. بزرگی $\vec{B}_{int}$ چقدر است؟

●۲۰- شکل ۴۰-۲۴ نمودار تراز انرژی برای یک چاه پتانسیل یک‌بعدی نامتناهی خیالی با طول L است که یک الکترون است. تعداد حالتهای واگن ترازها مشخص شده‌اند: تراز "هیچ" به معنی نبود حالت ناواگن است. (که شامل حالت پایه است). تراز "دوگانه" به معنی ۲ حالت و تراز "سه‌گانه" به معنی ۳ حالت دارد. مجموعاً ۱۱ الکترون را در چاه قرار می‌دهیم. اگر بتوان نیروی الکترواستاتیکی بین الکترونها را نادیده گرفت، چه مضربی از $h^2/8mL^2$ انرژی اولین حالت برانگیخته این سامانهٔ ۱۱ الکترونی را به دست می‌دهد.



شکل ۴۰-۲۴ مسئلهٔ ۲۰

بخش ۴۰-۸ الکترونهای چندگانه در تله‌های مستطیلی

●۲۱- هفت الکترون در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی به پهنای L در تله افتاده‌اند. چه مضربی از $h^2/8mL^2$، انرژی حالت پایهٔ این دستگاه را به دست می‌دهد؟ فرض کنید الکترونها با یکدیگر برهم‌کنش نمی‌کنند، و اسپین آنها قابل چشم‌پوشی نیست.

●۲۲- یک حصار مستطیلی به اضلاع $L_x = L$ و $L_y = 2L$ شامل هفت الکترون است. چه مضربی از $h^2/8mL^2$، انرژی حالت پایهٔ این دستگاه را به دست می‌دهد؟ فرض کنید الکترونها با یکدیگر برهم‌کنش نمی‌کنند، و اسپین آنها قابل چشم‌پوشی نیست.

●●۲۳- برای وضعیت مسئلهٔ ۲۱، چه مضربی از $h^2/8mL^2$، انرژی (الف) نخستین حالت برانگیخته، (ب) دومین حالت برانگیخته، و (پ) سومین حالت برانگیختهٔ دستگاه هفت الکترونی را به دست می‌دهد؟ (ت) یک نمودار تراز- انرژی برای پایینترین چهار تراز انرژی دستگاه رسم کنید.

●●۲۴- برای مسئلهٔ ۲۲، چه مضربی از $h^2/8mL^2$ انرژی (الف) نخستین حالت برانگیخته، (ب) دومین حالت برانگیخته، و (پ) سومین حالت برانگیختهٔ دستگاه هفت الکترونی را به دست می‌دهد؟ (ت) یک نمودار تراز- انرژی برای پایینترین چهار تراز انرژی دستگاه رسم کنید.

●●●۲۵- یک جعبهٔ مکعبی با پهناهای $L_x = L_y = L_z = L$ شامل هشت الکترون است. چه مضربی از $h^2/8mL^2$ انرژی حالت پایهٔ این دستگاه را به دست می‌دهد؟ فرض کنید الکترونها با یکدیگر برهم‌کنش نمی‌کنند و اسپین آنها قابل چشم‌پوشی نیست. SSM

●●●۲۶- برای وضعیت مسئلهٔ ۲۵، چه مضربی از $h^2/8mL^2$، انرژی (الف) نخستین حالت برانگیخته، (ب) دومین حالت برانگیخته، و (پ) سومین حالت برانگیختهٔ دستگاه هشت الکترونی را به دست می‌دهد؟ (ت) یک نمودار تراز- انرژی برای پایینترین چهار تراز انرژی دستگاه رسم کنید.

●۲۷- اخیراً عنصری را به نام دارستادتیوم (Ds) نامیده‌اند، که ۱۱۰ الکترون دارد. فرض کنید که ۱۱۰ الکترون را یکی‌یکی در لایه‌های اتمی قرار دهید و بتوانید از واکنش الکترون- الکترون چشم‌پوشی کنید. با اتمی در حالت پایه، برای عدد کوانتومی ℓ برای آخرین الکترون، نمادگذاری طیف‌سنجی کدام است؟

●۲۸- برای اتم هلیوم در حالت پایه‌اش، عددهای کوانتومی (n, ℓ, m_ℓ, m_s) برای (الف) الکترون اسپین- بالا و (ب) الکترون اسپین- پایین چیست؟

بخش ۴۰-۹ بنا کردن جدول تناوبی

●۲۹- عنصرهای سلنیوم $(Z = 34)$، برم $(Z = 35)$ و کریپتون $(Z = 36)$ را در نظر می‌گیریم. در بخش جدول تناوبی آنها، زیرلایه‌های حالتهای الکترونی به ترتیب زیر پر شده‌اند

$$1s\ 2s\ 2p\ 3s\ 3p\ 3d\ 4s\ 4p$$

مطلوب است (الف) بالاترین زیر لایهٔ اشغال شده برای سلنیوم و (ب) تعداد الکترونهای واقع در آن، (پ) بالاترین زیر لایهٔ اشغال شده برای کریپتون و (ت) تعداد الکترونهای واقع در آن.

●۳۰- فرض کنید دو الکترون در اتمی دارای عددهای کوانتومی $n = 2$ و $\ell = 1$ هستند. (الف) برای این دو الکترون چند حالت ممکن است؟ (به خاطر داشته باشید که الکترونها تمیز ناپذیرند). (ب) اگر اصل طرد پاؤلی برای الکترونها برقرار نبود، چند حالت ممکن بود؟

●۳۱- دو تا از سه الکترون اتم هلیوم دارای عددهای کوانتومی (n, ℓ, m_ℓ, m_s) برابر با $(1, 0, 0, +\frac{1}{2})$ و $(1, 0, 0, -\frac{1}{2})$ هستند. اگر اتم (الف) در حالت پایه و (ب) در نخستین حالت برانگیخته باشد، عددهای کوانتومی ممکن برای سومین الکترون چیست؟ SSM WWW

●۳۲- نشان دهید تعداد حالتها با عدد کوانتومی یکسان n برابر $2n^2$ است.

بخش ۴۰-۱۰ پرتوهای x و ترتیب عنصرها

●۳۳- در چه اختلاف پتانسیل کمینه‌ای یک الکترون باید در یک لامپ پرتو x شتاب گیرد تا بتواند پرتوهای x با طول موج $0/100\,\text{nm}$ تولید کند؟

●●۳۴- یک الکترون $20\,\text{keV}$ بر اثر دو برخورد با هستهٔ هدفی مشابه شکل ۴۰-۱۵، به حالت سکون در می‌آید. طول موج وابسته به فوتون گسیل شده در برخورد دوم $130\,\text{pm}$ بزرگتر از طول موج وابسته به فوتون گسیل شده در برخورد اول است. (الف) انرژی جنبشی الکترون پس از نخستین برخورد چقدر است؟ (ب) طول موج λ_1 و (پ) انرژی E_1 وابسته به نخستین فوتون چقدر است؟ (ت) طول موج λ_2 و (ث) انرژی E_2 وابسته به دومین فوتون چقدر است؟

●●۳۵- پرتوهای x توسط الکترونهای شتاب گرفته در اختلاف پتانسیل $50/0\,\text{kV}$ در یک لامپ پرتو x ایجاد شده‌اند. K_0 را انرژی جنبشی الکترون در انتهای شتاب‌گیری در نظر بگیرید. این الکترون با هستهٔ هدف برخورد می‌کند (فرض کنید هسته در حالت سکون باقی می‌ماند) و سپس دارای انرژی جنبشی $K_1 = 0/500K_0$ می‌شود. (الف) چه طول موجی به فوتونی که گسیل شده، وابسته است؟ این الکترون به هستهٔ هدف دیگری برخورد می‌کند (فرض کنید آن هم ساکن باقی می‌ماند) و آنگاه دارای انرژی جنبشی $K_2 = 0/500K_1$ می‌شود. (ب) چه طول موجی به فوتونی که گسیل شده، وابسته است؟

●●۳۶- طول موج خط K_α آهن برابر با $193\,\text{pm}$ است. اختلاف انرژی میان دو حالت اتم آهن که به این گذار می‌انجامد چقدر است؟

●●۳۷- در شکل ۴۰-۱۴، پرتوهای x نشان داده شده هنگامی ایجاد می‌شوند که الکترونهای $35/0\,\text{keV}$ به یک هدف مولیبدن $(Z = 42)$ برخورد کنند. اگر پتانسیل شتاب دهنده در این مقدار ثابت نگهداشته شود، ولی در عوض از یک هدف نقره $(Z = 47)$ استفاده شود، مطلوب است (الف) $\lambda_{\min}$، (ب) طول موج خط K_α، و (پ) طول موج خط K_β حاصل. ترازهای پرتو x اتمی لایه‌های K، L و M برای نقره (مشابه شکل ۴۰-۱۶) عبارت‌اند از $25/51\,\text{keV}$، $3/56\,\text{keV}$ و $0/53\,\text{keV}$. SSM WWW

●●۳۸- وقتی الکترونها یک هدف مولیبدن را بمباران کنند، آنها همان‌گونه که در شکل ۴۰-۱۴ نشان داده شده است، هم پرتوهای x پیوسته و هم مشخصه‌ای را تولید می‌کنند. در آن شکل، انرژی جنبشی الکترونهای فرودی برابر $35/0\,\text{keV}$ است. اگر پتانسیل شتاب دهنده به $50/0\,\text{keV}$ افزایش یابد، (الف) مقدار میانگین $\lambda_{\min}$ چیست، و (ب) آیا طول موجهای خطهای K_α و K_β افزایش می‌یابند یا کاهش، یا بدون تغییر باقی می‌مانند؟

•••۳۹- نشان دهید که یک الکترون متحرک نمی‌تواند به طور خود به خود در فضای آزاد به فوتون پرتو x تغییر کند. یک جسم سوم (اتم یا هسته) باید حضور داشته باشد. چرا جسم سوم مورد نیاز است؟ (*راهنمایی:* پایستگی انرژی و اندازه حرکت را بررسی کنید). **SSM**

••۴۰- از شکل ۴۰-۱۴، اختلاف انرژی $E_L - E_M$ را به طور تقریبی برای مولیبدن محاسبه کنید. آن را با مقداری که ممکن است از شکل ۴۰-۱۶ به دست آید، مقایسه کنید.

••۴۱- نسبت طول موج خط K_α برای نیوبیوم (Nb) به طول موج همان خط برای گالیوم (Ga) را محاسبه کنید. برای داده‌های مورد نیاز از جدول تناوبی پیوست چ استفاده کنید. **SSM**

••۴۲- طول موجهای K_α برای چند عنصر به قرار زیرند:

عنصر	λ(pm)	عنصر	λ(pm)
Ti	۲۷۵	Co	۱۷۹
V	۲۵۰	Ni	۱۶۶
Cr	۲۲۹	Cu	۱۵۴
Mn	۲۱۰	Zn	۱۴۳
Fe	۱۹۳	Ga	۱۳۴

با استفاده از این داده‌ها، نمودار موزلی (مشابه شکل ۴۰-۱۷) را رسم و بررسی کنید که شیب آن با مقدار داده شده برای C در بخش ۴۰-۱۰ سازگار است.

••۴۳- انرژیهای بستگی الکترونهای لایهٔ K و لایهٔ L در مس به ترتیب عبارت‌اند از ۸/۹۷۹keV و ۰/۹۵۱keV. اگر مشخصهٔ K_α پرتو x حاصل از مس روی بلور سدیم کلراید بتابد و بازتاب *براگ* مرتبهٔ اول را در زاویهٔ °۷۴/۱، که نسبت به صفحه‌های موازی اتمهای سدیم اندازه‌گیری شده، به دست دهد، فاصلهٔ میان صفحه‌های موازی چقدر است؟

••۴۴- (الف) با استفاده از معادلهٔ ۴۰-۲۶، نسبت انرژیهای فوتون ناشی از گذارهای K_α در دو اتم که عددهای افقی آنها Z و Z' است، چقدر است؟ (ب) این نسبت برای اورانیوم و آلومینیوم چقدر است؟ (پ) برای اورانیوم و لیتیم چطور؟

•••۴۵- هدف تنگستن $(Z = ۷۴)$ با الکترونهایی در یک لامپ پرتو x بمباران می‌شود. ترازهای انرژی K، L و M برای تنگستن (با شکل ۴۰-۱۶ مقایسه کنید) به ترتیب دارای انرژیهای ۶۹/۵keV، ۱۱/۳keV و ۲/۳۰keV هستند. (الف) مقدار کمینهٔ پتانسیل شتاب دهنده که خطهای مشخصهٔ K_α و K_β را برای تنگستن ایجاد می‌کند، چقدر است؟ (ب) برای همین پتانسیل شتاب دهنده، $\lambda_{\min}$ چقدر است؟ طول موجهای (پ) K_α و (ت) K_β چقدرند؟

•••۴۶- ثابت C در معادلهٔ ۴۰-۲۷ را با یافتن C برحسب ثابتهای بنیادی در معادلهٔ ۴۰-۲۴ و سپس با استفاده از داده‌های پیوست ب برای محاسبهٔ این ثابتها، تا پنج رقم با معنی تعیین کنید. با استفاده از این مقدار C در معادلهٔ ۴۰-۲۷، انرژی نظری $E_{\text{نظری}}$ فوتون K_α را برای عنصرهای کم‌انرژی فهرست شده در جدول پایین تعیین کنید. این جدول شامل مقدار انرژی اندازه‌گیری شدهٔ (برحسب eV) $E_{\text{آزمایشگاهی}}$ فوتون K_α برای هر عنصر فهرست شده است. درصد انحراف بین $E_{\text{نظری}}$ و $E_{\text{آزمایشگاهی}}$ را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد

$$\text{درصد انحراف} = \frac{E_{\text{نظری}} - E_{\text{آزمایشگاهی}}}{E_{\text{آزمایشگاهی}}}100$$

این درصد انحراف برای (الف) Li، (ب) Be، (پ) B، (ت) C، (ث) N، (ج) O، (چ) F، (ح) Ne، (خ) Na، و (د) Mg چیست؟

Li	۵۴/۳	O	۵۲۴/۹
Be	۱۰۸/۵	F	۶۷۶/۸
B	۱۸۳/۳	Ne	۸۴۸/۶
C	۲۷۷	Na	۱۰۴۱
N	۳۹۲/۴	Mg	۱۲۵۴

(در واقع به دلیل شکافتگی تراز انرژی L، بیش از یک پرتو K_α وجود دارد؛ ولی این اثر برای عنصرهای فهرست شده در بالا قابل چشم‌پوشی است).

بخش ۴۰-۱۲ لیزرها چگونه کار می‌کنند

•۴۷- یک لیزر تپی، نوری را با طول موج ۶۹۴/۴nm گسیل می‌کند. مدت تپ ۱۲ps، و انرژی هر تپ برابر ۰/۱۵۰J است. (الف) طول تپ چقدر است؟ (ب) در هر تپ چند فوتون گسیل شده است؟

•۴۸- لیزری تپ منفردی را در ۴۲۴nm گسیل می‌کند که ۰/۵۰۰μs دوام دارد. توان تپ ۲/۸۰MW است. اگر فرض کنیم که اتمهایی که در تپ شرکت دارند در حین ۰/۵۰۰μs فقط یک گسیل القایی انجام می‌دهند؛ آنگاه چه تعداد اتم در این فرایند شرکت دارند؟ GO

•۴۹- یک اتم فرضی دارای ترازهای انرژی است که به فاصله‌های یکنواخت ۱/۲eV از هم جدا شده‌اند. در دمای ۲۰۰۰K، نسبت تعداد اتمها در سیزدهمین حالت برانگیخته به تعداد اتمها در یازدهمین حالت برانگیخته چقدر است؟ **SSM**

•۵۰- برای شرایط مسئلهٔ نمونهٔ ۴۰-۶ الف، چند مول نئون برای قرار دادن ۱۰ اتم در حالت برانگیخته با انرژی E_x، مورد نیاز است؟

•۵۱- یک لیزر هلیوم- نئون، نور لیزر در طول موج ۶۳۲/۸nm و توان ۲/۳mW گسیل می‌کند. با چه آهنگی فوتونها توسط این وسیله گسیل شده‌اند؟

•۵۲- یک اتم فرضی فقط دارای دو تراز انرژی است که به اندازهٔ ۳/۲eV از هم جدا شده‌اند. فرض کنید در ارتفاع معینی در جو یک ستاره، تعداد $۶/۱\times۱۰^{۱۳}$ / $cm^۳$ از این اتمها در حالت انرژی بالاتر و $۲/۵\times۱۰^{۱۵}$ / $cm^۳$ از این اتمها در حالت انرژی پایینتر قرار دارند. دمای جو ستاره در این ارتفاع چقدر است؟

•۵۳- فرض کنید لیزرهایی در دسترس‌اند که طول موجهای آنها می‌تواند در هر جایی در گسترهٔ دید مرئی، یعنی در گسترهٔ $۴۵۰\,nm<\lambda<۶۵۰\,nm$ ، به دقت "کوک" شوند. اگر هر کانال تلویزیونی پهنای نوار ۱۰MHz را اشغال کند، چند کانال می‌تواند در این گسترهٔ طول موج جا داده شود؟

•۵۴- وارونی جمعیت برای دو تراز انرژی غالباً با اختصاص یک دمای کلوین منفی به دستگاه توضیح داده شود. کدام دمای منفی، دستگاهی را که در آن جمعیت تراز انرژی بالاتر ۱۰٪ بیشتر از تراز پایینتر و اختلاف انرژی بین دو تراز برابر ۲/۲۶eV است، توصیف می‌کند؟

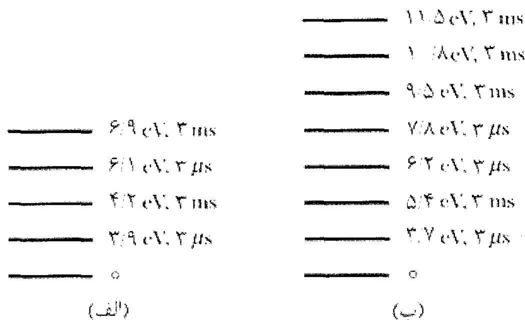
•۵۵- حجم فعال یک لیزر ساخته شده از نیمرسانای GaAlAs فقط ۲۰۰$\mu m^۳$ (کوچکتر از یک دانهٔ شن) است، و هنوز لیزر می‌تواند به طور پیوسته توان ۵/۰mW را در طول موج ۰/۸۰μm ایجاد کند. لیزر با چه آهنگی، فوتونها را تولید می‌کند؟

•۵۶- یک باریکهٔ لیزر پر قدرت ($\lambda=۶۰۰\,nm$) با باریکه‌ای به قطر ۱۲cm ، ماه در فاصلهٔ $۳/۸\times۱۰^۵$ km را نشانه گرفته است. این باریکه فقط به دلیل پراش پهن می‌شود. مکان زاویه‌ای لبهٔ لکهٔ مرکزی پراش (معادلهٔ ۳۶-۱۲ را ببینید) با معادلهٔ زیر داده می‌شود

$$\sin\theta=\frac{۱/۲۲\lambda}{d}$$

که در آن d قطر دهانهٔ باریکه است. قطر لکهٔ مرکزی پراش روی سطح ماه چقدر است؟

••۵۷- شکل ۴۰-۲۵ ترازهای انرژی دو نوع اتم را نشان می‌دهد. اتمهای A در یک لوله و اتمهای B در لولهٔ دیگری قرار دارند. انرژیها (نسبت به انرژی صفر حالت پایه) مشخص شده‌اند؛ طول عمر میانگین اتمها در هر تراز نیز مشخص شده است. در ابتدا تمام اتمها به ترازهایی بالاتر از ترازهای نشان داده شده پمپ شده‌اند. سپس اتمها به ترازهای پایین می‌افتند و بسیاری از آنها به ترازهای معینی "می‌چسبند" که به وارونی جمعیت و گسیل لیزر می‌انجامد. نوری که به وسیلهٔ A گسیل می‌شود، B را روشن می‌کند و می‌تواند موجب گسیل القایی در B شود. انرژی هر فوتون گسیل القایی در B چقدر است؟



شکل ۴۰-۲۵ مسئلهٔ ۵۷

•••۵۸- یاقوت در طول موج ۶۹۴nm لیزر گسیل می‌کند. یک بلور معین یاقوت $۴/۰۰\times۱۰^{۱۹}$ یون Cr دارد (که اتمهایی هستند که لیزر گسیل می‌کنند). گذار لیزری بین اولین حالت برانگیخته و حالت پایه است و خروجی یک تپ نور لیزری است که ۲/۰۰μs دوام دارد. وقتی تپ شروع می‌شود، ۶۰٪ یونهای Cr در اولین حالت برانگیخته هستند و بقیه در حالت پایه قرار دارند. توان میانگین گسیل شده در طی تپ چقدر است؟ (*راهنمایی:* فقط از یونهای حالت پایه چشم‌پوشی نکنید.)

•••۵۹- محیط فعال در یک لیزر خاص که نور لیزر را در طول موج ۶۹۴nm تولید می‌کند دارای طول ۶/۰۰cm و قطر ۱/۰۰cm است. (الف) در تشابه با یک لولهٔ صوتی بسته، این محیط را به صورت یک کاواک تشدید نوری در نظر بگیرید. چه تعداد گرهٔ موج ایستاده در امتداد محور لیزر وجود دارد؟ (ب) بسامد باریکه به چه میزان Δf باید انتقال یابد تا به تعداد گره‌ها، یکی افزوده شود؟ (پ) نشان دهید Δf دقیقاً وارون زمان حرکت نور لیزر برای یک دور مسیر رفت و برگشت در امتداد محور لیزر است. (ت) کسر انتقال بسامد $\Delta f/f$ مربوط به آن چقدر است؟ ضریب شکست مناسب محیط لیزری (بلور یاقوت) برابر ۱/۷۵ است.

•••۶۰- آینه‌ها در لیزر شکل ۴۰-۲۱، که به فاصلهٔ ۸/۰cm از هم قرار گرفته‌اند، تشکیل یک کاواک نوری را می‌دهند که در آن موجهای ایستادهٔ نور لیزر می‌توانند ایجاد شوند. هر موج ایستاده دارای تعداد صحیح n نیم طول موج در این طول ۸/۰ سانتی‌متری است که در آن n مقدار بزرگی است و موجها قدری در طول موج با هم متفاوت‌اند. در نزدیکی $\lambda=۵۳۳\,nm$ ، طول موج موجهای ایستاده چقدر فاصله دارند؟

•••۶۱- یک اتم فرضی دارای دو تراز انرژی است که طول موج گذار بین آنها ۵۸۰nm است. در یک نمونهٔ خاص در دمای ۳۰۰K ، تعداد $۴/۰\times۱۰^{۲۰}$ عدد از چنین اتمهایی در حالت انرژی پایینتر قرار دارند. (الف) با فرض شرایط تعادل گرمایی، چه تعداد اتم در حالت بالاتر قرار دارند؟ (ب) این بار فرض

کنید $۳/۰\times۱۰^{۲۰}$ تا از این اتمها توسط یک فرایند خارجی به حالت بالاتر "پمپ" شوند، و در نتیجه $۱/۰\times۱۰^{۲۰}$ اتم در حالت پایینتر باقی بمانند. اگر هر اتم بین این دو حالت یک بار پرش کند (یا با جذب یا با گسیل القایی)، انرژی بیشینه‌ای که می‌تواند توسط اتمها در یک تپ لیزری آزاد شود چقدر است؟

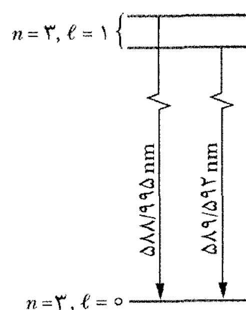
۶۲●●- باریکهٔ حاصل از یک لیزر آرگون (با طول موج ۵۱۵nm) دارای قطری برابر با ۳/۰۰nm و آهنگ خروجی انرژی پیوستهٔ ۵/۰۰W است. این باریکه توسط یک عدسی که فاصلهٔ کانونی f آن ۳/۵۰cm است روی یک سطح پخش کننده متمرکز شده است. نقش پراشی مشابه شکل ۳۶-۹ تشکیل می‌شود که شعاع لکهٔ مرکزی آن با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$R = \frac{۱/۲۲ f\lambda}{d}$$

(معادلهٔ ۳۶-۱۲ و مسئلهٔ نمونهٔ ۳۶-۴ را ببینید). می‌توان نشان داد که لکهٔ مرکزی شامل ۸۴٪ از توان فرودی است. (الف) شعاع لکهٔ مرکزی چقدر است؟ (ب) شدت میانگین (توان بر یکای سطح) تابش فرودی چقدر است؟ (پ) شدت میانگین در لکهٔ مرکزی چقدر است؟

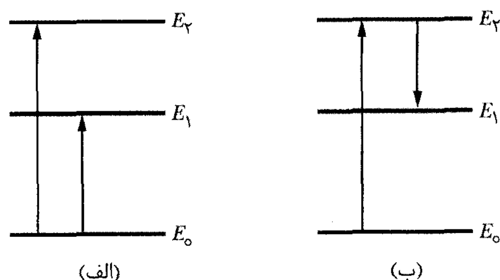
مسئله‌های اضافی

۶۳- اتمهای سدیم برانگیخته دو خط طیفی به نام *دوتایی سدیم* را که تنگ هم قرار گرفته‌اند و دارای طول موجهای ۵۸۸/۹۹۵nm و ۵۸۹/۵۹۲nm هستند، گسیل می‌کنند (شکل ۴۰-۲۶). (الف) اختلاف انرژی میان دو تراز انرژی بالاتر $(n=۳, \ell=۱)$ چقدر است؟ (ب) این اختلاف انرژی از آن رو رخ می‌دهد که گشتاور مغناطیسی اسپینی الکترون می‌تواند به طور موازی یا پادموازی با میدان مغناطیسی داخلی وابسته به حرکت مداری الکترون سمتگیری کند. با استفاده از پاسخ خود در قسمت (الف)، بزرگی این میدان مغناطیسی داخلی را به دست آورید.



شکل ۴۰-۲۶ مسئلهٔ ۶۳

۶۴- *گسیل القایی ستارهٔ دنباله‌دار*. وقتی یک ستارهٔ دنباله‌دار به خورشید نزدیک می‌شود، حرارت افزایش یافته، آب روی سطح بخش مرکزی دنباله‌دار را تبخیر می‌کند و بدین ترتیب یک هالهٔ گازی از بخار آب به دور این بخش ایجاد می‌شود. آنگاه نور خورشید می‌تواند مولکولهای H_2O در بخار آب را به اتمهای H و مولکولهای OH تجزیه کند. همچنین نور خورشید می‌تواند مولکولهای OH را به ترازهای انرژی بالاتر برانگیخته کند، که دو تا از آنها در شکل ۴۰-۲۷ نشان داده شده است.



شکل ۴۰-۲۷ مسئلهٔ ۶۴

هنگامی که دنباله‌دار هنوز به طور نسبی دور از خورشید است، نور خورشید موجب برانگیختگی یکسانی به ترازهای E_2 و E_1 می‌شود (شکل ۴۰-۲۵ الف). بنابراین، هیچ وارونی جمعیتی بین این دو تراز وجود ندارد. ولی، همینکه دنباله‌دار به خورشید نزدیک شود، برانگیختگی به تراز E_1 کاهش یافته و وارونی جمعیت رخ می‌دهد. دلیل این اتفاق به یکی از طول موجها- به نام *خطهای فرانهوفر*- مربوط می‌شود که نور خورشید فاقد آنهاست؛ زیرا وقتی نور از جو خورشید خارج می‌شود، این طول موجها توسط جو جذب می‌شوند.

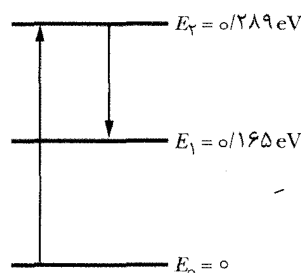
وقتی دنباله‌دار به خورشید نزدیک می‌شود، اثر دوپلر ناشی از تندی دنباله‌دار نسبت به خورشید، طول موج خطهای فرانهوفر را جابه‌جا می‌کند، که ظاهراً یکی از آنها با طول موج مورد نیاز برای برانگیختگی تراز E_1 در مولکهای OH همپوشانی دارد. آنگاه در این مولکولها، وارونی جمعیت رخ می‌دهد و آنها با فرایند گسیل القایی، تابش می‌کنند (شکل ۴۰-۲۵ ب). مثلاً، وقتی دنباله‌دار کوهوتک[1] در دسامبر ۱۹۷۳ و ژانویهٔ سال ۱۹۷۴ به خورشید نزدیک شد، در اواسط ژانویه شروع به تابش گسیل القایی در بسامدی حدود ۱۶۶۶MHz کرد. (الف) اختلاف انرژی $E_2 - E_1$ برای آن گسیل چقدر بوده است؟ (ب) این گسیل به چه ناحیه‌ای از طیف الکترومغناطیسی مربوط می‌شد؟

۶۵- آیا می‌توان یک موشک بالیستیک قاره‌پیمای در حال فرود را با یک باریکهٔ لیزری پر قدرت منهدم کرد؟ باریکه‌ای به شدت $۱۰^{۸}\ W/m^2$ احتمالاً یک موشک بدون چرخش را در یک ثانیه سوزانده ومنهدم می‌کند. (الف) اگر لیزر توان ۵/۰MW، طول موج ۳/۰μm، و باریکه‌ای به قطر ۴/۰m داشته باشید (در واقع یک لیزر بسیار قدرتمند)، آیا موشکی به فاصلهٔ ۳۰۰۰km را می‌تواند منهدم کند؟ (ب) اگر طول موج بتواند تغییر کند، در

1. Kouhoutek

چه مقدار بیشینه‌ای می‌تواند عمل کند؟ از معادلهٔ بیشینهٔ پراش مرکزی که با معادلهٔ ۳۶-۱۲ داده می‌شود ($\sin\theta = ۱/۲۲\lambda/d$) استفاده کنید.

۶۶- *لیزر CO_2 مریخی.* در همان جایی که نور خورشید بر جو مریخ می‌تابد، مولکولهای کربن دی اکسید در ارتفاع حدود ۷۵km به طور طبیعی دستخوش عمل لیزری قرار می‌گیرند. ترازهای انرژی مربوط به این عمل در شکل ۴۰-۲۸ نشان داده شده‌اند؛ وارونی جمعیت بین ترازهای انرژی E_2 و E_1 رخ می‌دهد. (الف) چه طول موجی از تابش خورشیدی مولکولها را در عمل لیزری برانگیخته می‌کند؟ (ب) در چه طول موجی عمل لیزری رخ می‌دهد؟ (پ) طول موجهای برانگیختگی و عمل لیزری در چه ناحیه‌ای از طیف الکترومغناطیسی قرار دارند؟



شکل ۴۰-۲۸ مسئلهٔ ۶۶

۶۷- شکل ۴۰-۲۹ نمودار تراز انرژی برای یک چاه پتانسیل یک‌بعدی نامتناهی خیالی با طول L است که یک الکترون دارد. تعداد حالتهای واگن ترازها چنین مشخص شده‌اند؛ تراز "هیچ" به معنی نبود حالت واگن (که شامل حالت پایه است) و تراز "سه‌گانه" به معنی ۳ حالت است. اگر مجموعاً ۲۲ الکترون را در چاه قرار دهیم، چه مضربی از $h^2/8mL^2$ انرژی حالت پایهٔ سامانهٔ ۲۲ الکترون را به دست می‌دهد؟

$E\,(h^2/8mL^2)$

۱۴ — سه گانه
۱۲ — هیچ
۱۱ — سه گانه
۹ — سه گانه
۶ — سه گانه
۳ — زمینه

۶۸- از بمباران هدف مولیبدن ($Z = ۴۲$) با الکترونهای ۳۵/۰keV طیف پرتو x شکل ۴۰-۱۴ به دست می‌آید. طول موجهای K_β و K_α به ترتیب برابر با ۶۳/۰pm و ۷۱/۰pm هستند. انرژی فوتون مربوط به تابش (الف) K_β و (ب) K_α چقدر است؟ می‌خواهیم این دو تابش از یکی از ماده‌های جدول زیر به گونه‌ای عبور کند که آن ماده، خط K_β را به طور قویتری از خط K_α جذب کند. یک ماده، تابش x_1 را در صورتی به طور قویتری از تابش x_2 جذب می‌کند که یک فوتون x_1 انرژی کافی برای کندن یک الکترون K از اتم آن ماده داشته باشد، ولی یک فوتون x_2 نداشته باشد. جدول زیر، انرژی یونش الکترون K در مولیبدن و چهار مادهٔ دیگر را به دست می‌دهد. کدامیک از ماده‌های جدول (پ) بهترین و (ت) دومین بهترین به عنوان پالایه‌اند؟

	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru
Z	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴
E_K(keV)	۱۸/۰۰	۱۸/۹۹	۲۰/۰۰	۲۱/۰۴	۲۲/۱۲

۶۹- نشان دهید طول موج قطع (برحسب پیکومتر) در طیف پرتو x پیوسته از هر هدفی با رابطهٔ $\lambda_{\min} = ۱۲۴۰/V$ داده می‌شود، که V اختلاف پتانسیل (برحسب کیلوولت) است که الکترونها در آن، پیش از برخورد با هدف شتاب گرفته‌اند.

۷۰- با اندازه‌گیری زمان رفت و برگشت یک تپ لیزر از رصدخانه‌ای واقع روی زمین تا یک بازتابنده روی کرهٔ ماه، فاصلهٔ بین آن دو جسم را می‌توان اندازه گرفت. (الف) مقدار پیش‌بینی شدهٔ این زمان چقدر است؟ (ب) این فاصلهٔ جدایی را می‌توان با دقتی حدود ۱۵cm اندازه‌گیری کرد. این به چه عدم قطعیتی در زمان پیمایش مسیر مربوط است؟ (پ) اگر باریکهٔ لیزر لکه‌ای به قطر ۳km را روی ماه تشکیل دهد، واگرایی زاویه‌ای باریکه چقدر است؟

۷۱- لیزرها می‌توانند برای تولید تپهای نوری که دوام آنها به کوتاهی ۱۰fs است به کار گرفته شوند. (الف) چند طول موج نور ($\lambda = ۵۰۰\,nm$) در چنین تپی قرار دارد؟ (ب) کمیت مجهول X (برحسب سال) را تعیین کنید:

$$\frac{۱۰\,fs}{۱\,s} = \frac{۱\,s}{X}$$

۷۲- (یک مسئلهٔ اصل همخوانی). (الف) عدد کوانتومی ℓ برای حرکت مداری زمین به دور خورشید و (ب) تعداد سمتگیریهای مجاز صفحهٔ مداری زمین را تخمین بزنید. (پ) $\theta_{\min}$، نیم زاویهٔ کوچکترین مخروطی را که می‌تواند هنگام چرخش زمین به دور خورشید توسط عمود بر مدار زمین جاروب شود، تعیین کنید.

۷۳- فرض کنید الکترون، اسپین نداشت و اصل طرد پائولی کماکان برقرار بود. در این صورت، کدامیک از گازهای بی‌اثر موجود در این دسته‌بندی باقی می‌ماندند؟

۷۴- نشان دهید اگر ۶۳ الکترون در اتم یوروپیوم بنابر دنباله‌ای "منطقی" از عددهای کوانتومی به لایه‌ها اختصاص داده شوند، این عنصر از لحاظ شیمیایی شبیه به سدیم است.

۷۵- با دانستن اینکه طول موج کمینهٔ پرتو x که از برخورد الکترونهای $۴۰/۰\,\mathrm{keV}$ با هدف حاصل می‌شود برابر با $۳۱/۱\,\mathrm{pm}$ است، ثابت پلانک h را تعیین کنید.

۷۶- نشان دهید $\hbar = ۱/۰۶ \times ۱۰^{-۳۴}\,\mathrm{J \cdot s} = ۶/۵۹ \times ۱۰^{-۱۶}\,\mathrm{eV \cdot s}$ است.

۷۷- معلوم شده است الکترونی در یک اتم چند الکترونی دارای عدد کوانتومی $\ell = ۳$ است. عددهای کوانتومی ممکن n، m_ℓ و m_s آن کدام‌اند؟

۴۱ رسانش الکتریسیته در جامدها



چرا نوازندگان گیتار راک تقویت کننده‌های لامپی را به تقویت کننده‌های ترانزیستوری ترجیح می‌دهند؟

فیزیک حالت جامد و الکترونیک حالت جامد به طور بنیادی زندگی نوین را متحول کرده‌اند. برای مثال، رایانه‌های اولیه به لامپهای خلاء حجیمی وابسته بودند و فضای اتاق بزرگی را اشغال می‌کردند. امروزه، رایانه‌های بسیار قویتر به ترانزیستورهای کوچکی در مدل‌های یکپارچه متکی‌اند و فضایی به کوچکی یک میز تاشو (یا حتی کوچکتر) را اشغال می‌کنند. ظاهراً، لامپهای خلأ ابزاری متعلق به گذشته‌اند؛ در واقع، آنها دیگر به عنوان یک مبحث اصلی به دانشجویان مهندسی برق آموخته نمی‌شوند. با این حال، بسیاری از نوازندگان گیتار بر استفاده از تقویت‌کننده‌هایی که از لامپهای خلأ استفاده می‌کنند اصرار دارند و از نوع ترانزیستوری آنها اجتناب می‌کنند.

پاسخ در همین فصل.

۴۱-۱ فیزیک چیست؟

در این فصل روی یک هدف فیزیک تمرکز می‌کنیم که در نیم قرن گذشته اهمیت بسیار زیادی یافته است. این هدف، پاسخگویی به این پرسش است: سازوکارهایی که با آنها یک ماده به طور الکتریکی رسانش می‌کند یا نمی‌کند، چیست؟ پاسخ به این پرسش، پیچیده و هنوز به خوبی درک نشده است؛ عمدتاً به این دلیل که آنها شامل کاربرد فیزیک کوانتومی — نه برای ذره‌ها و اتمهای منفرد آنگونه که در چند فصل گذشته دیده‌ایم، بلکه برای تعداد عظیمی از ذره‌ها و اتمهایی است که در کنار هم جمع شده‌اند و برهم‌کنش می‌کنند. به رغم این دشواری، مهندسان و دانشمندان گامهای بلندی در فیزیک کوانتومی علم مواد برداشته‌اند، که باعث شده است امروزه دارای رایانه‌ها، ماشینهای حساب، تلفنهای سلولی، و بسیاری از انواع دیگر وسایل الکترونیکی *حالت جامد* باشیم.

نقطهٔ شروع ما در این فصل، تمیز جامدهایی است که می‌توانند رسانش الکتریکی کنند از جامدهایی که در آنها این رسانش صورت نمی‌پذیرد.

۴۱-۲ ویژگیهای الکتریکی جامدها

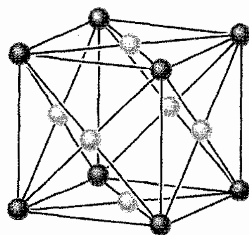
ما فقط **جامدهای بلورین** را بررسی خواهیم کرد- یعنی، جامدهایی که در آنها اتمها در یک ساختار سه بعدی تکرار شونده به نام **شبکه** مرتب شده‌اند. ما جامدهایی از قبیل چوب، پلاستیک، شیشه، و کائوچو را که اتمهای آنها در چنین نقشهای تکرار شونده‌ای مرتب نشده‌اند، در نظر نخواهیم گرفت. شکل ۴۱-۱، به ترتیب واحدهای تکرار شوندهٔ پایهٔ (**یاخته‌های یکهٔ**) مس، نمونه‌ای از یک فلز، و سیلیسیوم و الماس (کربن)، نمونه‌ای از یک نیمرسانا و عایق، را نشان می‌دهد.

جامدها را می‌توان از لحاظ الکتریکی بنا بر سه خاصیت بنیادین آنها دسته‌بندی کرد:

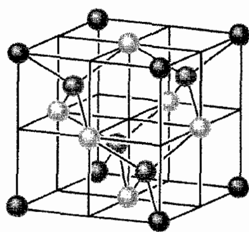
۱. **مقاومت ویژهٔ** ρ در دمای اتاق، با یکای SI اهم- متر $(\Omega.\text{m})$؛ مقاومت ویژه در بخش ۲۲-۴ تعریف شده است.

۲. **ضریب دمایی مقاومت ویژهٔ** α، که در معادلهٔ ۲۲-۱۷ به صورت $\alpha = (1/\rho)(d\rho/dT)$ تعریف شده است و دارای یکای SI وارون کلوین (K^{-1}) است. با اندازه‌گیری ρ در گستره‌ای از دماها، می‌توانیم α را برای هر جامدی محاسبه کنیم.

۳. **چگالی عددی حاملهای بار** n. این کمیت، یعنی تعداد حاملهای بار بر یکای حجم است که می‌توان آن را از اندازه‌گیریهای اثر *هال*، که در بخش ۲۲-۴ در مورد آن بحث شد، و سایر اندازه‌گیریها به دست آورد. این کمیت دارای یکای SI وارون متر مکعب (m^{-3}) است.



(الف)



(ب)

شکل ۴۱-۱ (الف) یاختهٔ یکهٔ مس، یک مکعب است. در آن یک اتم مس (تیره‌تر) در هر گوشهٔ مکعب و یک اتم مس (روشنتر) در مرکز هر وجه مکعب قرار دارد. این آرایش، **مکعبی مرکز رخ‌پُر** نامیده می‌شود. (ب) یاختهٔ یکه چه برای اتمهای سیلیسیوم و چه اتمهای کربن در الماس نیز مکعب است؛ اتمها در آرایشی که *شبکهٔ الماس* خوانده می‌شود، مرتب شده‌اند. در آن یک اتم (تیره‌تر) در هر گوشهٔ مکعب و یک اتم (روشنتر) در مرکز هر وجه مکعب قرار دارد؛ افزون بر این، چهار اتم (با رنگی بین تیره و روشن) در درون مکعب قرار دارند. هر اتم توسط یک پیوند کووالانسی دوالکترونی با چهار نزدیکترین همسایهٔ خود پیوند دارد (فقط چهار اتم درون مکعب، هر چهار همسایهٔ نزدیک را نشان می‌دهد).

از اندازه‌گیریهای فقط مقاومت ویژه در دمای اتاق، درمی‌یابیم موادی- به نام **عایق**- وجود دارند که برای همهٔ مقاصد عملی به هیچ وجه رسانای الکتریسیته نیستند. اینها موادی با مقاومت ویژهٔ بسیار زیاد هستند. الماس، یک نمونهٔ برجسته از چنین موادی، دارای مقاومت ویژه‌ای است که با عامل بسیار بزرگی در حدود 10^{24} بار از مقاومت ویژهٔ مس بزرگتر است.

بنابراین، با استفاده از مقدارهای ρ ، α و n می‌توانیم اغلب غیرعایقها را، دست کم در دماهای پایین، به دو دسته تقسیم کنیم: **فلزها** و **نیمرساناها**.

مقاومت ویژهٔ ρ نیمرساناها به طور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر از مقاومت ویژهٔ فلزهاست. ضریب دمایی مقاومت ویژهٔ α نیمرساناها هم بزرگ و هم منفی است. یعنی، در حالی‌که مقاومت ویژهٔ فلزها با دما *افزایش می‌یابد*، مقاومت ویژهٔ نیمرساناها با دما *کاهش می‌یابد*. چگالی عددی حاملهای بار n نیمرساناها به طور قابل ملاحظه‌ای کوچکتر از فلزهاست. جدول ۴۱-۱ مقدار این کمیتها را برای مس، نمونه‌ای از یک فلز، و سیلیسیوم، نمونه‌ای از یک نیمرسانا، نشان می‌دهد.

اکنون با در دست داشتن مقدارهای ρ ، α و n ، مبنایی تجربی برای تصحیح پرسش اصلی خود دربارهٔ رسانش الکتریکی در جامدها در اختیار داریم: چه *ویژگیهایی الماس را عایق، مس را فلز، و سیلیسیوم را نیمرسانا می‌سازد؟* دوباره، این فیزیک کوانتومی است که پاسخ این پرسش را به دست می‌دهد.

جدول ۴۱-۱

برخی از خاصیت‌های دو نوع ماده*

خاصیت	یکا	ماده: مس	ماده: سیلیسیوم
نوع رسانا		فلز	نیمرسانا
مقاومت ویژهٔ ρ	$\Omega.m$	2×10^{-8}	3×10^{3}
ضریب دمایی مقاومت α	K^{-1}	$+4\times10^{-3}$	-70×10^{-3}
چگالی عددی حاملهای بار n	m^{-3}	9×10^{28}	1×10^{16}

* همهٔ مقدارها برای دمای اتاق هستند.

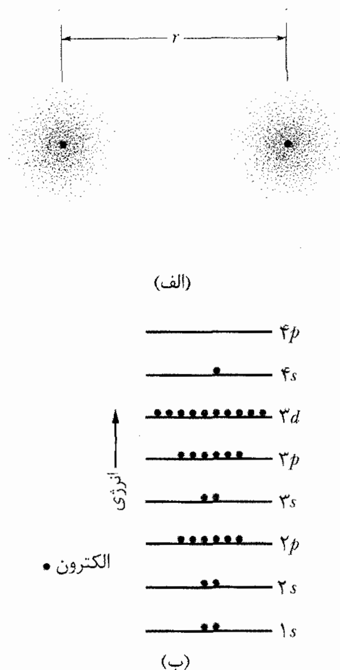
۴۱-۳ ترازهای انرژی در جامد بلورین

فاصلهٔ بین اتمهای مجاور مس در مس جامد $260\,pm$ است. شکل ۴۱-۲ الف، دو اتم مس منزوی را نشان می‌دهد که به فاصلهٔ r که بسیار بزرگتر از آن است، قرار گرفته‌اند. همانطور که شکل ۴۱-۲ ب نشان می‌دهد، ۲۹ الکترون هر یک از این اتمهای خنثی در آرایشی از زیر لایه‌های گسسته به صورت زیر روی هم قرار دارند:

$$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^1$$

در اینجا از نمادگذاری مختصرنویسی بخش ۴۰-۹ برای مشخص کردن زیرلایه‌ها استفاده کرده‌ایم. مثلاً، به یاد آورید که زیرلایه‌ای با عدد کوانتومی اصلی $n=3$ و عدد کوانتومی مداری $l=1$ ، زیرلایهٔ $3p$ نامیده می‌شود؛ این زیرلایه می‌تواند تا $2(2l+1)=6$ الکترون را در خود جای دهد؛ تعداد الکترونهایی که در واقع در زیرلایه وجود دارند با شاخص بالا مشخص شده‌اند. از بالا درمی‌یابیم که شش زیر لایهٔ نخستین مس پر شده‌اند، ولی زیرلایهٔ $4s$ (خارجی‌ترین) که می‌تواند دو الکترون را در خود جای دهد، فقط یک الکترون دارد.

اگر اتمهای شکل ۴۱-۲ الف را به یکدیگر نزدیکتر کنیم، آنها، با مسامحه، شروع به درک حضور یکدیگر خواهند کرد. به بیان فیزیک کوانتومی، تابعهای موج آنها با شروع از بیرونی‌ترین الکترونها، آغاز به همپوشانی می‌کنند. وقتی تابعهای موج دو اتم همپوشانی کنند، نه از دو اتم مستقل بلکه از یک سامانهٔ دواتمی منفرد صحبت می‌کنیم؛ در اینجا، سامانهٔ شامل $2\times29=58$ الکترون است. اصل طرد پاؤلی برای این سامانهٔ بزرگتر نیز برقرار است و لازم می‌دارد که هر یک از این ۵۸ الکترون، حالت کوانتومی متفاوتی را اشغال کنند. در واقع ۵۸ حالت کوانتومی وجود دارند، زیرا برای سامانهٔ دواتمی، هر تراز انرژی اتم منزوی به *دو* تراز شکافته می‌شود.

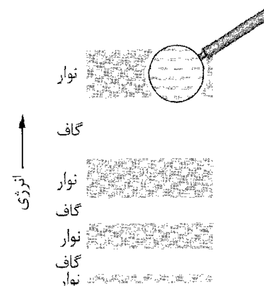


شکل ۴۱-۲ (الف) دو اتم مس که به فاصلهٔ زیادی از هم قرار گرفته‌اند؛ توزیع الکترونی آنها با نقطه نشان داده شده است. (ب) هر اتم مس دارای ۲۹ الکترون است که در زیرلایه‌ها توزیع شده‌اند. در اتم خنثی در حالت پایه همهٔ زیرلایه‌ها تا تراز $3d$ پر هستند، زیرلایهٔ $4s$ یک الکترون دارد (می‌تواند دو الکترون را در خود جای دهد)، و زیرلایه‌های بالاتر خالی‌اند. برای سادگی، زیرلایه‌ها از لحاظ انرژی در فاصله‌های مساوی نشان داده شده‌اند.

اگر اتمهای بیشتری وجود داشته باشند، بتدریج شبکه‌ای از مس جامد حاصل می‌شود. مثلاً اگر شبکه N اتم داشته باشد، آنگاه هر تراز یک اتم مس منزوی باید در جامد به N تراز شکافته شود. بنابراین، ترازهای انرژی مجزای جامد تشکیل **نوارهای** انرژی را می‌دهند که نوارهای مجاور با یک **گاف** انرژی که نشان دهندهٔ گستره‌ای از انرژیهاست که هیچ الکترونی نمی‌تواند آن را داشته باشد، از هم جدا شده‌اند. گسترهٔ یک نوار نوعی فقط چند الکترون- ولت است. چون N ممکن است از مرتبهٔ 10^{24} باشد، از اینجا درمی‌یابیم که ترازهای مجزا در داخل یک نوار واقعاً بسیار نزدیک به یکدیگرند، و تعداد فوق العاده زیادی از این ترازها وجود دارد.

شکل ۴۱-۳، ساختار نوار- گاف ترازهای انرژی را در یک جامد بلورین نوعی نشان می‌دهد. توجه کنید که نوارهای انرژی پایینتر نسبت به نوارهای انرژی بالاتر، باریکترند. این بدین دلیل رخ می‌دهد که الکترونهایی که نوارهای انرژی پایینتر را اشغال می‌کنند، بیشترین زمان خود را در عمق ابر الکترونی اتم می‌گذرانند. تابعهای موج این الکترونهای مغزی به اندازهٔ

تابعهای موج الکترونهای خارجی، همپوشانی نمی‌کنند. در نتیجه، شکافتگی ترازهای انرژی پایینتر (الکترونهای مغزی) کمتر از شکافتگی ترازهای انرژی بالاتر (الکترونهای خارجی) است.



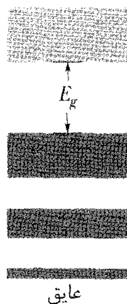
شکل ۴۱-۳ نقش نوار- گافِ ترازهای انرژی برای یک جامد بلورین نوعی. همانطور که قسمت بزرگ شده نشان می‌دهد، هر نوار شامل تعداد بسیار زیادی از ترازهای انرژی است که بسیار نزدیک به هم‌اند. (در بسیاری از جامدها، نوارهای مجاور ممکن است همپوشانی کنند؛ برای روشنی شکل، این وضعیت را نشان نداده‌ایم.)

۴۱-۴ عایقها

به یک جامد در صورتی عایق الکتریکی گفته می‌شود که وقتی اختلاف پتانسیلی به دو سر آن اعمال کنیم، هیچ جریانی در داخل آن ایجاد نشود. برای آنکه جریان ایجاد شود، انرژی جنبشی میانگین الکترون باید افزایش یابد. به عبارت دیگر، برخی از الکترونهای جامد باید به تراز انرژی بالاتر حرکت کنند. ولی، به طوری که که شکل ۴۱-۴ نشان می‌دهد، در یک عایق بالاترین نوار، شامل هر تعداد الکترون، به طور کامل پر شده است. چون اصل طرد پاؤلی الکترونها را از حرکت به ترازهای اشغال شده باز می‌دارد، هیچ الکترونی در جامد مجاز به حرکت نیست.

بنابراین، الکترونها در نوار پرشدهٔ یک عایق جایی برای رفتن ندارند؛ آنها در بند شده‌اند. این مثل بچه‌ای است که می‌خواهد از نردبانی بالا رود ولی پیشتر بر هر پله‌اش بچه‌ای دیگر ایستاده است؛ چون هیچ پلهٔ اشغال نشده‌ای وجود ندارد، هیچ حرکتی امکان‌پذیر نیست.

ترازهای اشغال نشدهٔ (*یا ترازهای تهی*) فراوانی در نوار بالای تراز پر شده در شکل ۴۱-۴ وجود دارد. ولی، اگر الکترونی بخواهد یکی از این ترازها را اشغال کند، باید انرژی کافی به دست آورد تا بتواند از گاف انرژی قابل ملاحظهٔ E_g که دو نوار را از هم جدا می‌کند، بگذرد. در الماس، این گاف به‌قدری پهن است (انرژی مورد نیاز برای عبور از آن ۵/۵ eV است که حدود ۱۴۰ برابر انرژی گرمایی میانگین یک ذرهٔ آزاد در دمای اتاق است) که اساساً هیچ الکترونی نمی‌تواند از آن بگذرد. بنابراین، الماس یک عایق الکتریکی، و البته از نوع خوب آن است.



شکل ۴۱-۴ نقش نوار- گاف برای یک عایق؛ ترازهای پر شده به رنگ تیره‌تر، و ترازهای خالی به رنگ روشنتر نشان داده شده‌اند.

مسئلهٔ نمونه ۴۱-۶

به طور تقریبی، احتمال آنکه در دمای اتاق (۳۰۰K)، الکترونی که در بالای بالاترین نوار پر شده در الماس (یک عایق) قرار دارد از گاف انرژی E_g در شکل ۴۱-۴ بگذرد، چقدر است؟ E_g برای الماس برابر با ۵/۵ eV است.

نکتهٔ کلیدی در فصل ۴۰ برای ربط دادن جمعیت N_x اتمها در تراز انرژی E_x به جمعیت N_0 در تراز انرژی E_0 از معادلهٔ ۴۰-۲۹ استفاده کردیم

$$\frac{N_x}{N_0} = e^{-(E_x - E_0)/kT} \qquad (۴۱\text{-}۱)$$

که در آن اتمها بخشی از دستگاهی در دمای T هستند (اندازه‌گیری شده بر حسب کلوین)، و k ثابت بولتزمن ($۸/۶۲\times۱۰^{-۵}$eV/K) است. در این فصل می‌توانیم از معادلهٔ ۴۱-۱ برای محاسبهٔ *تقریبی* احتمال P که الکترونی در عایق بتواند از گاف انرژی شکل ۴۱-۴ بگذرد، استفاده کنیم.

محاسبه‌ها: نخست اختلاف انرژی $E_x - E_0$ را برابر با E_g قرار می‌دهیم. آنگاه احتمال P گذشتن تقریباً برابر با نسبت N_x/N_0 تعداد الکترونهای درست بالای گاف انرژی به تعداد الکترونهای درست پایین این گاف است.

برای الماس، توان بخش نمایی در معادلهٔ ۴۱-۱ برابر است با

$$-\frac{E_g}{kT} = -\frac{۵/۵\,\text{eV}}{(۸/۶۲\times۱۰^{-۵}\ \text{eV/K})(۳۰۰\text{K})} = -۲۱۳$$

بنابراین، احتمال موردنظر چنین می‌شود

$$P = \frac{N_x}{N_0} = e^{-(E_g/kT)} = e^{-۲۱۳} \approx ۳\times۱۰^{-۹۳} \qquad (\text{پاسخ})$$

این نتیجه مبین آن است که تقریباً ۳ الکترون از $۱۰^{۹۳}$ الکترون می‌تواند از گاف انرژی بگذرد. چون هر سنگ الماس اندکی کمتر از $۱۰^{۲۳}$ الکترون دارد، درمی‌یابیم که احتمال گذشتن از گاف فوق العاده ناچیز است. بنابراین، جای تعجب نیست که الماس چنین عایق خوبی است.

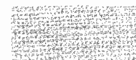
۴۱-۵ فلزها

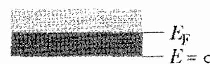
همانطور که شکل ۴۱-۵ نشان می‌دهد، ویژگی مشخصهٔ فلز این است که بالاترین تراز انرژی اشغال شده در جایی نزدیک به میانهٔ یک نوار انرژی قرار دارد. اگر اختلاف پتانسیلی به دو سر یک فلز اعمال کنیم، به دلیل آنکه ترازهای تهی فراوانی در نزدیکی انرژیهای بالاتر وجود دارند که الکترونها (حاملهای بار در فلزها) می‌توانند به آنها پرش کنند، جریانی به وجود می‌آید. بنابراین، فلز به این دلیل رسانای الکتریسیته است که الکترونها در بالاترین نوار اشغال شدهٔ آن می‌توانند به‌آسانی به ترازهای انرژی بالاتر بروند.

در بخش ۲۶-۶، **مدل الکترون آزاد** یک فلز را مطرح کردیم، که در آن **الکترونهای رسانش** آزادند تا در سرتاسر حجم نمونه، مثل مولکولهای گاز در یک ظرف بسته، حرکت کنند. از این مدل، با فرض آنکه الکترونها از قانونهای مکانیک نیوتونی پیروی می‌کنند، برای به دست آوردن عبارتی برای مقاومت ویژهٔ فلز استفاده کردیم. در اینجا از همان مدل برای توضیح رفتار الکترونهای رسانش در نوار پرشدهٔ جزئی شکل ۴۱-۴ ب استفاده می‌کنیم. ولی، با فرض اینکه انرژی این الکترونها کوانتیده‌اند و اصل طرد پاؤلی برقرار است، قانونهای فیزیک کوانتومی را پی می‌گیریم.

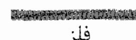
همچنین فرض می‌کنیم انرژی پتانسیل الکتریکی یک الکترون رسانش در تمام نقطه‌های داخل شبکه دارای مقدار ثابت یکسانی است. اگر این مقدار انرژی پتانسیل را برابر صفر اختیار کنیم، که مجاز به انجام این کار هستیم، آنگاه انرژی مکانیکی E الکترونهای رسانش کاملاً جنبشی خواهد بود.

تراز در پایین نوار پر شدهٔ جزئی شکل ۴۱-۵ مربوط به $E = 0$ است. بالاترین تراز اشغال شده در این نوار در صفر مطلق ($T = 0\,\mathrm{K}$)، **تراز فرمی** نامیده می‌شود و انرژی وابسته به این تراز را **انرژی فرمی** E_F می‌نامند؛ برای مس، $E_F = 7/0\,\mathrm{eV}$ است.









شکل ۴۱-۵ نقش نوار-گاف برای یک فلز. بالاترین تراز پر شده، به نام تراز فرمی، در نزدیکی میانهٔ یک نوار قرار دارد. چون در داخل این نوار، ترازهای تهی وجود دارند، الکترونهای این نوار می‌توانند به آسانی ترازها را تغییر دهند، و بدین ترتیب رسانش می‌تواند رخ دهد.

تندی الکترون وابسته به انرژی فرمی، **تندی فرمی** v_F نامیده می‌شود. برای مس، تندی فرمی برابر با $1/6 \times 10^{6}\,\mathrm{m/s}$ است. این واقعیت باید برای از بین بردن این تصور نادرست عمومی که تمام حرکت در صفر مطلق متوقف می‌شود، کفایت کند؛ در آن دما- و صرفاً به خاطر اصل طرد پاؤلی- الکترونهای رسانش در نوار پرشدهٔ جزئی شکل ۴۱-۵ با انرژیهایی در گسترهٔ از صفر تا انرژی فرمی، انباشته می‌شوند.

چند الکترون رسانش وجود دارد؟

اگر می‌توانستیم اتمهای منفرد را برای ایجاد یک نمونهٔ فلزی کنار یکدیگر بیاوریم، آنگاه درمی‌یافتیم که الکترونهای رسانش در فلز، *الکترونهای ظرفیت* اتمها (الکترونهایی در خارجی‌ترین لایه‌های اشغال شدهٔ اتمها) هستند. یک اتم *تک ظرفیتی* دارای یکی از چنین الکترونهایی است که در رسانش الکترونها در فلز سهم دارد؛ اتم *دوظرفیتی*، دو تا از چنین الکترونهایی دارد. بنابراین، تعداد کل الکترونهای رسانش برابر است با

$$\begin{pmatrix}\text{تعداد الکترونهای}\\ \text{رسانش در نمونه}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{تعداد اتمهای}\\ \text{نمونه}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{تعداد الکترونهای}\\ \text{ظرفیت در هر اتم}\end{pmatrix} \qquad (۴۱-۲)$$

(در این فصل، چندین معادله را عمدتاً به صورت کلمات به کار می‌بریم، زیرا نمادهایی را که پیشتر برای کمیتهای آنها به کار برده‌ایم، اینک نشان دهندهٔ کمیتهای دیگری هستند.) *چگالی عددی* n الکترونهای رسانش در یک نمونه برابر با تعداد الکترونهای رسانش در یکای حجم است:

$$n = \frac{\text{تعداد الکترونهای رسانش در نمونه}}{\text{حجم } V \text{ نمونه}} \qquad (۴۱-۳)$$

تعداد اتمها در نمونه را می‌توانیم به چندین ویژگی دیگر نمونه و به مادهٔ تشکیل دهندهٔ نمونه چنین مربوط کنیم

$$\begin{pmatrix}\text{تعداد اتمها}\\ \text{در نمونه}\end{pmatrix} = \frac{M_{\mathrm{sam}}\ \text{جرم نمونه}}{\text{جرم اتمی}} = \frac{M_{\mathrm{sam}}\ \text{جرم نمونه}}{(M\ \text{جرم مولی})/N_A}$$

$$= \frac{(\text{چگالی ماده})(V\ \text{حجم نمونه})}{(M\ \text{جرم مولی})/N_A} \qquad (۴۱-۴)$$

که در آن جرم اتمی M، جرم یک مول از ماده در نمونه و N_A عدد آووگادرو ($6/02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$) است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۱-۲

چند الکترون رسانش در مکعبی از منیزیم به حجم $2/00 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^3}$ وجود دارد؟ اتمهای منیزیم، دوظرفیتی‌اند.

نکته‌های کلیدی

۱. چون اتمهای منیزیم دوظرفیتی‌اند، در هر اتم منیزیم دو الکترون رسانش وجود دارد.

۲. تعداد الکترونهای رسانش مکعب با معادلهٔ ۴۱-۲ به تعداد اتمهای منیزیم مربوطاند.

۳. تعداد اتمها را می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ ۴۱-۴ و داده‌های معلوم دربارهٔ حجم مکعب و خاصیتهای منیزیم به دست آوریم.

محاسبه‌ها: معادلهٔ ۴۱-۴ را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$\left(\begin{array}{c}\text{تعداد اتمها}\\ \text{در نمونه}\end{array}\right)=\frac{(\text{چگالی ماده})(\text{حجم نمونهٔ }V)N_A}{\text{جرم مولی }M}$$

منیزیم دارای چگالی $۱/۷۳۸\,\mathrm{g/cm^۳}(=۱/۷۳۸\times۱۰^{۳}\ \mathrm{kg/m^۳})$ و جرم مولی $۲۴/۳۱۲\,\mathrm{g/mol}(=۲۴/۳۱۲\times۱۰^{-۳}\mathrm{kg/mol})$ است (پیوست ج را ببینید). صورت کسر چنین به دست می‌دهد

$$(۱/۷۳۸\times۱۰^{۳}\ \mathrm{kg/m^۳})(۲/۰۰\times۱۰^{-۶}\ \mathrm{m^۳})(۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\mathrm{atoms/mol})$$
$$=۲/۰۹۲۶\times۱۰^{۲۱}\mathrm{kg/mol}$$

بنابراین، داریم

$$\left(\begin{array}{c}\text{تعداد اتمها}\\ \text{در نمونه}\end{array}\right)=\frac{۲/۰۹۲۶\times۱۰^{۲۱}\ \mathrm{kg/mol}}{۲۴/۳۱۲\times۱۰^{-۳}\ \mathrm{kg/mol}}$$
$$=۸/۶۱\times۱۰^{۲۲}$$

با استفاده از این نتیجه و این واقعیت که اتمهای منیزیم دو ظرفیتی‌اند، معادلهٔ ۴۱-۲ چنین به دست می‌دهد

$$\left(\begin{array}{c}\text{تعداد الکترونهای}\\ \text{رسانش در نمونه}\end{array}\right)=(۸/۶۱\times۱۰^{۲۲}\ \mathrm{atoms})\left(۲\frac{\mathrm{electrons}}{\mathrm{atom}}\right)$$

$$=۱/۷۲\times۱۰^{۲۳}\ \mathrm{electrons}\qquad\text{(پاسخ)}$$

رسانایی در بالای صفر مطلق

آنچه بیشتر در عمل مورد توجه است رسانش الکتریسیته در فلزها، در دمای بالای صفر مطلق است. توزیع الکترونی شکل ۴۱-۵ در چنین دماهای بالاتری چگونه است؟ همانطور که خواهیم دید تغییرات به طرز غافلگیرکننده‌ای ناچیز است.

از الکترونهای واقع در نوار پرشدهٔ جزئی شکل ۴۱-۵، فقط آنهایی که انرژی آنها نزدیک به انرژی فرمی‌اند ترازهای اشغال نشدهٔ بالای آنها را می‌یابند، و فقط این الکترونها مجازند تا توسط اغتشاش گرمایی به این ترازهای بالاتر بروند. حتی در $T=۱۰۰۰\,\mathrm{K}$، دمایی که در آن مس در یک اتاق تاریک به طور تابناکی می‌درخشد، توزیع الکترونها در ترازهای موجود تفاوت چندانی با توزیع الکترونها در دمای $T=۰\mathrm{K}$ ندارد.

حال ببینیم چرا این‌گونه است. کمیت kT، که در آن k ثابت بولتزمن است، معیاری مناسب برای انرژیی است که می‌تواند توسط حرکتهای گرمایی کاتوره‌ای شبکه به الکترون رسانش داده شود. در $T=۱۰۰۰\mathrm{K}$ داریم $kT=۰/۰۸۶\mathrm{eV}$. هیچ الکترونی نمی‌تواند فقط با اغتشاش گرمایی چند برابر این مقدار نسبتاً کوچک، تغییر انرژی پیدا کند؛ بنابراین، در بهترین حالت، فقط آن چند الکترون رسانش محدودی که انرژی آنها به انرژی فرمی نزدیک است احتمال دارد بر اثر اغتشاش گرمایی به ترازهای انرژی بالاتر بروند. به بیانی شاعرانه، اغتشاش گرمایی به طور معمول فقط موجب مواج شدن سطح دریای فرمی الکترونها می‌شود ولی اعماق گستردهٔ این دریا دستخوش هیچ تلاطمی نمی‌شود.

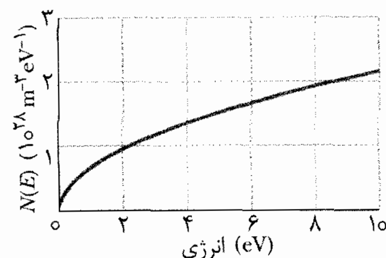
چند حالت کوانتومی وجود دارد؟

توانایی یک فلز برای رسانش الکتریسیته به تعداد حالتهای کوانتومی موجود برای الکترونهای آن و اینکه آن حالتها چه انرژیهایی دارند، بستگی دارد. بنابراین، پرسشی پیش می‌آید: انرژی حالتهای مجزا در نوار پرشدهٔ جزئی شکل ۴۱-۵ چقدر است؟ پاسخ به این پرسش بسیار دشوار است، زیرا نمی‌توانیم انرژی این تعداد زیاد حالتهای مجزا را برشماریم. به جای آن می‌توانیم بپرسیم: چند حالت در یکای حجم یک نمونه دارای انرژیهایی در گسترهٔ انرژی E تا $E+dE$ هستند؟ این تعداد را به صورت $N(E)dE$ می‌نویسیم، که در آن $N(E)$ **چگالی حالتها** در انرژی E نامیده می‌شود. یکای قراردادی برای $N(E)dE$، عبارت است از حالتها بر متر مکعب (حالتها/$\mathrm{m^۳}$، یا به سادگی $\mathrm{m^{-۳}}$) و یکای قراردادی برای $N(E)$، عبارت است از حالتها بر متر مکعب بر الکترون- ولت ($\mathrm{m^{-۳}eV^{-۱}}$).

با شمارش تعداد موجهای ایستادهٔ مادی الکترون که می‌توانند در جعبه‌ای به اندازهٔ نمونهٔ فلزی مورد بررسی ما وجود داشته باشند، می‌توانیم عبارتی برای چگالی حالتها بیابیم. این مشابه شمارش تعداد موجهای صوتی ایستاده است که می‌توانند در یک لولهٔ صوتی بسته وجود داشته باشند. تفاوت در این است که مسئلهٔ ما سه بعدی (مسئلهٔ لولهٔ صوتی، یک بعدی است) و موجها، موجهای ماده‌اند (موجهای لولهٔ صوتی، موجهای صوتی هستند). نتیجه چنین شمارشی را می‌توان چنین نشان داد

$$N(E)=\frac{۸\sqrt{۲}\pi m^{۳/۲}}{h^{۳}}E^{۱/۲}\quad(\mathrm{m^{-۳}J^{-۱}}\ \text{چگالی حالتها،})\qquad(۴۱\text{-}۵)$$

که در آن $m(=۹/۱۰۹\times۱۰^{-۳۱}\,\mathrm{kg})$ جرم الکترون، $h(=۶/۶۲۶\times۱۰^{-۳۴}\,\mathrm{J.s})$ ثابت پلانک، E انرژی برحسب ژول که در آن $N(E)$ قرار است محاسبه شود، و $N(E)$ بر حسب حالتها بر متر مکعب بر ژول ($\mathrm{m^{-۳}J^{-۱}}$) است. برای اصلاح این معادله به گونه‌ای که مقدار E بر حسب الکترون- ولت و مقدار $N(E)$ بر حسب حالتها بر متر مکعب بر الکترون- ولت ($\mathrm{m^{-۳}eV^{-۱}}$) باشد، طرف راست این معادله را در $e^{۳/۲}$، که e بار بنیادی برابر با $۱/۶۰۲\times۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{C}$ است، ضرب می‌کنیم. شکل ۴۱-۶، نموداری از چنین نوع اصلاح شده‌ای از معادلهٔ ۴۱-۵ است. توجه کنید که در شکل ۴۱-۶ یا معادلهٔ ۴۱-۵، **شکل، دما، یا جنس ماده هیچ دخالتی ندارند.**



شکل ۴۱-۶ چگالی حالتها $N(E)$ – یعنی، تعداد ترازهای انرژی الکترون بر یکای بازهٔ انرژی بر یکای حجم که بر حسب تابعی از انرژی الکترون رسم شده است. چگالی تابع حالتها، به سادگی تعداد حالتهای موجود است؛ ولی دربارهٔ اینکه آیا این حالتها با الکترونها اشغال شده‌اند یا نه چیزی نمی‌گوید.

✔ ***نکتهٔ وارسی ۱*** (الف) آیا فاصلهٔ بین ترازهای انرژی مجاور مس در $E=۴eV$، از فاصلهٔ آنها در $E=۶eV$، بزرگتر است یا کوچکتر، یا برابر آن است؟ (ب) آیا فاصلهٔ بین ترازهای انرژی مس در $E=۴eV$ از فاصلهٔ یک حجم یکسان آلومینیومی در همان انرژی، بزرگتر است یا کوچکتر، یا برابر آن است؟

مسئلهٔ نمونه ۴۱-۳

(الف) با استفاده از داده‌های شکل ۴۱-۶، تعداد حالتها بر الکترون- ولت در انرژی ۷ eV را در نمونه‌ای از فلز به حجم $V = ۲\times۱۰^{-۹}\ m^۳$ تعیین کنید.

نکتهٔ کلیدی می‌توانیم تعداد حالتها بر الکترون- ولت را در یک انرژی معین با استفاده از چگالی حالتهای $N(E)$ در آن انرژی و حجم V نمونه، به دست آوریم.

محاسبه‌ها: در انرژی ۷eV، می‌نویسیم

حل: نکتهٔ کلیدی این است که

$$\begin{pmatrix}\text{تعداد حالتها}\\ \text{بر eV در ۷eV}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{چگالی حالتهای}\\ N(E)\ \text{در ۷eV}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{حجم } V\\ \text{نمونه}\end{pmatrix}$$

از شکل ۴۱-۶ درمی‌یابیم که در انرژی $E = ۷eV$، چگالی حالتها تقریباً برابر با $۱/۸\times۱۰^{۲۸}m^{-۳}eV^{-۱}$ است. بنابراین، داریم

$$\begin{pmatrix}\text{تعداد حالتها}\\ \text{بر eV در ۷eV}\end{pmatrix} = (۱/۸\times۱۰^{۲۸}\ m^{-۳}eV^{-۱})(۲\times۱۰^{-۹}\ m^۳) = ۳/۶\times۱۰^{۱۹}\ eV^{-۱} \approx ۴\times۱۰^{۱۹}\ eV^{-۱}$$ (پاسخ)

(ب) سپس، تعداد حالتهای N نمونه داخل گسترهٔ کوچک انرژی $\Delta E = ۰/۰۰۳eV$ به مرکز ۷ eV را تعیین کنید.

محاسبه‌ها: از معادلهٔ ۴۱-۵ و شکل ۴۱-۶ می‌دانیم که چگالی حالتها تابعی از انرژی E است. ولی، برای گسترهٔ انرژی ΔE که نسبت به E کوچک است، چگالی حالتها (و بنابراین، تعداد حالتها بر الکترون- ولت) را می‌توانیم تقریباً ثابت اختیار کنیم. از این‌رو، در انرژی ۷ eV، تعداد حالتهای N در گسترهٔ انرژی $\Delta E = ۰/۰۰۳eV$ را چنین به دست می‌آوریم

$$\begin{pmatrix}\text{گسترهٔ}\\ \text{انرژی } \Delta E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{تعداد حالتها}\\ \text{بر eV در ۷eV}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{تعداد حالتهای } N \text{ در}\\ \text{گسترهٔ } \Delta E\text{، در ۷eV}\end{pmatrix}$$

یا

$$N = (۳/۶\times۱۰^{۱۹}eV^{-۱})(۰/۰۰۳eV) = ۱/۱\times۱۰^{۱۷} \approx ۱\times۱۰^{۱۷}$$ (پاسخ)

(وقتی تعداد حالتها در محدودهٔ معینی از انرژی را بخواهیم ابتدا باید بررسی کنیم که آیا محدوده به قدر کافی کوچک است که بتوان این نوع تقریب را به کار برد.)

احتمال اشغال شدن $P(E)$

توانایی یک فلز برای رسانش الکتریسیته به احتمال آنکه ترازهای تهی موجود واقعاً اشغال شوند، بستگی دارد. بنابراین، پرسش دیگری پیش می‌آید: اگر یک تراز انرژی در انرژی E موجود باشد، احتمال $P(E)$ که آن تراز واقعاً توسط یک الکترون اشغال شود، چقدر است؟ در $T = ۰K$، می‌دانیم برای همهٔ ترازهایی که انرژی آنها زیر انرژی فرمی است، $P(E) = ۱$ است که این مربوط به قطعیتی است که تراز، اشغال شده باشد. همچنین می‌دانیم، در $T = ۰K$، برای همهٔ ترازهایی که انرژی آنها بالای انرژی فرمی است، $P(E) = ۰$ است که این مربوط به قطعیتی است که تراز، اشغال *نشده* باشد. شکل ۴۱-۷ الف، این وضعیت را نشان می‌دهد.

برای یافتن $P(E)$ در دماهای بالاتر از صفر مطلق، باید از مجموعه‌ای قاعده‌های شمارش کوانتومی موسوم به *آمار فرمی- دیراک* استفاده کنیم، که این نامگذاری به دو فیزیکدانی برمی‌گردد که آن را معرفی کردند. با استفاده از این قاعده‌ها، می‌توان نشان داد که **احتمال اشغال شدن** $P(E)$ برابر است با

$$P(E) = \frac{۱}{e^{(E-E_F)/kT}+۱} \qquad \text{(احتمال اشغال شدن)} \qquad (۴۱-۶)$$

که در آن E_F، انرژی فرمی است. توجه کنید $P(E)$ نه به انرژی E تراز، بلکه فقط به اختلاف انرژی $E - E_F$، که می‌تواند مثبت یا منفی باشد، بستگی دارد.

برای اینکه دریابیم آیا معادلهٔ ۴۱-۶، شکل ۴۱-۷ الف را توصیف می‌کند، $T = ۰K$ را در آن قرار می‌دهیم. از آنجا خواهیم داشت

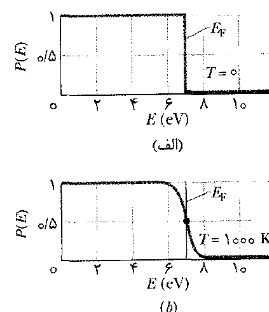
برای $E < E_F$، جملهٔ نمایی در معادلهٔ ۴۱-۶ برابر $e^{-\infty}$، یا صفر است؛ بنابراین، $P(E) = ۱$، که این با شکل ۴۱-۷ الف سازگار است.

برای $E > E_F$، جملهٔ نمایی برابر $e^{+\infty}$ است؛ بنابراین، $P(E) = ۰$ است که این دوباره با شکل ۴۱-۷ الف سازگار است.

شکل ۴۱-۷ ب نمودار $P(E)$ به ازای $T = 1000\ K$ است. این نمودار، همانطور که در بالا بیان شد، نشان می‌دهد که تغییرات در توزیع الکترونها میان حالتهای موجود فقط شامل حالتهایی می‌شود که انرژیهای آنها نزدیک به انرژی فرمی E_F است. توجه کنید که اگر $E = E_F$ باشد (دمای T هر چه باشد)، جملهٔ نمایی در معادلهٔ ۴۱-۶ برابر $e^0 = 1$ و $P(E) = 0/5$ می‌شود. این نتیجه به تعریف سودمندتری از انرژی فرمی می‌انجامد:

> انرژی فرمی یک مادهٔ معین، انرژی یک حالت کوانتومی است که احتمال اشغال آن توسط الکترون ۰/۵ است.

شکلهای ۴۱-۷ الف و ب برای مس، که دارای انرژی فرمی ۷/۰eV است، رسم شده‌اند. بنابراین، برای مس هم در $T = 0\ K$ و هم در $T = 1000\ K$، حالت انرژی $E = 7/0\ eV$ با احتمال ۰/۵ اشغال شده است.



شکل ۴۱-۷ احتمال اشغال شدن $P(E)$ احتمالی است که یک تراز انرژی توسط یک الکترون اشغال بشود. (الف) در $T = 0\ K$، $P(E)$ برای ترازهایی با انرژیهای E تا E_F برابر با یک، و برای ترازهایی با انرژیهای بالاتر، برابر با صفر است. (ب) در $T = 1000\ K$، چند الکترون محدود که انرژیهای آنها قدری کمتر از انرژی فرمی در $T = 0\ K$ است، به حالتهایی که انرژیهای آنها قدری بزرگتر از انرژی فرمی هستند بالا برده می‌شوند. نقطهٔ روی منحنی نشان می‌دهد که به ازای $E = E_F$، $P(E) = 0/5$ است.

مسئلهٔ نمونه ۴۱-۴

(الف) احتمال آنکه یک حالت کوانتومی که انرژی آن ۰/۱۰ eV بالای انرژی فرمی است، اشغال شود چقدر است؟ فرض کنید دمای نمونه ۸۰۰K است.

نکتهٔ کلیدی احتمال اشغال شدن هر حالت در فلز را می‌توان بنابر معادلهٔ ۴۱-۶ از آمار فرمی- دیراک به دست آورد.

محاسبه‌ها: برای به کار بردن معادلهٔ ۴۱-۶، نخست نمای بدون بعد بخش نمایی را محاسبه می‌کنیم

$$\frac{E - E_F}{kT} = \frac{0/10\ eV}{(8/62 \times 10^{-5}\ eV/K)(800\ K)} = 1/45$$

با قراردادن این نما در معادلهٔ ۴۱-۶، خواهیم داشت

$$P(E) = \frac{1}{e^{1/45} + 1} = 0/19$$ یا ٪۱۹ (پاسخ)

(ب) احتمال اشغال شدن حالتی که انرژی آن ۰/۱۰eV *زیر* انرژی فرمی است، چقدر است؟

محاسبه‌ها: **نکتهٔ کلیدی** بخش (الف) در اینجا نیز کاربرد دارد، با این تفاوت که اکنون انرژی حالت *زیر* انرژی فرمی است. در نتیجه، نمای بخش نمایی معادلهٔ ۴۱-۶ دارای همان مقدار به دست آمده در قسمت (الف)، ولی با علامت منفی است؛ بنابراین، معادلهٔ ۴۱-۶ اکنون چنین به دست می‌دهد

$$P(E) = \frac{1}{e^{-1/45} + 1} = 0/81$$ یا ٪۸۱ (پاسخ)

برای حالتهای زیر انرژی فرمی، غالباً به آن احتمالی بیشتر علاقه‌مندیم که حالت اشغال *نشده* باشد. این احتمال دقیقاً برابر با $1 - P(E)$، یا ٪۱۹ است. توجه کنید که این همان احتمال اشغال شدن در قسمت (الف) است.

چند حالت اشغال شده وجود دارد؟

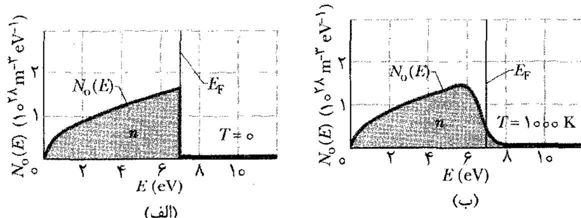
معادلهٔ ۴۱-۵ و شکل ۴۱-۶ مبین آن هستند که چگونه حالتهای موجود برحسب انرژی توزیع شده‌اند. احتمال اشغال شدن معادلهٔ ۴۱-۶، احتمالی را به دست می‌دهد که هر حالت معین واقعاً توسط یک الکترون اشغال شود. برای یافتن $N_0(E)$، **چگالی حالتهای اشغال شده**، باید هر حالت موجود را با مقدار احتمال اشغال شدن مربوط به آن، ضرب کنیم؛ یعنی

(چگالی حالتهای اشغال شدهٔ $N_0(E)$ در انرژی E) = (چگالی حالتهای $N(E)$ در انرژی E) (احتمال اشغال شدن $P(E)$ در انرژی E)

یا

$$N_0(E) = N(E)P(E)$$ (چگالی حالتهای اشغال شده) (۴۱-۷)

شکل ۴۱-۸ الف نمودار معادلهٔ ۴۱-۷ برای مس در دمای $T = 0\ K$ است. این نمودار، در هر انرژی، از ضرب مقدار چگالی تابع حالتها (شکل ۴۱-۶) در مقدار احتمال اشغال شدن در صفر مطلق (شکل ۴۱-۷ الف) به دست می‌آید. شکل ۴۱-۸ ب، که به همین ترتیب محاسبه شده است، چگالی حالتهای اشغال شده برای مس را در دمای $T = 1000\ K$ نشان می‌دهد.



شکل ۴۱-۸ (الف) چگالی حالتهای اشغال شدهٔ $N_0(E)$ برای مس در صفر مطلق. مساحت زیر منحنی، چگالی عددی n الکترونهاست. توجه کنید که همهٔ حالتها با انرژیهایی تا انرژی فرمی $E_F = 7\ eV$ اشغال شده‌اند و تمام حالتها با انرژیهای بالای انرژی فرمی تهی هستند. (ب) همان منحنی برای مس در $T = 1000\ K$. توجه کنید فقط الکترونهایی با انرژیهای نزدیک به انرژی فرمی تأثیر پذیرفته و دوباره توزیع شده‌اند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۱-۵

اگر فلز مسئلهٔ نمونهٔ ۴۱-۳ مس باشد، که دارای انرژی فرمی $7/0\text{eV}$ است، چند حالت اشغال شده بر eV در گسترهٔ باریکی از انرژی حول $7/0\text{eV}$ قرار دارند؟

نکته‌های کلیدی (۱) استدلال مسئلهٔ نمونهٔ ۴۱-۳ الف در اینجا نیز برقرار است، با این تفاوت که اکنون از چگالی حالتهای *اشغال شدهٔ* $N_0(E)$ استفاده می‌کنیم که با معادلهٔ ۴۱-۷ داده می‌شود $(N_0(E)=N(E)P(E))$. (۲) چون می‌خواهیم کمیتها را برای گسترهٔ انرژی باریکی حول $7/0\text{eV}$ (انرژی فرمی مس) به دست آوریم، احتمال اشغال شدن $P(E)$ برابر $0/50$ است.

محاسبه‌ها: از شکل ۴۱-۶ درمی‌یابیم که چگالی حالتها در 7 eV تقریباً برابر با $1/8\times10^{28}\text{ m}^{-3}\text{eV}^{-1}$ است. بنابراین، معادلهٔ ۴۱-۷ حاکی از آن است که چگالی حالتهای اشغال شده برابر است با

$$N_0(E)=N(E)P(E)=(1/8\times10^{28}\text{ m}^{-3}\text{eV}^{-1})(0/50)$$
$$=0/9\times10^{28}\text{ m}^{-3}\text{eV}^{-1}$$

سپس، معادلهٔ مسئلهٔ نمونهٔ ۴۱-۳ الف را برحسب حالتهای اشغال شده دوباره می‌نویسیم

$$\begin{pmatrix}\text{تعداد حالتهای \textit{اشغال شده}}\\ \text{بر eV در 7eV}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{چگالی حالتهای \textit{اشغال شده}}\\ N_0(E)\text{ در 7eV}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\text{حجم } V\\ \text{نمونه}\end{pmatrix}$$

آنگاه با قراردادن نتیجه به جای $N_0(E)$ و V خواهیم داشت

$$\begin{pmatrix}\text{تعداد حالتهای اشغال شده}\\ \text{بر eV در 7eV}\end{pmatrix}=(0/9\times10^{28}\text{ m}^{-3}\text{eV}^{-1})(2\times10^{-9}\text{ m}^3)$$
$$=1/8\times10^{19}\text{ eV}^{-1}$$
$$\approx2\times10^{19}\text{ eV}^{-1}$$

محاسبهٔ انرژی فرمی

فرض کنید (از طریق انتگرالگیری) تعداد حالتهای اشغال شده بر یکای حجم در شکل ۴۱-۸ الف را (به ازای $T=0\text{K}$) برای همهٔ انرژیهای بین $E=0$ و $E=E_F$ جمع کنیم. نتیجهٔ کار باید برابر با n، تعداد الکترونهای رسانش بر یکای حجم فلز باشد. به شکل معادله، داریم

$$n=\int_0^{E_F}N_0(E)\,dE \qquad (41\text{-}8)$$

(از لحاظ نموداری، انتگرال مساحت زیر منحنی توزیع شکل ۴۱-۸ الف را نشان می‌دهد.) چون در $T=0\text{K}$ برای همهٔ انرژیهای زیر انرژی فرمی، $P(E)=1$ است، معادلهٔ ۴۱-۷ بیان می‌دارد که می‌توانیم $N(E)$ را به جای $N_0(E)$ در معادلهٔ ۴۱-۸ قرار دهیم و آنگاه با استفاده از معادلهٔ ۴۱-۸، انرژی فرمی E_F را بیابیم. اگر معادلهٔ ۴۱-۵ را در معادلهٔ ۴۱-۸ قرار دهیم، خواهیم داشت

$$n=\frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3}\int_0^{E_F}E^{1/2}dE=\frac{8\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3}\frac{2E_F^{3/2}}{3}$$

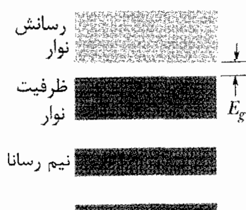
که در آن m جرم الکترون است. حل آن برای E_F چنین به دست می‌دهد

$$E_F=\left(\frac{3}{16\sqrt{2}\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{m}n^{2/3}=\frac{0/121h^2}{m}n^{2/3}$$

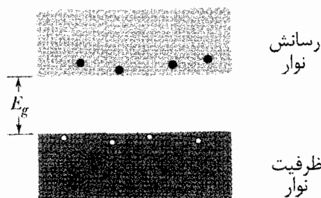
بنابراین، وقتی n، تعداد الکترونهای رسانش بر یکای حجم برای یک فلز، معین باشد، می‌توانیم انرژی فرمی را برای آن فلز به دست آوریم.

۴۱-۶ نیمرساناها

اگر شکل ۴۱-۹ الف را با شکل ۴۱-۴ مقایسه کنیم، درمی‌یابیم که ساختار نواری یک نیمرسانا مشابه یک عایق است. اختلاف اساسی این است که نیمرسانا دارای گاف انرژی بسیار کوچکتری بین بالای بالاترین نوار پر شده (موسوم به **نوار ظرفیت**) و پایین نوار تهی درست بالای آن (موسوم به **نوار رسانش**) است. بنابراین، بدون شک سیلیسیوم $(E_g=1/1\text{eV})$ یک نیمرسانا و الماس $(E_g=5/5\text{eV})$ یک عایق است. در سیلیسیوم- ولی نه در الماس- احتمالی واقعی وجود دارد که اغتشاش گرمایی در دمای اتاق باعث شود که الکترونها از گاف بین نوار ظرفیت و نوار رسانش بگذرند.



(الف)



(ب)

شکل ۴۱-۹ (الف) نقش نوار- گاف برای یک نیمرسانا. این نقش، مشابه نقش یک عایق است. (شکل ۴۱-۴ را ببینید) با این تفاوت که در اینجا، گاف انرژی E_g بسیار کوچکتر است؛ بنابراین، الکترونها، به دلیل اغتشاش گرمایی، احتمال معقولی دارند که بتوانند از این گاف بگذرند. (ب) اغتشاش گرمایی باعث شده است که چند الکترون معدود از گاف بین نوار ظرفیت و نوار رسانش بگذرند و بدین ترتیب تعداد یکسانی حفره در نوار ظرفیت برجای گذارند.

در جدول ۴۱-۱، سه خاصیت اصلی مس، نمونهٔ شاخص رساناهای فلزی و سیلیسیوم، نمونهٔ شاخص نیمرساناها، را مقایسه کرده‌ایم. بار دیگر به آن جدول، ردیف به ردیف، نگاهی بیندازید تا دریابید چگونه نیمرسانا از فلز متفاوت است.

چگالی عددی حاملهای بار n

ردیف پایین جدول ۴۱-۱ نشان می‌دهد که مس دارای حاملهای بار بر یکای حجم بسیار بیشتری، با عاملی در حدود 10^{13} بار، از سیلیسیوم است. برای مس، در هر اتم یک الکترون، فقط الکترون ظرفیت، در فرایند رسانش سهم دارد. حاملهای بار در سیلیسیوم تنها به این علت پدید می‌آیند که در تعادل گرمایی، اغتشاش گرمایی باعث می‌شود که تعداد (بسیار کوچک) معینی از الکترونهای نوار ظرفیت با برجای نهادن تعداد یکسانی از حالتهای انرژی اشغال نشده، موسوم به **حفره‌ها** در نوار ظرفیت، از گاف انرژی به نوار رسانش پرش کنند. شکل ۴۱-۹ ب این وضعیت را نشان می‌دهد.

هم الکترونهای واقع در نوار رسانش و هم حفره‌های واقع در نوار ظرفیت به صورت حاملهای بار عمل می‌کنند. حفره‌ها این وظیفه را با دادن آزادی عمل معینی به الکترونهای واقع در نوار ظرفیت، یعنی الکترونهایی که در نبود حفره‌ها در بند می‌بودند، به انجام می‌رسانند. اگر میدان الکتریکی $\vec{E}$ در یک نیمرسانا برقرار شود، الکترونهای واقع در نوار ظرفیت، که دارای بار منفی‌اند، در خلاف جهت $\vec{E}$ سوق داده می‌شوند. این باعث می‌شود که مکان حفره‌ها در جهت $\vec{E}$ رانده شوند. در واقع، حفره‌ها مانند ذره‌های در حال حرکتی با بار $+e$ رفتار می‌کنند.

ممکن است تصور ردیفی از اتومبیلهایی که سپر به سپر پارک کرده‌اند و اتومبیل جلویی به اندازهٔ طول یک اتومبیل از مانعی فاصله دارد، به طوری که یک فضای خالی به طول یک اتومبیل برای فضای پارک در دسترس است، ما را در درک این مفهوم کمک کند. اگر اتومبیل جلویی به سمت مانع حرکت کند، فضایی برای پارک در پشت آن باز می‌شود. آنگاه اتومبیل دوم می‌تواند این فضا را پر کند و بدین ترتیب اتومبیل سوم مجاز به حرکت می‌شود و الی آخر. حرکت چندین اتومبیل به سمت مانع با توجه به سوق پیدا کردن یک "حفره" (فضای پارک) از مانع به عقب، به ساده‌ترین وجهی قابل تحلیل است.

در نیمرساناها، رسانش توسط حفره‌ها درست به همان اندازهٔ رسانش توسط الکترونها اهمیت دارد. در مورد رسانش حفره، می‌توانیم فرض کنیم که همهٔ حالتهای اشغال نشده در نوار ظرفیت توسط ذره‌هایی با بار $+e$ اشغال شده‌اند و تمام الکترونها در نوار ظرفیت برداشته شده‌اند، به طوری که این حاملهای بار مثبت می‌توانند در سرتاسر نوار آزادانه حرکت کنند.

مقاومت ویژهٔ ρ

از فصل ۲۲ (جلد دوم) به خاطر آورید که مقاومت ویژهٔ ρ یک ماده برابر $m/e^2n\tau$ است، که در آن m جرم الکترون، e بار بنیادی، n تعداد حاملهای بار بر یکای حجم، و τ زمان میانگین بین برخوردهای حاملهای بار است. جدول ۴۱-۱ نشان می‌دهد که، در دمای اتاق، مقاومت ویژهٔ سیلیسیوم با عاملی حدود 10^{11} بار، بزرگتر از مقاومت ویژهٔ مس است. دلیل این اختلاف فاحش را می‌توان با اختلاف فاحش مقدارهای n توضیح داد. عاملهای دیگری نیز دخیل‌اند، ولی اثر آنها بر مقاومت ویژه به دلیل این اختلاف فاحش n، زیاد نیست.

ضریب دمایی مقاومت ویژهٔ α

به خاطر آورید که α (معادلهٔ ۲۲-۱۷ را در جلد ۲ ببینید) تغییر کسری در مقاومت ویژه بر یکای تغییر دماست

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT} \qquad (۴۱-۱۰)$$

مقاومت ویژهٔ مس با دما *افزایش می‌یابد*. (یعنی، $d\rho/dT > 0$)، زیرا برخوردهای حاملهای بار مس در دماهای بالاتر به تعداد بیشتری رخ می‌دهد. بنابراین، α برای مس، *مثبت* است.

برای سیلیسیوم نیز تعداد برخوردها با دما افزایش می‌یابد. ولی، در واقع مقاومت ویژهٔ سیلیسیوم با دما *کاهش می‌یابد*. ($d\rho/dT < 0$)، زیرا تعداد حاملهای بار n (الکترونها در نوار رسانش و حفره‌ها در نوار ظرفیت) با افزایش دما به طور بسیار سریعی افزایش می‌یابند. (الکترونهای بیشتری از گاف بین نوار ظرفیت و نوار رسانش می‌گذرند.) بنابراین، تغییر کسری α برای سیلیسیوم *منفی* است.

۴۱-۷ نیمرساناهای آلاییده

سودمندی نیمرساناها در فناوری را میتوان با واردکردن تعداد کمی از اتمهای جایگزین مناسب (موسوم به ناخالصی) در شبکهٔ نیمرسانا، به میزان زیادی بهبود بخشید- فرایندی که **آلاییدن** نامیده می‌شود. به طور نوعی، فقط حدود ۱ اتم سیلیسیوم در 10^7، توسط یک اتم آلاینده در نیمرسانای آلاییده جایگزین می‌شود. اساساً مبنای همهٔ ابزارهای نیمرسانای نوین، مواد آلاییده است. چنین موادی بر دو نوع‌اند که **نوع n** و **نوع p** نامیده می‌شوند؛ هر یک از این دو نوع ماده را به نوبت بررسی می‌کنیم.

نیمرسانای نوع n

الکترونها در یک اتم سیلیسیوم منزوی بنابر آرایش زیر در زیر لایه‌ها مرتب شده‌اند

$$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^2$$

که در آن، طبق معمول، شاخصهای بالا (که مجموع آنها ۱۴، یعنی عدد اتمی سیلیسیوم است) تعداد الکترونها در زیر لایه‌های معین را نمایش می‌دهند.

شکل ۴۱-۱۰ الف، نمایش مسطحی از بخشی از شبکهٔ سیلیسیوم خالص است که آن بخش را روی یک صفحه تصویر کرده است. این شکل را با شکل ۴۱-۱ ب، که یاختهٔ یکه‌ای از شبکهٔ سه بعدی را نشان می‌دهد، مقایسه کنید. هر اتم سیلیسیوم، جفت الکترون $3s$ و جفت الکترون $3p$ خود را برای تشکیل یک پیوند کووالانس دو الکترونی محکم با هر یک از چهار همسایهٔ نزدیک خود به اشتراک می‌گذارد. (پیوند کووالانسی، اتصالی بین دو اتم است که در آن، اتمها یک جفت الکترون را به اشتراک می‌گذارند.) چهار اتمی که داخل یاختهٔ یکهٔ شکل ۴۱-۱ ب قرار دارند، این چهار پیوند را نشان می‌دهند.

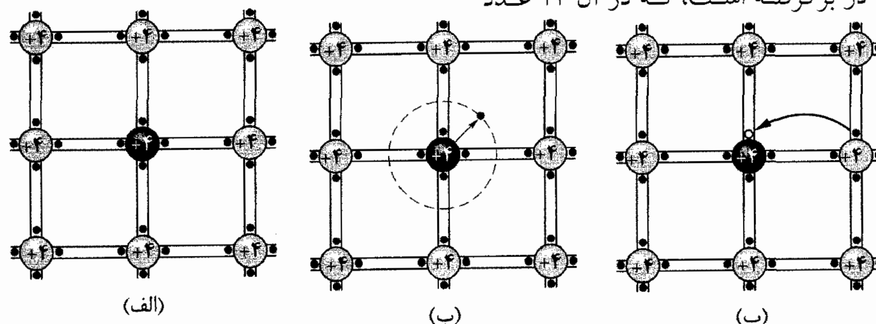
الکترونهایی که پیوندهای سیلیسیوم- سیلیسیوم را تشکیل می‌دهند، نوار ظرفیت نمونهٔ سیلیسیوم را می‌سازند. اگر الکترونی از یکی از این پیوندها گسسته شود، به طوری که آزادانه در سرتاسر شبکه سرگردان شود، می‌گوییم آن الکترون از نوار ظرفیت به نوار رسانش بالا رفته است. کمینهٔ انرژی مورد نیاز برای انجام این عمل، برابر با گاف انرژی E_g است.

چون چهار الکترون سیلیسیوم در پیوندها مشارکت دارند، هر "اتم" سیلیسیوم در واقع یونی است که شامل یک ابر الکترونی نئون- گونهٔ بی‌اثر (حاوی ۱۰ الکترون) است که هسته‌ای با بار +۱۴e را در برگرفته است، که در آن ۱۴ عدد اتمی سیلیسیوم است. بنابراین، بار خالص هر یک از یونها +۴e است، و گفته می‌شود که این یونها دارای *عدد ظرفیت* ۴ هستند.

در شکل ۴۱-۱۰ ب، یون سیلیسیوم مرکزی با یک اتم فسفر (۵ = ظرفیت) جایگزین شده است. چهار الکترون ظرفیت فسفر با چهار یون سیلیسیوم احاطه کنندهٔ آن، پیوندهایی را تشکیل می‌دهند. پنجمین الکترون (الکترون "اضافی") فقط به طور سستی به مغز یونی فسفر مقید شده است. روی نمودار انرژی- نوار، معمولاً می‌گوییم چنین الکترونی حالت انرژی جایگزیده‌ای را اشغال می‌کند که داخل گاف انرژی، در بازهٔ انرژی متوسط E_d زیر کف نوار رسانش قرار دارد؛ این، در شکل ۴۱-۱۱ الف نشان داده شده است. چون $E_d \ll E_g$ است، انرژی لازم برای برانگیختن الکترونها از *این* ترازها به نوار رسانش بسیار کمتر از انرژی لازم برای برانگیختن الکترونهای ظرفیت سیلیسیوم به نوار رسانش است.

اتم فسفر، اتم **بخشنده** نامیده می‌شود، زیرا به‌سادگی یک الکترون خود را به نوار رسانش *می‌دهد.* در واقع، در دمای اتاق، در عمل *همهٔ* الکترونهایی که توسط اتمهای بخشنده مشارکت داده می‌شوند، در نوار رسانش قرار دارند. با اضافه کردن اتمهای بخشنده، می‌توان تعداد الکترونهای نوار رسانش را به میزان زیادی افزایش داد، با عاملی بسیار بزرگتر از آنچه که شکل ۴۱-۱۱ الف پیشنهاد می‌کند.

نیمرساناهایی که با اتمهای بخشنده آلاییده می‌شوند، **نیمرساناهای نوع n** نام دارند؛ n نشان دهندهٔ *منفی* است که مبین آن است که تعداد حاملهای بار منفی وارد شده به نوار رسانش بسیار بیشتر از تعداد حاملهای بار مثبت است، که حفره‌های نوار ظرفیت‌اند. در نیمرسانای نوع n، الکترونها **حاملهای اکثریت** و حفره‌ها، **حاملهای اقلیت** نامیده می‌شوند.

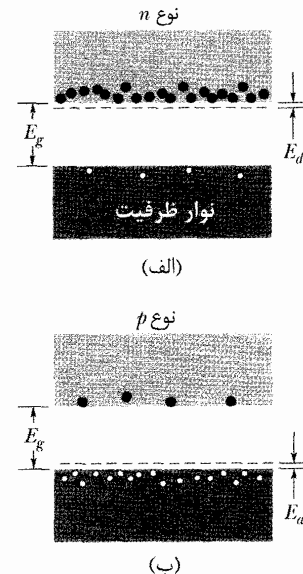


شکل ۴۱-۱۰ (الف) نمایشی مسطح از ساختار شبکهٔ سیلیسیوم خالص. هر یون سیلیسیوم توسط یک پیوند کووالانس دو الکترونی به چهار نزدیکترین همسایهٔ خود جفت شده است (که با یک جفت نقطه بین دو خط تیرهٔ موازی نشان داده شده است.) الکترونها به پیوند- و نه به اتمهای مجزا- تعلق دارند و تشکیل یک پیوند ظرفیتی نمونه را می‌دهند. (ب) یک اتم سیلیسیوم با یک اتم فسفر (۵ = ظرفیت) جایگزین شده است. الکترون "اضافی" فقط به طور سستی به مغز یونی خود مقید است و به سادگی می‌تواند به نوار رسانش بالا برود، جایی که مجاز است در سرتاسر حجم شبکه حرکت کند. (پ) یک اتم سیلیسیوم با یک اتم آلومینیوم (۳ = ظرفیت) جایگزین شده است. اکنون حفره‌ای در یکی از پیوندهای کووالانسی و بنابراین، در نوار ظرفیت نمونه وجود دارد. این حفره می‌تواند هنگامی که الکترونهای پیوندهای مجاور برای پرکردن آن حرکت می‌کنند، به‌سادگی در سرتاسر شبکه حرکت کند. در اینجا، حفره به سمت راست حرکت می‌کند.

نیمرسانای نوع p

اکنون شکل ۴۱-۱۰ پ را در نظر می‌گیریم که در آن یکی از اتمهای سیلیسیوم (۴ = ظرفیت) با یک اتم آلومینیوم (۳ = ظرفیت) جایگزین شده است. اتم آلومینیوم می‌تواند فقط با سه اتم سیلیسیوم پیوند کووالانسی تشکیل دهد، و بنابراین، اکنون یک الکترون "گم شده" (یک حفره) در پیوند آلومینیوم-سیلیسیوم وجود دارد. با کمی صرف انرژی، یک الکترون می‌تواند برای پرکردن این حفره از پیوند سیلیسیوم- سیلیسیوم مجاور گسسته شود و در نتیجه یک حفره در *آن* پیوند ایجاد کند. به همین ترتیب، یک الکترون از پیوندی دیگر می‌تواند برای پرکردن حفره‌ای که به تازگی ایجاد شده است حرکت کند. به این ترتیب، حفره می‌تواند در سرتاسر شبکه به حرکت درآید.

اتم آلومینیوم، **پذیرنده** نامیده می‌شود، زیرا به آسانی یک الکترون را از پیوند مجاور- یعنی، از نوار ظرفیت سیلیسیوم- می‌گیرد. به طوری که شکل ۴۱-۱۱ ب نشان می‌دهد، این



شکل ۴۱-۱۱ (الف) در یک نیمرسانای آلاییدهٔ نوع n، ترازهای انرژی الکترونهای بخشنده در بازهٔ کوچک E_d زیر کف نوار رسانش قرار دارند. چون الکترونهای بخشنده می‌توانند به آسانی به نوار رسانش برانگیخته شوند، اکنون تعداد بسیار زیادی الکترون در این نوار وجود دارند. نوار ظرفیت شامل همان تعداد کم حفره‌ها به اندازهٔ پیش از اضافه کردن آلاینده است. (ب) در یک نیمرسانای آلاییدهٔ نوع P، ترازهای پذیرنده در بازهٔ انرژی کوچک E_a بالای نوار ظرفیت قرار دارند. اکنون تعداد بسیار بیشتری حفره در نوار ظرفیت وجود دارد. نوار رسانش شامل همان تعداد کم الکترونها به اندازهٔ پیش از اضافه کردن آلاینده است. نسبت حاملهای اکثریت به حاملهای اقلیت هم در (الف) و هم در (ب) بسیار بیشتر از مقداری است که این نمودارها نشان می‌دهند.

الکترون یک حالت انرژی جایگزیده را اشغال می‌کند که داخل گاف انرژی، در بازهٔ انرژی متوسط E_a بالای نوار ظرفیت قرار دارد. چون این بازهٔ انرژی E_a کوچک است، الکترونهای ظرفیت با برجای گذاشتن حفره‌ها در نوار ظرفیت، به آسانی به تراز پذیرنده بالا می‌روند. بنابراین، با افزودن اتمهای پذیرنده، می‌توان تعداد حفره‌ها در نوار ظرفیت را به میزان زیادی افزایش داد، با عاملی بسیار بزرگتر از آنچه که شکل ۴۱-۱۱ ب پیشنهاد می‌کند. در سیلیسیوم، در دمای اتاق، در عمل *همهٔ* ترازهای پذیرنده توسط الکترونها اشغال شده‌اند.

نیمرساناهایی که با اتمهای پذیرنده آلاییده می‌شوند، **نیمرساناهای نوع p** نامیده می‌شوند؛ p نشان دهندهٔ مثبت، مبین آن است که تعداد حفره‌های وارد شده به نوار ظرفیت، که مشابه حاملهای بار مثبت رفتار می‌کنند، بسیار بیشتر از الکترونهای نوار رسانش هستند. در نیمرساناهای نوع p، حفره‌ها حاملهای اکثریت و الکترونها حاملهای اقلیت هستند.

در جدول ۴۱-۲ خاصیتهای نیمرساناهای نوع n و نوع p خلاصه شده است. به ویژه، توجه کنید که مغزهای یونی بخشنده و پذیرنده، اگرچه بار دارند، ولی *حاملهای* بار نیستند؛ زیرا در دماهای طبیعی، آنها در جایگاههای شبکه‌ای خود ثابت باقی می‌مانند.

جدول ۴۱-۲

خاصیت‌های دو نیمرسانای آلاییده

خاصیت	نوع نیمرسانا n	نوع نیمرسانا p
مادهٔ پیکره	سیلیسیوم	سیلیسیوم
بار هسته‌ای پیکره	$+۱۴e$	$+۱۴e$
گاف انرژی پیکره	۱/۲eV	۱/۲eV
آلاینده	فسفر	آلومینیوم
نوع آلایش	بخشنده	پذیرنده
حاملهای اکثریت	الکترونها	حفره‌ها
حاملهای اقلیت	حفره‌ها	الکترونها
گاف انرژی آلاینده	$E_d = ۰/۰۴۵\text{eV}$	$E_d = ۰/۰۶۷\text{eV}$
ظرفیت آلاینده	۵	۳
بار هسته‌ای آلاینده	$+۱۵e$	$+۱۳e$
بار یونی خالص آلاینده	$+e$	$-e$

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۱-۶

چگالی عددی n_0 الکترونهای رسانش در سیلیسیوم خالص، در دمای اتاق، حدوداً $۱۰^{۱۶}\text{m}^{-۳}$ است. فرض کنید، با آلاییدن شبکهٔ سیلیسیوم با فسفر، این تعداد را تا ضریب یک میلیون ($۱۰^۶$) افزایش دهیم. چه کسری از اتمهای سیلیسیوم را باید با اتمهای فسفر جایگزین کنیم؟ (به یاد آورید که در دمای اتاق، اغتشاش گرمایی به اندازه‌ای مؤثر است، که اساساً هر اتم فسفر، الکترون "اضافی" خود را به نوار رسانش می‌دهد.)

تعداد اتم‌های فسفر: چون هر اتم فسفر در یک الکترون رسانش سهیم است و چون می‌خواهیم چگالی عددی کل الکترونهای رسانش برابر $10^6 n_0$ باشد، چگالی عددی اتمهای فسفر n_P باید با رابطهٔ زیر داده شود

$$10^6 n_0 = n_0 + n_P$$

و از آنجا

$$n_P = 10^6 n_0 - n_0 \approx 10^6 n_0$$
$$= (10^6)(10^{16}\,\mathrm{m^{-3}}) = 10^{22}\,\mathrm{m^{-3}}$$

این مبین آن است که باید 10^{22} اتم فسفر را به هر متر مکعب سیلیسیوم اضافه کنیم.

کسر اتم‌های سیلیسیوم: چگالی عددی n_{Si} اتمهای سیلیسیوم در سیلیسیوم خالص را می‌توانیم از معادلهٔ ۴۱-۴ به دست آوریم، که می‌توان آن را چنین نوشت

$$\left(\text{تعداد اتمهای نمونه}\right) = \frac{(\text{حجم نمونه } V)\ (\text{چگالی سیلیسیوم})}{(\text{جرم مولی سیلیسیوم } M_{Si})/N_A}$$

از تقسیم دو طرف این معادله بر حجم V نمونه، چگالی عددی اتمهای سیلیسیوم n_{Si} در طرف چپ به دست می‌آید؛ از آنجا داریم

$$n_{Si} = \frac{(\text{چگالی سیلیسیوم})\, N_A}{M_{Si}}$$

پیوست ج، چگالی سیلیسیوم را $۲/۳۳\,\mathrm{g/cm^3}\ (= ۲۳۳۰\,\mathrm{kg/m^3})$ و جرم مولی آن را $۲۸/۱\,\mathrm{g/mol}\ (= ۰/۰۲۸۱\,\mathrm{kg/mol})$ به دست می‌دهد. بنابراین، داریم

$$n_{Si} = \frac{(۲۳۳۰\,\mathrm{kg/m^3})(۶/۰۲\times 10^{23}\ \mathrm{atoms/mol})}{۰/۰۲۸۱\,\mathrm{kg/mol}}$$
$$= ۵\times 10^{28}\ \mathrm{atoms/m^3} = ۵\times 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$$

کسری که در پی آن هستیم، تقریباً برابر است با

$$\frac{n_P}{n_{Si}} = \frac{10^{22}\ \mathrm{m^{-3}}}{۵\times 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}} = \frac{1}{۵\times 10^6} \qquad \text{(پاسخ)}$$

اگر فقط یک *اتم سیلیسیوم در پنج میلیون* را با یک اتم فسفر جایگزین کنیم، تعداد الکترونهای واقع در نوار رسانش با ضریب یک میلیون افزایش خواهد یافت.

چگونه چنین آمیزهٔ کوچکی از فسفر می‌تواند به چنین اثری که به ظاهر بزرگ به نظر می‌رسد، بیانجامد؟ پاسخ این است، اگرچه این اثر بسیار مهم است، ولی "بزرگ" نیست. چگالی عددی الکترونهای رسانش پیش از آلایش برابر $10^{16}\mathrm{m^{-3}}$ بوده و پس از آلایش برابر $10^{22}\mathrm{m^{-3}}$ است. ولی، برای مس، چگالی عددی الکترونهای رسانش (که در جدول ۴۱-۱ داده شده است) حدود $10^{29}\mathrm{m^{-3}}$ است. بنابراین، حتی پس از آلایش، چگالی عددی الکترونهای رسانش در سیلیسیوم بسیار کمتر از یک فلز نوعی، از قبیل مس، با عاملی حدود 10^7 باقی می‌ماند.

۴۱-۸ پیوندگاه p-n

پیوندگاه p-n (شکل ۴۱-۱۲ الف) یک تک‌ْ بلور نیمرساناست که به طور انتخابی به گونه‌ای آلاییده شده است که یک ناحیه از مادهٔ نوع n و ناحیهٔ مجاور آن از مادهٔ نوع p باشد. چنین پیوندگاههایی ضرورتاً در قلب همهٔ ابزارهای نیمرسانا قرار دارند.

برای سادگی فرض می‌کنیم که این پیوندگاه به طور مکانیکی، با فشردن یک میلهٔ نیمرسانا از نوع n به یک میلهٔ نیمرسانا از نوع p، ساخته شده باشد. بنابراین، گذار از یک ناحیه به ناحیهٔ دیگر کاملاً مشخص است و در تک **صفحهٔ پیوندگاه** رخ می‌دهد.

حال حرکتهای الکترونها و حفره‌ها را بررسی می‌کنیم، درست پس از آنکه میلهٔ نوع n و میلهٔ نوع p، که هر دو از لحاظ الکتریکی خنثی هستند، به یکدیگر برای تشکیل یک پیوندگاه فشرده شدند. نخست، حاملهای اکثریت را، که شامل الکترونها در مادهٔ نوع n و حفره‌ها در مادهٔ نوع p می‌شوند، بررسی می‌کنیم.

حرکت حاملهای اکثریت

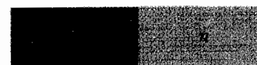
اگر بادکنک پر شده از هلیوم را بترکانیم، اتمهای هلیوم در هوای محیط پخش (منتشر) می‌شوند. این بدان دلیل رخ می‌دهد که تعداد بسیار کمی اتم هلیوم در هوای معمولی وجود دارد. به زبان رسمی‌تر، یک *گرادیان چگالی* هلیوم در فصل مشترک بادکنک- هوا وجود دارد. (چگالی عددی اتمهای هلیوم از یک طرف فصل مشترک به طرف دیگر آن، تغییر می‌کند)؛ اتمهای هلیوم به گونه‌ای حرکت می‌کنند که این گرادیان را کاهش دهند.

به طور مشابه، الکترونهای طرف n شکل ۴۱-۱۲ الف که به صفحهٔ پیوندگاه نزدیک‌اند مایل‌اند در عرض آن (از راست به چپ در شکل) پخش شوند و به طرف p، که در آنجا تعداد بسیار کمی الکترون وجود دارد، بروند؛ به همین ترتیب، حفره‌های طرف p که به صفحهٔ پیوندگاه نزدیک‌اند مایل‌اند در عرض آن صفحه (از چپ به راست) پخش شوند و به طرف n، که در آنجا تعداد بسیار کمی حفره وجود دارد، بروند. حرکتهای هم الکترونها و هم حفره‌ها در جریان پخشی I_{diff}، که بنا به قرارداد جهت آن به ترتیبی که در شکل ۴۱-۱۲ ت نشان داده شده از چپ به راست است، نقش دارند.

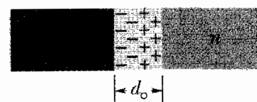
به یاد آورید که سرتاسر طرف n با یونهای بخشندهٔ باردار مثبت که به طور محکمی در جایگاههای شبکه‌ای خود ثابت‌اند، پر شده است. معمولاً، بار مثبت اضافی هر یک از این یونها به طور الکتریکی توسط یکی از الکترونهای نوار رسانش خنثی می‌شود. ولی، هرگاه یک الکترون طرف n در عرض صفحهٔ پیوندگاه پخش شود، این پخش یکی از این یونهای بخشنده را

"آشکار می‌کند" و بنابراین، یک بار مثبت ثابت در نزدیکی صفحهٔ پیوندگاه در طرف n ظاهر می‌شود. هرگاه الکترون پخش شده به طرف p برسد، به سرعت با یک یون پذیرنده (که فاقد یک الکترون است) ترکیب می‌شود و بدین ترتیب یک بار منفی ثابت در نزدیکی صفحهٔ پیوندگاه در طرف p ظاهر می‌شود.

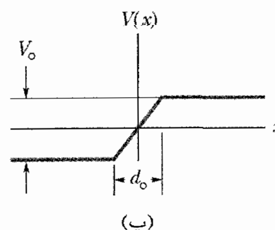
الکترونها به این روش در سرتاسر صفحهٔ پیوندگاه، از راست به چپ در شکل ۴۱-۱۲ الف پخش می‌شوند و در نتیجه، همانطور که در شکل ۴۱-۱۲ ب نشان داده شده است، یک **بار فضایی** روی هر طرف صفحهٔ پیوندگاه ایجاد می‌کنند. حفره‌هایی که در سرتاسر صفحهٔ پیوندگاه از چپ به راست پخش می‌شوند، دقیقاً اثر یکسانی دارند. (زمانی را صرف متقاعد کردن خود در این باره بکنید.) حرکتهای هر دو حامل اکثریت، الکترونها و حفره‌ها، در ایجاد این دو ناحیهٔ بار فضایی، یکی مثبت و دیگری منفی، نقش دارند. این دو ناحیه تشکیل یک **منطقهٔ تهی** را می‌دهند. این نام از آن رو برگزیده شده است که این منطقه نسبتاً از حاملهای بار متحرک خالی است؛ پهنای آن در شکل ۴۱-۱۲ ب با d_0 نشان داده شده است.



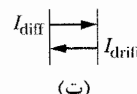
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

شکل ۴۱-۱۲ (الف) یک پیوندگاه p-n. (ب) حرکت حاملهای بار اکثریت در دو طرف صفحهٔ پیوندگاه، بار فضایی وابسته به یونهای بخشندهٔ خنثی نشده (در سمت راست صفحه) و یونهای پذیرنده (در سمت چپ) را آشکار می‌کنند. (پ) به بار فضایی، یک اختلاف پتانسیل V_0 در دو سر d وابسته است. (ت) پخش حاملهای اکثریت (هم الکترونها و هم حفره‌ها) در دو طرف صفحهٔ پیوندگاه، جریان پخشی I_{diff} را به وجود می‌آورد. (در یک پیوندگاه p-n واقعی، مرزهای منطقهٔ تهی بر خلاف آنچه که در اینجا نشان داده شده است واضح نیست، و منحنی پتانسیل تماسی (پ) هموار، و بدون گوشه‌هایی تیز است.

همانطور که شکل ۴۱-۱۲ پ. نشان می‌دهد، ایجاد بار فضایی یک **اختلاف پتانسیل تماسی** وابستهٔ V_0 در دو طرف منطقهٔ تهی به وجود می‌آورد. این اختلاف پتانسیل، پخش بیشتر الکترونها و حفره‌ها در دو طرف صفحهٔ پیوندگاه را محدود می‌کند. بارهای منفی مایل‌اند از ناحیه‌های کم‌پتانسیل دور شوند. بنابراین، الکترونی که از سمت راست شکل ۴۱-۱۲ ب به صفحهٔ پیوندگاه نزدیک می‌شود، در حال حرکت به سوی یک ناحیهٔ کم‌پتانسیل است و مایل است که به طرف n برگردد. به همین ترتیب، بار مثبتی (حفره) که از سمت چپ به صفحهٔ پیوندگاه نزدیک می‌شود، در حال حرکت به سوی یک ناحیهٔ با پتانسیل بالاست و می‌خواهد به طرف p برگردد.

حرکت حاملهای اقلیت

همانطور که شکل ۴۱-۱۱ الف نشان می‌دهد، اگرچه حاملهای اکثریت در مادهٔ نوع n الکترونها هستند، با این حال تعداد کمی حفره نیز وجود دارد. به همین ترتیب، در مادهٔ نوع p (شکل ۴۱-۱۱ ب)، اگرچه حاملهای بار اکثریت حفره‌ها هستند، با این حال تعداد کمی الکترون نیز وجود دارد. این تعداد کم حفره‌ها و الکترونها، حاملهای اقلیت در ماده‌های مربوطه‌اند.

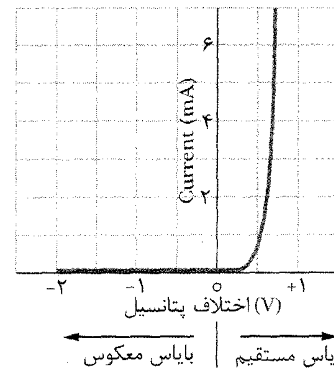
اگرچه اختلاف پتانسیل V_0 در شکل ۴۱-۱۲ پ به صورت سدی برای حاملهای اکثریت عمل می‌کند، با این حال برای حاملهای اقلیت یک سراشیبی است که الکترونها در طرف p یا حفره‌ها در طرف n قرار دارند. بارهای مثبت (حفره‌ها) مایل‌اند ناحیه‌های کم‌پتانسیل و بارهای منفی (الکترونها) مایل‌اند ناحیه‌های با پتانسیل بالا را بیابند. بنابراین، هر دو نوعِ حاملهای بار اقلیت، توسط اختلاف پتانسیل تماسی به دو طرف صفحهٔ پیوندگاه *کشیده می‌شوند* و به همراه یکدیگر یک **جریان سوقی** I_{drift} در دو طرف صفحهٔ پیوندگاه از راست به چپ، به ترتیبی که در شکل ۴۱-۱۲ پ نشان داده شده است، ایجاد می‌کنند.

بنابراین، یک پیوندگاه منزوی p-n یک حالت تعادل واقع است و یک اختلاف پتانسیل تماسی V_0 بین دو سر آن وجود دارد. در تعادل، جریان پخشیِ متوسط I_{diff} که از طرف p به طرف n صفحهٔ پیوندگاه حرکت می‌کند دقیقاً با جریان سوقی متوسط I_{drift} که در جهت مخالف حرکت می‌کند، در توازن است. این دو جریان از آن رو همدیگر را خنثی می‌کنند که جریان خالص عبوری از صفحهٔ پیوندگاه باید برابر صفر باشد؛ در غیر این صورت، بار بدون هیچ محدودیتی از یک سر پیوندگاه به سر دیگر آن انتقال پیدا می‌کرد.

✔ ***نکتهٔ وارسی ۲*** کدامیک از پنج جریان زیر که از دو طرف صفحهٔ پیوندگاه شکل ۴۱-۱۱ الف می‌گذرند باید صفر باشند؟
(الف) جریان خالص ناشی از حفره‌ها، هم شامل حاملهای اکثریت و هم حاملهای اقلیت.
(ب) جریان خالص ناشی از الکترونها، هم شامل حاملهای اکثریت و هم حاملهای اقلیت
(پ) جریان خالص ناشی از هم حفره‌ها و هم الکترونها، شامل هر دو حاملهای اکثریت و اقلیت.
(ت) جریان خالص ناشی از حاملهای اکثریت، هم شامل حفره‌ها و هم الکترونها
(ث) جریان خالص ناشی از حاملهای اقلیت، هم شامل حفره‌ها و هم الکترونها.

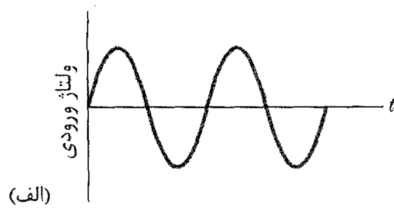
۴۱-۹ یکسوساز پیوندی

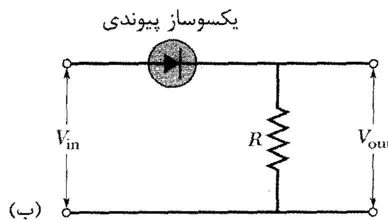
حال به شکل ۴۱-۱۳ نگاه کنید. این شکل نشان می‌دهد که اگر یک اختلاف پتانسیل در دو سر پیوندگاه *p-n* در جهتی (نشان داده شده با + و "بایاس مستقیم") برقرار کنیم، آنگاه جریانی از پیوندگاه خواهد گذشت. ولی، اگر جهت اختلاف پتانسیل را برعکس کنیم، آنگاه جریانی که از پیوندگاه می‌گذرد تقریباً برابر صفر است.

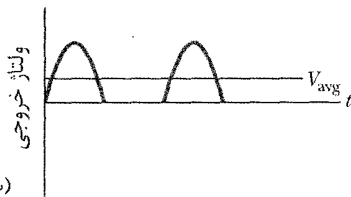


شکل ۴۱-۱۳ نمودار جریان- اختلاف پتانسیل برای یک پیوندگاه *p-n* که نشان میدهد هنگام بایاس مستقیم، پیوندگاه دارای رسانایی بسیار بالایی است و هنگام بایاس معکوس، پیوندگاه اساساً نارساناست.

یک کاربرد این ویژگی، **یکسوساز پیوندی** است، که نماد آن در شکل ۴۱-۱۴ ب نشان داده شده است؛ سر پیکان مربوط به انتهای نوع *p* یکسوساز و سوی آن در جهت جریان قراردادی است. موج پتانسیل سینوسی ورودی (شکل ۴۱-۱۴ الف) به یکسوساز پیوندی توسط آن به پتانسیل نیم- موج خروجی (شکل ۴۱-۱۴ پ) تبدیل شده است؛ یعنی، یکسوساز اساساً به صورت یک کلید بسته (مقاومت صفر) برای یک قطبیت پتانسیل ورودی و به صورت یک کلید باز (مقاومت بینهایت) برای قطبیت دیگر، عمل می‌کند.







شکل ۴۱-۱۴ یک پیوندگاه *p-n* به صورت یک یکسوساز پیوندی متصل شده است. عمل مدار در (ب)، عبور دادن نیمهٔ مثبت شکل موج ورودی (الف) است، ولی از عبور نیمهٔ منفی آن جلوگیری می‌کند. پتانسیل متوسط موج فرودی برابر صفر است؛ موج خروجی (پ) دارای مقدار مثبت V_{avg} است.

مقدار متوسط ولتاژ ورودی در شکل ۴۱-۱۴ الف برابر صفر است، ولی مقدار متوسط ولتاژ خروجی در شکل ۴۱-۱۴ پ، این‌گونه نیست. بنابراین، یکسوساز پیوندی می‌تواند به صورت بخشی از یک وسیله برای تبدیل اختلاف پتانسیل متناوب یک منبع تغذیه الکترونیکی به اختلاف پتانسیل ثابت، به کار گرفته شود.

شکل ۴۱-۱۵ نشان می‌دهد که چرا پیوندگاه *p-n* به صورت یکسوساز پیوندی عمل می‌کند. در شکل ۴۱-۱۵ الف، یک باتری به دو سر پیوندگاه، با اتصال پایانهٔ مثبتش به طرف *p* آن، متصل شده است. در این **اتصال بایاس مستقیم**، طرف *p* مثبت‌تر و طرف *n* منفی‌تر می‌شود، و بنابراین ارتفاع سد پتانسیل V_0 شکل ۴۱-۱۲ پ *کاهش می‌یابد*. اکنون بیشتر حاملهای بار اکثریت می‌توانند بر این سد کوچک فایق آیند؛ در نتیجه، جریان پخشی I_{diff} به میزان قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد.

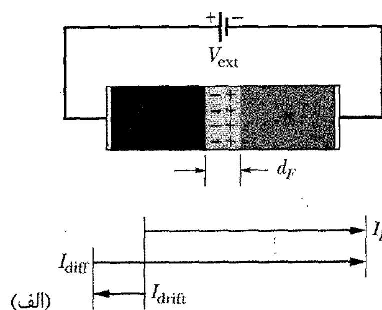
ولی، حاملهای اقلیت که جریان سوقی را می‌سازند، هیچ سدی را احساس نمی‌کنند؛ از این‌رو جریان سوقی I_{drift} تحت تأثیر باتری خارجی قرار نمی‌گیرد. بنابراین، توازن دقیق جریان که در پیش ولت صفر وجود داشت (شکل ۴۱-۱۲ ت را ببینید) برهم می‌خورد، و همانطور که در شکل ۴۱-۱۵ الف نشان داده

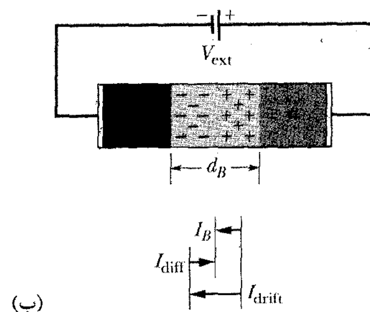
شده است، یک جریان خالص رو به جلوی بزرگ I_F در مدار ظاهر می‌شود.

اثر دیگر بایاس مستقیم، همانطور که مقایسهٔ شکلهای ۴۱-۱۲ ب و ۴۱-۱۵ الف نشان می‌دهد، باریک شدن منطقهٔ تهی است. منطقهٔ تهی به آن دلیل باریک می‌شود که سد پتانسیل کاهش یافتهٔ مربوط به بایاس مستقیم باید به بار فضایی کوچکتری وابسته باشد. چون یونهایی که بار فضایی را ایجاد می‌کنند در جایگاههای شبکه‌ای خود ثابت هستند، کاهش در تعداد آنها فقط می‌تواند از کاهش پهنای منطقهٔ تهی حاصل شده باشد.

چون منطقهٔ تهی معمولاً دارای حاملهای بار بسیار اندکی است، قاعدتاً ناحیه‌ای با مقاومت ویژهٔ بالاست. ولی، هرگاه پهنای آن به میزان قابل ملاحظه‌ای بر اثر بایاس مستقیم کاسته شود، مقاومت ویژهٔ آن نیز به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد که این با جریان مستقیم بزرگ سازگار است.

شکل ۴۱-۱۵ ب اتصال **بایاس معکوس** را نشان می‌دهد، که در آن پایانهٔ منفی باتری به انتهای نوع p پیوندگاه p-n متصل شده است. اکنون، emf اعمال شده، اختلاف پتانسیل تماسی را افزایش، و جریان پخشی را، در حالی‌که جریان سوقی بدون تغییر می‌ماند، به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد، و بدین ترتیب باعث یک جریان معکوس نسبتاً کوچک I_B می‌شود. مقاومت *زیاد* منطقهٔ تهی که *پهن می‌شود*، با جریان معکوس کوچک I_B سازگار است.





شکل ۴۱-۱۵ (الف) اتصال بایاس مستقیم یک پیوندگاه p-n که منطقهٔ تهی باریک شده و جریان مستقیم بزرگ I_F را نشان می‌دهد. (ب) اتصال بایاس معکوس که منطقه تهی پهن شده و جریان معکوس کوچک I_B را نشان می‌دهد.

۴۱-۱۰ دیود نور- گسیل (LED)[1]

امروزه، به سختی می‌توانیم از عددهای "الکترونیکی" رنگی درخشانی که از صندوقهای حساب و پمپهای بنزین، اجاقهای میکروموج و ساعتهای زنگدار، به سوی ما می‌تابند دوری کنیم، و به نظر می‌رسد که نمی‌توانیم از باریکه‌های فرو سرخ نامرئی که درهای بالابرها را کنترل می‌کنند و از طریق دستگاه کنترل از راه دور، تنظیمهای تلویزیون را انجام می‌دهند، چشم پوشی کنیم. تقریباً در همهٔ حالتها، این نور از یک پیوندگاه p-n که به صورت یک **دیود نور- گسیل (LED)** عمل می‌کند، گسیل می‌شود. چگونه یک پیوندگاه p-n می‌تواند نور تولید کند؟

نخست، یک نیمرسانای ساده را در نظر می‌گیریم. هرگاه الکترونی از پایین نوار رسانش به داخل حفره‌ای در بالای نوار ظرفیت فرو افتد، انرژی E_g معادل با پهنای گاف آزاد می‌شود. در سیلیسیوم، ژرمانیوم، و بسیاری دیگر از نیمرساناها، این انرژی به میزان زیادی به انرژی گرمایی شبکه‌های مرتعش منتقل می‌شود و در نتیجه، هیچ نوری گسیل نمی‌شود.

ولی، در برخی از نیمرساناها، از قبیل گالیوم ارسنید، این انرژی می‌تواند به صورت فوتونی با انرژی hf در طول موج زیر گسیل شود

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c}{E_g/h} = \frac{hc}{E_g} \qquad (۴۱-۱۱)$$

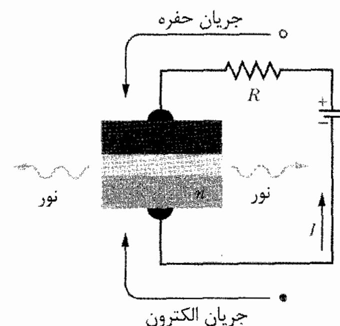
برای آنکه LED نوری کافی گسیل کند تا مفید باشد، ماده باید دارای تعداد قابل ملاحظه‌ای گذارهای مناسب الکترون- حفره باشد. این شرط توسط یک نیمرسانای خالص برآورده *نمی‌شود*، زیرا در دمای اتاق، در واقع جفت الکترون- حفره به حد کافی وجود ندارند. همانگونه که شکل ۴۱-۱۱ نشان می‌دهد، آلایش کمکی نخواهد کرد. در مادهٔ آلاییدهٔ نوع n، تعداد الکترونهای رسانش به میزان زیادی افزایش پیدا می‌کند، ولی حفره‌های کافی برای ترکیب با آنها وجود ندارد؛ در مادهٔ آلاییدهٔ نوع p، تعداد فراوانی حفره وجود دارد، ولی تعداد الکترونها برای ترکیب با آنها کافی نیستند. بنابراین، نه نیمرساناهای خالص و نه نیمرساناهای آلاییده گذارهای الکترون- حفره به حد کافی ندارند و نمی‌توانند به عنوان LED عملی به کار گرفته شوند.

آنچه که نیاز داریم یک مادهٔ نیمرسانا با تعداد بسیار زیادی الکترون در نوار رسانش "و" تعداد زیادی حفرهٔ متناظر آن در نوار ظرفیت است. قطعه‌ای با این ویژگی را می‌توان، مانند شکل ۴۱-۱۶، با برقرارکردن یک بایاس مستقیم قوی روی یک پیوندگاه p-n بسیار آلاییده درست کرد. در چنین آرایشی، جریان I عبوری از قطعه، موجب ورود الکترونها به مادهٔ نوع n و ورود حفره‌ها به مادهٔ نوع p می‌شود. اگر آلایش به‌قدر کافی زیاد و جریان به‌قدر کافی بزرگ باشد، منطقهٔ تهی می‌تواند بسیار نازک شود، شاید فقط به اندازهٔ پهنای چند میکرومتر. در نتیجه، چگالی عددی بزرگی از الکترونها در مادهٔ نوع n با

---

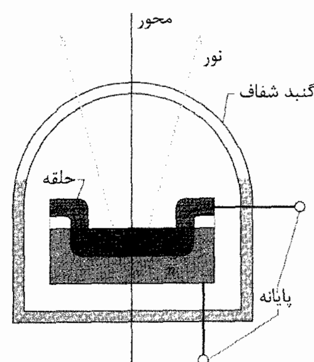
1. Light – Emitting Diode

چگالی عددی بزرگی از حفره‌های متناظر آن در مادهٔ نوع p، در امتداد ناحیهٔ باریک تهی، مقابل هم قرار می‌گیرند. با چنین چگالیهای عددی بزرگی که آنقدر به یکدیگر نزدیک‌اند، ترکیبهای الکترون- حفرهٔ زیادی رخ می‌دهند که این موجب گسیل نور از آن منطقه می‌شود. شکل ۴۱-۱۷، ساختار یک LED عملی را نشان می‌دهد.



شکل ۴۱-۱۶ یک پیوندگاه p-n با بایاس مستقیم که نشان می‌دهد الکترونها به مادهٔ نوع n و حفره‌ها به مادهٔ نوع p وارد شده‌اند. (حفره‌ها که در جهت قراردادی جریان I حرکت می‌کنند، معادل با الکترونهایی هستند که در جهت مخالف حرکت می‌کنند.) هرگاه یک الکترون و یک حفره از دو طرف ناحیهٔ تهی با هم ترکیب شوند، نور از این ناحیه گسیل می‌شود.

LED های تجارتی که برای ناحیهٔ مرئی طراحی شده‌اند معمولاً از گالیوم که به اندازهٔ مناسبی با اتمهای ارسنیک و فسفر آلاییده شده‌اند، ساخته می‌شوند. آرایشی که در آن ۶۰٪ جایگاههای غیر گالیوم با یونهای ارسنیک و ۴۰٪ بقیه با یونهای فسفر اشغال شده‌اند گافی با پهنای E_g حدود 1/8 eV ایجاد می‌کند، که مربوط به نور قرمز است. سایر آلایشها و آرایشهای گذار- تراز دیگر، ساختن LED هایی را که اساساً در هر ناحیهٔ موردنظری از طیفهای مرئی و نزدیک مرئی نور گسیل می‌کنند، امکان‌پذیر ساخته است.



شکل ۴۱-۱۷ مقطع یک LED (این وسیله حول محور مرکزی دارای تقارن دورانی است). مادهٔ نوع p، که بقدر کافی برای گسیل نور نازک است، به شکل یک قرص دایره‌ای است. اتصال به مادهٔ نوع p از طریق یک حلقهٔ فلزی دایره‌ای صورت می‌پذیرد که با قرص در پیرامون آن تماس دارد. ناحیه تهیِ میان مادهٔ نوع n و مادهٔ نوع p نشان داده نشده است.

فوتو- دیود

عبور جریان از یک پیوندگاه p-n که به طور مناسبی آرایش یافته باشد، می‌تواند نور ایجاد کند. عکس این مطلب نیز درست است؛ یعنی، تابش نور روی یک پیوندگاه p-n که به طور مناسبی آرایش یافته باشد، می‌تواند در مداری که شامل آن پیوندگاه است جریانی را به وجود آورد. این اساس **فوتو- دیود** است.

وقتی دگمه‌ای از دستگاه کنترل از راه دور تلویزیون را فشار می‌دهیم، یک LED در دستگاه کنترل، دنباله‌ای از تپهای نور فروسرخ رمزدار را گسیل می‌کند. وسیلهٔ گیرنده در تلویزیون، یک فوتو- دیود (دو پایانه‌ای) ساده است که نه تنها سیگنالهای فروسرخ را آشکار می‌کند، بلکه آنها را تقویت و به سیگنالهایی الکتریکی تبدیل می‌کند که تغییر کانال یا تنظیم صدا را از میان وظیفه‌هایی دیگر انجام می‌دهد.

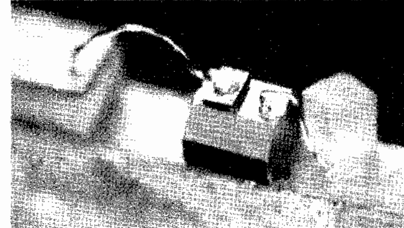
لیزر پیوندی

در آرایش شکل ۴۱-۱۶، الکترونهای زیادی در نوار رسانش مادهٔ نوع n و حفره‌های زیادی در نوار ظرفیت مادهٔ نوع p وجود دارند. بنابراین، یک **وارونی جمعیت** برای الکترونها وجود دارد؛ یعنی، در ترازهای انرژی بالاتر، الکترونهای بیشتری نسبت به ترازهای انرژی پایینتر قرار دارند. همانطور که در بخش ۴۰-۱۲ مطرح کردیم، این معمولاً یک شرط لازم، ولی نه کافی، برای عمل لیزری است.

هرگاه یک الکترون تنها از نوار رسانش به سوی نوار ظرفیت حرکت کند، انرژی خود را می‌تواند به صورت یک فوتون آزاد کند. این فوتون می‌تواند الکترون دومی را برای فرو افتادن در نوار ظرفیت برانگیخته کند، که بر اثر گسیل القایی موجب تولید فوتون دوم می‌شود. به این ترتیب، اگر جریان عبوری از پیوندگاه به قدر کافی بزرگ باشد، یک واکنش زنجیری از رخدادهای گسیل القایی می‌تواند پدیدار و نور لیزر ایجاد شود. برای رسیدن به این وضعیت، وجه‌های مقابل بلور پیوندی p-n باید تخت و موازی باشند، به گونه‌ای که نور بتواند در داخل بلور، رو به عقب و جلو بازتابیده شود. (به یاد آورید که در لیزر هلیوم- نئون شکل ۴۰-۲۱، یک جفت آینه این وظیفه را بر عهده داشتند.) بنابراین، یک پیوندگاه p-n می‌تواند مانند یک **لیزر پیوندی** عمل کند، که نور خروجی آن بسیار همدوس و طول موج آن به میزان بسیار بیشتری از نور حاصل از یک LED تیزتر است.

لیزرهای پیوندی در دستگاههای پخش دیسکهای فشرده (CD) قرار داده می‌شوند، تا با آشکارسازی بازتابها از دیسک در حال چرخش، برای تبدیل شیارهای میکروسکوپی دیسک به

صدا به کار گرفته شوند. آنها همچنین در دستگاههای مخابراتی نوری که اساس آنها بر مبنای تارهای نوری است به میزان زیادی مورد استفاده قرار می‌گیرند. شکل ۴۱-۱۸ مقیاس کوچک آنها را نشان می‌دهد. لیزرهای پیوندی معمولاً برای عمل در ناحیهٔ فرو سرخ طیف الکترومغناطیس طراحی می‌شوند، زیرا تارهای نوری در این ناحیه دارای دو "دریچه" (در $\lambda = ۱/۳۱ \mu m$ و $\lambda = ۱/۵۵ \mu m$) هستند که برای آنها جذب انرژی بر یکای طول تار کمینه است.



شکل ۴۱-۱۸ یک لیزر پیوندی که در آزمایشگاههای AT&T *بل* ساخته شده است. مکعب سمت راست، دانه‌ای از نمک است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۱-۷

یک LED از پیوندگاه *p-n* ساخته شده است که مادهٔ آن نیمرسانای Ga-As-p و گاف انرژی آن ۱/۹eV است. طول موج نور گسیل شده چقدر است؟

محاسبه‌ها: فرض می‌کنیم گذارها از انتهای نوار رسانش و به بالای نوار ظرفیت صورت می‌پذیرند؛ آنگاه معادلهٔ ۴۱-۱۱ برقرار است. از این معادله داریم

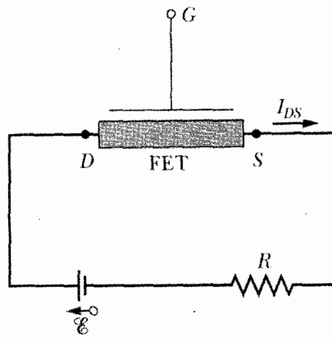
$$\lambda = \frac{hc}{E_g} = \frac{(۶/۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}\ J.s)(۳/۰۰ \times ۱۰^{۸} m/s)}{(۱/۹ eV)(۱/۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\ J/eV)}$$

$$= ۶/۵ \times ۱۰^{-۷}\ m = ۶۵۰\ nm \qquad \text{(پاسخ)}$$

نوری به این طول موج، قرمز است.

۴۱-۱۱ ترانزیستور

ترانزیستور یک وسیلهٔ نیمرسانای سه پایانه‌ای است که می‌تواند برای تقویت سیگنالهای ورودی به کار گرفته شود. شکل ۴۱-۱۹ یک ترانزیستور با اثر میدان (FET)[1] تعمیم یافته را نشان می‌دهد؛ که در آن، جریان الکترونها که از پایانهٔ S (*چشمه*) رو به سمت چپ، از طریق ناحیهٔ تیره به پایانهٔ D (*دررو*) می‌رسد، می‌تواند توسط میدان الکتریکی (دلیل عبارت "اثر میدان") ایجاد شده در داخل وسیله بر اثر یک پتانسیل الکتریکی مناسب اعمال شده بر پایانهٔ G (*دریچه*) کنترل شود. ترانزیستورها در انواع مختلفی در دسترس‌اند؛ ما فقط یک FET



شکل ۴۱-۱۹ مداری شامل یک ترانزیستور با اثر میدان تعمیم یافته که در آن الکترونها از پایانهٔ چشمهٔ S به پایانهٔ دررو D شارش می‌یابند. (جریان قراردادی I_{DS} در خلاف جهت آن است.) بزرگی I_{DS} به وسیلهٔ میدان الکتریکی ایجاد شده در داخل FET بر اثر پتانسیل اعمال شده به پایانهٔ دریچهٔ G کنترل می‌شود.

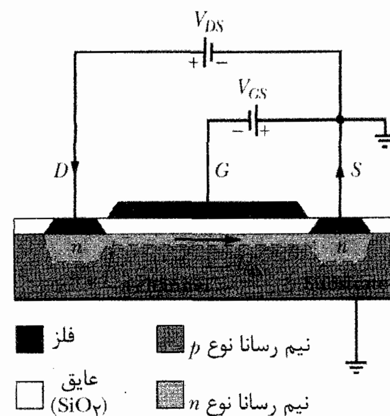
خاص موسوم به MOSFET، یا ترانزیستور اثر میدان نیمرسانای اکسید فلز[2]، را بررسی خواهیم کرد. MOSFET به عنوان وسیلهٔ پرکاری در صنعت الکترونیک نوین شناخته شده است.

در بسیاری از کاربردها، MOSFET فقط در دو وضعیت عمل می‌کند: وضعیتی که جریان I_{DS} دررو به چشمه، روشن است، ON، (دریچهٔ باز) یا وضعیتی که این جریان خاموش است، OFF، (دریچهٔ بسته). نخستین وضعیت می‌تواند نشان دهندهٔ ۱ و دیگری نشان دهندهٔ ۰ در حساب دو- دویی باشد که منطق دیجیتال بر مبنای آن است، و بنابراین، MOSFET ها می‌توانند در مدارهای منطقی دیجیتال به کار گرفته شوند. تغییر بین حالتهای ON و OFF می‌تواند با سرعت بالایی رخ دهد، به گونه‌ای که داده‌های منطقی دو- دویی می‌توانند با سرعت بسیار زیادی از مدارهای مبتنی بر MOSFET بگذرند. به طور متداول، برای استفاده در انواع ابزارهای الکترونیکی، MOSFETهایی به طول حدود ۵۰۰nm، در حدود طول موج نور زرد، ساخته شده‌اند.

شکل ۴۱-۲۰ ساختار اصلی یک MOSFET را نشان می‌دهد. تکْ بلور سیلیسیوم یا هر نیمرسانای دیگری برای تشکیل مادهٔ نوع p که به عنوان *پایه* عمل می‌کند، قدری آلاییده می‌شود. با نشاندن آلاینده‌های نوع n که "فراآلاییده" شده‌اند روی این پایه، دو "جزیره" از مادهٔ نوع n ایجاد می‌شود که دررو D و چشمهٔ S، را تشکیل می‌دهند. دررو و چشمه توسط کانال نازکی از مادهٔ نوع n، موسوم به **کانال n**، به هم متصل می‌شوند. یک لایهٔ عایق نازک از جنس سیلیسیوم دی اکسید (دلیل حرف O در MOSFET) روی بلور نشانده می‌شود و به وسیلهٔ دو پایانهٔ فلزی (دلیل حرف M) به D و S رخنه می‌کند، به گونه‌ای که تماس الکتریکی با دررو و چشمه بتواند صورت پذیرد. یک لایهٔ فلزی نازک، دریچهٔ G، در مقابل کانال n

1. field-effect transistor

2. metal-oxide-semiconductor-field-effect transistor



شکل ۴۱-۲۰ یک نوع خاص از ترانزیستور اثر میدان که به نام MOSFET شناخته می‌شود. بزرگی جریان قراردادی دررو- به- چشمهٔ I_{DS} که از کانال n می‌گذرد، به وسیلهٔ اختلاف پتانسیل V_{GS} اعمال شده بین چشمهٔ S و دریچهٔ G ، کنترل می‌شود. ناحیهٔ تهی که بین مادهٔ نوع n و پایهٔ نوع p وجود دارد، نشان داده نشده است.

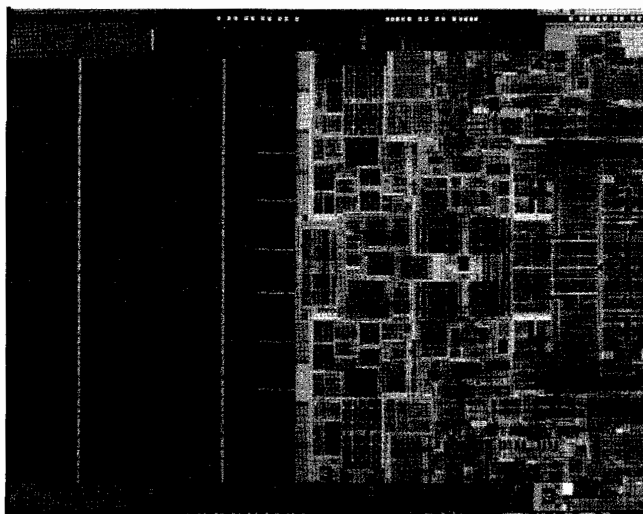
نشانده می‌شود. توجه کنید که دریچه هیچ تماس الکتریکی با ترانزیستور ندارد، زیرا توسط لایهٔ اکسید عایق از آن جدا شده است.

نخست وضعیتی را در نظر بگیرید که چشمه و پایهٔ نوع p به زمین متصل شده‌اند (در پتانسیل صفر) و دریچه "شناور" است؛ یعنی، دریچه به چشمهٔ خارجی emf اتصال ندارد. پتانسیل V_{DS} را که بین دررو و چشمه اعمال شده است به گونه‌ای در نظر بگیرید که دررو مثبت باشد. آنگاه، الکترونها از طریق کانال n ، از چشمه به دررو شارش می‌یابند، و جریان قراردادی I_{DS} ، همانطور که در شکل ۴۱-۲۰ نشان داده شده است، در کانال n از دررو به چشمه خواهد بود.

حال پتانسیل V_{GS} را که به دریچه اعمال شده است به گونه‌ای در نظر بگیرید که نسبت به چشمه، منفی باشد. دریچهٔ منفی، داخل قطعه یک میدان الکتریکی (دلیل عبارت "اثر میدان") برقرار می‌کند که تمایل دارد الکترونها را رو به پایین از کانال n به سوی پایه براند. این جنبش الکترونی، ناحیهٔ تهی بین کانال n و پایه را (که به طور طبیعی ظاهر می‌شود) به بهای تنگ شدن کانال n ، پهن می‌کند. پهنای کم شدهٔ کانال n ، که با کاهش تعداد حاملهای بار در این کانال همراه است، مقاومت کانال را افزایش و در نتیجه، جریان I_{DS} را کاهش می‌دهد. با مقدار مناسب V_{GS} ، این جریان می‌تواند به طور کامل قطع شود؛ بنابراین، با کنترل V_{GS} می‌توان MOSFET را بین دو وضعیت ON و OFF تغییر داد.

حاملهای بار در پایه شارش نمی‌کنند، زیرا پایه (۱) به مقدار کمی آلاییده شده است، (۲) رسانای خوبی نیست، و (۳) از کانال n و دو جزیرهٔ نوع n توسط یک ناحیهٔ تهی عایق، که در شکل ۴۱-۲۰ به طور خاص نشان داده نشده، جدا شده است.

همانطور که شکل ۴۱-۱۲ ب نشان می‌دهد، یک‌چنین ناحیهٔ تهی همواره در مرز میان مادهٔ نوع n و مادهٔ نوع p وجود دارد. رایانه‌ها و سایر وسایل الکترونیکی، از هزاران (اگر نگوییم میلیونها) ترانزیستور و سایر قطعه‌های الکترونیکی، از قبیل خازنها و مقاومتها، استفاده می‌کنند. اینها به صورت واحدهای جداگانه گردآورده نمی‌شوند، بلکه به طرز ماهرانه‌ای در یک تکْ **تراشهٔ** نیمرسانا، با میلیونها ترانزیستور و قطعه‌های الکترونیکی دیگر تشکیل یک **مدار یکپارچه** را می‌دهند، شکل ۴۱-۲۱.



شکل ۴۱-۲۱ یک مدار یکپارچه برای پردازندهٔ رایانه‌های لپ‌تاب

تقویت کننده‌های گیتار راک

نوسانهای مکانیکی که نوازنده‌ای در سیم یک گیتار الکتریکی ایجاد می‌کند، موجب القای نوساناهای الکتریکی در پیچهٔ پیکاپی می‌شود که درست زیر سیم قرار دارد. این نوسانهای الکتریکی باید تقویت شوند، به گونه‌ای که بتوانند یک دستگاه پخش صدا را راه بیاندازند، تا صدا به گوش شنوندگان برسد. وقتی گیتار الکتریکی در اوایل دههٔ ۶۰ میان نوازندگان راک اشاعه پیدا کرد، در تقویت‌کننده‌ها از لامپهای خلأ استفاده می‌شد، زیرا تقویت‌کننده‌های ترانزیستوری هنوز قابل اعتماد نبودند. با حرکت راک به سوی توهم‌زایی و متعاقب آن به سوی نوعی موسیقی موسوم به heavy metal ، نوازنده‌ها برای آنکه شنوندگانشان را به لرزه بیاندازند، درجهٔ تقویت کننده‌های خود را تا آخر بالا بردند. چنین تقویت صدای بالایی توسط تقویت کننده‌های لامپی موجب از شکل انداختن صدای نهایی می‌شد، و این تغییر صدا به سرعت جزئی از صدای راک شد.

وقتی درجهٔ تقویت‌کننده‌های ترانزیستوری تا آخر بالا برده شوند، چنین از شکل انداختن صدایی ایجاد نمی‌کنند- گفته می‌شود که آنها صدای "تمیزی" ایجاد می‌کنند. از این رو، نوازنده‌های راک از این تقویت‌کننده‌ها تا امروز دوری جسته‌اند، زیرا آنها نمی‌توانند آن صدای "ویژه" راک را تولید کنند. جیمی

هندریکس[1] ، که نخستین کسی بود که گیتار الکتریکی و تقویت کننده‌اش را به عنوان یک آلت موسیقی مرکب مورد بررسی قرار داد. یک بار چنین گفت: "من واقعاً تقویت کننده‌های لامپی *مارشال* قدیمی را دوست دارم، زیرا وقتی ... درجهٔ آنها تا آخر بالا برده می‌شود، دیگر هیچ چیز جلودار آنها نیست ..."

بازنگری و خلاصهٔ درس

فلزها، نیمرساناها، و عایقها سه خاصیت الکتریکی که می‌توانند برای تمیزدادن جامدهای بلورین مورد استفاده قرار گیرند عبارت‌اند از **مقاومت ویژهٔ** ρ ، ضریب دمایی مقاومت ویژهٔ α ، و **چگالی عددی حاملهای بار** n. جامدها را می‌توان به سه دستهٔ گسترده تقسیم کرد: **عایقها** (با ρ خیلی بزرگ)، **فلزها** (با ρ کوچک، α مثبت و کوچک، n بزرگ)، و **نیمرساناها** (با ρ بزرگ، α منفی و بزرگ، n کوچک).

ترازها و گافهای انرژی در یک جامد بلورین یک اتم منزوی می‌تواند در فقط مجموعهٔ گسسته‌ای از ترازهای انرژی وجود داشته باشد. وقتی اتمها برای تشکیل جامد، کنار هم قرار می‌گیرند، ترازهای اتمهای منفرد برای تشکیل **نوارهای** انرژی گسستهٔ جامد در هم می‌آمیزند. این نوارهای انرژی با **گافهای** انرژی، که هر یک مربوط به گستره‌ای از انرژیهایی است که هیچ الکترونی نمی‌تواند آنها را دارا باشد، از هم جدا شده‌اند.

هر نوار انرژی از تعداد خیلی زیادی ترازهای بسیار نزدیک به هم ساخته شده است. اصل طرد پاؤلی بیان می‌دارد که فقط یک الکترون می‌تواند هر یک از این ترازها را اشغال کند.

عایقها در یک عایق، بالاترین نوار شامل الکترونهایی است که آن را کاملاً پر کرده‌اند، و این نوار، از نوار تهی بالای آن با گاف انرژی چنان بزرگی جدا شده است، که اساساً الکترونها هرگز نمی‌توانند با هر قدر اغتشاش گرمایی، از این گاف پرش کنند.

فلزها در یک فلز، بالاترین نواری که شامل الکترونهاست فقط به طور جزئی پر شده است. انرژی بالاترین تراز پر شده در دمای $\circ K$ ، **انرژی فرمی** E_F برای فلز نامیده می‌شود؛ برای مس، $E_F = ۷/۰\ eV$ است.

الکترونهای واقع در نوار پرشدهٔ جزئی، الکترونهای رسانش هستند و تعداد آنها برابر است با

$$\left(\text{تعداد الکترونهای ظرفیت در هر اتم}\right) \times \left(\text{تعداد اتمهای نمونه}\right) = \left(\text{تعداد الکترونهای رسانش در نمونه}\right) \qquad (۲-۴۱)$$

تعداد اتمهای نمونه با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\left(\text{تعداد اتمهای نمونه}\right) = \frac{M_{sam}\ \text{جرم نمونه}}{\text{جرم اتمی}}$$

$$= \frac{M_{sam}\ \text{جرم نمونه}}{(M\ \text{جرم مولی})/N_A}$$

$$= \frac{(\text{حجم}\ V\ \text{نمونه})(\text{چگالی ماده})}{(M\ \text{جرم مولی})/N_A} \qquad (۴-۴۱)$$

چگالی عددی n الکترونهای رسانش عبارت است از

$$n = \frac{\text{تعداد الکترونهای رسانش در نمونه}}{\text{حجم}\ V\ \text{نمونه}} \qquad (۳-۴۱)$$

تابع **چگالی حالتها** $N(E)$ عبارت است از تعداد ترازهای انرژی موجود بر یکای حجم نمونه بر یکای بازهٔ انرژی، و با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$N(E) = \frac{۸\sqrt{۲}\pi m^{۳/۲}}{h^۳}E^{۱/۲} \quad (\text{چگالی حالتها}) \quad (m^{-۳}J^{-۱}) \qquad (۵-۴۱)$$

که در آن $m(=۹/۱۰۹\times۱۰^{-۳۱}\ kg)$ جرم الکترون، $h(=۶/۶۲۶\times۱۰^{-۳۴}\ J.s)$ ثابت پلانک، و E انرژی بر حسب ژول است که در آن $N(E)$ را می‌خواهیم محاسبه کنیم. برای تصحیح این معادله، به گونه‌ای که مقدار E بر حسب eV و مقدار $N(E)$ بر حسب $m^{-۳}eV^{-۱}$ باشد، طرف راست آن را در $e^{۳/۲}$ ضرب می‌کنیم (که $e = ۱/۶۰۲\times۱۰^{-۱۹}\ C$ است).

احتمال اشغال شدن $P(E)$ ، احتمالی که یک حالت موجود با یک الکترون اشغال شود، عبارت است از

$$P(E) = \frac{۱}{e^{(E-E_F)/kT}+۱} \quad (\text{احتمال اشغال شدن}) \qquad (۶-۴۱)$$

چگالی حالتهای اشغال شده $N_\circ(E)$ با حاصلضرب دو کمیت در معادله‌های (۴۱-۵) و (۴۱-۶) داده می‌شود

$$N_\circ(E) = N(E)P(E) \quad (\text{چگالی حالتهای اشغال شده}) \qquad (۷-۴۱)$$

انرژی فرمی برای یک فلز را می‌توان از انتگرالگیری $N_\circ(E)$ به ازای $T=\circ$ ، از $E=\circ$ تا $E=E_F$ ، به دست آورد. نتیجه چنین می‌شود

$$E_F = \left(\frac{۳}{۱۶\sqrt{۲}\pi}\right)^{۲/۳}\frac{h^۲}{m}n^{۲/۳} = \frac{\circ/۱۲۱h^۲}{m}n^{۲/۳} \qquad (۹-۴۱)$$

نیمرساناها ساختار نواری یک نیمرسانا شبیه ساختار نواری یک عایق است، با این تفاوت که پهنای گاف E_g در نیمرسانا بسیار کوچکتر است. برای سیلیسیوم (یک نیمرسانا) در دمای اتاق، اغتشاش گرمایی موجب می‌شود که تعداد کمی الکترون با برجای گذاشتن تعداد یکسانی حفره در **نوار ظرفیت،** به **نوار رسانش** بالا روند. هم الکترونها و هم حفره‌ها به عنوان حاملهای بار عمل می‌کنند.

1. Jimi Hendrix

تعداد الکترونها در نوار رسانش سیلیسیوم می‌تواند توسط آلایش با مقدار اندکی فسفر، به میزان زیادی افزایش یابد، که این به ساخت **مادهٔ نوع n** می‌انجامد. تعداد حفره‌ها در نوار ظرفیت می‌تواند توسط آلایش با آلومینیوم، به میزان زیادی افزایش یابد، که این به ساخت **مادهٔ نوع p** می‌انجامد.

پیوندگاه p-n **پیوندگاه p-n**، یک تکْ بلور نیمرساناست که یک نیمهٔ آن برای تشکیل مادهٔ نوع p و نیمهٔ دیگر آن برای تشکیل مادهٔ نوع n آلاییده شده است، که این دو نوع در صفحهٔ پیوندگاه به هم می‌رسند. در تعادل گرمایی، پدیده‌های زیر در این صفحه رخ می‌دهد:

حاملهای اکثریت (الکترونها در طرف n و حفره‌ها در طرف p) در دو سر صفحهٔ پیوندگاه پخش می‌شوند، و بدین ترتیب یک **جریان پخشی** I_{diff} ایجاد می‌شود.

حاملهای اقلیت (حفره‌ها در طرف n و الکترونها در طرف p) از دو سر صفحهٔ پیوندگاه می‌گذرند، و بدین ترتیب یک **جریان سوقی** I_{drift} ایجاد می‌شود. این دو جریان که از لحاظ بزرگی برابرند، جریان خالص صفر را ایجاد می‌کنند.

یک **ناحیهٔ تهی**، شامل مقدار زیادی یونهای بخشنده و پذیرنده، در امتداد صفحهٔ پیوندگاه ایجاد می‌شود.

یک **اختلاف پتانسیل تماسی** $V_\circ$ در دو سر ناحیهٔ تهی ظاهر می‌شود.

کاربردهای پیوندگاه p-n هرگاه اختلاف پتانسیلی به دو سر پیوندگاه p-n یک وسیله اعمال شود، آن وسیله، الکتریسیته را برای یک قطبیتِ اختلاف پتانسیل اعمال شده با سادگی بیشتری از قطبیت دیگر هدایت می‌کند. بنابراین، یک پیوندگاه p-n می‌تواند به صورت **یکسوساز پیوندی** عمل کند.

هرگاه یک پیوندگاه p-n بایاس مستقیم شود، می‌تواند نور گسیل کند و بنابراین، می‌تواند به صورت یک **دیود نور – گسیل** (LED) عمل کند. طول موج نور گسیل شده با رابطهٔ زیر داده می‌شود

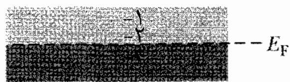
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{E_g} \qquad (۱۱-۴۱)$$

یک پیوندگاه p-n که شدیداً به طور مستقیم بایاس شده است، با وجوه انتهایی موازی، می‌تواند به صورت یک **لیزر پیوندی**، که نور را در طول موج معین و تیزی گسیل می‌دارد، عمل کند.

پرسشها

۱– احتمال اشغال در انرژی معین E_1 در نوار ظرفیت یک فلز در دمای ۳۰۰K برابر ۶۰٪ است. آیا E_1 بالای انرژی فرمی است یا پایین آن؟

۲– شکل ۴۱-۲۲ سه تراز مشخص شده در یک نوار و همچنین تراز فرمی را برای یک فلز نشان می‌دهد. دما برابر ۰K است. سه تراز را اگر دما (الف) ۰K، (ب) ۱۰۰۰K باشد بنا بر احتمال اشغال به ترتیب بزرگی مرتب کنید. (پ) در دمای آخری تراز را بنا بر چگالی حالت N(E) به ترتیب بزرگی مرتب کنید.



شکل ۴۱-۲۲ پرسش ۲

۳– اگر دمای یک قطعه فلز افزایش یابد، آیا احتمال اشغال ۰/۱eV در بالای تراز فرمی افزایش می‌یابد یا کاهش یا یکسان باقی می‌ماند؟

۴– شکل ۴۱-۱ الف، ۱۴ اتم را نشان می‌دهد که نمایشگر یاختهٔ یکهٔ مس است. چون هر یک از این اتمها با یک یا چند یاختهٔ یکهٔ مجاور خود شریک‌اند، فقط کسری از هر اتم متعلق به یاختهٔ یکهٔ نشان داده شده است. تعداد اتمها در هر یاختهٔ یکهٔ مس چقدر است؟ (برای پاسخ، کسر اتمهای متعلق به هر یاختهٔ یکه را بیابید.)

۵– شکل ۴۱-۱ ب، ۱۸ اتم را نشان می‌دهد که نمایشگر یاختهٔ یکهٔ سیلیسیوم است. ولی، چهارده تا از این اتمها، با یک یا چند یاختهٔ یکهٔ مجاور خود شریک‌اند. تعداد اتمها در هر یاختهٔ یکهٔ سیلیسیوم چقدر است؟ (پرسش ۴ را ببینید.)

۶– در شبکهٔ سیلیسیوم، اگر بخواهید (الف) یک الکترون رسانش، (ب) یک الکترون ظرفیت، و (پ) یک الکترون مربوط به زیر لایهٔ $2p$ اتم سیلیسیوم منزوی را بیابید، به کجا باید نگاه کنید؟

۷– آیا تندی سوقی v_d الکترونهای رسانش در یک سیم مسی حامل جریان تقریباً برابر تندی فرمی v_F مس است، خیلی بزرگتر از آن است، یا خیلی کوچکتر از آن؟

۸– یک اتم منزوی ژرمانیوم که دارای ۳۲ الکترون است در زیر لایه‌هایی مطابق با آرایش زیر مرتب شده‌اند

$$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^2\ 4p^2$$

این عنصر دارای همان ساختار بلوری سیلیسیوم است و مانند سیلیسیوم، یک نیمرساناست. کدامیک از این الکترونها، نوار ظرفیت ژرمانیوم بلورین را تشکیل می‌دهند؟

۹– بازهٔ بین ترازهای انرژی مجاور در بالاترین نوار اشغال شدهٔ فلز به کدامیک از موارد زیر بستگی دارد؟ (الف) ماده‌ای که نمونه از آن ساخته شده است، (ب) اندازهٔ نمونه، (پ) وضعیت تراز در نوار، (ت) دمای نمونه، (ث) انرژی فرمی فلز.

۱۰– در پیوندگاههای p-n بایاس شدهٔ نشان داده شده در شکل ۴۱-۱۵، یک میدان الکتریکی $\vec{E}$ در هر یک از دو ناحیهٔ تهی وجود دارد، که وابسته به اختلاف پتانسیلی است که به دو سر این ناحیه اعمال شده است. (الف) آیا جهت $\vec{E}$ از چپ به

راست است یا از راست به چپ؟ (ب) آیا بزرگی آن برای بایاس مستقیم بزرگتر است یا برای بایاس معکوس؟

۱۱- گافهای انرژی E_g برای نیمرساناهای سیلیسیوم و ژرمانیوم به ترتیب برابر با ۱/۱۲eV و ۰/۶۷ eV است. در صورت وجود، کدامیک از عبارتهای زیر درست‌اند؟ (الف) هر دو ماده دارای چگالی عددی حاملهای بار یکسانی در دمای اتاق هستند. (ب) در دمای اتاق، ژرمانیوم دارای چگالی عددی حاملهای بار بزرگتری از سیلیسیوم است. (پ) در هر دو ماده، چگالی عددی حاملهای بار از مقدار آن برای حفره‌ها بیشتر است. (ت) برای هر دو ماده، چگالی عددی الکترونها برابر با مقدار آن برای حفره‌هاست.

مسئله‌ها

GO مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
•-•••: تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

بخش ۴۱-۵ فلزها

•۱- احتمال آنکه یک حالت ۰/۰۶۲۰ eV بالای انرژی فرمی در (الف) $T = ۰\text{K}$ و (ب) $T = ۳۲۰\text{ K}$ اشغال شود، چقدر است؟ **SSM**

•۲- چگالی عددی الکترونهای رسانش در طلا، که یک فلز تک‌ظرفیتی است، چقدر است؟ از جرم مولی و چگالی مندرج در پیوست ج استفاده کنید.

•۳- (الف) نشان دهید که معادلهٔ ۴۱-۵ را می‌توان به صورت $N(E) = CE^{1/2}$ نوشت. (ب) C را بر حسب متر و الکترون-ولت محاسبه کنید. (پ) $N(E)$ را به ازای $E = ۵/۰۰\text{eV}$ به دست آورید.

•۴- با استفاده از معادلهٔ ۴۱-۹ ثابت کنید انرژی فرمی مس برابر ۷/۰ eV است.

•۵- مس، یک فلز تک‌ظرفیتی، دارای جرم مولی ۶۳/۵۴g/mol و چگالی ۸/۹۶g/cm³ است. چگالی عددی n الکترونهای رسانش در مس چقدر است؟

•۶- یک حالت ۶۳meV بالای تراز فرمی دارای احتمال اشغال شدن ۰/۰۹۰ است. احتمال اشغال شدن یک حالت ۶۳meV زیر تراز فرمی چقدر است؟

•۷- نشان دهید معادلهٔ ۴۱-۹ را می‌توان به صورت $E_F = An^{2/3}$ نوشت، که در آن ثابت A دارای مقدار ۳/۶۵×۱۰⁻¹⁹m².eV است.

•۸- چگالی حالتهای $N(E)$ را برای یک فلز در انرژی $E = ۸/۰\text{ eV}$ محاسبه کنید و نشان دهید که پاسخ شما با منحنی ۴۱-۶ سازگار است.

••۹- انرژی فرمی مس برابر با ۷/۰۰eV است. برای مس در دمای ۱۰۰۰K، (الف) انرژی تراز انرژیی را که احتمال اشغال شدن آن توسط یک الکترون برابر ۰/۹۰۰۰ است، بیابید. به ازای این انرژی (ب) چگالی حالتها $N(E)$ و (پ) چگالی حالتهای اشغال شده $N_0(E)$ را محاسبه کنید. GO

••۱۰- فرض کنید حجم کلّ یک نمونهٔ فلزی برابر با مجموع حجم اشغال شده توسط یونهای فلزی سازندهٔ شبکه و حجم (مجزای) اشغال شده توسط الکترونهای رسانش است. چگالی و جرم مولی سدیم (یک فلز) به ترتیب برابر با ۹۷۱kg/m³ و ۲۳/۰g/mol است؛ فرض کنید شعاع Na^+ برابر ۹۸/۰pm است. (الف) چه درصدی از حجم نمونهٔ سدیم فلزی توسط الکترونهای رسانش آن اشغال شده است؟ (ب) محاسبهٔ مشابهی را برای مس، که چگالی، جرم مولی، و شعاع یونی آن به ترتیب ۸۹۶۰kg/m³، ۶۳/۵ g/mol و ۱۳۵ pm است، انجام دهید. (پ) فکر می‌کنید برای کدامیک از این فلزها، الکترونهای رسانش بیشتر شبیه یک گاز الکترون- آزاد رفتار می‌کند؟

••۱۱- در معادلهٔ ۴۱-۶ فرض کنید $E - E_F = \Delta E = ۱/۰۰\text{eV}$ است. (الف) در چه دمایی نتیجهٔ حاصل از این معادله به اندازهٔ ٪۱/۰ از نتیجه‌ای که با استفاده از معادلهٔ کلاسیکی بولتزمن، $P(E) = e^{-\Delta E/kT}$، به دست می‌آید، تفاوت دارد؟ **SSM WWW**

••۱۲- انرژی فرمی طلا، که یک فلز تک‌ظرفیتی با جرم مولی ۱۹۷g/mol و چگالی ۱۹/۳g/cm³ است، چقدر است؟

••۱۳- انرژی فرمی برای نقره ۵/۵eV است. در $T = ۰°\text{C}$، احتمال آنکه حالتهایی با انرژیهای زیر اشغال شده باشد چقدر است؟ (الف) ۴/۴eV، (ب) ۵/۴eV، (پ) ۵/۵eV، (ت) ۵/۶eV، و (ث) ۶/۴eV؟ (ج) در چه دمایی، احتمال آنکه حالتی با انرژی $E = ۵/۶\text{eV}$ اشغال شود برابر با ۰/۱۶ است. **SSM**

••۱۴- احتمال پرش الکترون از گاف انرژی E_g در الماسی که جرمی برابر جرم زمین دارد، چقدر است؟ از نتیجهٔ مسئلهٔ نمونهٔ ۴۱-۱ و جرم مولی کربن در پیوست ج استفاده کنید؛ فرض کنید که در الماس، یک الکترون ظرفیت در هر اتم کربن وجود دارد.

●●۱۵- $N_۰(E)$ ، چگالی حالتهای اشغال شده، را برای مس در دمای $T=۱۰۰۰K$ و به ازای انرژی E برابر (الف) ۴/۰۰eV، (ب) ۶/۷۵eV، (پ) ۷/۰۰eV، (ت) ۷/۲۵eV، و (ث) ۹/۰۰eV محاسبه کنید. پاسخهای خود را با منحنی شکل ۴۱-۷ ب مقایسه کنید. انرژی فرمی مس برابر ۷/۰۰eV است.

●●۱۶- نشان دهید احتمال $P(E)$ که یک تراز انرژی با انرژی E اشغال نشده باشد عبارت است از

$$P(E)=\frac{۱}{e^{-\Delta E/kT}+۱}$$

که در آن $\Delta E=E-E_F$ است.

●●۱۷- نقره یک فلز تک‌ظرفیتی است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) چگالی عددی الکترونهای رسانش، (ب) انرژی فرمی، (پ) تندی فرمی، و (ت) طول موج *دوبروی* وابسته به این تندی الکترون. برای داده‌های مورد نیاز دربارهٔ نقره، پیوست ج را ببینید. **SSM WWW**

●●۱۸- در $T=۳۰۰K$ ، در چه فاصله‌ای بالای انرژی فرمی حالتی وجود دارد که احتمال اشغال شدن آن توسط یک الکترون رسانش برابر با ۰/۱۰ است؟

●●۱۹- انرژی فرمی آلومینیوم برابر با ۱۱/۶ eV است؛ چگالی و جرم مولی آن به ترتیب برابر با $۲/۷۰ g/cm^۳$ و ۲۷/۰g/mol است. با استفاده از این داده‌ها، تعداد الکترونهای رسانش در هر اتم را تعیین کنید.

●●۲۰- چگالی عددی (تعداد بر یکای حجم) را برای (الف) مولکولهای گاز اکسیژن در دمای $۰/۰^\circ C$ و ۰ و فشار ۱/۰atm و (ب) الکترونهای رسانش مس، محاسبه کنید. (پ) نسبت دومی به اولی چقدر است؟ فاصلهٔ متوسط بین (ت) مولکولهای اکسیژن و (ث) الکترونهای رسانش، با فرض اینکه این فاصله، طول ضلع مکعبی با حجمی برابر با حجم قابل دسترس هر ذره (مولکول یا الکترون) باشد، چقدر است؟

●●۲۱- نشان دهید، در $T=۰K$ ، انرژی متوسط E_{avg} الکترونهای رسانش در فلز برابر با $\frac{۳}{۵}E_F$ است. (*راهنمایی:* بنا بر تعریف متوسط، $E_{avg}=(۱/n)\int EN_۰(E)\,dE$ است، که در آن n چگالی عددی حاملهای بار است.) **SSM**

●●۲۲- نمونه‌ای از یک فلز معین دارای حجم $۴/۰\times۱۰^{-۵} m^۳$ است. فلز دارای چگالی $۹/۰ g/cm^۳$ و جرم مولی ۶۰g/mol است. اتمها دوظرفیتی‌اند. تعداد الکترونهای رسانش (یا الکترونهای ظرفیت) در نمونه چقدر است؟

●●۲۳- با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۲۱، انرژی جنبشی انتقالی کل الکترونهای رسانش در $۱/۰۰ cm^۳$ مس را در دمای $T=۰K$ محاسبه کنید.

●●۲۴- اگر حجم نمونه‌ای $۵/۰۰\times۱۰^{-۸} m^۳$، تراز فرمی ۵/۰۰eV و دما ۱۵۰۰K باشد، تعداد حالتهای اشغال شده در گسترهٔ انرژی ۰/۰۳۰۰eV که در ارتفاع ۶/۱۰eV در نوار ظرفیت قرار دارد، چقدر است؟ GO

●●۲۵- روی فلزی دوظرفیتی است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) چگالی عددی الکترونهای رسانش، (ب) انرژی فرمی، (پ) تندی فرمی، و (ت) طول موج *دوبروی* وابسته به این تندی الکترون. برای داده‌های موردنیاز دربارهٔ روی، پیوست ج را ببینید.

●●۲۶- مادهٔ معینی دارای جرم مولی ۲۰/۰g/mol، انرژی فرمی ۵/۰۰eV و ۲ الکترون ظرفیت در هر اتم است، چگالی $(g/cm^۳)$ چقدر است؟

●●۲۷- در $T=۱۰۰۰K$ ، کسر الکترونهای رسانش در یک فلز که دارای انرژیهایی بزرگتر از انرژی فرمی هستند برابر با مساحت زیر منحنی شکل ۴۱-۷ ب پس از E_F بخش بر مساحت کل زیر منحنی است. محاسبهٔ این مساحتها با انتگرالگیری مستقیم، دشوار است. ولی، تقریبی برای این کسر در هر دمای T عبارت است از

$$frac=\frac{۳kT}{۲E_F}$$

توجه کنید که، درست همانطور که انتظار داریم، در $T=۰K$ ، $frac=۰$ است. این کسر برای مس در (الف) ۳۰۰K و (ب) ۱۰۰۰K چقدر است؟ برای مس، $E_F=۷/۰ eV$ است. (پ) پاسخهای خود را با استفاده از معادلهٔ ۴۱-۷، با انتگرالگیری عددی بیازمایید.

●●۲۸- در چه دمایی، ۱/۳۰٪ از الکترونهای رسانش در لیتیوم (یک فلز) انرژیهایی بزرگتر از انرژی فرمی E_F ، که برابر ۴/۷۰ eV است، دارند؟ (به مسئلهٔ ۲۴ نگاه کنید.)

●●۲۹- (الف) با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۲۱ و اینکه انرژی فرمی مس برابر ۷/۰۰eV است، در صورتی که بتوانیم اصل طرد پاولی را به طور لحظه‌ای نادیده بگیریم، تعیین کنید چقدر انرژی توسط الکترونهای رسانش یک سکهٔ مسی به جرم ۳/۱۰g آزاد می‌شود. (ب) این مقدار از انرژی چه مدت یک لامپ ۱۰۰W را روشن نگه می‌دارد؟ (*توجه:* هیچ راهی برای نادیده گرفتن اصل پاولی وجود ندارد!)

●●۳۰- فلز معینی دارای $۱/۷۰\times۱۰^{۲۸}$ الکترون رسانش در متر مکعب است. نمونهٔ معینی از این فلز دارای حجم $۶/۰۰\times۱۰^{-۶} m^۳$ و دمای ۲۰۰K است. تعداد حالتهای اشغال شده در گسترهٔ انرژی $۳/۲۰\times۱۰^{-۲۰} J$ که در انرژی $۴/۰۰\times۱۰^{-۱۹} J$ قرار دارد چقدر است؟ (*هشدار:* از گرد کردن در نمایی دوری کنید). GO

بخش ۴۱-۶ نیمرساناها

•۳۱- (الف) بیشینهٔ طول موج نوری که بتواند الکترونی را در نوار ظرفیت الماس تحریک کند تا به نوار رسانش برسد چقدر است؟ گاف انرژی 5/50 eV است. (ب) این طول موج در چه بخشی از طیف الکترومغناطیسی قرار دارد؟ **SSM**

••۳۲- در یک مدل ساده شده از یک نیمرسانای آلاییده نشده، توزیع واقعی حالتهای انرژی را می‌توان با وضعیتی که در آن N_v حالت در نوار ظرفیت، که همهٔ آنها دارای انرژی یکسان E_v هستند، و N_c حالت در نوار رسانش، که همهٔ آنها دارای انرژی یکسان E_c هستند، جایگزین کرد. تعداد الکترونها در نوار رسانش برابر با تعداد حفره‌ها در نوار ظرفیت است. (الف) نشان دهید که این شرط آخر مبین آن است که

$$\frac{N_c}{\exp(\Delta E_c/kT)+1}=\frac{N_v}{\exp(\Delta E_v/kT)+1}$$

که در آن

$$\Delta E_c = E_c - E_F \qquad \text{و} \qquad \Delta E_v = -(E_v - E_F)$$

(ب) اگر تراز فرمی در گاف میان دو نوار بوده و فاصلهٔ آن از هر نوار نسبت به kT بزرگ باشد، آنگاه جمله‌های نمایی در مخرج کسرها غالب می‌شوند. در این شرایط، نشان دهید که

$$E_F=\frac{(E_c+E_v)}{2}+\frac{kT\ln(N_v/N_c)}{2}$$

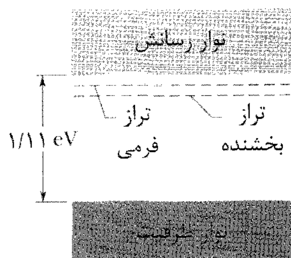
و اینکه اگر $N_v \approx N_c$ باشد، تراز فرمی برای نیمرسانای آلاییده نشده به مرکز گاف نزدیک است.

••۳۳- تابع احتمال اشغال‌شدگی (معادلهٔ ۴۱-۶) را می‌توان هم برای نیمرساناها و هم فلزها به کار برد. در نیمرساناها، انرژی فرمی به نقطهٔ میانی گاف میان نوار ظرفیت و نوار رسانش نزدیک است. برای ژرمانیوم، پهنای گاف برابر با 0/67 eV است. احتمال آنکه (الف) حالتی در کف نوار رسانش اشغال شود و (ب) حالتی در بالای نوار ظرفیت اشغال نشود، چقدر است؟ فرض کنید $T = 290\,K$ است. (*توجه*: در نیمرسانای خالص، انرژی فرمی به طور متقارنی میان جمعیت الکترونهای رسانش و جمعیت حفره‌ها، و بنابراین، در مرکز گاف قرار دارد. لازم نیست که حالتی در محل انرژی فرمی موجود باشد.)

••۳۴- ترکیب شیمیایی گالیوم ارسنید معمولاً در نیمرسانایی با گاف انرژی $E_g = 1/43\,eV$ به کار برده می‌شود. ساختار بلوری آن مانند سیلیسیوم است، با این تفاوت که نیمی از اتمهای سیلیسیوم با اتمهای گالیوم و نیم دیگر با اتمهای ارسنیک جایگزین شده‌اند. در تشابه با نقش شکل ۴۱-۹ الف، نقش مسطحی از شبکهٔ گالیوم ارسنید رسم کنید. بار خالص مغز یونی (الف) گالیوم و (ب) ارسنید چقدر است؟ (پ) چند الکترون در هر پیوند وجود دارد؟ (*راهنمایی*: به جدول تناوبی پیوست چ نگاه کنید.)

بخش ۴۱-۷ نیمرساناهای آلاییده

•••۳۵- آلایش، انرژی فرمی یک نیمرسانا را تغییر می‌دهد. سیلیسیوم را، با گاف 1/11 eV میان سقف نوار ظرفیت و کف نوار رسانش در نظر بگیرید. در دمای 300 K، تراز فرمی مادهٔ خالص تقریباً در وسط گاف قرار دارد. فرض کنید که سیلیسیوم با اتمهای بخشنده‌ای که هر یک دارای حالتی 0/15 eV زیر کف نوار رسانش سیلیسیوم هستند، آلاییده شود و همچنین فرض کنید که آلایش، تراز فرمی را تا 0/11 eV زیر کف این نوار بالا می‌برد. (شکل ۴۱-۲۳). برای (الف) سیلیسیوم خالص و (ب) سیلیسیوم آلاییده، احتمال آنکه یک حالت در کف نوار رسانش سیلیسیوم اشغال شود، را محاسبه کنید. (پ) احتمال آنکه یک حالت بخشنده در مادهٔ آلاییده اشغال شود را محاسبه کنید.



شکل ۴۱-۲۳ مسئلهٔ ۳۵

••۳۶- سیلیسیوم خالص در دمای اتاق دارای چگالی عددی الکترونی در حدود $5\times10^{15}\,m^{-3}$ در نوار رسانش است و حفره‌هایی با همین چگالی در نوار ظرفیت وجود دارد. فرض کنید یکی از هر 10^7 اتم سیلیسیوم با یک اتم فسفر جایگزین شود. (الف) نیمرسانای آلاییده از چه نوعی خواهد شد، n یا p؟ (ب) فسفر چه چگالی عددی حامل باری اضافه می‌کند؟ (پ) نسبت چگالی عددی حامل بار (الکترونها در نوار رسانش و حفره‌ها در نوار ظرفیت) در سیلیسیوم آلاییده به سیلیسیوم خالص، چقدر است؟

••۳۷- چه جرمی از فسفر برای آلاییدن 1/0 g سیلیسیوم که به تفصیل در مسئلهٔ نمونهٔ ۴۱-۶ توضیح داده شد، مورد نیاز است؟ **WWW SSM**

••۳۸- یک نمونه از سیلیسیوم با اتمهایی که دارای حالتهای بخشندهٔ 0/110 eV زیر کف نوار رسانش هستند، آلاییده شده است. (گاف انرژی در سیلیسیوم برابر 1/11 eV است.) اگر هر یک از این حالتهای بخشنده به احتمال $5/00\times10^{-5}$ در دمای $T = 300\,K$ اشغال شده باشند، (الف) آیا تراز فرمی در بالا یا پایین سقف نوار ظرفیت سیلیسیوم قرار دارد و (ب) به چه فاصله‌ای در بالا یا پایین آن واقع است؟ (پ) در این صورت، احتمال آنکه حالتی در کف نوار رسانش سیلیسیوم اشغال شده باشد چقدر است؟

بخش ۴۱-۹ یکسوساز پیوندی

●●۳۹- هرگاه فوتونی به ناحیهٔ تهی یک پیوندگاه p-n وارد شود، آن فوتون می‌تواند از الکترونهای ظرفیت آنجا پراکنده شود، بخشی از انرژی خود را به هر الکترون انتقال دهد، و در پی آن الکترونها به نوار رسانش پرش کنند. بنابراین، فوتون موجب به وجود آمدن جفت- الکترون می‌شود. از همین رو، پیوندگاهها غالباً به عنوان آشکارسازهای نور، به‌ویژه در ناحیه‌های پرتو x و پرتو گامای طیف الکترومغناطیسی به کار گرفته می‌شوند. فرض کنید یک فوتون پرتو گامای ۶۶۲ keV، انرژی خود را در پی فرایندهای پراکندگی چند گانه‌ای در داخل یک نیمرسانا با انرژی گاف ۱/۱eV، به الکترونها منتقل کند تا آنکه تمام انرژی آن انتقال یابد. با فرض آنکه هر الکترون، گاف بین سقف نوار ظرفیت تا کف نوار رسانش را پرش کند، تعداد جفت الکترون - حفره‌های تولید شده توسط این فرایند را به دست آورید.

●●۴۰- برای یک یکسوساز پیوندی p-n آرمانی با یک مرز مشخص بین دو طرف نیمرسانای آن، جریان I با رابطهٔ زیر به اختلاف پتانسیل V دو سر یکسوساز مربوط می‌شود

$$I = I_{\circ}(e^{eV/kT} - ۱)$$

که در آن $I_{\circ}$، که به ماده بستگی دارد و به I یا V بستگی ندارد، *جریان اشباع وارون* خوانده می‌شود. اختلاف پتانسیل V مثبت است اگر یکسوساز بایاس مستقیم شده باشد، و منفی است اگر یکسوساز بایاس معکوس شده باشد. (الف) با رسم I برحسب V از ۰/۱۲V- تا ۰/۱۲V+، ثابت کنید که این عبارت رفتار یک یکسوساز پیوندی را به دست می‌دهد. فرض کنید $T = ۳۰۰\text{K}$ و $I_{\circ} = ۵/۰\text{nA}$ است. (ب) برای همان دما، نسبت جریان برای بایاس مستقیم ۰/۵۰V به جریان برای بایاس معکوس ۰/۵۰V را محاسبه کنید.

بخش ۴۱-۱۰ دیود نور - گسیل (LED)

●۴۱- در یک بلور خاص، بالاترین نوار اشغال شده، کاملاً پر است. این بلور برای نور با طول موجهای بزرگتر از ۲۹۵ nm شفاف ولی برای طول موجهای کوتاهتر کدر است. گاف میان بالاترین نوار اشغال شده و نوار بالاتر بعدی (خالی) برای این ماده را محاسبه کنید. **SSM**

●۴۲- یک بلور پتاسیم کلراید دارای گاف نوار انرژی ۷/۶ eV بالای بالاترین نقطهٔ نوار اشغال شده‌ای است، که کاملاً پر است. آیا این بلور نسبت به نوری با طول موج ۱۴۰nm، شفاف است یا کدر؟

۴۱-۱۱ ترانزیستور

●۴۳- یک تراشهٔ کامپیوتر معین که اندازه‌اش در حدود یک تمبر پستی (۲/۵۴cm×۲/۲۲cm) است شامل حدود ۳/۵ میلیون ترانزیستور است. اگر ترانزیستورها مربعی شکل باشند، بعد *بیشینهٔ* آنها باید چقدر باشد؟ (*توجه:* وسیله‌هایی غیر از ترانزیستورها نیز در تراشه وجود دارند، و باید فضایی برای اتصالهای داخلی بین اجزای مدار وجود داشته باشد. امروزه، ترانزیستورهای کوچکتر از ۰/۷μm به میزان زیاد و قیمت اندک ساخته می‌شوند.)

●۴۴- یک MOSFET مبتنی بر سیلیسیوم دارای یک دریچهٔ مربعی به ضلع ۰/۵۰μm است. لایهٔ اکسید سیلیسیوم عایق که دریچه را از پایهٔ نوع p جدا می‌کند دارای ضخامت ۰/۲۰μm و ثابت دی الکتریک ۴/۵ است. (الف) ظرفیت معادل دریچه - پایه چقدر است؟ (با دریچه به صورت یک صفحه و با پایه به صورت صفحهٔ دیگر رفتار کنید.) (ب) هرگاه اختلاف پتانسیل ۱/۰V بین دریچه - چشمه برقرار باشد، تقریباً چند بار بنیادی e در دریچه ظاهر می‌شود؟

۴۵- (الف) زاویهٔ θ بین نزدیکترین پیوندهای مجاور در شبکهٔ سیلیسیوم را به دست آورید. به یاد آورید که هر اتم سیلیسیوم به چهار نزدیکترین همسایهٔ خود پیوند خورده است. این چهار همسایه تشکیل یک چهار وجهی منتظم را می‌دهند- هرمی که اضلاع و قاعدهٔ آن تشکیل مثلثهای متوازی الاضلاع را می‌دهند. (ب) با توجه به اینکه اتمها در گوشه‌های چهار وجهی به فاصلهٔ ۳۸۸ pm از هم قرار گرفته‌اند، طول پیوند را به دست آورید.

۴۶- نقره در دمای ۹۶۱°C ذوب می‌شود. در نقطهٔ ذوب، چه کسری از الکترونهای رسانش در حالتهایی با انرژیهای بالاتر از انرژی فرمی ۵/۵eV قرار دارند؟ (مسئلهٔ ۲۴ را ببینید.)

مسئله‌های اضافی

۴۷- (الف) نشان دهید که چگالی حالتها در انرژی فرمی با این رابطه داده می‌شود

$$N(E_F) = \frac{(۴)(۳^{۱/۳})(\pi^{۲/۳})mn^{۱/۳}}{h^۲}$$
$$= (۴/۱۱\times۱۰^{۱۸}\text{m}^{-۲}\text{eV}^{-۱})n^{۱/۳}$$

که در آن n چگالی عددی الکترونهای رسانش است. (ب) $N(E_F)$ را برای مس، که فلزی تک‌ظرفیتی با جرم مولی ۶۳/۵۴ g/mol و چگالی ۸/۹۶ g/cm³ است، محاسبه کنید. با یادآوری اینکه برای مس $E_F = ۷/۰\text{eV}$ است، درستی محاسبهٔ خود را با منحنی شکل ۴۱-۶ بررسی کنید.

۴۸- $d\rho/dT$ را در دمای اتاق برای (الف) مس و (ب) سیلیسیوم، با استفاده از داده‌های جدول ۴۱-۱ محاسبه کنید.

۴۹- (الف) نشان دهید که در $E = E_F$ ، شیب dP/dE در معادلهٔ ۴۱-۶ برابر با $-1/4kT$ است. (ب) همچنین نشان دهید که خط مماس بر منحنی شکل ۴۱-۷ ب در $E = E_F$ ، محور افقی را در $E = E_F + 2kT$ قطع می‌کند.

۵۰- نشان دهید که احتمال اشغال شدن $P(E)$ در معادلهٔ ۴۱-۶، نسبت به مقدار انرژی فرمی متقارن است؛ یعنی، نشان دهید که

$$P(E_F + \Delta E) + P(E_F - \Delta E) = 1$$

۵۱- در چه فشاری، بر حسب اتمسفر، تعداد مولکولها بر یکای حجم یک گاز کامل با چگالی عددی الکترونهای رسانش در مس، هر دو در دمای $T = 300\,\text{K}$ ، با هم برابرند؟

۵۲- ضریب عددی ۰/۱۲۱ را در معادلهٔ ۴۱-۹ ثابت کنید.

۵۳- انرژی فرمی مس برابر $7/0\,\text{eV}$ است. ثابت کنید که تندی فرمی مربوط به آن برابر $1600\,\text{km/s}$ است.

۴۲

فیزیک هسته‌ای



چه چیزی خطر تابشی برای خدمهٔ پرواز را به‌وجود می‌آورد؟

پاسخ در همین فصل.

اغلب مردم از خطر تابش هسته‌ای از مواد پرتوزا، نیروگاه‌های هسته‌ای، و (به‌خصوص) جنگ‌افزارهای هسته‌ای باخبرند. ولی، بیشتر آنها از آن تابشی که مرتبط با سفرهای طولانی با هواپیماست بی‌خبرند، خطری که برای مسافران به اندازهٔ خدمهٔ پرواز جدی نیست. در واقع، برخی از پروازها نگران‌کننده‌تر از پروازهای دیگرند، و زمان کل پرواز در هر سال برای خدمهٔ چنین پروازهایی توسط شرکتهای هواپیمایی محدود شده است.

۴۲-۱ فیزیک چیست؟

تا اینجا در سیاحت اکتشافی خود در پارک تفریحی کوانتوم، الکترونهایی را بررسی کرده‌ایم که در چاههای پتانسیل گوناگونی، از جمله اتمها، به تله افتاده‌اند، ولی عمدتاً آنچه را که در مرکز یک اتم واقع است- هسته- نادیده گرفته‌ایم. در ۹۰ سال اخیر، یک هدف اساسی فیزیک، فرمولبندی فیزیک کوانتومی هسته، و تقریباً در زمانی به همین درازا، یک هدف اساسی برخی از رشته‌های مهندسی به کار بستن این فیزیک کوانتومی در کاربردهای آن بوده است که گستره‌ای از پرتودرمانی در مبارزه با سرطان گرفته تا آشکارسازهای گاز رادُن در زیرزمینها در بر می‌گیرد.

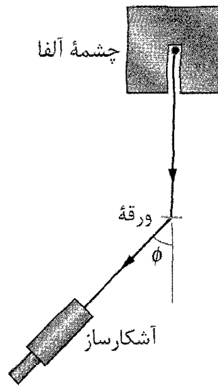
پیش از آنکه به چنین کاربردهایی و فیزیک کوانتومی هسته‌ها بپردازیم، نخست بررسی می‌کنیم که چگونه فیزیکدانان کشف کردند یک اتم دارای هسته است. به همان اندازه‌ای که این واقعیت امروزه امری بدیهی است، در ابتدا به عنوان یک شگفتی باور نکردنی به نظر می‌رسید.

۴۲-۲ کشف هسته

در نخستین سالهای قرن بیستم، دربارهٔ ساختار اتمها چیزی فراتر از این واقعیت که آنها شامل الکترونها هستند، دانسته نشده بود. الکترون در سال ۱۸۹۷/۱۲۷۶ (توسط *تامسون*[1]) کشف شده بود، ولی جرم آن در آن روزهای آغازین معلوم نبود. بنابراین، حتی ممکن نبود که تعداد الکترونهای باردار منفی موجود در یک اتم معین را مشخص کرد. دانشمندان استدلال می‌کردند که چون اتمها از لحاظ الکتریکی خنثی هستند، آنها باید تعدادی بار مثبت نیز داشته باشند، ولی هیچ‌کس نمی‌دانست که این بار مثبت خنثی کننده چه شکلی دارد.

در سال ۱۹۱۱/۱۲۹۰، *ارنست راترفورد*[2] پیشنهاد کرد که این بار مثبت اتم به طور متراکم در مرکز اتم متمرکز است و **هستهٔ** آن را تشکیل می‌دهد، و گذشته از این، بیشتر جرم اتم مربوط به هستهٔ آن است. پیشنهاد رادفورد صرفاً یک حدس نبود، بلکه مبتنی بر نتایج آزمایشی بود که توسط خود او پیشنهاد شده بود و همکارانش، *هانس گایگر*[3] (که شمارندهٔ گایگر او معروف است) و *ارنست مارسدن*[4]، دانشجویی ۲۰ ساله که هنوز لیسانس خود را نگرفته بود، آن را به انجام رسانیده بودند.

در زمان راترفورد معلوم شده بود که عنصرهای معینی، موسوم به **پرتوزا**، در یک فرایند خودبه‌خود با گسیل ذره‌هایی به عنصرهای دیگری تبدیل می‌شوند. یکی از این عنصرها، رادُن است که ذره‌های آلفا (α) با انرژیهایی حدود $5/5\,\text{MeV}$ گسیل می‌کند. امروزه می‌دانیم که این ذره‌ها، هسته‌های هلیوم‌اند.



شکل ۴۲-۱ ترتیب آزمایشگاهی (دید از بالا) به کار رفته در آزمایش راترفورد در سالهای ۱۹۱۳-۱۹۱۱، برای مطالعهٔ پراکندگی ذره‌های آلفا توسط ورقه‌های نازک فلزی. آشکارساز می‌تواند برای مقدارهای مختلف زاویهٔ پراکندگی ϕ بچرخد. چشمهٔ آلفا، گاز رادُن بود که یک محصول واپاشی رادیوم است. با این دستگاه "رومیزی" ساده، هستهٔ اتمی کشف شد.

نظر راترفورد تاباندن ذره‌های آلفای پر انرژی به یک ورقهٔ نازک هدف و اندازه‌گیری میزان انحرافی بود که این ذره‌ها به هنگام عبور از ورقه پیدا می‌کردند. ذره‌های آلفا، که تقریباً ۷۳۰۰ بار از الکترونها سنگینترند، دارای بار $+2e$ هستند.

شکل ۴۲-۱ ترتیب آزمایشگاهی گایگر و مارسدن را نشان می‌دهد. چشمهٔ الفای آنها یک لولهٔ شیشه‌ای با دیواره‌ای نازک، محتوی گاز رادُن بود. آزمایش عبارت از شمارش تعداد ذره‌های آلفایی بود که در زاویه‌های پراکندگی ϕ منحرف می‌شدند.

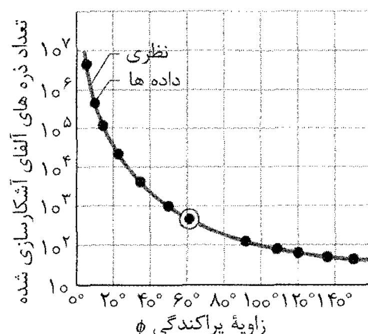
شکل ۴۲-۲ نتایج آنها را نشان می‌دهد. بخصوص توجه کنید که مقیاس محور قائم، لگاریتمی است. متوجه می‌شویم که بیشتر ذره‌ها در زاویه‌های نسبتاً کوچکی پراکنده شده‌اند، ولی بخش بسیار کمی از آنها در زاویه‌های بسیار بزرگی، که به $180°$ می‌رسند، پراکنده شده‌اند- و این مایهٔ تعجب زیادی بود. به بیان راترفورد: "این واقعاً باور نکردنی‌ترین اتفاقی بود که تا آن موقع در زندگی‌ام برای من رخ داده بود. این تقریباً به همان اندازه‌باور نکردنی بود که شما گلوله‌ای ۱۵ اینچی را به یک تکه دستمال کاغذی شلیک کنید و گلوله برگردد و به شما بخورد. "

چرا راترفورد آنقدر شگفت زده شده بود؟ در زمان این آزمایشها، بیشتر فیزیکدانان مدلی موسوم به مدل کیک کشمشی اتم که توسط تامسون پیشنهاد شده بود را باور داشتند. در این مدل، فرض شده بود که بار مثبت اتم در سرتاسر حجم اتم پخش شده است. الکترونها "(کشمشها)" فرض شده بود که حول نقطه‌های ثابتی در داخل این کرهٔ باردار مثبت"(کیک) " ارتعاش می‌کنند.

بیشینهٔ نیروی منحرف‌کننده‌ای که می‌توانست بر یک ذرهٔ آنها به هنگام عبور از چنین کرهٔ با بار مثبت بزرگی اثر کند بسیار کوچکتر از آن بود که ذرهٔ آلفا را حتی به اندازهٔ $1°$ منحرف کند. (انحراف مورد انتظار با آنچه که در صورت شلیک گلوله‌ای به

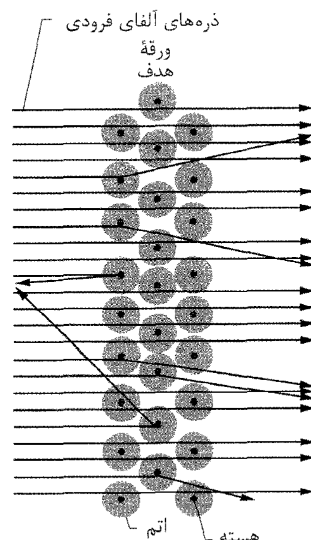
1. J. J. Thomson
2. Ernest Rutherford
3. Hans Geiger
4. Ernest Marsden

کیسه‌ای از گلوله‌های برف مشاهده می‌شود، قابل مقایسه است). الکترونها در اتم نیز اثر بسیار ناچیزی بر ذرهٔ آلفای سنگین پرانرژی دارند. در واقع، آنها خودشان همچون دسته‌ای از حشرات که با پرتاب سنگی میان آنها به هر سو پراکنده می‌شوند، به‌شدت منحرف می‌شدند.



شکل ۴۲-۲ نقطه‌ها، داده‌های مربوط به پراکندگی ذرهٔ آلفا از یک ورقهٔ طلا هستند، که گایگر و مارسدن با استفاده از دستگاه شکل ۴۲-۱ به دست آوردند. منحنی پیوسته، پیش‌بینی نظری مبتنی بر این فرض است که اتم دارای یک هستهٔ با بار مثبت، سنگین و کوچک است. توجه کنید که مقیاس محور قائم، لگاریتمی است که تا شش مرتبهٔ بزرگی را در بر می‌گیرد. داده‌ها برای انطباق منحنی نظری بر نقطهٔ تجربی که با دایره‌ای به دور آن مشخص شده تنظیم شده‌اند.

راترفورد دریافت، برای آنکه ذرهٔ آلفا رو به عقب منحرف شود، باید نیروی بزرگی وجود داشته باشد؛ این نیرو در صورتی می‌توانست ایجاد شود که به جای آنکه بار مثبت در سرتاسر اتم پخش شده باشد، محکم در مرکز آن قرار داشته باشد. در این صورت ذرهٔ آلفای فرودی می‌توانست بی آنکه به داخل بار مثبت نفوذ کند، به آن بسیار نزدیک شود؛ چنین رویارویی نزدیکی به یک نیروی منحرف کنندهٔ بزرگ می‌انجامد.



شکل ۴۲-۳ زاویه‌ای که در آن ذرهٔ آلفای فرودی پراکنده می‌شود به میزان نزدیکی مسیر آن به هستهٔ اتمی بستگی دارد. انحرافهای بزرگ فقط ناشی از رویارویی‌های بسیار نزدیک است.

شکل ۴۲-۳ مسیرهای ممکنی را نشان می‌دهد که توسط ذره‌های آلفای نوعی به هنگام عبور از اتمهای ورقهٔ هدف طی می‌شود؛ همانگونه که می‌بینیم، بیشتر ذره‌ها یا منحرف نشده‌اند یا فقط به میزان کمی منحرف شده‌اند، ولی چندتایی (آنهایی که برحسب اتفاق، مسیرهای فرودی آنها از فاصلهٔ بسیار نزدیکی به هسته می‌گذرند) در زاویه‌های بزرگ منحرف شده‌اند. از تحلیل این داده‌ها، راترفورد نتیجه گرفت که شعاع هسته باید با عاملی حدود 10^4، از شعاع اتم کوچکتر باشد. به بیان دیگر، بیشتر فضای اتم خالی است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۲-۱

یک ذرهٔ آلفا با انرژی $5/30\,\text{MeV}$، برحسب اتفاق، مستقیماً به سوی هستهٔ یک اتم طلا، که شامل ۷۹ پروتون است، حرکت می‌کند. پیش از آنکه ذرهٔ آلفا به طور لحظه‌ای به سکون برسد و جهت حرکتش وارونه شود، چقدر به مرکز هسته نزدیک می‌شود؟ از پس‌زنی هستهٔ نسبتاً سنگین چشم‌پوشی کنید.

نکته کلیدی در طی این فرایند، انرژی مکانیکی کل E دستگاه ذرهٔ آلفا و هستهٔ طلا پایسته است. به‌ویژه، انرژی مکانیکی اولیهٔ دستگاه E_i، پیش از آنکه ذره و هسته برهم‌کنش کنند، برابر با انرژی مکانیکی E_f آن به هنگامی است که ذرهٔ آلفا به توقف لحظه‌ای می‌رسد. انرژی اولیهٔ E_i دقیقاً برابر انرژی جنبشی K_α ذرهٔ آلفا فرودی است. انرژی نهایی E_f دقیقاً انرژی پتانسیل الکتریکی U دستگاه است (بنابراین انرژی جنبشی صفر است). U را می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ ۲۴-۴ $(U = q_1q_2/4\pi\varepsilon_0 r)$ بیابیم.

محاسبه: d را فاصلهٔ مرکز به مرکز میان ذرهٔ آلفا و هستهٔ طلا به هنگامی در نظر می‌گیریم که ذرهٔ آلفا در نقطهٔ توقف خود قرار دارد. بنابراین، پایستگی انرژی $E_i = E_f$ را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$K_\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_\alpha q_{\text{Au}}}{d}$$

که در آن $q_\alpha (=2e)$ بار ذرهٔ آلفا (۲ پروتون) و $q_{\text{Au}} = (79e)$ بار هستهٔ طلا (۷۹ پروتون) است.

با قرار دادن مقدار بارها و حل آن برای d خواهیم داشت

$$d = \frac{(2e)(79e)}{4\pi\varepsilon_0 K_\alpha}$$

$$= \frac{(2\times 79)(1/60\times 10^{-19}\ \text{C})^2}{(4\pi)(8/85\times 10^{-12}\ \text{F/m})(5/30\ \text{MeV})(1/60\times 10^{-13}\ \text{J/MeV})}$$

$$= 4/29\times 10^{-14}\ \text{m}$$ **(پاسخ)**

این، فاصله‌ای کوچک در مقیاسهای اتمی است، ولی در مقیاسهای هسته‌ای چنین نیست. در واقع، این مقدار به میزان قابل ملاحظه‌ای بزرگتر از مجموع شعاعهای هستهٔ طلا و ذرهٔ آلفاست. از این‌رو ذرهٔ آلفا جهت حرکت خود را وارونه می‌کند، بی آنکه هرگز با هستهٔ طلا "تماسی" واقعی برقرار کند.

۴۲-۳ برخی از خواص هسته‌ای

جدول ۴۲-۱ برخی از خواص چند هستهٔ اتمی را نشان می‌دهد. هرگاه عمدتاً به خواص آنها به عنوان گونه‌های هسته‌ای خاص (به جای بخشهایی از اتمها) توجه کنیم، این ذره‌ها را نوکلید می‌نامیم.

جدول ۴۲-۱

برخی از خواص نوکلیدهای برگزیده

نوکلید	Z	N	A	پایداری[a]	جرم[b]	اسپین[c]	انرژی هسته‌ای (MeV/نوکلئون)
^{1}H	۱	۰	۱	٪۹۹/۹۸۵	۱/۰۰۷۸۲۵	$\frac{۱}{۲}$	——
^{7}Li	۳	۴	۷	٪۹۲/۵	۷/۰۱۶۰۰۴	$\frac{۳}{۲}$	۵/۶۰
^{31}P	۱۵	۱۶	۳۱	٪۱۰۰	۳۰/۹۷۳۷۶۲	$\frac{۱}{۲}$	۸/۴۸
^{84}Kr	۳۶	۴۸	۸۴	٪۵۷/۰	۸۳/۹۱۱۵۰۷	۰	۸/۷۲
^{120}Sn	۵۰	۷۰	۱۲۰	٪۳۲/۴	۱۱۹/۹۰۲۱۹۷	۰	۸/۵۱
^{157}Gd	۶۴	۹۳	۱۵۷	٪۱۵/۷	۱۵۶/۹۲۳۹۵۷	$\frac{۳}{۲}$	۸/۲۱
^{197}Au	۷۹	۱۱۸	۱۹۷	٪۱۰۰	۱۹۶/۹۶۶۵۵۲	$\frac{۳}{۲}$	۷/۹۱
^{227}Ac	۸۹	۱۳۸	۲۲۷	۲۱/۸y	۲۲۷/۰۲۷۷۴۷	$\frac{۳}{۲}$	۷/۶۵
^{239}Pu	۹۴	۱۴۵	۲۳۹	۲۴/۱۰۰y	۲۳۹/۰۵۲۱۵۷	$\frac{۱}{۲}$	۷/۵۶

a) برای نوکلیدهای پایدار، فراوانی **ایزوتوپی** داده شده است؛ این، کسری از اتمهایی از این نوع است که در یک نمونهٔ نوعی از عنصر یافت می‌شود. برای نوکلیدهای پرتوزا، نیم- عمر داده شده است.

b) با توجه به تجربه، حجم گزارش شده، جرم اتم خنثی است نه هستهٔ ذرهٔ تنها.

c) اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی که مضربی از $\hbar$ است.

برخی از واژگان هسته‌ای

هسته‌ها از پروتونها و نوترونها تشکیل شده‌اند. تعداد پروتونها در یک هسته (موسوم به **عدد اتمی** یا **عدد پروتونی** هسته) با نماد Z نمایش داده می‌شود؛ تعداد نوترونها (**عدد نوترونی**) با نماد N نمایش داده می‌شود. تعداد کل نوترونها و پروتونها در هسته **عدد جرمی** A خوانده می‌شود؛ بنابراین

$$A = Z + N \qquad (۴۲-۱)$$

نوترونها و پروتونها، هرگاه به طور مشترک در نظر گرفته شوند، **نوکلئون** (هستک) نامیده می‌شوند.

نوکلیدها را با نمادهایی از قبیل آنهایی که در نخستین ستون جدول ۴۲-۱ نشان داده شده‌اند، نمایش می‌دهیم. مثلاً ^{197}Au را در نظر بگیرید. شاخص بالای ۱۹۷، عدد جرمی A است. نماد شیمیایی Au مبین آن است که این عنصر طلاست، که عدد اتمی آن برابر ۷۹ است. از معادلهٔ ۴۲-۱ درمی‌یابیم که تعداد نوترونهای این نوکلید برابر ۷۹-۱۹۷، یا ۱۱۸ است.

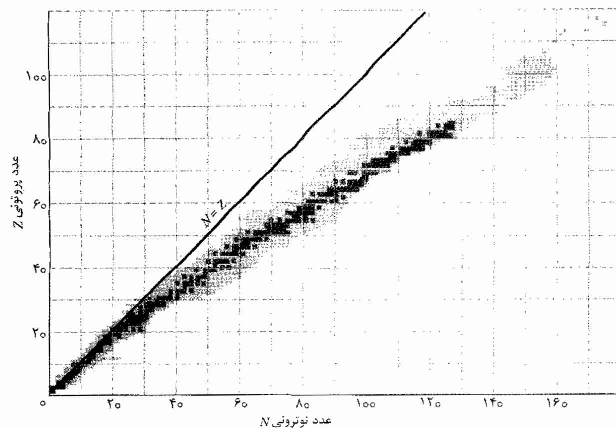
نوکلیدهایی با عدد اتمی یکسان Z، ولی عدد نوترونی متفاوت N، **ایزوتوپ** یکدیگر نامیده می‌شوند. عنصر طلا دارای ۳۲ ایزوتوپ است که در گسترهٔ ^{173}Au تا ^{204}Au قرار دارند. فقط یکی از آنها (^{197}Au) پایدار است؛ بقیهٔ ۳۱ ایزوتوپ پرتوزا هستند. چنین **نوکلیدهای پرتوزایی** با گسیل یک ذره، **واپاشی** (یا **فروپاشی**) می‌کنند و در نتیجه به نوکلید متفاوتی تبدیل می‌شوند.

ساماندهی نوکلیدها

اتمهای خنثای همهٔ ایزوتوپهای یک عنصر (همه با Z برابر) دارای تعداد الکترونهای برابر و خاصیتهای شیمیایی مشابهی هستند، و در یک خانه در جدول تناوبی عنصرها قرار می‌گیرند. ولی، خاصیتهای *هسته‌ای* ایزوتوپهای یک عنصر معین، از یک ایزوتوپ به ایزوتوپ دیگر بسیار متفاوت است. بنابراین، جدول تناوبی استفادهٔ محدودی برای فیزیکدانان هسته‌ای، شیمیدانان هسته‌ای، یا مهندسان هسته‌ای دارد.

نوکلیدها را روی یک **نقشه نوکلیدی** مانند شکل ۴۲-۴ ساماندهی می‌کنیم، که در آن یک نوکلید با رسم عدد پروتونی آن برحسب عدد نوترونی آن مشخص شده است. نوکلیدهای پایدار در این شکل با رنگ تیره، و نوکلیدهای پرتوزا با سایه نمایش داده شده‌اند. همانطور که دیده می‌شود، نوکلیدهای پرتوزا در دو طرف و در انتهای بالایی یک نوار کاملاً مشخص از نوکلیدهای پایدار قرار دارند. همچنین توجه کنید که نوکلیدهای پایدار سبک به خط $N = Z$ نزدیک‌اند، که بدین معناست که آنها تعداد نوترونها و پروتونهای تقریباً یکسانی دارند. ولی، نوکلیدهای سنگینتر، نوترونهای بیشتری نسبت به پروتونها دارند. به عنوان مثال، دیدیم که ^{197}Au دارای ۱۱۸ نوترون و فقط ۷۹ پروتون است، یعنی یک *فزونی نوترونی* ۳۹ تایی دارد.

نقشه‌های نوکلیدی به صورت نقشه‌هایی دیواری در دسترس‌اند، که در آنها هر خانهٔ کوچک با اطلاعاتی دربارهٔ نوکلیدی که آن را مشخص می‌کند، پر شده است. شکل ۴۲-۵ بخشی از چنین نقشه‌ای را به مرکز ^{197}Au نشان می‌دهد. فراوانیهای نسبی (معمولاً به صورت یافت شده روی کرهٔ زمین) برای نوکلیدهای پایدار، و نیم- عمرها (معیاری برای آهنگ واپاشی) برای نوکلیدهای پرتوزا نشان داده شده است. خط شیبدار، یک خط **ایزوبار**- نوکلیدهایی با عدد جرمی یکسان- را نشان می‌دهد، که در این مورد $A = ۱۹۸$ است.



شکل ۴۲-۴ نموداری از نوکلیدهای شناخته شده. ناحیهٔ تیره، نوار نوکلیدهای پایدار، و ناحیهٔ سایه‌دار نوکلیدهای پرتوزا را مشخص می‌کنند. نوکلیدهای پایدار کم‌جرم اساساً دارای تعداد نوترونها و پروتونهای مساوی‌اند، ولی نوکلیدهای سنگینتر دارای فزونی نوترونی بیشتری هستند. شکل نشان می‌دهد که هیچ نوکلید پایداری با $Z>۸۳$ (بیسموت) وجود ندارد.

تا اوایل سال ۲۰۰۴/۱۳۸۳، نوکلیدهایی با عددهای اتمی تا بزرگی $Z=۱۱۶$ $(A=۲۹۲)$ در تجربه‌های آزمایشگاهی یافت شده بودند (هیچ عنصری با Z بزرگتر از ۹۲ به طور طبیعی یافت نمی‌شود). اگر چه نوکلیدهای بزرگ عموماً باید به میزان زیادی ناپایدار باشند و فقط به مدت بسیار اندکی دوام آورند،

$A=۱۹۸$

عدد پروتونی Z \ عدد نوترونی N	۱۱۵	۱۱۶	۱۱۷	۱۱۸	۱۱۹	۱۲۰	۱۲۱
۸۲	۱۹۷Pb ۴۳min	۱۹۸Pb ۲/۴h	۱۹۹Pb ۱/۵ h	۲۰۰Pb ۲۱/۵ h	۲۰۱Pb ۹/۳۳h	۲۰۲Pb ۵۳۰۰۰y	۲۰۳Pb ۲/۱۶d
۸۱	۱۹۶Tl ۱/۸۴h	۱۹۷Tl ۲/۸۳h	۱۹۸Tl ۵/۳h	۱۹۹Tl ۷/۴h	۲۰۰Tl ۲۶/۱ h	۲۰۱Tl ۷۲/۹h	۲۰۲Tl ۱۲/۲d
۸۰	۱۹۵Hg ۹/۵h	۱۹۶Hg ۰/۱۵٪	۱۹۷Hg ۶۴/۱h	۱۹۸Hg ۱۰/۰٪	۱۹۹Hg ۱۶/۹٪	۲۰۰Hg ۲۳/۱٪	۲۰۱Hg ۱۳/۲٪
۷۹	۱۹۴Au ۳۹/۴h	۱۹۵Au ۱۸۶d	۱۹۶Au ۶/۱۸d	۱۹۷Au ۱۰۰٪	۱۹۸Au ۲/۶۹d	۱۹۹Au ۳/۱۴d	۲۰۰Au ۴۸/۴min
۷۸	۱۹۳Pt ۶۰y	۱۹۴Pt ۳۲/۹٪	۱۹۵Pt ۳۳/۸٪	۱۹۶Pt ۲۵/۳٪	۱۹۷Pt ۱۸/۳h	۱۹۸Pt ۷/۲٪	۱۹۹Pt ۳۰/۸min
۷۷	۱۹۲Ir ۷۳/۸d	۱۹۳Ir ۱۶/۷٪	۱۹۴Ir ۱۹/۲h	۱۹۵Ir ۳/۸ h	۱۹۶Ir ۵۲s	۱۹۷Ir ۵/۸ min	۱۹۸Ir ≈۸s
۷۶	۱۹۱Os ۱۵/۴d	۱۹۲Os ۴۱/۰٪	۱۹۳Os ۳۰/۵h	۱۹۴Os ۶/۰y	۱۹۵Os ۶/۵ min	۱۹۶Os ۳۵ min	-

شکل ۴۲-۵ بخش بزرگ شده و با جزئیات نقشهٔ نوکلیدی شکل ۴۲-۴ به مرکز ^{۱۹۷}Au. مربعهای تیره، نوکلیدهای پایدار را نشان می‌دهند، که برای آنها فراوانیهای ایزوتوپی نسبی داده شده است. مربعهای سایه‌دار، نوکلیدهای پرتوزایی را نشان می‌دهند، که برای آنها نیم- عمر داده شده است. خطهای ایزوباری دارای شیب عدد جرمی ثابت A هستند و به عنوان نمونه خط مربوط به $A=۱۹۸$ نشان داده شده است.

با این حال نوکلیدهای اَبَرجرم معینی، با نیم- عمرهای نسبتاً طولانی، به طور نسبی پایدارند. این نوکلیدهای اَبَرجرم پایدار و سایر موارد پیش‌بینی شده، تشکیل جزیرهٔ *پایداری* در مقدارهای بزرگ Z و N روی نقشهٔ نوکلیدی همانند شکل ۴۲-۴، می‌دهند.

> ✔ **نکتهٔ وارسی ۱** بر مبنای شکل ۴۲-۴، نتیجه بگیرید که کدامیک از نوکلیدهایی که در پی می‌آیند احتمالاً آشکار نمی‌شوند: $^{۵۲}Fe(Z=۲۶)$، $^{۹۰}As(Z=۳۳)$، $^{۱۵۸}Nd(Z=۶۰)$، $^{۱۷۵}Lu(Z=۷۱)$، $^{۲۰۸}Pb(Z=۸۲)$.

شعاعهای هسته‌ای

یک یکای مناسب برای اندازه‌گیری فاصله‌ها در مقیاس هسته‌ای، *فمتومتر*[1] $(=۱۰^{-۱۵}m)$ است. این یکا اغلب *فرمی* نامیده می‌شود؛ هر دو نام دارای علامت اختصاری یکسانی هستند. بنابراین،

$$۱\text{ فرمی}=۱\text{ فمتومتر}=۱fm=۱۰^{-۱۵}\ m \qquad (۴۲-۲)$$

با بمباران کردن هسته‌ها توسط باریکه‌ای از الکترونهای پر انرژی و مشاهدهٔ اینکه هسته‌ها چگونه الکترونهای فرودی را منحرف می‌کنند، می‌توانیم دربارهٔ اندازه و ساختار هسته‌ها اطلاعاتی به دست آوریم. الکترونها باید به قدر کافی پرانرژی باشند (دست کم ۲۰۰MeV) تا طول موجهای *دوبروی* آنها کوچکتر از ساختار هسته‌ای که می‌کاوند باشد.

هسته، مثل اتم، یک جسم صلب با سطحی با مرز کاملاً مشخص نیست. افزون بر این، اگر چه بیشتر نوکلیدها کروی شکل‌اند، برخی از آنها به‌خصوص بیضوی هستند. با این حال، آزمایشهای پراکندگی الکترون (به همراه آزمایشهایی از انواع دیگر) ما را بر آن می‌دارد که به هر نوکلید، شعاع مؤثری اختصاص دهیم که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$r=r_۰A^{۱/۳} \qquad (۴۲-۳)$$

که در آن A عدد جرمی و $r_۰\approx ۱/۲fm$ است. از اینجا در می‌یابیم که حجم هسته، که متناسب با $r^۳$ است، مستقیماً با عدد جرمی A متناسب و مستقل از مقدارهای Z و N است.

معادلهٔ ۴۲-۳ برای *نوکلیدهای هاله‌ای* به کار نمی‌رود. نوکلیدهایی پرنوترون که نخستین بار در دههٔ میلادی در آزمایشگاه‌ها تولید شدند. این نوکلیدها بزرگتر از مقدار پیش‌بینی شده توسط معادلهٔ ۴۲-۳ هستند، زیرا برخی از نوترونها هاله‌ای را به دور مغز کروی پروتونها و باقی نوترونها تشکیل می‌دهند. ایزوتوپهای لیتیوم مثالی از این نوع‌اند. هرگاه یک نوترون برای تشکیل ^{۹}Li به ^{۸}Li اضافه شود، که هیچ‌کدام نوکلیدهای هاله‌ای نیستند، شعاع مؤثر حدود ۴٪ اضافه می‌شود. ولی، هرگاه دو نوترون به ^{۹}Li برای تشکیل ایزوتوپ پر نوترون ^{۱۱}Li (بزرگترین ایزوتوپ لیتیوم) اضافه شود، آنها به هستهٔ موجود

1. femtometer

نمی‌چسبند، بلکه در عوض هاله‌ای را به دور هسته تشکیل می‌دهند که این به افزایش شعاع مؤثر تا حدود ۳۰٪ می‌انجامد. ظاهراً این پیکربندی هاله‌ای دارای انرژی کمتری از هسته‌ای است که شامل هر ۱۱ نوکلئون است. (در این فصل کلاً فرض میکنیم که معادلهٔ ۴۲-۳ برقرار است).

جرمهای اتمی

امروزه جرمهای اتمی با دقت بالایی اندازه‌گیری می‌شوند، ولی معمولاً جرمهای هسته‌ای مستقیماً قابل اندازه‌گیری نیستند، زیرا کندن همهٔ الکترونها از یک اتم دشوار است. همانطور که به اختصار در بخش ۳۷-۱۲ توضیح دادیم، جرمهای اتمی غالباً برحسب *یکاهای جرم اتمی* گزارش شده‌اند، دستگاهی که در آن جرم اتمی ^{12}C خنثی دقیقاً ۱۲u تعریف شده است.

جرمهای اتمی دقیق در جدولهای روی Web در دسترس‌اند و معمولاً در تمرینهای درسی از آنها استفاده می‌شود. ولی، برخی اوقات فقط به جرم تقریبی یک هستهٔ تنها یا یک اتم خنثی نیاز داریم. عدد جرمی A هسته چنین جرم تقریبی را برحسب یکاهای جرم اتمی به دست می‌دهد. مثلاً، جرم تقریبی هم هسته و هم اتم خنثی برای ^{197}Au برابر ۱۹۷u است، که به جرم اتمی واقعی ۱۹۶/۹۶۶۵۷۳ u نزدیک است.

همانطور که در بخش ۳۷-۱۲ دیدیم

$$1u = 1/66053873 \times 10^{-27}\ \text{kg} \qquad (۴۲\text{-}۴)$$

همچنین دیدیم که اگر جرم کل شرکت‌کننده‌ها در یک واکنش هسته‌ای به مقدار Δm تغییر کند، آزادی یا جذب انرژی وجود دارد که با معادلهٔ ۳۷-۵۰ $(Q = -\Delta mc^2)$ داده می‌شود. همانطور که اکنون خواهیم دید، انرژیهای هسته‌ای غالباً برحسب مضربی از 1MeV گزارش می‌شوند. بنابراین، تبدیل مناسب میان یکاهای جرم و یکاهای انرژی با معادلهٔ ۳۷-۴۶ داده می‌شود.

$$c^2 = 931/494013\ \text{MeV/u} \qquad (۴۲\text{-}۵)$$

دانشمندان و مهندسانی که با جرمهای اتمی سروکار دارند اغلب ترجیح می‌دهند که جرم یک اتم را با *فزونی جرم* اتم Δ گزارش دهند که با رابطهٔ زیر تعریف شده است.

$$\Delta = M - A \qquad \text{(فزونی جرم)} \qquad (۴۲\text{-}۶)$$

که در آن M جرم واقعی اتم در یکاهای جرم اتمی و A عدد جرمی هستهٔ اتم است.

انرژی بستگی هسته‌ای

جرم M یک هسته کوچکتر از جرم کل $\sum m$ پروتونها و نوترونهای مجزای آن است. این بدین معناست که انرژی جرمی Mc^2 یک هسته کوچتر از انرژی جرمی کل $\sum(mc^2)$ پروتونها و نوترونهای مجزای آن است. اختلاف بین این دو انرژی، **انرژی بستگی** هسته نامیده می‌شود:

$$\Delta E_{be} = \sum(mc^2) - Mc^2 \qquad \text{(انرژی بستگی)} \qquad (۴۲\text{-}۷)$$

هشدار: انرژی بستگی، انرژیی نیست که در هسته وجود داشته باشد. بلکه، این انرژی برابر با *اختلاف* انرژی جرمی میان یک هسته و نوکلئونهای مجزای آن است. اگر می‌توانستیم یک هسته را به نوکلئونهای آن جدا کنیم، در این فرایند جداسازی، باید یک انرژی کل برابر با ΔE_{be} به آن ذره‌ها انتقال می‌یافت. اگر چه در واقع نمی‌توانیم یک هسته را به این ترتیب از هم بگسلیم، با این حال انرژی بستگی هسته‌ای معیاری مناسب برای آن است که اجزای هسته چقدر خوب در کنار یکدیگر نگه داشته شده‌اند.

معیار بهتر، **انرژی بستگی بر نوکلئون** ΔE_{ben} است، که نسبت انرژی بستگی ΔE_{be} یک هسته به تعداد A نوکلئونها در آن هسته است:

$$\Delta E_{ben} = \frac{\Delta E_{be}}{A} \qquad \text{(انرژی بستگی بر نوکلئون)} \qquad (۴۲\text{-}۸)$$

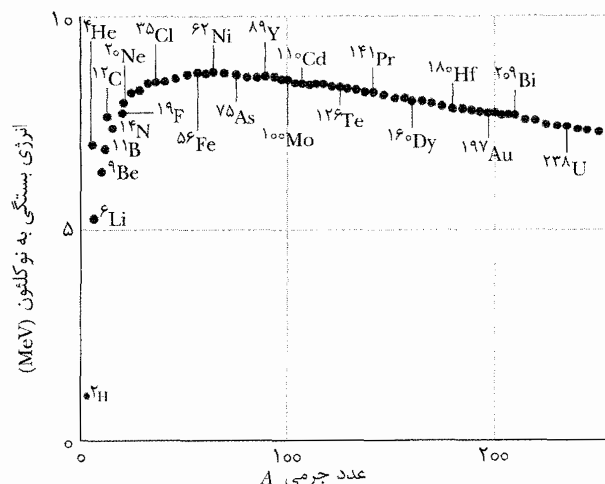
انرژی بستگی بر نوکلئون را می‌توانیم به صورت انرژی متوسط مورد نیاز برای جدا کردن یک هسته به نوکلئونهای مجزای آن، تصور کنیم.

شکل ۴۲-۶ ، نموداری از انرژی بستگی بر نوکلئون ΔE_{ben} برحسب عدد جرمی A برای تعداد زیادی از هسته‌هاست. آنهایی که در بالای نمودار واقع‌اند، به طور بسیار محکمی مقید هستند؛ یعنی، برای از هم گسیختن هر یک از این هسته‌ها باید مقدار انرژی بر نوکلئون زیادی اعمال کنیم. هسته‌هایی که روی نقطه‌های پایینتر نمودار واقع‌اند، در طرفهای چپ و راست، به میزان کمتری مقیدند، و انرژی بر نوکلئون کمتری برای از هم گسیختن آنها مورد نیاز است.

این عبارتهای ساده دربارهٔ شکل ۴۲-۶ ، نتایج ژرفی در پی دارند. اگر هسته‌ای واقع در طرف راست این نمودار به دو هسته که در نزدیکی قلهٔ نمودار قرار دارند شکافته شود، نوکلئونهای آن هسته به طور محکمتری مقید شده‌اند. چنین فرایندی که **شکافت** نامیده می‌شود، به طور طبیعی در هسته‌های بزرگ (با عدد جرمی بالای A) از قبیل اورانیوم رخ می‌دهد، که می‌توانند به طور خودبه‌خودی (یعنی، بدون هیچ عامل خارجی یا چشمهٔ انرژی) شکافته شوند. این فرایند همچنین می‌تواند در جنگ افزارهای هسته‌ای رخ دهد، که در آنها بسیاری از هسته‌های اورانیوم یا پلوتونیوم به طور همزمان برای ایجاد یک انفجار، شکافته می‌شوند.

نوکلئونهای هر جفت هسته در طرف چپ این منحنی به طور محکمتری مقیدند، در صورتی که آن جفت برای تشکیل تکْ هسته‌ای ترکیب شوند که در نزدیکی قلهٔ نمودار واقع است. چنین فرایندی که **همجوشی** نامیده می‌شود به طور طبیعی در

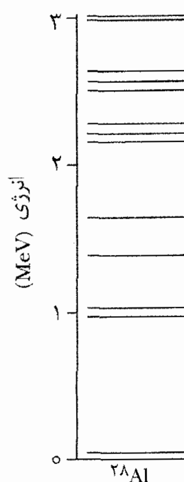
ستارگان رخ می‌دهد. اگر چنین نبود، خورشید نمی‌درخشید و بنابراین، حیات نمی‌توانست روی کرهٔ زمین وجود داشته باشد.



شکل ۴۲-۶ انرژی بستگی بر نوکلئون برای چند نوکلید نمونه. نوکلید نیکل ^{62}Ni دارای بالاترین انرژی بستگی بر نوکلئون (حدود ۸/۷۹۴۶۰ MeV/نوکلئون) در بین نوکلیدهای پایدار شناخته شده است. توجه کنید که ذرهٔ آلفا (^{4}He) دارای انرژی بستگی بر نوکلئون بالاتری نسبت به همسایگانش در جدول تناوبی است و بنابراین، همچنین به خصوص پایدار است.

ترازهای انرژی هسته‌ای

انرژی هسته‌ها، مثل انرژی اتمها، کوانتیده است. یعنی، هسته‌ها فقط می‌توانند در حالتهای کوانتومی گسسته، هر یک با انرژی کاملاً متمایزی، وجود داشته باشند. شکل ۴۲-۷ برخی از این ترازهای انرژی را برای ^{28}Al، یک نوکلید کم‌جرم نوعی، نشان می‌دهد. توجه کنید که مقیاس انرژی، به جای الکترون- ولت که برای اتمها به کار گرفته می‌شود، برحسب میلیون الکترون- ولت است. هرگاه هسته‌ای از یک تراز به ترازی با انرژی پایینتر گذار پیدا کند، فوتون گسیل شده به طور نوعی در ناحیهٔ پرتو گامای طیف الکترومغناطیسی قرار دارد.



شکل ۴۲-۷ ترازهای انرژی برای نوکلید ^{28}Al، که از آزمایشهای واکنش هسته‌ای نتیجه شده است.

اسپین هسته‌ای و مغناطیس

بسیاری از نوکلیدها دارای یک *اندازه حرکت زاویه‌ای هسته‌ای*، یا اسپین، و یک *گشتاور مغناطیسی هسته‌ای* ذاتی وابسته هستند. اگرچه گشتاورهای زاویه‌ای هسته‌ای تقریباً دارای همان بزرگی گشتاورهای زاویه‌ای الکترونهای اتمی هستند، گشتاورهای مغناطیسی هسته‌ای بسیار کوچکتر از گشتاور مغناطیسی اتمی نوعی‌اند.

نیروی هسته‌ای

نیرویی که حرکت الکترونهای اتمی را کنترل می‌کند، نیروی شناخته شدهٔ الکترومغناطیسی است. ولی، برای پیوند هسته‌ها به یکدیگر، باید یک نیروی جاذبهٔ هسته‌ای قوی از نوعی کاملاً متفاوت وجود داشته باشد که به حد کافی برای غلبه بر نیروی دافعهٔ میان پروتونهای هسته‌ای (با بار مثبت) قوی باشد، و پروتونها و نیز نوترونها را در حجم هسته‌ای بسیار کوچکی پیوند دهد. نیروی هسته‌ای همچنین باید کوتاه‌برد باشد، زیرا تأثیر آن خیلی فراتر از «سطح» هسته‌ای ادامه ندارد.

نظریهٔ کنونی این است که نیروی هسته‌ای که نوترونها و پروتونها را در هسته به هم پیوند می‌دهد، یک نیروی بنیادین طبیعت نیست، بلکه یک اثر ثانوی یا «اضافه بر» **نیروی قوی** است که کوارکها را، برای تشکیل نوترونها و پروتونها، به یکدیگر می‌پیوندند. به روش بسیار مشابهی، نیروی جاذبهٔ میان مولکولهای خنثی، یک اثر اضافه بر نیروی الکتریکی کولنی است که در داخل هر مولکول برای پیوند آنها به یکدیگر، عمل می‌کند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۲-۲

می‌توانیم تصور کنیم که همهٔ نوکلیدها از آمیزه‌ای از نوترون- پروتون که می‌توانیم آن را *مادهٔ هسته‌ای* بنامیم ساخته شده‌اند. چگالی مادهٔ هسته‌ای چقدر است؟

نکته کلیدی می‌توانیم چگالی (متوسط) ρ هسته را با تقسیم جرم کل آن بر حجمش به دست آوریم.

محاسبه‌ها: m را نشان‌دهندهٔ جرم یک نوکلئون (یک پروتون یا یک نوترون، زیرا این ذره‌ها دارای جرمی تقریباً برابرند) اختیار می‌کنیم. آنگاه جرم یک هسته شامل A نوکلئون برابر با Am است. حال، فرض می‌کنیم که هسته، کره‌ای به شعاع r است. پس حجم آن برابر با $\frac{4}{3}\pi r^3$ است، و می‌توانیم چگالی هسته را به صورت زیر بنویسیم

$$\rho = \frac{Am}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

شعاع r با معادلهٔ ۴۲-۳ ($r=r_\circ A^{1/3}$) داده می‌شود، که در آن $r_\circ$ برابر $1/2\ \text{fm}(=1/2\times10^{-15}\ \text{m})$ است. آنگاه، با قرار دادن به جای r خواهیم داشت

$$\rho=\frac{Am}{\frac{4}{3}\pi r_\circ^3 A}=\frac{m}{\frac{4}{3}\pi r_\circ^3}$$

توجه کنید که A حذف شده است؛ بنابراین، این معادله برای چگالی ρ، برای هر هسته‌ای که بتوان آن را به صورت کره‌ای به شعاع داده شده با معادلهٔ ۴۲-۳ در نظر گرفت، برقرار است. آنگاه با استفاده از $1/67\times10^{-27}\ \text{kg}$ به جای جرم m نوکلئون، داریم

$$\rho=\frac{1/67\times10^{-27}\ \text{kg}}{\frac{4}{3}\pi(1/2\times10^{-15}\ \text{m})^3}\approx2\times10^{17}\ \text{kg/m}^3 \quad \text{(پاسخ)}$$

این تقریباً 2×10^{14} برابر چگالی آب است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۲-۳

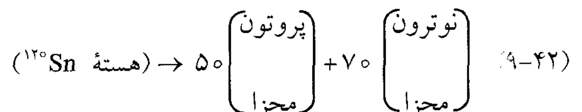
انرژی بستگی بر نوکلئون برای ^{120}Sn چقدر است؟

نکته‌های کلیدی

۱- بنابر معادلهٔ ۴۲-۸ ($\Delta E_{\text{ben}}=\Delta E_{\text{be}}/A$)، انرژی بستگی بر نوکلئون ΔE_{ben} را در صورتی می‌توانیم بیابیم که نخست انرژی بستگی ΔE_{be} را به‌دست آوریم و سپس آن را بر تعداد نوکلئونهای A هسته تقسیم کنیم.

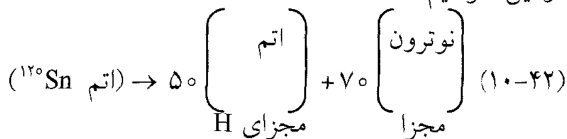
۲- بنابر معادلهٔ ۴۲-۷ ($\Delta E_{\text{be}}=\sum(mc^2)-Mc^2$)، ΔE_{be} را می‌توانیم با یافتن اختلاف بین انرژی جرمی Mc^2 هسته و انرژی جرمی کل $\sum(mc^2)$ نوکلئونهای مجزایی که هسته را می‌سازند، به‌دست آوریم.

محاسبه‌ها: از جدول ۴۲-۱ درمی‌یابیم که هستهٔ ^{120}Sn شامل ۵۰ پروتون ($Z=50$) و ۷۰ نوترون ($N=A-Z=120-50=70$) است. بنابراین، لازم است که تصور کنیم یک هستهٔ ^{120}Sn به ۵۰ پروتون و ۷۰ نوترون خود جدا شده است،


(۴۲-۹) (هستهٔ ^{120}Sn) $\rightarrow 50$ (پروتون مجزا) $+70$ (نوترون مجزا)

و سپس تغییر حاصل در انرژی جرمی را محاسبه کنیم.

برای انجام این محاسبه، به جرمهای هستهٔ ^{120}Sn، پروتون، و نوترون نیاز داریم. ولی، چون اندازه‌گیری یک اتم خنثی (هسته *بعلاوهٔ* الکترونها) بسیار ساده‌تر از اندازه‌گیری جرم یک هستهٔ تنهاست، محاسبهٔ انرژیهای بستگی به طور معمول با جرمهای اتمی صورت می‌پذیرد. بنابراین، معادلهٔ ۴۲-۹ را به گونه‌ای اصلاح می‌کنیم که اتم ^{120}Sn خنثی در طرف چپ آن قرار گیرد. برای این منظور، ۵۰ الکترون را (متناظر با ۵۰ پروتون هستهٔ ^{120}Sn) به طرف چپ اضافه می‌کنیم. همچنین باید ۵۰ الکترون را به منظور متوازن ماندن معادلهٔ ۴۲-۹ به طرف راست اضافه کنیم. این ۵۰ الکترون می‌توانند برای تشکیل ۵۰ اتم هیدروژن خنثی، با ۵۰ پروتون ترکیب شوند. در این خواهیم داشت


(۴۲-۱۰) (اتم ^{120}Sn) $\rightarrow 50$ (اتم H مجزای) $+70$ (نوترون مجزا)

در جدول ۴۲-۱، جرم M_{Sn} اتم ^{120}Sn برابر با $119/902197\ \text{u}$، جرم m_H اتم هیدروژن برابر با $1/007825\ \text{u}$ و جرم m_{n} نوترون برابر $1/008664\ \text{u}$ است. بنابراین، معادلهٔ ۴۲-۷ چنین به دست می‌دهد

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{be}}&=\sum(mc^2)-Mc^2\\&=50(m_{\text{H}}c^2)+70(m_{\text{n}}c^2)-M_{\text{Sn}}c^2\\&=50(1/007825\ \text{u})c^2+70(1/008664\ \text{u})c^2\\&\quad-(119/902197\ \text{u})c^2\\&=(1/095553\ \text{u})c^2\\&=(1/095553\ \text{u})(931/494013\ \text{MeV/u})\\&=1020/5\ \text{MeV}\end{aligned}$$

که در آن از معادلهٔ ۴۲-۵ ($c^2=931/494013\ \text{MeV/u}$) برای تبدیل یکای آسان استفاده کرده‌ایم. توجه کنید که استفاده از جرمهای اتمی به جای جرمهای هسته‌ای روی نتیجه اثر نمی‌گذارد، زیرا جرم ۵۰ الکترون در اتم ^{120}Sn از جرم الکترونها در ۵۰ اتم هیدروژن کاسته می‌شود.

اکنون معادلهٔ ۴۲-۸، انرژی بستگی بر نوکلئون چنین به دست می‌آید

$$\Delta E_{\text{ben}}=\frac{\Delta E_{\text{be}}}{A}=\frac{1020/5\ \text{MeV}}{120}=8/50\ \text{MeV/}\text{نوکلئون} \quad \text{(پاسخ)}$$

۴۲-۴ واپاشی پرتوزا

همانطور که شکل ۴۲-۴ نشان می‌دهد، اغلب نوکلیدهای شناخته شده، پرتوزا هستند. نوکلید پرتوزا به طور خودبه‌خود ذره‌ای را گسیل می‌دارد و خود در این فرایند به نوکلید متفاوتی تبدیل می‌شود که خانهٔ متفاوتی را در نقشهٔ نوکلیدی اشغال می‌کند.

واپاشی پرتوزا نخستین گواه بر این مدعاست که قانونهای حاکم بر جهان زیر اتمی، آماری‌اند. مثلاً یک نمونهٔ 1mg از فلز اورانیوم را در نظر بگیرید. این نمونه شامل $2/5\times10^{18}$ اتم از نوکلید پرتوزای ^{238}U با عمر بسیار بلند است. هسته‌های این اتمهای ویژه بدون واپاشی وجود داشته‌اند، زیرا آنها خیلی پیش از تشکیل منظومهٔ شمسی ایجاد شده بودند. در هر ثانیه، فقط حدود ۱۲ هسته در نمونهٔ موردنظر با گسیل یک ذرهٔ آلفا واپاشی می‌کند و بدین ترتیب به هستهٔ ^{234}Th تبدیل می‌شود. با این حال،

مطلقاً هیچ راهی وجود ندرد که پیش‌بینی کنیم آیا هر هستهٔ معین در یک نمونهٔ پرتوزا، در میان تعداد کوچکی از هسته‌هایی که در ثانیهٔ بعدی واپاشی می‌کنند، حضور دارد یا خیر. همگی شانس برابری دارند.

گرچه نمی‌توانیم پیش‌بینی کنیم کدام هسته‌های نمونه واپاشی خواهند کرد، ولی می‌توانیم بگوییم که اگر نمونه‌ای شامل N هستهٔ پرتوزا باشد، آنگاه آهنگی $(=-dN/dt)$ که با آن هسته‌ها واپاشی خواهند کرد، متناسب با N است:

$$-\frac{dN}{dt}=\lambda N \qquad (۱۱-۴۲)$$

که در آن λ، **ثابت فروپاشی** (یا **ثابت واپاشی**) دارای یک مقدار مشخصه برای هر نوکلید پرتوزا است. یکای SI آن، وارون ثانیه (s^{-1}) است.

برای یافتن N به صورت تابعی از زمان t، نخست معادلهٔ ۴۲-۱۱ را چنین مرتب می‌کنیم

$$\frac{dN}{N}=-\lambda dt \qquad (۱۲-۴۲)$$

حال از دو طرف انتگرال می‌گیریم، خواهیم داشت

$$\int_{N_0}^{N}\frac{dN}{N}=-\lambda\int_{t_0}^{t}dt$$

یا

$$\ln N-\ln N_0=-\lambda(t-t_0) \qquad (۱۳-۴۲)$$

که در اینجا N_0 تعداد هسته‌های پرتوزای نمونه در زمان اولیهٔ دلخواه t_0 است. قرار دادن $t_0=0$ و مرتب کردن دوبارهٔ معادلهٔ ۴۲-۱۳، چنین به دست می‌دهد

$$\ln\frac{N}{N_0}=-\lambda t \qquad (۱۴-۴۲)$$

با گرفتن تابع نهایی از دو طرف (تابع نمایی، پاد تابع لگاریتم طبیعی است) خواهیم داشت

$$\frac{N}{N_0}=e^{-\lambda t}$$

یا

$$N=N_0e^{-\lambda t} \qquad \text{(واپاشی پرتوزا)} \qquad (۱۵-۴۲)$$

که در آن N_0 تعداد هسته‌های پرتوزای نمونه در $t=0$ و N تعداد هسته‌های باقیمانده در هر زمان بعدی t است. توجه کنید (برای مثال) لامپهای حبابی از چنین قانون واپاشی نمایی پیروی نمی‌کنند. اگر عمر ۱۰۰۰ لامپ را بیازماییم، توقع داریم که همهٔ آنها کم و بیش در زمانی یکسانی "واپاشی" کنند (یعنی، بسوزند). واپاشی نوکلیدهای پرتوزا از قانون کاملاً متفاوتی پیروی می‌کند.

ما اغلب به آهنگ واپاشی $R(=-dN/dt)$ بیشتر از خود N علاقه‌مندیم. با مشتق‌گیری از معادلهٔ ۴۲-۱۵، در می‌یابیم

$$R=-\frac{dN}{dt}=\lambda N_0e^{-\lambda t}$$

یا

$$R=R_0e^{-\lambda t} \qquad \text{(واپاشی پرتوزا)} \qquad (۱۶-۴۲)$$

شکل دیگری از قانون واپاشی (معادلهٔ ۴۲-۱۵) است. در اینجا R_0، آهنگ واپاشی در زمان $t=0$ و R آهنگ واپاشی در هر زمان بعدی t است. اکنون می‌توانیم معادلهٔ ۴۲-۱۱ را برحسب آهنگ واپاشی R نمونه به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$R=\lambda N \qquad (۱۷-۴۲)$$

که در آن R و تعداد هسته‌های پرتوزای N که هنوز واپاشی نکرده‌اند باید در لحظهٔ یکسانی تعیین شوند.

آهنگ واپاشی کل R نمونه‌ای از یک یا چند نوکلید پرتوزا، **فعالیت** آن نمونه نامیده می‌شود. یکای SI فعالیت، به افتخار *هانری بکرل*[1]، کاشف پرتوزایی، **بکرل** نامیده شده است:

۱ واپاشی بر ثانیه = 1Bq = ۱ بکرل

یک یکای قدیمی‌تر، **Curie**، هنوز هم به کار می‌رود

۱کوری = 1Ci = $۳/۷\times۱۰^{۱۰}$ Bq

این عبارت، مثالی از استفادهٔ این یکاهاست: "فعالیت صرف شده در میلهٔ سوخت شمارهٔ ۵۶۵۸ راکتور در ۱۵ ژانویهٔ ۲۰۰۴، برابر با $۳/۵\times۱۰^{۱۵}$ Bq$(=۹/۵\times۱۰^{۴}$ Ci$)$ بوده است" بنابراین، در آن روز $۳/۵\times۱۰^{۱۵}$ هستهٔ پرتوزا در میله، در هر ثانیه واپاشی کرده‌اند. مشخصه‌های نوکلیدهای پرتوزای میلهٔ سوخت، ثابت فروپاشی λ آنها، و انواع تابشهایی که آنها گسیل می‌کنند، در مقدار این فعالیت نقشی ندارند.

اغلب به دلیل ساختار هندسی یا ناکارایی آشکارسازی که نمونهٔ پرتوزا در نزدیکی آن قرار داده می‌شود، همهٔ فروپاشیهایی که در نمونه رخ می‌دهد، ثبت نمی‌شود. عددی که آشکارساز در این شرایط نشان می‌دهد متناسب با (و کوچکتر از) فعالیت واقعی نمونه است. این چنین اندازه‌گیریهای فعالیت تناسبی نه برحسب یکاهای بکرل بلکه به طور ساده برحسب شمارش بر یکای زمان گزارش می‌شوند.

دو معیار زمانی متداول برای طول عمر نوکلیدهای پرتوزا وجود دارد. یک معیار، نیم- عمر $T_{1/2}$ یک نوکلید پرتوزا و آن زمانی است که در آن هم N و هم R به نیمی از مقدار اولیهٔ خود کاهش پیدا می‌کنند. معیار دیگر، **عمر میانگین** τ است، و آن زمانی است که در آن هم N و هم R به e^{-1} مقدار اولیهٔ خود کاهش پیدا می‌کنند.

برای ربط دادن $T_{1/2}$ به ثابت فروپاشی λ، در معادلهٔ ۴۲-۱۶ قرار می‌دهیم $R=1/2R_0$ و $T_{1/2}$ را نیز به جای t قرار می‌دهیم. از آنجا خواهیم داشت

$$\frac{1}{2}R_0=R_0e^{-\lambda T_{1/2}}$$

با گرفتن لگاریتم طبیعی از دو طرف و حل آن برای $T_{1/2}$، به رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$T_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}$$

1. Henri Becquerel

به همین ترتیب، برای ربط دادن τ به λ، در معادلهٔ ۴۲-۱۶ قرار می‌دهیم، $R = e^{-1}R_0$ و τ را نیز به جای t قرار می‌دهیم، و آن را برای τ حل می‌کنیم، داریم

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

این نتایج را با عبارت زیر خلاصه می‌کنیم:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2 \qquad (۴۲-۱۸)$$

✔ نکتهٔ وارسی ۲ نوکلید ^{131}I با نیم- عمر ۸/۰۴ روز، پرتوزاست. در ظهر اول ژانویه، فعالیت یک نمونهٔ معین برابر با ۶۰۰Bq است. با استفاده از مفهوم نیم- عمر، بدون هرگونه محاسبه‌ای، تعیین کنید که آیا فعالیت در ظهر ۲۴ ژانویه، کمی کمتر از ۲۰۰Bq، کمی بیشتر از ۲۰۰Bq، کمی کمتر از ۷۵Bq، یا کمی بیشتر از ۷۵Bq است؟

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۲-۴

جدول زیر برخی از اندازه‌گیریهای آهنگ واپاشی یک نمونهٔ ^{128}I را نشان می‌دهد، نوکلید پرتوزایی که غالباً در مصارف پزشکی به عنوان ردیاب برای اندازه‌گیری آهنگی که ید توسط غدهٔ تیروئید جذب می‌شود، به کار گرفته می‌شود.

زمان (min)	R (شمارش/s)	زمان (min)	R (شمارش/s)
۴	۳۹۲/۲	۱۳۲	۱۰/۹
۳۶	۱۶۱/۴	۱۶۴	۴/۵۶
۶۸	۶۵/۵	۱۹۶	۱/۸۶
۱۰۰	۲۶/۸	۲۱۸	۱/۰۰

ثابت فروپاشی λ و نیم- عمر $T_{1/2}$ را برای این نوکلید پرتوزا به دست آورید.

نکته‌های کلیدی ثابت فروپاشی λ، آهنگ نمایی را که با آن آهنگ واپاشی R نسبت به زمان t کاهش می‌یابد (که با معادلهٔ ۴۲-۱۶ نیمی $R = R_0 e^{-\lambda t}$، نشان شده است) تعیین می‌کند. بنابراین، باید بتوانیم λ را با رسم اندازه‌گیریهای R برحسب زمانهای اندازه‌گیری t، تعیین کنیم.

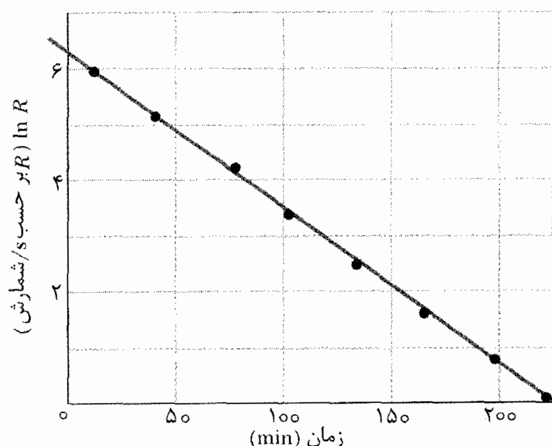
ولی، به دست آوردن λ از نمودار R برحسب t دشوار است، زیرا R بنابر معادلهٔ ۴۲-۱۶، به طور نمایی با t کاهش پیدا می‌کند. حل ماهرانه تبدیل معادلهٔ ۴۲-۱۶ به تابعی خطی از t است، به گونه‌ای که بتوانیم λ را به سادگی به دست آوریم. برای این منظور، از دو طرف معادلهٔ ۴۲-۱۶، لگاریتم طبیعی می‌گیریم.

محاسبه‌ها: به دست می‌آوریم.

$$\ln R = \ln(R_0 e^{-\lambda t}) = \ln R_0 + \ln(e^{-\lambda t}) = \ln R_0 - \lambda t \qquad (۴۲-۱۹)$$

چون معادلهٔ ۴۲-۱۹ به شکل $y = b + mx$، با b و m ثابت، است بنابراین، معادله‌ای خطی است که کمیت $\ln R$ را برحسب تابع t به دست می‌دهد. از این‌رو، اگر $\ln R$ را (به جای R) برحسب t رسم کنیم، به خط مستقیمی می‌رسیم. افزون بر این، شیب این خط باید برابر با $-\lambda$ باشد.

شکل ۴۲-۸ نمودار $\ln R$ برحسب t را برای اندازه‌گیریهای داده شده، نشان می‌دهد. شیب این خط مستقیم که از نقطه‌های رسم شده می‌گذرد، برابر است با



شکل ۴۲-۸ نمودار نیم لگاریتمی از واپاشی یک نمونهٔ ^{128}I، بر مبنای داده‌های جدول.

$$\text{شیب} = \frac{0 - 6/2}{225\,\text{min} - 0} = -0/0275\,\text{min}^{-1}$$

بنابراین

$$-\lambda = -0/0275\,\text{min}^{-1}$$

یا

$$\lambda = 0/0275\,\text{min}^{-1} \approx 1/7\,\text{h}^{-1} \qquad \text{(پاسخ)}$$

برای یافتن نیم- عمر $T_{1/2}$ نوکلید پرتوزا، از این **نکتهٔ کلیدی** استفاده می‌کنیم که زمان کاهش آهنگ واپاشی R به اندازهٔ ۱/۲ از طریق معادلهٔ ۴۲-۱۸ $(T_{1/2} = (\ln 2)/\lambda)$ به ثابت فروپاشی λ مربوط است. از آن معادله درمی‌یابیم

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0/0275\,\text{min}^{-1}} \approx 25\,\text{min} \qquad \text{(پاسخ)}$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۲-۵

معلوم شده است که یک نمونهٔ ۲/۷۱ گرمی KCl ازانبار کالاهای شیمیایی پرتوزا است، و با آهنگ ثابت ۴۴۹۰Bq در حال واپاشی است. واپاشیها تا عنصر پتاسیم و بخصوص تا ایزوتوپ ^{40}K پس گرفته شده است، که این ایزوتوپ شامل ٪۱/۱۷ پتاسیم طبیعی است. نیم عمر این نوکلید را محاسبه کنید.

نکته‌های کلیدی

(۱) چون فعالیت R نمونه ظاهراً ثابت است، نیم- عمر $T_{1/2}$ را نمی‌توانیم با رسم $\ln R$ برحسب زمان t، آنگونه که در مسئلهٔ

نمونهٔ ۴۲-۴ انجام دادیم، به دست آوریم. (ما فقط به یک نمودار افقی می‌رسیم). ولی، می‌توانیم از دو نکتهٔ زیر استفاده کنیم:

(۲) نیم-عمر $T_{۱/۲}$ را می‌توانیم از طریق معادلهٔ ۴۲-۱۸ ($T_{۱/۲} = (\ln ۲)/\lambda$) به ثابت فروپاشی λ مربوط کنیم.

(۳) λ را می‌توانیم از طریق معادلهٔ ۴۲-۱۷ ($R = \lambda N$) به فعالیت داده شدهٔ $R = ۴۴۹۰\,\mathrm{Bq}$ مربوط کنیم، که در آن N تعداد هسته‌های $^{۴۰}\mathrm{K}$ (و بنابراین اتمهای) نمونه است.

محاسبه‌ها: ترکیب معادله‌های ۴۲-۱۸ و ۴۲-۱۷ چنین به دست می‌دهد

$$T_{۱/۲} = \frac{N \ln ۲}{R} \qquad (۴۲\text{-}۲۰)$$

می‌دانیم که N در این معادله برابر با ۱/۱۷٪ از تعداد کلّ N_{K} اتمهای پتاسیم در نمونه است. همچنین می‌دانی N_{K} باید برابر با تعداد N_{KCl} مولکولهای نمونه باشد. N_{KCl} را می‌توانیم از جرم مولی M_{KCl} (جرم یک مول KCl) و جرم داده شده M_{sam} نمونه با ترکیب معادله‌های ۱۹-۲ ($n = N/N_A$) و ۱۹-۳ ($n = M_{\mathrm{sam}}/M$) به دست آوریم و بنویسیم

$$N_{\mathrm{KCl}} = \left(\text{تعداد مولهای نمونه}\right) N_A = \frac{M_{\mathrm{sam}}}{M_{\mathrm{KCl}}} N_A \qquad (۴۲\text{-}۲۱)$$

که N_{A}، عدد آووگادرو ($۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\ \mathrm{mol}^{-۱}$) است. از پیوست ج درمی‌یابیم که جرم مولی پتاسیم برابر $۳۹/۱۰۲\,\mathrm{g/mol}$ و جرم مولی کلر برابر با $۳۵/۴۵۳\,\mathrm{g/mol}$ است؛ بنابراین، جرم مولی KCl برابر با $۷۴/۵۵۵\,\mathrm{g/mol}$ است. حال معادلهٔ ۴۲-۲۱ چنین به دست می‌دهد

$$N_{\mathrm{KCl}} = \frac{(۲/۷۱\,\mathrm{g})(۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\ \mathrm{mol}^{-۱})}{۷۴/۵۵۵\,\mathrm{g/mol}} = ۲/۱۸۸ \times ۱۰^{۲۲}$$

که تعداد مولکولهای KCl نمونه است. بنابراین، تعداد کل N_{K} اتمهای پتاسیم نیز برابر با $۲/۱۸۸ \times ۱۰^{۲۲}$ است، و برای تعداد $^{۴۰}\mathrm{K}$ نمونه باید داشته باشیم

$$N = ۰/۰۱۱۷ N_{\mathrm{K}} = (۰/۰۱۱۷)(۲/۱۸۸ \times ۱۰^{۲۲}) = ۲/۵۶۰ \times ۱۰^{۲۰}$$

با قرار دادن این مقدار به جای N و فعالیت داده شدهٔ $۴۴۹۰\,\mathrm{Bq} (= ۴۴۹۰\,\mathrm{s}^{-۱})$ به جای R در معادلهٔ ۴۲-۲۰ خواهیم داشت

$$T_{۱/۲} = \frac{(۲/۵۶۰ \times ۱۰^{۲۰}) \ln ۲}{۴۴۹۰\,\mathrm{s}^{-۱}} = ۳/۹۵ \times ۱۰^{۱۶}\,\mathrm{s} = ۱/۲۵ \times ۱۰^{۹}\,\mathrm{y} \qquad \text{(پاسخ)}$$

این نیم-عمر $^{۴۰}\mathrm{K}$ از همان مرتبهٔ بزرگی سن عالم است. بنابراین، فعالیت $^{۴۰}\mathrm{K}$ نمونهٔ موجود در انبار *بسیار* به‌آرامی کاهش می‌یابد، آنقدر به‌آرامی که نمی‌توانیم آن را در حین چند روز مشاهده و یا حتی در کل عمرمان آشکارسازی کنیم. بخشی از پتاسیم بدن ما شامل این ایزوتوپ پرتوزا است، که بدین معناست که همگی ما قدری پرتوزا هستیم.

۴۲-۵ واپاشی آلفا

هرگاه هسته‌ای **واپاشی آلفا** پیدا کند، با گسیل یک ذرهٔ آلفا (یک هستهٔ هلیوم، $^{۴}\mathrm{He}$)، به نوکلید متفاوتی تبدیل می‌شود. برای مثال، وقتی اورانیوم $^{۲۳۸}\mathrm{U}$ واپاشی آلفا می‌کند، به توریم $^{۲۳۴}\mathrm{Th}$ تبدیل می‌شود



$$^{۲۳۸}\mathrm{U} \rightarrow {}^{۲۳۴}\mathrm{Th} + {}^{۴}\mathrm{He} \qquad (۴۲\text{-}۲۲)$$

این واپاشی آلفای $^{۲۳۸}\mathrm{U}$ می‌تواند به طور خودبه‌خودی (بدون یک چشمهٔ خارجی انرژی) صورت بپذیرد، زیرا جرم کل محصولات واپاشی $^{۲۳۴}\mathrm{Th}$ و $^{۴}\mathrm{He}$ کمتر از جرم $^{۲۳۸}\mathrm{U}$ اولیه است. بنابراین، انرژی جرمی کل محصولات واپاشی کمتر از انرژی جرمی نوکلید اولیه است. همانطور که با معادلهٔ ۳۷-۵۰ ($Q = -\Delta mc^{۲}$) تعریف شده است، در چنین فرایندی اختلاف بین انرژی جرمی اولیه و انرژی جرمی نهایی کل، مقدار Q فرایند نامیده می‌شود.

برای یک واپاشی هسته‌ای، می‌گوییم که اختلاف در انرژی جرمی برابر با *انرژی فروپاشی* واپاشی است. مقدار Q برای واپاشی در معادلهٔ ۴۲-۲۲ برابر $۴/۲۵\,\mathrm{MeV}$ است- گفته می‌شود این مقدار انرژی، بر اثر واپاشی آلفای $^{۲۳۸}\mathrm{U}$، با انتقال انرژی از انرژی جرمی یه انرژی جنبشیِ دو محصول واپاشی، آزاد شده است.

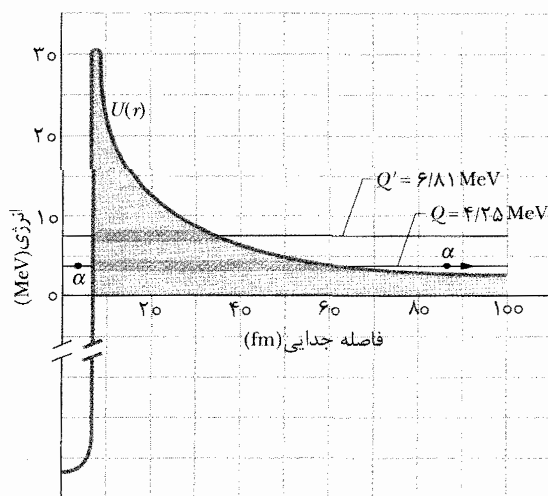
نیم-عمر $^{۲۳۸}\mathrm{U}$ برای این فرایند واپاشی برابر با $۴/۵ \times ۱۰^{۹}\,\mathrm{y}$ است. چرا آنقدر طولانی؟ اگر $^{۲۳۸}\mathrm{U}$ بتواند به این طریق واپاشی کند، چرا هر نوکلید $^{۲۳۸}\mathrm{U}$ در نمونه‌ای از اتمهای $^{۲۳۸}\mathrm{U}$ فوراً واپاشی نمی‌کند؟ برای پاسخ به این پرسشها، باید فرایند واپاشی آلفا را بررسی کنیم.

مدلی را برمی‌گزینیم و در آن فرض می‌کنیم ذرهٔ آلفا پیش از آنکه از هسته فرار کند، در داخل هسته وجود دارد (پیشتر تشکیل شده است). شکل ۴۲-۹، انرژی پتانسیل تقریبی $U(r)$ دستگاه شامل ذرهٔ آلفا و هستهٔ باقیمانده $^{۲۳۴}\mathrm{Th}$ را برحسب تابعی از فاصلهٔ جدایی r آنها نشان می‌دهد. این انرژی، ترکیبی است از (۱) انرژی پتانسیل وابسته به نیروی هسته‌ای قوی (جاذبه‌ای) که داخل هسته عمل می‌کند و (۲) یک پتانسیل کولنی وابسته به نیروی الکتریکی (دافعه‌ای) که میان دو ذرهٔ پیش و پس از وقوع واپاشی عمل می‌کند.

خط افقی سیاه که $Q = ۴/۲۵\,\mathrm{MeV}$ را مشخص می‌کند، انرژی فروپاشی برای این فرایند را نشان می‌دهد. اگر فرض کنیم که این، کل انرژی ذرهٔ آلفا را در حین فرایند واپاشی نشان می‌دهد، آنگاه آن بخش منحنی $U(r)$ که بالای این خط است، یک سد انرژی پتانسیل مانند شکل ۳۸-۱۵ را تشکیل می‌دهد. بر این سد نمی‌توان غلبه کرد. اگر ذرهٔ آلفا بتواند در یک فاصلهٔ r در داخل این سد باشد، آنگاه انرژی پتانسیل U آن از انرژی کل E آن تجاوز می‌کند. این، از لحاظ کلاسیکی، بدان معنی است، که انرژی جنبشی K آن (که برابر با $E - U$ است) باید منفی باشد که یک وضعیت ناممکن است.

اکنون می‌توانیم دریابیم که چرا ذرهٔ آلفا بی درنگ از هستهٔ $^{238}\mathrm{U}$ گسیل نمی‌شود. این هسته توسط یک سد پتانسیل قابل ملاحظه در بر گرفته شده است- که اگر آن را در سه بُعد تصور کنید- حجم میان دو پوستهٔ کروی (به شعاعهای تقریبی ۸ fm و ۶۰ fm) را اشغال می‌کند. این استدلال به حدی متقاعد کننده است که اکنون پرسش آخر خود را تغییر می‌دهیم و چنین می‌پرسیم: چون به نظر می‌رسد که ذره برای همیشه در داخل هسته توسط سد به تله افتاده است، پس چگونه است که هستهٔ $^{238}\mathrm{U}$ *همواره* یک ذرهٔ آلفا گسیل می‌دارد؟ پاسخ این است، همانطور که در بخش ۳۸-۹ دیدیم، احتمال معینی وجود دارد که یک ذره بتواند از میان یک سد انرژی که از لحاظ کلاسیکی فائق نیامدنی است، تونل بزند. در واقع، واپاشی آلفا به عنوان نتیجه‌ای از تونل‌زنی در سد، رخ می‌دهد.

نیم- عمر بسیار بلند $^{238}\mathrm{U}$ مبین آن است که آن سد، ظاهراً "نشتی" زیادی ندارد. ذرهٔ آلفا، که فرض شده است به طور سریع و مداوم داخل هسته به عقب و جلو می‌رود، باید پیش از آنکه موفق به تونل زنی در سد شود، حدود 10^{38} بار به سطح داخلی سد برسد. این، در حدود 10^{21} بار در ثانیه برای حدود 4×10^{9} سال (عمر کرهٔ زمین!) است. البته، ما که در بیرون انتظار می‌کشیم، فقط آن ذره‌های آلفایی را می‌توانیم بشماریم که *موفق* به فرار شده‌اند.



شکل ۲۴-۹ تابع انرژی پتانسیل برای گسیل یک ذرهٔ آلفا توسط $^{238}\mathrm{U}$. خط افقی سیاه که $Q =$ ۴/۲۵ MeV را مشخص کرده است، انرژی فروپاشی برای این فرایند را نشان می‌دهد. بخش ضخیم خاکستری این خط، آن فاصله‌های جدایی r را که از لحاظ کلاسیکی برای ذرهٔ آلفا ممنوع هستند، نمایش می‌دهد. ذرهٔ آلفا، با یک نقطه نمایش داده شده است هم در داخل این سد انرژی پتانسیل (در سمت چپ) و هم در خارج آن (در سمت راست)، پس از تونل زنی از سد. خط افقی سیاه که $Q' =$ ۶/۸۱ MeV را مشخص کرده است، انرژی فروپاشی برای واپاشی آلفا $^{228}\mathrm{U}$ را نشان می‌دهد. (هر دو ایزوتوپ دارای تابع انرژی پتانسیل یکسانی هستند، زیرا بار هسته‌ای یکسانی دارند).

این توضیح واپاشی آلفا را می‌توانیم با بررسی گسیلنده‌های آلفای دیگری بیازماییم. به عنوان مثالی بسیار متمایز با قبلی، واپاشی آلفا از ایزوتوپ دیگر اورانیوم، $^{228}\mathrm{U}$، را در نظر بگیرید که دارای انرژی فروپاشی $Q' =$ ۶/۸۱MeV است، حدود ٪۶۰ بیشتر از انرژی فروپاشی $^{238}\mathrm{U}$ (مقدار Q' نیز به صورت یک خط افقی سیاه در شکل ۴۲-۹ نشان داده شده است). از بخش ۳۸-۹ به‌خاطر آورید که ضریب گسیل از یک سد به تغییرات کوچک در انرژی کل ذره‌ای که در پی نفوذ به آن است، بسیار حساس است. بنابراین، توقع داریم واپاشی آلفا برای این نوکلید به طور بسیار آسانتری نسبت به $^{238}\mathrm{U}$ رخ دهد. در واقع، چنین هم هست. همانطور که جدول ۴۲-۲ نشان می‌دهد، نیم- عمر آن فقط ۹/۱ دقیقه است! افزایش Q با ضریب فقط ۱/۶ به کاهش نیم- عمر (یعنی در تأثیر سد) با ضریب 3×10^{14} می‌انجامد. این در واقع میزان حساسیت است.

جدول ۴۲-۲

مقایسهٔ دو گسیلندهٔ آلفا

نوکلید پرتوزا	Q	نیم- عمر
$^{238}\mathrm{U}$	۴/۲۵MeV	$۴/۵\times۱۰^{۹}$ y
$^{228}\mathrm{U}$	۶/۸۱MeV	۹/۱ min

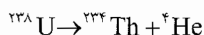
مسئلهٔ نمونه ۴۲-۶

جرمهای اتمی زیر داده شده‌اند:

$^{238}\mathrm{U}$	۲۳۸/۰۵۰۷۹u	$^{4}\mathrm{He}$	۴/۰۰۲۶۰u
$^{234}\mathrm{Th}$	۲۳۴/۰۴۳۶۳u	$^{1}\mathrm{H}$	۱/۰۰۷۸۳u
$^{237}\mathrm{Pa}$	۲۳۷/۰۵۱۲۱u		

که در اینجا Pa نماد عنصر پروتاکتینیوم $(Z = 91)$ است.

(الف) انرژی آزاد شده در حین واپاشی $^{238}\mathrm{U}$ را محاسبه کنید. فرایند واپاشی به این قرار است



$$^{238}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}\mathrm{Th} + {}^{4}\mathrm{He}$$

ضمناً توجه کنید که چگونه بار هسته‌ای در این معادله پایسته است: جمع عددهای اتمی توریم (۹۰) و هلیوم (۲)، عدد اتمی اورانیوم (۹۲) را به دست می‌دهد. تعداد نوکلئونها نیز پایسته است: ۲۳۸ = ۲۳۴ + ۴.

نکته کلیدی انرژی آزاد شده در واپاشی برابر با انرژی فروپاشی Q است، که می‌توانیم آن را از تغییر جرم ΔM ناشی از واپاشی $^{238}\mathrm{U}$ محاسبه کنیم.

محاسبه: از معادلهٔ ۳۷-۵۰ استفاده می‌کنیم

$$Q = M_i c^2 - M_f c^2 \qquad (42\text{-}23)$$

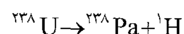
که در آن جرم اولیهٔ M_i مربوط به $^{238}\mathrm{U}$ و جرم نهایی M_f، مجموع جرمهای $^{234}\mathrm{Th}$ و $^{4}\mathrm{He}$ است. مانند مسئلهٔ نمونهٔ ۴۲-۳، باید این محاسبه را برای اتمهای خنثی انجام دهیم- یعنی، با جرمهای اتمی. با استفاده از جرمهای اتمی داده شده در صورت مسئله، معادلهٔ ۴۲-۲۳ چنین می‌شود

$$Q=(۲۳۸/۰۵۰۷۹\,\mathrm{u})c^{۲}-(۲۳۴/۰۴۳۶۳\,\mathrm{u}+۴/۰۰۲۶۰\,\mathrm{u})c^{۲}$$
$$=(۰/۰۰۴۵۶\,\mathrm{u})c^{۲}=(۰/۰۰۴۵۶\,\mathrm{u})(۹۳۱/۴۹۴۰۱۳\,\mathrm{MeV/u})$$
$$=۴/۲۵\,\mathrm{MeV} \quad \text{(پاسخ)}$$

توجه کنید که استفاده از جرمهای اتمی به جای جرمهای هسته‌ای، بر نتیجه اثر نمی‌گذارد، زیرا جرم کل الکترونهای محصولهای واپاشی، از جرم نوکلئونها + الکترونها در $^{۲۳۸}\mathrm{U}$ اولیه کم می‌شود.

(ب) نشان دهید که $^{۲۳۸}\mathrm{U}$ نمی‌تواند به طور خودبه‌خودی یک پروتون گسیل کند، یعنی پروتونها به رغم دافعهٔ پروتون-پروتون در هسته از آن به بیرون نشت نمی‌کنند.

حل: اگر این وضعیت رخ دهد، فرایند واپاشی چنین خواهد بود

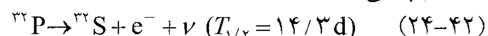


$$^{۲۳۸}\mathrm{U}\rightarrow{}^{۲۳۸}\mathrm{Pa}+{}^{۱}\mathrm{H}$$

(شما باید بررسی کنید که هم بار هسته‌ای و هم تعداد نوکلئونها در این فرایند پایسته‌اند). با استفاده از همان **نکتهٔ کلیدی** بخش (الف) و مرحله‌هایی که در آنجا به انجام رسانیدیم، درخواهیم یافت که جرم دو محصول واپاشی $(=۲۳۷/۰۵۱۲۱\,\mathrm{u}+۱/۰۰۷۸۳\,\mathrm{u})$ از جرم $^{۲۳۸}\mathrm{U}$ به اندازهٔ $\Delta m=۰/۰۰۸۲۵\,\mathrm{u}$ *زیادتر است* که این معادل انرژی فروپاشی $Q=-۷/۶۸\,\mathrm{MeV}$ است. علامت منفی مبین آن است که باید پیش از آنکه یک پروتون گسیل کند $۷/۶۸\,\mathrm{MeV}$ به هسته $^{۲۳۸}\mathrm{U}$ *اضافه کنیم*؛ پس، این فرایند یقیناً به طور خودبه‌خودی رخ نخواهد داد.

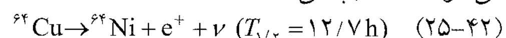
۲۴-۶ واپاشی بتا

هسته‌ای که به طور خودبه‌خودی با گسیل یک الکترون یا یک پوزیترون (ذرهٔ باردار مثبتی با جرم یک الکترون) واپاشی کند، گفته می‌شود که **واپاشی بتا** کرده است. این واپاشی مانند واپاشی آلفا، فرایندی خودبه‌خود، با انرژی فروپاشی و نیم-عمر معین است. دوباره مشابه واپاشی آلفا، واپاشی بتا فرایندی آماری است که معادله‌های ۴۲-۱۵ و ۴۲-۱۶ بر آن حاکم‌اند. در واپاشی *بتا- منفی* (β^{-})، الکترون توسط هسته گسیل می‌شود، مانند واپاشی



$$^{۳۲}\mathrm{P}\rightarrow{}^{۳۲}\mathrm{S}+\mathrm{e}^{-}+\nu \quad (T_{۱/۲}=۱۴/۳\,\mathrm{d}) \qquad (۴۲\text{-}۲۴)$$

در واپاشی *بتا- مثبت* (β^{+})، یک پوزیترون توسط هسته گسیل می‌شود، مانند واپاشی



$$^{۶۴}\mathrm{Cu}\rightarrow{}^{۶۴}\mathrm{Ni}+\mathrm{e}^{+}+\nu \quad (T_{۱/۲}=۱۲/۷\,\mathrm{h}) \qquad (۴۲\text{-}۲۵)$$

نماد ν نشان دهندهٔ **نوترینو** است، یک ذرهٔ خنثی که جرم بسیار کوچکی دارد و از هسته در حین فرایند واپاشی [بتا] همراه با الکترون و پوزیترون گسیل می‌شود. نوترینوها فقط به طور خیلی ضعیفی با ماده برهم‌کنش می‌کنند و به همین دلیل وجود آنها که برای مدت مدیدی مشاهده نشده بود، به دشواری فوق العاده زیادی آشکارسازی می‌شود[1]

هم بار و هم عدد نوکلئونی در دو فرایند بالا پایسته‌اند. مثلاً، در واپاشی معادلهٔ ۴۲-۲۴، برای پایستگی بار می‌توانیم بنویسیم

$$(+۱۵e)=(+۱۶e)+(-e)+(۰)$$

زیرا $^{۳۲}\mathrm{P}$ دارای ۱۵ پروتون، $^{۳۲}\mathrm{S}$ دارای ۱۶ پروتون، و نوترینو ν بدون بار است. به همین ترتیب، برای پایستگی نوکلئون می‌توانیم چنین بنویسیم

$$(۳۲)=(۳۲)+(۰)+(۰)$$

زیرا $^{۳۲}\mathrm{P}$ و $^{۳۲}\mathrm{S}$ دارای ۳۲ نوکلئون‌اند، و الکترون و نوترینو هیچ‌کدام نوکلئون نیستند.

ممکن است عجیب به نظر برسد که هسته‌ها می‌توانند الکترون، پوزیترون و نوترینو گسیل کنند، زیرا گفته‌ایم که هسته‌ها فقط از نوترونها و پروتونها ساخته شده‌اند. ولی، پیشتر دیدیم که اتمها، فوتون گسیل می‌کنند، و ما یقیناً نمی‌گوییم که اتمها "محتوی" فوتونها هستند. می‌گوییم فوتونها در حین فرایند گسیل ایجاد شده‌اند.

به همین ترتیب، الکترونها، پوزیترونها، و نوترینوها در حین واپاشی بتا از هسته‌ها گسیل می‌شوند. آنها در حین فرایند گسیل ایجاد می‌شوند. برای واپاشی بتا- منفی، یک نوترون در داخل هسته بنا به واکنش زیر، به یک پروتون تبدیل می‌شود



$$\mathrm{n}\rightarrow\mathrm{p}+\mathrm{e}^{-}+\nu \qquad (۴۲\text{-}۲۶)$$

برای واپاشی بتا- مثبت، یک پروتون از طریق واکنش زیر به یک نوترون تبدیل می‌شود



$$\mathrm{p}\rightarrow\mathrm{n}+\mathrm{e}^{-}+\nu \qquad (۴۲\text{-}۲۷)$$

هر دوی این فرایندهای واپاشی بتا گواهی بر این مدعا هستند- همانطور که اشاره شده بود- که نوترونها و پروتونها حقیقتاً ذره‌های بنیادی نیستند. این فرایندها نشان می‌دهند که چرا عدد جرمی A یک نوکلید که واپاشی بتا کرده است، تغییر نمی‌کند؛ یکی از نوکلئونهای سازندهٔ آن مشخصهٔ خود را بنابر معادلهٔ ۴۲-۲۶ یا ۴۲-۲۷ به‌سادگی تغییر می‌دهد.

در هر دو واپاشی آلفا و واپاشی بتا، مقدار انرژی یکسانی در هر واپاشی مجزای یک نوکلید پرتوزای خاص آزاد می‌شود. واپاشی آلفای یک نوکلید پرتوزای خاص، هر ذرهٔ آلفای گسیل شده دارای انرژی جنبشی کاملاً معین یکسانی است. ولی، در واپاشی بتا- منفی معادلهٔ ۴۲-۲۶ با گسیل الکترون، انرژی فروپاشی Q، با نسبتهای متفاوت، میان الکترون و نوترینوی گسیل شده به اشتراک گذاشته می‌شود. گاهی، الکترون تقریباً همهٔ این انرژی را به دست آورد، و گاهی نوترینو. ولی، در هر

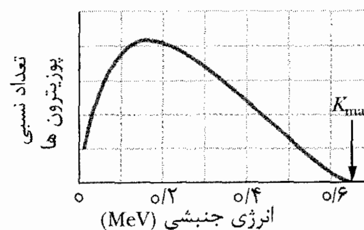
---

[1]. واپاشی بتا همچنین شامل گیراندازی الکترون است، که در آن هسته با جذب یکی از الکترونهای اتمی خود، یک نوترینو را در این فرایند گسیل می‌دارد. ما در اینجا این فرایند را در نظر نمی‌گیریم. همچنین، ذرهٔ خنثای گسیل شده در فرایند واپاشی معادلهٔ ۴۲-۲۴ در واقع یک *پادنوترینو* است، تمایزی که در این بررسی مقدماتی در نظر نخواهیم گرفت.

وضعیت، مجموع انرژی الکترون و انرژی نوترینو، مقدار Q یکسانی را به دست می‌دهد. تقسیم انرژی مشابهی، با مجموع برابر با Q، در واپاشی بتا- مثبت (معادلهٔ ۴۲-۲۷) رخ می‌دهد.

بنابراین، در واپاشی بتا، انرژی الکترونها یا پوزیترونهای گسیل شده می‌تواند در گستره‌ای از صفر تا بیشینهٔ معین K_{max} قرار داشته باشد. شکل ۴۲-۱۰، توزیع انرژیهای پوزیترون برای واپاشی بتای ^{64}Cu را (معادلهٔ ۴۲-۲۵ را ببینید) نشان می‌دهد. بیشینهٔ انرژی پوزیترون K_{max} باید برابر با انرژی فروپاشی Q باشد، زیرا هنگامی که پوزیترون انرژی K_{max} را داراست نوترینو تقریباً دارای انرژی صفر است:

$$Q = K_{max} \qquad (۴۲\text{-}۲۸)$$



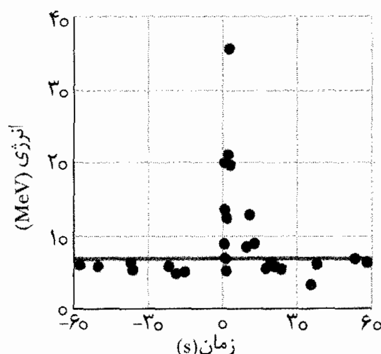
شکل ۴۲-۱۰ توزیع انرژیهای جنبشی پوزیترونهای گسیل شده در واپاشی بتای ^{64}Cu. بیشینهٔ انرژی جنبشی توزیع (K_{max}) برابر با ۰/۶۵۳ MeV است. در همهٔ رویدادهای واپاشی ^{64}Cu، این انرژی میان پوزیترون و نوترینو، با نسبتهای متفاوت، به اشتراک گذاشته میشود. *محتملترین* انرژی برای یک پوزیترون گسیل شده حدود ۰/۱۵ MeV است.

نوترینو

ولفگانگ پاولی[1] برای نخستین بار وجود نوترینوها را در سال ۱۹۳۰/۱۳۰۹ پیشنهاد کرد. فرضیهٔ نوترینوی او نه تنها درک توزیع انرژی الکترونها یا پوزیترونها در واپاشی بتا را ممکن ساخت، بلکه معمای قدیمی واپاشی بتا دربارهٔ اندازه حرکت زاویه‌ای "گم شده" را نیز حل کرد.

نوترینو واقعاً یک ذرهٔ فراری است؛ محاسبه شده است که پویش آزاد میانگین یک نوترینوی پُرانرژی در آب کمتر از چند هزار سال نوری نیست. با این حال، نوترینوهای به جای مانده از مهبانگ که احتمالاً نشانی از آفرینش عالم را دارند، فراوانترین ذره‌های فیزیک هستند. میلیاردها از این ذره‌ها، در هر ثانیه از بدن ما می‌گذرند، بی آنکه ردی از خود برجای بگذارند.

به رغم فراری بودن آنها، نوترینوها در آزمایشگاه آشکار شده‌اند. نخستین بار به سال ۱۹۵۳/۱۳۳۲، *رینز*[2] و *کوان*[3] با استفاده از نوترینوهای ایجاد شده در یک راکتور پرقدرت هسته‌ای به این امر مبادرت ورزیدند. (در سال ۱۹۹۵/۱۳۷۴، رینز به خاطر این کار موفق به اخذ جایزهٔ نوبل فیزیک شد.) با وجود دشواریهای آشکارسازی، امروزه فیزیک نوترینوی آزمایشگاهی یکی از شاخه‌های بسیار توسعه یافتهٔ فیزیک تجربی با کارورزانی مشتاق در آزمایشگاههایی در سرتاسر جهان است.



شکل ۴۲-۱۱ فورانی از نوترینوها ناشی از اَبَر نواَختر SN1987A، که در زمان نسبی (صفر) رخ داده است، از نوترینوهای *زمینهٔ* معمول متمایز است. (برای نوترینوها، ۱۰ نوترینو یک "فوران" است). این ذره‌ها توسط یک آشکارساز بسیار پیشرفته که در اعماق معدنی در ژاپن جاسازی شده بود، آشکارسازی شدند. این اَبَر نواَختر فقط در نیمکرهٔ جنوبی قابل دیدن است؛ بنابراین، نوترینوها برای رسیدن به آشکارساز، از کرهٔ زمین (یک مانع کم اهمیت برای آنها) نفوذ کرده بودند.

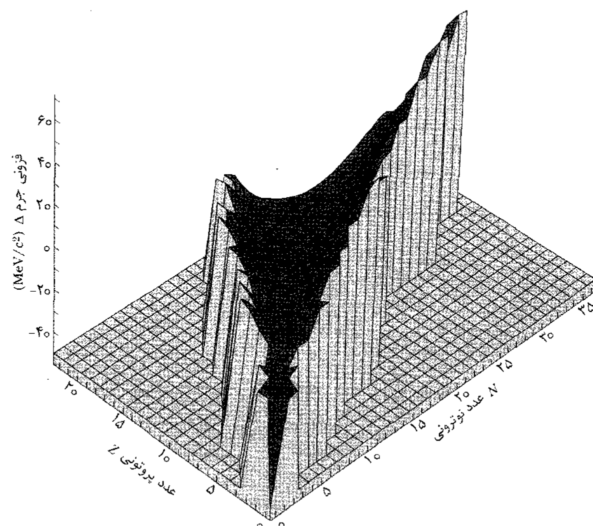
خورشید از کورهٔ هسته‌ای واقع در مغز خود به میزان فراوانی نوترینو گسیل می‌دارد، و شب هنگام، این پیکها از مرکز خورشید بالا می‌آیند و با توجه به اینکه کرهٔ زمین تقریباً به طور کامل برای آنها شفاف است، از پایین به ما می‌رسند. در فوریه ۱۹۸۷/۱۳۶۶، نور حاصل از یک ستارهٔ در حال انفجار در *ابر ماژلانی بزرگ* (یک کهکشان نزدیک) پس از طی مسیری به مدت ۱۷۰۰۰۰ سال به زمین رسید. تعداد بی‌شماری نوترینو در این انفجار ایجاد شده بود، و حدود ۱۰ تای آنها توسط آشکارساز نوترینوی بسیار حساسی در ژاپن به دام افتادند؛ شکل ۴۲-۱۱ ثبتی از عبور آنها را نشان می‌دهد.

پرتوزایی و نقشهٔ نوکلیدی

میزان اطلاعات قابل حصول از نقشهٔ نوکلیدی شکل ۴۲-۴ را می‌توانیم با افزودن یک محور سوم که فزونی جرم Δ را برحسب یکای MeV/c^2 نشان می‌دهد، افزایش دهیم. افزودن چنین محوری، شکل ۴۲-۱۲ را به دست می‌دهد که درجهٔ پایداری هسته‌ای نوکلیدها را آشکار می‌سازد. برای نوکلیدهای کم‌جرم، یک "درهٔ نوکلیدها" با نوار پایداری شکل ۴۲-۴ را به دست می‌آوریم که تا پایین آن امتداد دارد. نوکلیدهای واقع در

1. Wolfgang Pauli
2. F. Reines
3. C. L. Cowan

طرف پُرپروتون دره با گسیل پوزیترون، و نوکلیدهای واقع در طرف پر نوترون دره با گسیل الکترون، واپاشی می‌کنند.



شکل ۴۲-۱۲ بخشی از درهٔ نوکلیدها، که فقط نوکلیدهای کم‌جرم را نشان می‌دهد. دوتریوم، تریتیوم، و هلیوم در نزدیکی انتهای نمودار، و هلیوم در بالاترین نقطه قرار دارند. دره با دور شدن از ما کشیده می‌شود تا اینکه به نقطهٔ توقف منحنی در حوالی $Z=۲۲$ و $N=۳۵$ برسد. نوکلیدهایی با مقدارهای بزرگ A، که باید خیلی دورتر از دره رسم شوند، می‌توانند با گسیلهای مکرر آلفا و با شکافت (تقسیم شدن یک نوکلید) به این دره واپاشی کنند.

✔ نکتهٔ وارسی ۳ ^{238}U با گسیل یک ذرهٔ آلفا به ^{234}Th واپاشی می‌کند. این واپاشی با زنجیره‌ای از واپاشیهای پرتوزای بیشتر، یا با واپاشی آلفا یا با واپاشی بتا، ادامه می‌یابد. سرانجام پس از آنکه یک نوکلید پایدار حاصل شد، دیگر هیچ واپاشی پرتوزای بیشتری امکان‌پذیر نیست. کدامیک از نوکلیدهای پایدار زیر محصول نهایی زنجیرهٔ واپاشی پرتوزای ^{238}U است: ^{206}Pb، ^{207}Pb، ^{208}Pb، ^{209}Pb؟ (*راهنمایی*: با در نظر گرفتن تغییرات عدد جرمی A برای دو نوع واپاشی، می‌توانید تصمیم بگیرید).

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۲-۷

انرژی فروپاشی Q را برای واپاشی بتای ^{32}P، که با معادلهٔ ۴۲-۲۴ توصیف شده است، محاسبه کنید. جرمهای اتمی مورد نیاز عبارت‌اند از: ۳۱/۹۷۳۹۱u برای ^{32}P و ۳۱/۹۷۲۰۷u برای ^{32}S.

نکته کلیدی انرژی فروپاشی Q برای واپاشی بتا مقداری است که با آن انرژی جرمی توسط واپاشی تغییر می‌کند.

محاسبه‌ها: Q با معادلهٔ ۳۷-۵۰ $(Q=-\Delta mc^2)$ داده شده است. ولی، باید مواظب تمایز میان جرمهای هسته‌ای (که از آنها بی‌خبریم) و جرمهای اتمی (که آنها را می‌شناسیم) باشیم. از نمادهای پررنگ $\mathbf{m_P}$ و $\mathbf{m_S}$ برای نشان دادن جرمهای هسته‌ای ^{32}P و ^{32}S، و از نمادهای ایتالیک m_P و m_S برای نشان دادن جرمهای اتمی استفاده می‌کنیم. آنگاه می‌توانیم تغییر جرم برای واپاشی معادلهٔ ۴۲-۲۴ را چنین بنویسیم

$$\Delta m = (\mathbf{m_S} + m_e) - \mathbf{m_P}$$

که در آن m_e، جرم الکترون است. اگر $۱۵m_e$ را به طرف راست این معادله، اضافه و کم بکنیم، خواهیم داشت

$$\Delta m = (\mathbf{m_S} + ۱۶m_e) - (\mathbf{m_P} + ۱۵m_e)$$

کمیتهای داخل پرانتز، جرمهای اتمی ^{32}S و ^{32}P هستند؛ بنابراین، داریم

$$\Delta m = m_S - m_P$$

پس درمی‌یابیم که اگر فقط جرمهای اتمی را کم کنیم، جرم الکترون گسیل شده به طور خودکار به حساب آورده می‌شود. (این روش برای گسیل پوزیترون کارساز نخواهد بود.)

بنابراین، انرژی فروپاشی برای واپاشی ^{32}P چنین می‌شود

$$Q = -\Delta mc^2$$
$$= -(۳۱/۹۷۲۰۷\text{u} - ۳۱/۹۷۳۹۱\text{u})(۹۳۱/۴۹۴۰۱۳\,\text{MeV/u})$$
$$= ۱/۷۱\text{MeV}$$

به طور تجربی ثابت می‌شود که این کمیت محاسبه شده باید برابر با K_{max} باشد، انرژی بیشینه‌ای که الکترون گسیل شده می‌تواند داشته باشد. اگر چه ۱/۷۱MeV در هر بار واپاشی هستهٔ ^{32}P آزاد می‌شود، با این حال برای هر مورد، الکترون اساساً انرژی کمتری از این مقدار حمل می‌کند. نوترینو کل انرژی باقی مانده را به دست می‌آورد و با حمل آن، دزدکی از آزمایشگاه بیرون می‌زند.

۴۲-۷ عمرسنجی پرتوزا

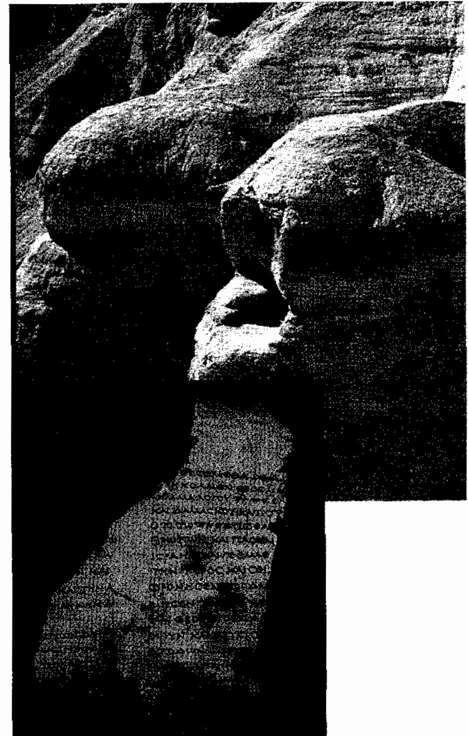
اگر نیم- عمر یک نوکلید پرتوزای معین را بدانیم، اصولاً می‌توانیم از واپاشی آن نوکلید پرتوزا به عنوان ساعتی برای اندازه‌گیری بازه‌های زمانی استفاده کنیم. مثلاً، واپاشی نوکلیدهای با عمر بسیار بلند می‌تواند برای اندازه‌گیری عمر صخره‌ها- یعنی، زمانی که از لحظهٔ تشکیل آنها سپری شده است- به کار گرفته شود. چنین اندازه‌گیریهایی برای صخره‌های کرهٔ زمین و ماه، و برای شهاب‌سنگ‌ها، سنّ بیشینهٔ سازگاری در حدود $۴/۵\times ۱۰^۹$ y را برای این اجسام به دست می‌دهد.

برای مثال، نوکلید پرتوزای ^{40}K به ^{40}Ar، یک ایزوتوپ پایدار گاز بی‌اثر آرگون، وامی‌پاشد. نیم- عمر این واپاشی $۱/۲۵\times ۱۰^۹$ y است. اندازه‌گیری نسبت ^{40}K به ^{40}Ar، یافت شده در صخرهٔ مورد بررسی، می‌تواند برای محاسبهٔ سن آن صخره مورد استفاده قرار گیرد. واپاشیهای با عمر بلند دیگر، از قبیل واپاشی ^{235}U به ^{207}Pb (که شامل تعدادی مرحلهٔ میانی است)، می‌تواند برای تأیید این محاسبه به کار گرفته شود.

برای اندازه‌گیری بازه‌های زمانی کوتاهتر، در گسترهٔ مورد علاقهٔ تاریخی، نشان داده شده است که عمرسنجی با کربن

پرتوزا بسیار ارزشمند است. نوکلید پرتوزای ^{14}C (با $T_{1/2} = ۵۷۳۰\,y$)، هنگامی که نیتروژن جوّ توسط پرتوهای کیهانی بمباران می‌شود، با آهنگ ثابتی در جو فوقانی تولید می‌گردد. این کربن پرتوزا با کربنی که به طور طبیعی در جو وجود دارد (مانند CO_2) می‌آمیزد، به گونه‌ای که به ازای هر $۱۰^{۱۳}$ اتم ^{12}C پایدار معمولی، تقریباً یک اتم ^{14}C وجود دارد. از طریق فعالیت بیولوژیکی از قبیل فتوسنتز و تنفس، اتمهای کربن جوی به طور کاتوره‌ای مکان خود را عوض می‌کنند، یک اتم در هر لحظه، با اتمهای کربن در هر موجود زنده، از قبیل کلم، قارچها، پنگوئنها و انسانها. سرانجام یک توازن تبادلی به دست می‌آید که در آن اتمهای کربن هر موجود زنده شامل کسر کوچک ثابتی از نوکلید پرتوزای ^{14}C است.

این توازن تا هنگامی دوام می‌آورد که موجود، زنده باشد. وقتی یک موجود زنده می‌میرد، تبادل با جو متوقف می‌شود و چون دیگر کربن پرتوزای به تله افتاده در موجود، دوباره جایگزین نمی‌شود، مقدار آن با نیم- عمر $۵۷۳۰\,y$ رو به کاهش می‌گذارد. با اندازه‌گیری مقدار کربن پرتوزا در هر گرم مادهٔ آلی، می‌توان زمان سپری شده از هنگام مرگ موجود را اندازه گرفت. زغال چوبهای به جای مانده از آتشهای کاروان قدیمی، کتیبه‌های بحرالمیّت، و در بسیاری از دست ساخته‌های پیش از تاریخ به این طریق عمرسنجی شده‌اند. عمر کتیبه‌ها توسط عمرسنجی با کربن پرتوزای یک نمونهٔ پارچه‌ای تعیین شده است که برای بستن سر کوزه‌های شیشه‌ای که در آنها کتیبه‌ها نگهداری می‌شدند، استفاده می‌شد.



شکل ۴۲-۱۳ پاره‌ای از کتیبه‌های بحرالمیّت و غارهایی که از آنها کتیبه‌ها به دست آمده‌اند.

مسئلهٔ نمونه ۴۲-۸

تحلیل طیف سنجی جرمی اتمهای پتاسیم و آرگون در یک نمونهٔ سنگی از ماه نشان می‌دهد که نسبت تعداد اتمهای ^{40}Ar (پایدار) موجود به تعداد اتمهای ^{40}K (پرتوزا) برابر با ۱۰/۳ است. فرض کنید که همهٔ اتمهای آرگون توسط واپاشی اتمهای پتاسیم، با نیم- عمر $۱/۲۵ \times ۱۰^{۹}\,y$، تولید شده‌اند. (در اینجا چندین پیچیدگی در مورد واپاشی اتمهای پتاسیم را نادیده می‌گیریم). عمر این تخته سنگ چقدر است؟

نکته‌های کلیدی

(۱) اگر N_0 اتم پتاسیم در لحظه‌ای که تخته سنگ بر اثر جامد شدن از شکل مذاب تشکیل شده است، وجود داشته باشد، تعداد اتمهای پتاسیم باقیمانده در زمان تحلیل، از معادلهٔ ۴۲-۱۵ به دست می‌آید

$$N_K = N_0 e^{-\lambda t} \qquad (۴۲-۲۹)$$

که در آن t عمر تخته سنگ است. (۲) به ازای هر اتم پتاسیم که واپاشی کند، یک اتم آرگون تولید می‌شود. بنابراین، تعداد اتمهای آرگون موجود در زمان تحلیل عبارت است از

$$N_{Ar} = N_0 - N_K \qquad (۴۲-۳۰)$$

محاسبه‌ها: N_0 را نمی‌توانیم اندازه بگیریم؛ پس باید آن را از معادلهٔ ۴۲-۲۹ و ۴۲-۳۰ حذف کنیم. پس از کمی عملیات جبری، در می‌یابیم که

$$\lambda t = \ln\left(۱ + \frac{N_{Ar}}{N_K}\right) \qquad (۴۲-۳۱)$$

که در آن N_{Ar}/N_K را *می‌توان* اندازه گرفت. با حل این معادله برای t و استفاده از معادلهٔ ۴۲-۱۸ برای جایگزین λ با $(\ln ۲)/T_{1/2}$ خواهیم داشت

$$t = \frac{T_{1/2}\ln(۱ + N_{Ar}/N_K)}{\ln ۲} = \frac{(۱/۲۵ \times ۱۰^{۹}\,y)[\ln(۱ + ۱۰/۳)]}{\ln ۲} = ۴/۳۷ \times ۱۰^{۹}\,y \qquad \text{(پاسخ)}$$

برای سایر نمونه‌ها از صخره‌های ماه یا صخره‌های زمینی ممکن است عمر کمتری به دست آید، ولی عمر قدیمی‌ترین تخته سنگها که خیلی زود پس از تشکیل منظومهٔ شمسی ساخته شده‌اند و خود منظومهٔ شمسی، باید حدود ۴ میلیارد سال باشد.

۴۲-۸ اندازه‌گیری دُز تابشی

تأثیر تابش از قبیل پرتوهای گاما، الکترونها، و ذره‌های آلفا، روی بافت زنده (به ویژه خود ما) موضوعی مورد علاقهٔ عامهٔ مردم است. چنین تابشهایی به طور طبیعی در پرتوهای کیهانی (ناشی از چشمه‌های نجومی) و در گسیلهای عنصرهای پرتوزای موجود در پوستهٔ کرهٔ زمین یافت می‌شود. تابش وابسته به برخی

فعالیتهای انسانی، از قبیل استفاده از پرتوهای x و نوکلیدهای پرتوزا در پزشکی و صنعت نیز در این امر سهیم‌اند.

هدف ما در اینجا این نیست که چشمه‌های گوناگون تابش را بررسی کنیم، بلکه صرفاً می‌خواهیم یکاهایی را که با آنها، خاصیتها و اثرهای چنین تابشهایی بیان می‌شوند، شرح دهیم. پیشتر *فعالیت* یک چشمهٔ پرتوزا را بررسی کردیم. حال به معرفی دو کمیت قابل توجه دیگر می‌پردازیم.

۱- *دز جذب شده.* این، معیاری از دز تابشی (برحسب انرژی بر یکای جرم) است که در واقع توسط یک جسم مشخص، مانند دست یا سینهٔ بیمار، جذب می‌شود. یکای SI آن، **گری** (Gy) است. یک یکای قدیمیتر، **راد**[1] هنوز متداول است. این یکاها تعریف شده و به صورت زیر به هم مربوطاند:

$$1\,\text{Gy} = 1\,\text{J/kg} = 100\,\text{rad} \qquad (۴۲\text{-}۳۲)$$

یک بیان نوعی وابسته به دز به این قرار است: "دز پرتو گاما کوتاه مدت $3\,\text{Gy}(=300\,\text{rad})$ در تمام بدن، باعث مرگ ۵۰٪ از افرادی می‌شود که در معرض آن قرار گیرند." خوشبختانه، دز متوسط جذب شدهٔ فعلی ما در سال، هم از چشمه‌های طبیعی و هم از منابعی با منشاء انسانی، فقط حدود $2\,\text{Gy}\,(=0/2\,\text{rad})$ است.

۲- *دز معادل.* اگر چه انواع مختلفی از تابش (مثلاً پرتوهای گاما و نوترونها، ممکن است مقدار انرژی یکسانی را به بدن منتقل کنند، ولی آنها اثر زیست شناختی یکسانی ندارند. دز معادل به ما امکان می‌دهد که اثر زیست شناختی را با جذب دز جذب شده (برحسب گری یا راد) در عامل عددی **RBE**[2]، بیان کنیم. مثلاً برای پرتوهای x و الکترونها $\text{RBE}=1$؛ برای نوترونهای کُند $\text{RBE}=5$؛ برای ذره‌های آلفا $\text{RBE}=10$؛ و غیره. دستگاه‌های وارسی بدنی از قبیل فیلمهای کارت سینه [فیلم-بَج]، دز معادل را ثبت می‌کنند. یکای SI دز معادل، **سیورت**[3] (Sv) است. یک یکای قدیمیتر، **رِم**[4] هنوز به کار می‌رود. رابطهٔ آنها چنین است

$$1\,\text{Sv} = 100\,\text{rem} \qquad (۴۲\text{-}۳۳)$$

مثالی از استفادهٔ درست این یکاها به این قرار است: "توصیهٔ انجمن ملی حفاظت از پرتوها این است که هیچ فردی که در معرض تابش (غیر دائم) قرار گرفته است نباید دز معادلی بیشتر از $5\,\text{mSv}=(=0/5\,\text{rem})$ در سال دریافت کند." این، شامل تابش از هر نوعی می‌شود؛ البته برای هر نوع تابش، باید از عامل RBE مناسب استفاده شود.

پرتوهای کیهانی عمدتاً شامل پرتونهایی می‌شود که از خورشید بیرون زده می‌شوند. ما به میزان زیادی توسط جو و میدان مغناطیسی زمین از این جریان پرتونهای پرسرعت محافظت شده‌ایم. با این حال، جوّ بالای سر هر کسی که در ارتفاعهای زیاد پرواز می‌کند کمتر از آن است که پروتونها را متوقف کند و بنابراین، بیشتر آنها از جو رد خواهند شد. همچنین، هرکسی که در عرضهای جغرافیایی زیاد پرواز می‌کند در محلی قرار دارد که میدان مغناطیسی زمین، پرتونهای خورشیدی فرودی را منحرف می‌کند (بخش ۲۴-۶ را ببینید). بنابراین، هر کسی که هم در ارتفاع زیاد و هم در عرض جغرافیایی زیاد پرواز می‌کند در معرض پروتونهای خورشیدی بیشتری قرار می‌گیرد.

احتمالاً خطری متوجه مسافرانی نیست که بندرت پرواز می‌کنند، حتی اگر آنها در زمانی پرواز کنند که شار فرودی بزرگی از پروتونهای خورشیدی به زمین برخورد کند. ولی، خطر بیشتری متوجه مسافرانی است که اغلب در یک مسیر قطبی (مسیر پروازی با عرض جغرافیایی زیاد)، مثلاً بین لس‌آنجلس و لندن، پرواز می‌کنند؛ زیرا در حین پروازهای زیاد، در معرض تابشهای بیشتری قرار می‌گیرند. برای خدمهٔ پرواز، در صورتی که تعداد ساعتهای پرواز مجاز در سال توسط شرکتهای هواپیمایی محدود نشده باشد، حتی خطر بیشتری وجود دارد. برای مثال، خدمهٔ پرواز ممکن است در هر ساعت پرواز در معرض $0/006\,\text{mSv}$ قرار گیرد. اگر خدمه‌ای در مجموع ۹۰۰ ساعت پرواز در سال انجام دهد (یک میزان کار معقول)، دز معادل دریافتی او در سال $5/4\,\text{mSv}$ می‌شود که از حد ایمنی $5\,\text{mSv}$ که پیشتر مطرح کردیم، بیشتر است.

ممکن است تصور کنید بدترین خطر تابشی مربوط به پروازهای کنکورد[5] بود، زیرا هنگامی که آنها هنوز پرواز می‌کردند، لازمهٔ سرعت فراصوتی آنها این بود که در ارتفاع بیشتری نسبت به سایر هواپیماهای (کم سرعتتر) پرواز کنند. ولی، در واقع، خطر پروازهای کنکورد کمتر بود، زیرا زمانهای پرواز، بسیار کمتر می‌شد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۲-۹

دیده‌ایم که دز $3\,\text{Gy}$ پرتو گاما برای نیمی از مردمی که در معرض آن قرار گرفته‌اند، کشنده است. اگر انرژی معادل به صورت گرما جذب شود، دمای بدن بر اثر آن چقدر افزایش می‌یابد؟

نکته‌های کلیدی

(۱) انرژی جذب شدهٔ Q و افزایش دمای ΔT حاصل از آن را می‌توانیم با معادلهٔ ۱۴-۱۴ $(Q=cm\Delta T)$ به هم ربط دهیم. در این معادله، m جرم مادهٔ جذب کنندهٔ انرژی و c گرمای ویژهٔ آن

---

۱. rad که برگرفته از radration absorbed dose به معنی دز جذب شدهٔ تابشی است.

۲. برگرفته از relative biological effectiveness به معنی تأثیر زیست شناختی نسبی.

3. Sivert

4. Rad Eguinaleut Man

5. Concorde

ماده (و *نه* تندی نور) است (۲) دز جذب شدهٔ ۳Gy متناظر با انرژی جذب شده بر یکای جرم ۳J/kg است.

محاسبه: فرض کنید که c ، گرمای ویژهٔ بدن انسان، برابر همان مقدار آن برای آب، یعنی ۴۱۸۰J/kg.K است. آنگاه درمی‌یابیم

$$\Delta T = \frac{Q/m}{c} = \frac{۳\,\text{J/kg}}{۴۱۸۰\,\text{J/kg.K}} = ۷/۲\times ۱۰^{-۴}\,\text{K} \approx ۰/۷\,\text{mK}$$

(پاسخ)

روشن است که آسیب وارد شده از تابش یوننده هیچ ربطی به گرمایش حرارتی ندارد. اثرهای مخرب ناشی از آن است که تابش، DNA را تخریب می‌کند و در نتیجه عملکرد طبیعی بافتها مختل می‌شود.

۹-۴۲ مدلهای هسته‌ای

هسته‌ها بسیار پیچیده‌تر از اتمها هستند. برای اتمها، شکل قانون بنیادین نیرو (قانون کولن) ساده است و یک مرکز نیروی طبیعی، هسته، وجود دارد. برای هسته‌ها، قانون نیرو پیچیده است و در واقع نمی‌تواند به طور صریحی با جزئیات کامل نوشته شود. افزون بر این، هسته- انباشته‌ای از پروتونها و نوترونها- هیچ مرکز نیروی طبیعی برای ساده‌سازی محاسبه‌ها ندارد.

در نبود یک *نظریهٔ* هسته‌ای فراگیر، به ساختار *مدلهای* هسته‌ای می‌پردازیم. یک مدل هسته‌ای صرفاً روش نگریستن به هسته است که دید فیزیکی وسیعی از خواص ممکن آن را به دست می‌دهد. سودمندی یک مدل به قابلیت آن در ارائهٔ پیش‌بینی‌هایی که می‌توانند به طور تجربی در آزمایشگاه ثابت شوند، بستگی دارد.

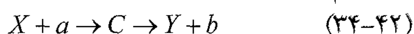
دو مدل هسته‌ای، سودمند تشخیص داده شده‌اند. اگر چه این مدلها بر فرضهایی مبتنی هستند که به نظر می‌رسد کاملاً یکدیگر را در بر نمی‌گیرند، ولی هر کدام دستهٔ برگزیده‌ای از خواص هسته‌ای را به خوبی توضیح می‌دهند. پس از توصیف جداگانهٔ هر یک از این مدلها، خواهیم دید که چگونه این دو مدل می‌توانند برای تشکیل تصویر منسجمی از هستهٔ اتمی، با هم ترکیب شوند.

مدل جمعی

در *مدل جمعی*، که توسط *نیلز بور*[1] فرمولبندی شد، تصور شده است نوکلئونها که به طور کاتوره‌ای داخل هسته حرکت می‌کنند، مانند مولکولهای موجود در قطرهٔ آب، به‌شدت با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند.یک نوکلئون معین که به طور مکرر با نوکلئونهای دیگر داخل هسته برخورد می‌کند، به هنگام حرکت دارای پویش آزاد میانگینی است که اساساً کوچکتر از شعاع هسته‌ای است.

مدل جمعی به ما امکان می‌دهد که بسیاری از واقعیتها دربارهٔ جرمها و انرژیهای بستگی را به هم ارتباط دهیم؛ این مدل در توضیح شکافت هسته‌ای (همانطور که خواهیم دید) مفید واقع می‌شود و همچنین برای درک دستهٔ بزرگی از واکنشهای هسته‌ای سودمند است.

برای مثال، یک واکنش هسته‌ای کلی به شکل زیر را در نظر می‌گیریم:

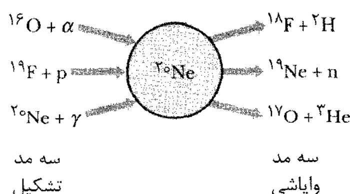


$$X + a \to C \to Y + b \qquad (۳۴\text{-}۴۲)$$

فرض می‌کنیم که پرتابهٔ a وارد هستهٔ هدف X می‌شود و **هستهٔ مرکب** C را می‌سازد و مقدار معینی از انرژی برانگیزندگی را به آن منتقل می‌کند. پرتابه، مثلاً یک نوترون، بی‌درنگ توسط حرکتهای کاتوره‌ای که مشخصهٔ فضای داخلی هسته است، گیر می‌افتد. این پرتابه به سرعت هویت خود را از دست می‌دهد و انرژی برانگیزندگی که به هسته حمل می‌کند بی‌درنگ با همهٔ نوکلئونهای دیگر C به اشتراک گذاشته می‌شود.

حالت شبه پایدار نشان داده شده با نماد C در معادلهٔ ۴۲-۳۴ می‌تواند پیش از آنکه به Y و b واپاشی کند، عمر میانگین برابر با $۱۰^{-۱۶}$s داشته باشد. بنا بر معیارهای هسته‌ای، این زمانی بسیار طولانی است و تقریباً یک میلیون بار طولانیتر از زمان لازم برای حرکت نوکلئون با انرژی چند میلیون الکترون- ولت در عرض هسته است.

ویژگی اصلی این مفهوم هستهٔ مرکب این است که تشکیل هستهٔ مرکب و واپاشی متعاقب آن رویدادهای کاملاً مستقلی هستند. در زمان واپاشی آن، هستهٔ مرکب چگونگی تشکیل خود را "فراموش" کرده است. بنابراین، مُد واپاشی آن متأثر از مُد تشکیل آن نیست. به عنوان مثال، شکل ۴۲-۱۴ سه راه محتمل را که هستهٔ ^{۲۰}Ne ممکن است از طریق آنها تشکیل شود و سه راه محتمل را که ممکن است از طریق آنها واپاشی کند، نشان می‌دهد. هر یک از این سه مد تشکیل می‌تواند به هر یک از سه مد واپاشی بیانجامد.



شکل ۴۲-۱۴ مدهای تشکیل و مدهای واپاشی هستهٔ مرکب Ne °۲.

مدل ذرهٔ مستقل

در مدل جمعی، فرض کردیم که نوکلئونها به طور کاتوره‌ای به اطراف خود حرکت و مکرر به نوکلئون دیگری برخورد می‌کنند. ولی، *مدل ذره- مستقل* بر مبنای فرضی کاملاً مخالف بنا شده است- به این معنی، که هر نوکلئون در حالت کوانتومی کاملاً متمایزی در داخل هسته قرار دارد و هر برخوردی به دشواری رخ می‌دهد! هسته، برخلاف اتم، مرکز بار ثابتی ندارد؛

1. Niels Bohr

در این مدل فرض می‌کنیم که هر نوکلئون در چاه پتانسیلی حرکت می‌کند که با (میانگین زمانی) حرکتهای متداخل همهٔ نوکلئونهای دیگر تعیین می‌شود.

مانند یک الکترون در اتم، یک نوکلئون در هسته دارای مجموعه‌ای از عددهای کوانتومی است که حالت حرکت آن را مشخص می‌کنند. همچنین، نوکلئونها درست مانند الکترونها از اصل طرد پاولی پیروی می‌کنند؛ یعنی، هیچ دو نوکلئونی در هسته نمی‌تواند حالت کوانتومی یکسانی را در یک زمان اشغال کند. از این نظر، نوترونها و پروتونها به طور جداگانه‌ای رفتار می‌کنند، هر نوع ذره با مجموعهٔ حالتهای کوانتومی مربوط به خود.

این واقعیت که نوکلئونها از اصل طرد پاؤلی پیروی می‌کنند ما را کمک می‌کند تا پایداری نسبی حالتهای نوکلئونی را درک کنیم. اگر دو نوکلئون در داخل هسته برخورد کنند، انرژی هر یک از آنها پس از برخورد باید به انرژی یک حالت *اشغال نشده* مربوط باشد. اگر چنین حالتی موجود نباشد، برخورد قطعاً نمی‌تواند رخ دهد. بنابراین، هر نوکلئون معینی که در حال تجربهٔ "فرصتهای برخورد ناکام" مکرری است، برای مدت زمانی به حدّ کافی طولانی وضعیت حرکتی خود را حفظ می‌کند تا به این عبارت معنی بخشد که نوکلئون در حالتی کوانتومی با انرژی کاملاً متمایزی وجود دارد.

در قلمرو اتمی، تکرار خواص فیزیکی و شیمیایی که در جدول تناوبی مشاهده می‌کنیم به یک ویژگی الکترونهای اتمی مربوط است- به این معنی که آنها خود را در لایه‌هایی مرتب می‌کنند که به هنگام اشغال کامل دارای پایداری خاصی هستند. عددهای اتمی گازهای بی اثر

۲ , ۱۰ , ۱۸ , ۳۶ , ۵۴ , ۸۶ , ...

را می‌توان به عنوان *عددهای الکترونی جادویی* در نظر گرفت که پر (یا خالی) بودن چنین لایه‌هایی را مشخص می‌کند.

هسته‌ها نیز چنین اثرهای لایه- بسته‌ای را نشان می‌دهند که مربوط به **عددهای نوکلئونی جادویی** هستند:

۲ , ۸ , ۲۰ , ۲۸ , ۸۲ , ۱۲۶ , ...

هر نوکلیدی که عدد پروتونی Z یا عدد نوترونی N آن دارای یکی از این مقدارها باشد دارای پایداری خاصی است که می‌تواند به راههای گوناگونی رخ بنماید.

مثالهایی از نوکلیدهای "جادویی" عبارت‌اند از: $^{18}O(Z=8)$ ، $^{40}Ca(Z=20, N=20)$ ، $^{92}Mo(N=50)$ ، و $^{208}Pb(Z=82, N=126)$. گفته می‌شود که ^{40}Ca و ^{208}Pb "جادویی دوگانه" دارند زیرا آنها هم شامل لایه‌های پر شدهٔ پروتونی و هم لایه‌های پر شدهٔ نوترونی هستند.

عدد جادویی ۲ پایداری استثنایی ذرهٔ آلفا را نشان می‌دهد، که با $Z=N=2$ دارای جادوی دوگانه است. مثلاً روی منحنی انرژی بستگی شکل ۴۲-۶ ، انرژی بستگی هر نوکلئون برای این نوکلید به مراتب بیشتر از مجاورهای آن در جدول تناوبی، یعنی هیدروژن، لیتیوم و بریلیوم است. نوترونها و پروتونهایی که ذرهٔ آلفا را می‌سازند به قدری محکم به یکدیگر مقیدند که در واقع غیر ممکن است که پروتون یا نوترون دیگری را به آن بیافزاییم؛ هیچ نوکلید پایداری با $A=5$ وجود ندارد.

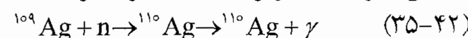
نظر اصلی در مورد یک لایهٔ بسته این است که یک ذرهٔ تنها در بیرون یک لایهٔ بسته می‌تواند نسبتاً به سادگی کنده شود، ولی برای کندن یک ذره از خود لایه باید انرژی بسیار بیشتری صرف کرد. برای مثال، اتم سدیم دارای یک الکترون (ظرفیت) در بیرون یک لایهٔ الکترونی بسته است. فقط حدود $5\,eV$ برای کندن الکترون ظرفیت از اتم سدیم نیاز است؛ ولی، برای کندن الکترون *دوم* (که باید از یک لایهٔ بسته بیرون کشیده شود) به $22\,eV$ نیاز است. به عنوان مثال هسته‌ای، $^{121}Sb(Z=51)$ را در نظر بگیرید، که شامل یک پروتون تنها بیرون یک لایهٔ ۵۰ پروتونی بسته است. برای کندن این پروتون تنها به $5.8\,MeV$ نیاز است؛ ولی، برای کندن پروتون *دوم* به انرژی $11\,MeV$ نیاز است. شواهد تجربی زیادی وجود دارد که نوکلئونها در هسته تشکیل لایه‌های بسته‌ای را می‌دهند و این لایه‌ها ویژگیهای پایداری نشان می‌دهند.

دیده‌ایم که نظریهٔ کوانتومی می‌تواند به زیبایی دلیل عددهای الکترونی جادویی را- یعنی، تجمعی از زیر لایه‌هایی که در آنها الکترونهای اتمی دسته‌بندی شده‌اند- توضیح دهد. با فرضهای معینی، ثابت می‌شود که نظریهٔ کوانتومی می‌تواند به همان خوبی عددهای نوکلئون جادویی را نیز توضیح دهد! در واقع جایزهٔ نوبل سال ۱۹۶۳ میلادی "به خاطر کشفهای مربوط به ساختار لایه‌های هسته" به *ماریا مایر*[1] و *هانس جنسن*[2] اهدا گردید.

مدل مرکب

هسته‌ای را در نظر بگیرید که در آن تعداد کمی از نوترونها (یا پروتونها) در بیرون مغز لایه‌های بسته قرار دارند که شامل نوترونها یا پروتونهایی به تعداد عددهای جادویی هستند. نوکلئونهای خارجی حالتهای کوانتیده‌ای را در چاه پتانسیل برقرار شده توسط مغز مرکزی اشغال می‌کنند و به این ترتیب ویژگی اساسی مدل ذره- مستقل حاصل می‌شود. این نوکلئونهای خارجی همچنین با مغز برهم‌کنش می‌کنند، آن را تغییر شکل می‌دهند و حرکتهای "موج کشندی" چرخشی یا ارتعاشی را در داخل آن ایجاد می‌کنند. این حرکتهای جمعی مغز، ویژگی اصلی مدل جمعی را حفظ می‌کند. بنابراین، چنین مدلی از ساختار هسته‌ای در ترکیب دیدگاههای به ظاهر ناسازگار مدلهای جمعی و ذره- مستقل موفق بوده است. این مدل به طور قابل توجهی در توضیح خواص هسته‌ای مشاهده شده موفق عمل کرده است.

---
1. Maria Mayer
2. Hans Jensen



مسئله نمونه ۴۲-۱۰

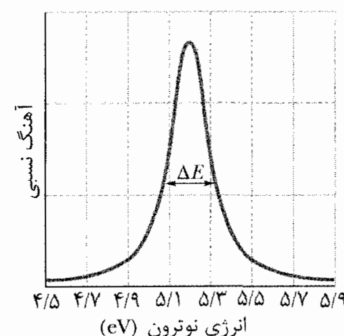
واکنش گیراندازی نوترون را در نظر بگیرید

$$^{109}\mathrm{Ag}+\mathrm{n}\to{}^{110}\mathrm{Ag}\to{}^{110}\mathrm{Ag}+\gamma$$ (۴۲-۳۵)

که در آن هستهٔ مرکب ($^{110}\mathrm{Ag}$) تشکیل شده است. شکل ۴۲-۱۵ آهنگ نسبی را که با آن چنین رویدادهایی رخ می‌دهند برحسب انرژی نوترون فرودی نشان می‌دهد. عمر میانگین این هستهٔ مرکب را با استفاده از اصل عدم قطعیت به شکل

$$\Delta E\cdot\Delta t\approx\hbar$$ (۴۲-۳۶)

بیابید، که در آن ΔE میزانی از عدم قطعیت است که با آن انرژی یک حالت می‌تواند تعیین شود. کمیت Δt میزانی از زمان لازم برای اندازه‌گیری این انرژی است. در واقع، در اینجا Δt دقیقاً برابر با t_{avg} ، یعنی عمر میانگین هستهٔ مرکب پیش از واپاشی آن به حالت پایه است.



شکل ۴۲-۱۵ نموداری از تعداد نسبی رویدادهای واکنش از نوع توصیف شده با معادلهٔ ۴۲-۳۵ برحسب تابعی از انرژی نوترون فرودی. نیم- پهنای ΔE قلهٔ تشدید حدود ۰/۲۰ eV است.

استدلال: درمی‌یابیم که آهنگ واکنش نسبی دارای قلهٔ تیزی در انرژی نوترون تقریباً برابر ۵/۲eV است. این اشاره بر آن دارد که ما با یک تکْ تراز انرژی برانگیخته شده از هستهٔ مرکب $^{110}\mathrm{Ag}$ سروکار داریم. هرگاه انرژی موجود (نوترون فرودی) درست به اندازهٔ انرژی این تراز بالای حالت زمینهٔ $^{110}\mathrm{Ag}$ باشد، "تشدید" رخ می‌دهد و واکنش معادلهٔ ۴۲-۳۵ واقعاً "راه می‌افتد."

ولی، قلهٔ تشدید به طور نامتناهی تیز نیست، بلکه دارای نیم- پهنای تقریبی (ΔE در شکل) حدوداً ۰/۲۰eV است، می‌توانیم با بیان اینکه انرژی تراز برانگیخته شده به طور خیلی دقیق مشخص نیست، بلکه دارای یک عدم قطعیت انرژی ΔE در حدود ۰/۲۰eV است، دلیلی برای این پهنای قلهٔ تشدید ارائه کنیم. بنابراین، معادلهٔ ۴۲-۳۶ چنین به دست می‌دهد

$$\Delta t=t_{\mathrm{avg}}\approx\frac{\hbar}{\Delta E}=\frac{(4/14\times10^{-15}\,\mathrm{eV\cdot s})/2\pi}{0/20\,\mathrm{eV}}$$

$$\approx 3\times10^{-15}\mathrm{s}$$ (پاسخ)

این، چند صد برابر بزرگتر از زمانی است که یک نوترون ۰/۲۰eV نیاز دارد تا فاصلهٔ قطر هستهٔ $^{109}\mathrm{Ag}$ را طی کند. بنابراین، نوترون این زمان 3×10^{-15} s را در بخشی از هسته می‌گذراند.

بازنگری و خلاصهٔ درس

نوکلیدها تقریباً ۲۰۰۰ **نوکلید** شناخته شده وجود دارد. هر یک با یک **عدد اتمی** Z (تعداد پروتونها)، یک **عدد نوترونی** N ، و یک **عدد جرمی** A (تعداد کل **نوکلئونها**- پروتونها و نوترونها) مشخص شده‌اند. بنابراین، $A=Z+N$ است. نوکلیدهایی با عدد اتمی یکسان، ولی عدد نوترونی متفاوت **ایزوتوپ** یکدیگرند. هسته‌ها دارای شعاع میانگین r هستند که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$r=r_0A^{1/3}$$ (۴۲-۳)

که $r_0\approx1/2\,\mathrm{fm}$ است.

جرم و انرژی بستگی جرمهای اتمی اغلب برحسب *فزونی جرم* گزارش می‌شوند

$$\Delta=M-A$$ (فزونی جرم) (۴۲-۶)

که در آن M جرم واقعی اتم در یکاهای جرم اتمی و A عدد جرمی برای هستهٔ اتمی است. **انرژی بستگی** هسته برابر است با اختلاف

$$\Delta E_{\mathrm{be}}=\sum(mc^2)-Mc^2$$ (انرژی بستگی) (۴۲-۷)

که در آن $\sum(mc^2)$ انرژی جرمی کل پروتونها و نوترونها *مجزا* است. **انرژی بستگی بر نوکلئون** برابر است با

$$\Delta E_{\mathrm{ben}}=\frac{\Delta E_{\mathrm{be}}}{A}$$ (انرژی بستگی بر نوکلئون) (۴۲-۸)

تبادلهای جرم- انرژی انرژی معادل یک یکای جرم (u) برابر ۹۳۱/۴۹۴۰۱۳MeV است. منحنی انرژی بستگی نشان می‌دهد که نوکلیدهای با جرم متوسط پایدارترین نوکلیدها هستند و انرژی بستگی می‌تواند هم از طریق شکافت هسته‌های پرجرم و هم از طریق همجوشی هسته‌های کم‌جرم، آزاد شود.

نیروی هسته‌ای هسته‌ها توسط یک نیروی جاذبه که میان نوکلئونها عمل می‌کند در کنار هم نگه داشته می‌شوند. بخشی از **نیروی قوی** که میان کوارکهای تشکیل‌دهندهٔ نوکلئونها عمل می‌کند.

واپاشی پرتوزا بیشتر نوکلیدهای شناخته شده پرتوزا هستند؛ آنها به طور خودبه‌خود با آهنگ $R(=-dN/dt)$ واپاشی می‌کنند که این آهنگ متناسب با تعداد N اتم پرتوزای موجود است، که در آن ثابت تناسب، **ثابت فروپاشی** است. این به قانون واپاشی نمایی می‌انجامد:

$$N=N_0e^{-\lambda t}\quad و\quad R=\lambda N=R_0e^{-\lambda t}$$ (واپاشی پرتوزا) (۴۲-۱۵ و ۴۲-۱۶ و ۴۲-۱۷)

نیم- عمر $T_{1/2}=(\ln2)/\lambda$ نوکلید پرتوزا عبارت است از زمان لازم برای واپاشی با آهنگ R (یا تعداد N) در یک نمونه تا به نصف مقدار اولیه‌اش کاهش یابد.

واپاشی آلفا برخی از نوکلیدها با گسیل یک ذرهٔ آلفا (یک هستهٔ هلیوم، $^4\mathrm{He}$) واپاشی می‌کنند. این واپاشی توسط یک سد

انرژی پتانسیل که نمی‌تواند بنا بر فیزیک کلاسیکی رخنه‌پذیر باشد، بازداشته می‌شود، ولی بنا بر فیزیک کوانتومی تونل‌زنی از سد انجام می‌گیرد. نفوذپذیری سد، و در نتیجه نیم‌-عمر واپاشی آلفا، به انرژی ذرهٔ آلفای گسیل شده بسیار حساس است.

واپاشی بتا در واپاشی بتا، یک الکترون یا یک پوزیترون توسط یک هسته، به همراه یک نوترینو گسیل می‌شود. ذره‌های گسیل شده در انرژی فروپاشی موجود شریک‌اند. الکترونها و پوزیترونهای گسیل شده در واپاشی بتا دارای طیف پیوسته‌ای انرژی از نزدیکی صفر تا حد $K_{\max}(=Q=-\Delta mc^2)$ هستند.

عمرسنجی با پرتوزایی نوکلیدهای پرتوزایی که به طور طبیعی واپاشی می‌کنند وسیله‌ای برای تخمین زمانهای تاریخی و رویدادهای ماقبل تاریخ به دست می‌دهند. برای مثال، عمر مواد آلی را می‌توان اغلب توسط اندازه‌گیری ^{14}C موجود در آنها به دست آورده؛ نمونه‌های سنگی را می‌توان با استفاده از ایزوتوپ پرتوزای ^{40}K عمرسنجی کرد.

دز تابشی سه یکا برای توصیف در معرض تابش یونندە قرار گرفتن، مورد استفاده قرار می‌گیرد. **بکرل** (۱ واپاشی بر ثانیه = ۱ Bq) فعالیت یک چشمه را اندازه می‌گیرد. مقدار انرژی که واقعاً جذب شده برحسب **گری** اندازه گرفته می‌شود، که ۱Gy متناظر با ۱J/kg است. اثر زیست شناختی برآورد شده از انرژی جذب شده برحسب **سیورت** اندازه گرفته می‌شود؛ یک معادل دز ۱ Sv بدون توجه به نوع تابشی که از آن به دست آمده، موجب اثر زیست شناختی یکسانی می‌شود.

مدلهای هسته‌ای در مدل **جمعی** ساختار هسته‌ای فرض می‌شود که نوکلئونها به طور مکرر با یکدیگر برخورد می‌کنند و هنگامی که یک پرتابه گیرانداخته می‌شود، هستهٔ مرکبی با عمر نسبتاً طولانی تشکیل می‌شود. تشکیل یک هستهٔ مرکب و واپاشی متعاقب آن رویدادهایی کاملاً مستقل‌اند.

در مدل **ذره- مستقل** ساختار هسته‌ای فرض می‌شود که هر نوکلئون اساساً بدون هیچ برخوردی در یک حالت کوانتیده در داخل هسته، حرکت می‌کند. این مدل پیش‌بینی می‌کند که ترازهای نوکلئونی و **عددهای نوکلئونی جادویی** (۲ و ۸ و ۲۰ و ۲۸ و ۵۰ و ۸۲ و ۱۲۶) به لایه های بستهٔ نوکلئونها وابسته اند؛ نوکلیدهایی با هر یک از این تعداد نوترونها یا پروتونها به ویژه پایدارند.

مدل مرکب، که در آن الکترونهای اضافی، حالتهای کوانتیدهٔ بیرون یک مغز مرکزی لایه‌های بسته را اشغال می‌کنند، به میزان زیادی در پیش‌بینی بسیاری از خواص هسته‌ای موفق بوده است.

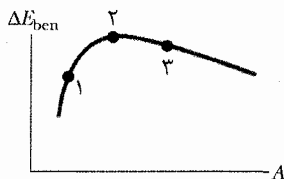
پرسشها

۱- فرض کنید ذرهٔ آلفا در مسئلهٔ نمونهٔ ۴۲-۱ با پروتونی با همان انرژی جنبشی اولیه جایگزین شود و نیز به طور رودررو به سمت هستهٔ اتم طلا حرکت کند. (الف) آیا فاصله از مرکز هسته که در آن پروتون متوقف می‌شود، از مقدار مربوط به ذرهٔ آلفا بیشتر است یا کمتر، یا برابر است؟ (ب) اگر در عوض هدف را با هسته‌ای با Z بزرگتر جایگزین کنیم آیا فاصلهٔ توقف ذرهٔ آلفا از فاصلهٔ توقف هدف طلا بیشتر است یا کمتر یا برابر است؟

۲- گفته می‌شود که نوکلید معینی به طور خاص پایدار است. آیا انرژی بستگی بر نوکلئون آن اندکی بالاتر یا اندکی پایینتر از منحنی انرژی بستگی شکل ۴۲-۶ است؟

۳- نوکلید $^{244}Pu(Z=94)$ یک گسیلندهٔ ذرهٔ آلفاست. این نوکلید به کدامیک از نوکلیدهایی که در پی می‌آید، واپاشی می‌کند: $^{240}Np(Z=93)$ ، $^{240}U(Z=92)$ ، $^{248}Cm(Z=96)$ ، یا $^{244}Am(Z=95)$؟

۴- شکل ۴۲-۱۶ منحنی انرژی بستگی برنوکلئون ΔE_{ben} را برحسب جرم اتمی A نشان می‌دهد. سه ایزوتوپ مشخص شده‌اند. آنها را بنابر انرژی مورد نیاز جهت جدا کردن نوکلئون از ایزوتوپ به نسبت بزرگی مرتب کنید.



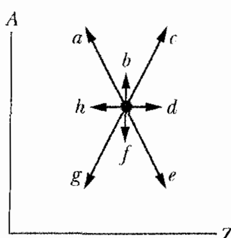
شکل ۴۲-۱۶ پرسش ۴

۵- نوکلید پرتوزای ^{196}Ir با گسیل یک الکترون واپاشی می‌کند. (الف) این نوکلید به کدام مربع شکل ۴۲-۵ منتقل می‌شود؟ (ب) آیا پس از آن، واپاشیهای دیگری رخ می‌دهد؟

۶- آیا فزونی جرم یک ذرهٔ آلفا (با استفاده از محور عمود بر صفحهٔ شکل ۴۲-۱۲) از انرژی بستگی کل ذره (با استفاده از انرژی بستگی بر نوکلئون شکل ۴۲-۶) بیشتر است یا کمتر؟

۷- در لحظهٔ $t=0$ ، نمونه‌ای از نوکلید پرتوزای A دارای همان آهنگ واپاشی است که نمونهٔ پرتوزای B در لحظهٔ $t=30\,\text{min}$ دارد. ثابتهای فروپاشی، λ_A و λ_B هستند، با $\lambda_A<\lambda_B$. آیا این دو نمونه هرگز دارای آهنگهای واپاشی یکسانی (به طور همزمان) خواهند شد؟ (*راهنمایی*: نموداری از فعالیتهای آنها رسم کنید).

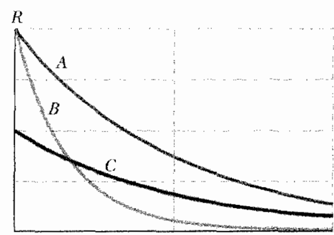
۸- شکل ۴۲-۱۷ نمودار جرم اتمی A بر حسب عدد بار Z است. مکان یک هستهٔ معین با نقطه مشخص شده است. کدام پیکان خروجی از نقطه بیانگر انتقالی است که در آن هسته (الف) واپاشی یک β^- و (ب) واپاشی یک α می‌کند؟



شکل ۴۲-۱۷ پرسش ۸

۹- در لحظهٔ $t=0$، آهنگ واپاشی نمونه‌ای از نوکلید پرتوزای A دو برابر آهنگ واپاشی نمونه‌ای از نوکلید پرتوزای B است. ثابتهای فروپاشی λ_A و λ_B هستند، با $\lambda_A > \lambda_B$. آیا این دو نمونه هرگز دارای آهنگهای واپاشی یکسانی (به طور همزمان) خواهند شد؟

۱۰- شکل ۴۲-۱۸ فعالیتهای سه نمونهٔ پرتوزا را برحسب زمان به دست می‌دهد. این نمونه‌ها را بنا بر (الف) نیم- عمر و (ب) ثابت فروپاشی آنها، به گونه‌ای مرتب کنید که بزرگترین در ابتدا باشد. (*راهنمایی:* برای (الف) از یک محور عمود بر صفحهٔ شکل استفاده کنید).



شکل ۴۲-۱۸ پرسش ۱۰

۱۱- در لحظهٔ $t=0$ شروع به مشاهدهٔ دو هستهٔ پرتوزای مشابه می‌کنیم که دارای نیم- عمر ۵min هستند. در لحظهٔ $t=1\text{min}$، یکی از این هسته‌ها واپاشی می‌کند. آیا این رویداد شانس این را که هستهٔ دوم در ۴ دقیقه بعد واپاشی کند افزایش می‌دهد یا کاهش، یا اینکه هیچ اثری بر هستهٔ دوم ندارد؟

۱۲- اگر جرم یک نمونهٔ پرتوزا دو برابر شود، آیا (الف) فعالیت و (ب) ثابت فروپاشی این نمونه افزایش می‌یابد یا کاهش، یا بدون تغییر باقی می‌ماند؟

۱۳- عددهای نوکلئونی جادویی هسته‌ها در بخش ۴۲-۹ به صورت ۲، ۸، ۲۰، ۲۸، ۵۰، ۸۲، ۱۲۶ داده شده‌اند. هرگاه (الف) فقط عدد جرمی A، (ب) فقط عدد اتمی Z، (پ) فقط عدد نوترونی N، یا (ت) هر یک از Z یا N (یا هر دو) برابر با یکی از این عددها باشد آیا نوکلیدها جادوی‌اند (یعنی به طور خاص پایدارند)؟ همهٔ عبارتهای صحیح را برگزینید.

۱۴- نوکلید پرتوزای ^{49}Sc دارای نیم- عمر ۵۷/۰min است. در لحظهٔ $t=0$، آهنگ شمارش نمونه‌ای از آن ۶۰۰۰ شمارش/min بیشتر از فعالیت کلی زمینه است که برابر ۳۰ شمارش/min است. بدون محاسبه، تعیین کنید که آیا آهنگ شمارش نمونه در ۳ h، ۷ h، ۱۰ h، یا زمانی بسیار بزرگتر از ۱۰ h، تقریباً برابر با آهنگ شمارش زمینه خواهد شد؟

۱۵- (الف) کدامیک از نوکلیدهایی که در پی می‌آیند جادوی‌اند: ^{122}Sn، ^{132}Sn، ^{98}Cd، ^{198}Au، ^{208}Pb؟ (ب) کدامیک، در صورت وجود، جادویی دوگانه‌اند؟

مسئله‌ها

GO مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس).

SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها

WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

●●●- تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.

اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

بخش ۴۲-۲ کشف هسته

●۱- یک هستهٔ ^{7}Li با انرژی جنبشی ۳/۰۰MeV به سوی یک هستهٔ ^{232}Th پرتاب شده است. کمترین فاصلهٔ جدایی مرکز به مرکز میان دو هسته، با فرض آنکه هستهٔ (سنگینتر) ^{232}Th حرکت نکند، چقدر است؟

●۲- نزدیکترین فاصله در برخورد رودررو میان یک ذرهٔ آلفا با انرژی ۵/۳۰MeV و هستهٔ یک اتم مس را محاسبه کنید.

●●۳- هرگاه یک ذرهٔ آلفا به طور کشسان با یک هسته برخورد کند، آن هسته پس زده می‌شود. فرض کنید ذرهٔ آلفایی با انرژی ۵/۰۰MeV با یک هستهٔ طلا که در ابتدا ساکن است برخورد کشسان رودررو انجام دهد. انرژی جنبشی (الف) هستهٔ پس زده شده و (ب) ذرهٔ آلفای واجهیده چقدر است؟

●●۴- یک ذرهٔ آلفا مستقیماً به سمت هستهٔ آلومینیوم پرتاب می‌شود. فرض می‌کنیم که هر دو ذره کره‌اند. انرژی ذره آلفا باید چقدر باشد تا وقتی آن با «سطح» هستهٔ آلومینیوم تماس می‌یابد توقف لحظه‌ای کند. (فرض کنید هستهٔ هدف ساکن باقی می‌ماند.) GO

●●۵- هستهٔ Li با انرژی جنبشی اولیهٔ ۱۰/۲ MeV مستقیماً به سمت مرکز هستهٔ Ds شلیک می‌شود. در چه فاصله‌ای بین مرکز هستهٔ Li و مرکز هستهٔ Ds هستهٔ Li به‌طور لحظه‌ایی توقف می‌کند؟ فرض کنید که هدف ساکن می‌ماند.

بخش ۴۲-۳ برخی از خواص هسته‌ای

●۶- فزونی جرم Δ_1 برای ^{1}H (که جرم واقعی آن ۱/۰۰۷۸۲۵u است) برحسب (الف) یکاهای جرم اتمی و (ب) MeV/c^2 چقدر است؟ فزونی جرم Δ_n یک نوترون (با جرم واقعی ۱/۰۰۸۶۶۴u) برحسب (پ) یکاهای جرم اتمی و (ت) MeV/c^2 چقدر است؟ فزونی جرم Δ_{120} برای ^{120}Sn (با جرم واقعی ۱۱۹/۹۰۲۱۹۷u) برحسب (ث) یکاهای جرم اتمی و (ج) MeV/c^2 چقدر است؟

●۷- نوکلید ^{14}C (الف) چند پروتون و (ب) چند نوترون دارد؟

●۸- انرژی پتانسیل الکتریکی یک کرهٔ یکنواخت با بار q و شعاع r چنین داده شده است

$$U = \frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 r}$$

(الف) آیا این انرژی نشان‌دهندهٔ گرایش کره به پیوستگی است یا از هم پاشیدگی؟ نوکلید ^{239}Pu کره‌ای به شعاع ۶/۶۴fm است. برای این نوکلید مطلوب است (ب) انرژی پتانسیل الکتریکی U بنا بر معادلهٔ بالا، (پ) انرژی پتانسیل الکتریکی بر پروتون، و (ت) انرژی پتانسیل الکتریکی بر نوکلئون. انرژی بستگی بر نوکلئون این نوکلید برابر با ۷/۵۶MeV است. (ث) چرا هرگاه پاسخهای (پ) و (ت) بزرگ و مثبت باشند، این نوکلید به خوبی مقید است؟

۹●- یک ستارهٔ نوترونی، جسمی ستاره‌ای است که چگالی آن تقریباً با چگالی مادهٔ هسته‌ای، که در مسئلهٔ نمونهٔ ۴۲-۲ محاسبه شد، برابر است. فرض کنید که خورشید برُمبد و بدون آنکه جرم فعلی خود را از دست دهد به چنین ستاره‌ای تبدیل شود. شعاع آن چقدر خواهد بود؟

۱۰●●- فزونی نوترونی شدید (تعریف شده به صورت $N-Z$) هسته‌های پرجرم با توجه به اینکه بیشتر نوکلیدهای پرجرم هرگز نمی‌توانند بدون ترک نوترونها به دو هستهٔ پایدار شکافت پیدا کنند، توضیح داده می‌شود. برای مثال، شکافت خودبه‌خود هستهٔ ^{235}U را به دو *هستهٔ دختر* پایدار با عددهای اتمی ۳۹ و ۵۳ در نظر بگیرید. با استفاده از پیوست ج، نام (الف) نخستین و (ب) دومین هستهٔ دختر را تعیین کنید. با استفاده از شکل ۴۲-۴، تقریباً چه تعداد نوترون در (پ) نخستین و (ت) دومین هستهٔ دختر وجود دارد؟ (ث) تقریباً چند نوترون، نوکلید را ترک کرده‌اند؟

۱۱●- چگالی جرمی هسته‌ای ρ_m (الف) نوکلید نسبتاً کم‌جرم ^{55}Mn و (ب) نوکلید نسبتاً پر جرم ^{209}Bi چقدر است؟ (پ) این دو پاسخ را با ارائه توضیحی مقایسه کنید. چگالی بار هسته‌ای ρ_q (ت) ^{55}Mn و (ث) ^{209}Bi چقدر است؟ (ت) این دو پاسخ را با ارائه توضیحی مقایسه کنید.

۱۲●- (الف) نشان دهید که جرم M یک اتم تقریباً با $M_{app} = Am_p$ داده می‌شود، که A عدد جرمی و m_p جرم پروتون است. برای (ب) ^{1}H، (پ) ^{31}P، (ت) ^{120}Sn، (ث) ^{197}Au، و (ج) ^{239}Ps، با استفاده از مقدارهای جرم داده شده در جدول ۴۲-۱، درصد انحراف میان M_{app} و M را که با این رابطه داده می‌شود، تعیین کنید

$$\text{درصد انحراف} = \frac{M_{app} - M}{M} 100$$

(چ) آیا مقدار M_{app} به حد کافی دقیق است تا در محاسبهٔ انرژی بستگی هسته‌ای مورد استفاده قرار گیرد؟

۱۳●- شعاعهای هسته‌ای را می‌توان از طریق پراکندگی الکترونهای پرانرژی از هسته اندازه‌گیری کرد. (الف) طول موج دوبروی برای الکترونهای ۲۰۰MeV چقدر است؟ (ب) آیا این الکترونها کاوه‌های مناسبی برای این هدف‌اند؟ **SSM**

۱۴●●- جرم سکه‌ای برابر با ۳/۰g است. انرژی مورد نیاز برای جدا کردن همهٔ نوترونها و پروتونهای این سکه را از یکدیگر محاسبه کنید. برای سادگی کار، فرض کنیدکه سکه تماماً از اتمهای ^{63}Cu (به جرم ۶۲/۹۲۹۶۰u) ساخته شده است. جرم پروتون و نوترون به ترتیب برابر ۱/۰۰۷۸۳u و ۱/۰۰۸۶۶u است.

۱۵●●- جدول تناوبی جرم اتمی متوسط منیزیم را به صورت ۲۴/۳۱۲u به دست می‌دهد. این مقدار متوسط، نتیجه‌ای از *توزین* جرمهای اتمی ایزوتوپهای منیزیم، بنا بر فراوانیهای طبیعی آنها روی کرهٔ زمین است. سه ایزوتوپ و جرمهای آنها عبارتند از ^{24}Mg(۲۳/۹۸۵۰۴u)، ^{25}Mg(۲۴/۹۸۵۸۴u)، و ^{26}Mg(۲۵/۹۸۲۵۹u). فراوانی طبیعی ^{24}Mg به واسطهٔ جرم آن برابر با ۷۸/۹۹٪ است (یعنی، ۷۸/۹۹٪ جرم نمونهٔ منیزیمی که به طور طبیعی وجود دارد ناشی از حضور ^{24}Mg است). فراوانی (الف) ^{25}Mg و (ب) ^{26}Mg چقدر است؟

۱۶●●- یک ذرهٔ آلفا (هستهٔ ^{4}He) را می‌شود در پی مرحله‌های زیر شکافت. انرژی (کار) مورد نیاز را برای هر یک از این مرحله‌ها به دست آورید: (الف) کندن یک پروتون، (ب) کندن یک نوترون، و (پ) جدا کردن پروتون و نوترون به جای مانده. برای یک ذرهٔ آلفا (ت) انرژی بستگی کل و (ث) انرژی بستگی بر نوکلئون چقدر است؟ (ج) آیا هیچ‌کدام با پاسخهای قسمتهای (الف)، (ب)، یا (پ) برابرند؟ برخی از جرمهای اتمی مورد نیاز عبارت‌اند از

^{2}H	۲/۰۱۴۱۰u	^{4}He	۴/۰۰۲۶۰u
^{1}H	۱/۰۰۷۸۳u	^{3}H	۳/۰۱۶۰۵u
		n	۱/۰۰۸۶۷u

۱۷●●- انرژی بستگی بر نوکلئون داده شده در جدول ۴۲-۱ برای ^{239}Pu را تحقیق کنید. جرم این اتم برابر با ۲۳۹/۰۵۲۱۶u است. **SSM**

۱۸●●- انرژی بستگی بر نوکلئون ^{262}Bh چقدر است؟ جرم این اتم برابر با ۲۶۲/۱۲۳۱u است.

۱۹●●- (الف) نشان دهید که انرژی بستگی کل E_{be} یک نوکلید معین عبارت است از

$$E_{be} = Z\Delta_H + N\Delta_n - \Delta$$

که در آن Δ_H فزونی جرم ^{1}H، Δ_n فزونی جرم نوترون، و Δ فزونی جرم نوکلید داده شده است. (ب) با استفاده از این روش، انرژی بستگی بر نوکلئون را برای ^{197}Au به دست آورید. نتیجهٔ خود را با مقدار داده شده در جدول ۴۲-۱ مقایسه کنید. فزونیهای جرمی مورد نیاز، که تا سه رقم با معنی گرد شده‌اند، عبارت‌اند از $\Delta_H = +7/29$MeV، $\Delta_n = +8/07$MeV، و استفادهٔ فزونیهای جرمی به جای جرمهای واقعی است، توجه کنید. **SSM WWW**

۲۰●●- انرژی بستگی بر نوکلئون ایزوتوپ رادیوم $^{259}_{104}$Rf چقدر است؟ برخی از جرمهای اتمی و جرم نوترونی عبارت‌اند از:

$^{259}_{104}Rf$	۲۵۹/۱۰۵۶۳u	^{1}H	۱/۰۰۷۸۲۵u
n	۱/۰۰۸۶۶۵u		

●●۲۱- (الف) نشان دهید که انرژی وابسته به نیروی قوی میان نوکلئونها در هسته متناسب با A، عدد جرمی هستهٔ مورد نظر، است. (ب) نشان دهید که انرژی وابسته به نیروی کولنی میان پروتونها در یک هسته متناسب با $Z(Z-1)$ است. (پ) نشان دهید، هرگاه به سوی هسته‌های سنگینتر و سنگینتری حرکت کنیم (شکل ۴۲-۴ را ببینید)، اهمیت نیروی کولنی با سرعت بیشتری از نیروی قوی افزایش می‌یابد.

●●۲۲- انرژی بستگی بر نوکلئون ایزوتوپ یوروپیم $^{152}_{63}Eu$ چقدر است؟ برخی از جرمهای اتمی و جرم نوترونی عبارت‌اند از:

$^{152}_{63}Eu$	۱۵۱/۹۲۱۷۴۲	^{1}H	۱/۰۰۷۸۲۵u
n	۱/۰۰۸۶۶۵u		

●●۲۳- چون نوترون بدون بار است، جرم آن باید از روشهای دیگری سوای استفاده از یک طیف‌سنج جرمی به دست آید. هرگاه یک نوترون و یک پروتون برخورد کنند (فرض کنید هر دو تقریباً ساکن‌اند)، آنها ترکیب می‌شوند و با گسیل یک پرتو گاما با انرژی ۲/۲۲۳۳MeV ، تشکیل یک دوترون را می‌دهند. جرم پروتون و دوترون به ترتیب برابر با ۱/۰۰۷۲۷۶u و ۲/۰۱۳۵۳۳۱۲u است. با استفاده از این داده‌ها، جرم نوترون را به دست آورید.

●●۲۴- انرژی بستگی بر نوکلئون ایزوتوپ امریکیم $^{244}_{95}Am$ چقدر است؟ برخی از جرمهای اتمی و جرم نوترونی عبارت‌اند از:

$^{244}_{95}Am$	۲۴۴/۰۶۴۲۷۹u	^{1}H	۱/۰۰۷۸۲۵u
n	۱/۰۰۸۶۶۵u		

بخش ۴۲-۴ واپاشی پرتوزا

●۲۵- ۳/۴g از نمونهٔ ^{67}Ga ، ایزوتوپی با نیم- عمر ۷۸h، را که در ابتدا خالص است در نظر بگیرید. (الف) آهنگ واپاشی اولیهٔ آن چقدر است؟ (ب) آهنگ واپاشی آن ۴۸h بعد چقدر است؟

●۲۶- نیم- عمر یک ایزوتوپ پرتوزای خالص برابر با ۶/۵h است. اگر در ابتدا ۴۸×۱۰^{۱۹} اتم از این ایزوتوپ وجود داشته باشد، تعداد اتمهای باقیمانده در پایان ۲۶h چقدر خواهد بود؟

●۲۷- یک ایزوتوپ پرتوزای جیوه، ^{197}Hg ، با ثابت فروپاشی $۰/۰۱۰۸h^{-1}$ به طلا، ^{197}Au واپاشی می کند. (الف) نیم-عمر ^{197}Hg رامحاسبه کنید. چه کسری از این نمونه در پایان (ب) سه نیم- عمر و (پ) ۱۰/۰ روز بر جای خواهد ماند؟ **SSM WWW**

●۲۸- در زمانهایی که آزمایشهای هسته‌ای در بالای سطح زمین انجام می‌پذیرفت، انفجارهای هسته‌ای، ذره‌های پرتوزا را در بالای جوّ زمین پراکنده می‌کرد. آنگاه گردش هوا، این ذره‌ها را پیش از آنکه روی سطح زمین و آب بنشینند، در سرتاسر جهان پخش می‌کرد. یکی از این آزمایشها در اکتبر سال ۱۹۷۶/۱۳۵۵ صورت پذیرفت. چه کسری از ^{90}Sr که در آن انفجار تولید شده بود، در اکتبر ۲۰۰۶/۱۳۸۵ کماکان موجود خواهد بود؟ نیم- عمر ^{90}Sr برابر با ۲۹ سال است.

●۲۹- یک نوکلید پرتوزا دارای نیم- عمر ۳۰/۰y است. در پایان (الف) ۶۰/۰y و (ب) ۹۰/۰y ، چه کسری از نمونهٔ در ابتدا خالص این نوکلید، واپاشی نکرده باقی می‌ماند؟

●۳۰- نیم- عمر یک ایزوتوپ پرتوزا برابر با ۱۴۰d است. چند روز طول می‌کشد تا آهنگ واپاشی نمونه‌ای از این ایزوتوپ به $\frac{1}{4}$ مقدار اولیه‌اش برسد؟

●۳۱- یاخته‌های سرطانی نسبت به تابشهای x و گاما بیشتر از یاخته‌هایی که سالم‌اند، آسیب‌پذیرند. در گذشته، چشمهٔ متداول برای پرتودرمانی ^{60}Co پرتوزا بود، که با نیم- عمر ۵/۷۲y به یک حالت هسته‌ای برانگیختهٔ ^{60}Ni واپاشی می‌کند. آنگاه این ایزوتوپ نیکل، بی‌درنگ دو فوتون پرتوی گاما، هر یک با انرژی تقریبی ۱/۲MeV ، را گسیل می‌کند. چند هستهٔ پرتوزای ^{60}Co در یک چشمهٔ ۶۰۰۰Ci از نوعی که در بیمارستانها مورد استفاده قرار می‌گرفت وجود دارد؟ (امروزه از ذره‌های پر انرژی حاصل از شتابدهنده‌های خطی در پرتودرمانی استفاده می‌شود؟

●۳۲- ایزوتوپ پلوتونیوم ^{239}Pu به صورت یک فراوردهٔ فرعی در راکتورهای هسته‌ای تولید می‌شود و در نتیجه در محیط زندگی ما انباشته می‌گردد. این ایزوتوپ، پرتوزاست و با نیم- عمر $۲/۴۱\times ۱۰^{۴}y$ واپاشی می‌کند. (الف) چند هستهٔ Pu ، یک دز از لحاظ شیمیایی کشندهٔ ۲/۰۰mg را تشکیل می‌دهند؟ (ب) آهنگ واپاشی این مقدار چقدر است؟

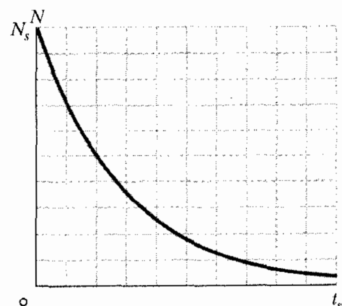
●●۳۳- به قصد تابش‌دهی به بیمار بیمارستانی، یک نمونهٔ پرتوزا در آزمایشگاهی نزدیک به آن، مَهیا شده است. این نمونه دارای نیم- عمر ۸۳/۶۱h است. اگر قرار باشد فعالیت نمونه در هنگام تابش‌دهی به بیمار در ۲۴ ساعت بعد برابر با $۷/۴\times ۱۰^{۸}Bq$ باشد، فعالیت اولیهٔ آن چقدر بوده است؟

●●۳۴- نوکلید پرتوزای ^{99}Tc را می‌توان به منظور مشاهدهٔ جریان خون، اندازه‌گیری حجم خون، یا یافتن یک غده، در کنار هدفهایی دیگر، به خون یک بیمار تزریق کرد. این نوکلید در بیمارستان توسط یک "گاو ماده" تولید می‌شود که حاوی ^{99}Mo ، نوکلید پرتوزایی است که با نیم- عمر ۶۷h به ^{99}Tc واپاشی می‌کند. گاو، روزی یک بار برای ^{99}Tc آن، که در یک حالت برانگیخته توسط ^{99}Mo تولید می‌شود، "دوشیده می‌شود"؛ ^{99}Tc با گسیل یک فوتون پرتو گاما به پایینترین حالت انرژی خود واانگیخته می‌شود، که این توسط آشکارسازهایی که در اطراف بیمار قرار داده شده‌اند، ثبت می‌شود. واانگیختگی دارای نیم- عمری برابر با ۶/۰h است. (الف) ^{99}Mo با چه فرایندی به ^{99}Tc وامی‌پاشد؟ (ب) اگر به بیماری نمونهٔ ^{99}Tc با فعالیت $۸/۲\times ۱۰^{۷}Bq$ تزریق شود، در ابتدا چه تعداد فوتون پرتو گاما در هر ثانیه در داخل بدن بیمار تولید می‌شود؟ (پ) اگر آهنگ گسیل فوتونهای پرتو گاما از یک غدهٔ کوچک که ^{99}Tc را جذب کرده است، در یک زمان معین برابر با ۳۸ بر ثانیه باشد،

در این زمان چند حالت برانگیختهٔ ^{99}Tc در غده جایگزیده شده است؟

●●۳۵- پس از تلاشی طولانی، *ماری و پیرکوری*[1] در سال ۱۹۰۲/۱۲۸۱ موفق به جداسازی یک دسی‌گرم $RaCl_2$ از سنگ معدن اورانیوم شدند که نخستین مقدار ماده‌ای از جنس رادیوم بود. رادیوم، ایزوتوپ پرتوزای ^{226}Ra با نیم- عمر ۱۶۰۰y است. (الف) کوریها چند هستهٔ رادیوم را جدا کرده بودند؟ (ب) آهنگ واپاشی نمونهٔ آنها، برحسب فروپاشی بر ثانیه، چقدر بوده است؟ **SSM**

●●۳۶- شکل ۴۲-۱۹ واپاشی یک نمونهٔ مادر پرتوزا را نشان می‌دهد. محورها دارای مقیاس $N_s = ۲/۰۰ \times ۱۰^{۶}$ و $t_s = ۱۰/۰ s$ هستند. پرتوزایی نمونه در $t = ۲۷/۰ s$ چقدر است؟



شکل ۴۲-۱۹ مسئله ۳۶

●●۳۷- در اکتبر سال ۱۹۹۲/۱۳۷۱، پلیس سوئیس دو مرد را که در تلاش برای قاچاق اسمیوم[2] از اروپای شرقی بودند دستگیر کرد. البته آنها اشتباهاً ^{137}Cs را ربوده بودند. طبق گزارش پلیس، هر قاچاقچی ۱/۰g از نمونهٔ ^{137}Cs را در یک پاکت حمل می‌کرد. فعالیت هر نمونه برحسب بکرل و کوری چقدر بوده است؟ نیم- عمر ^{137}Cs برابر ۳۰/۲y است. (فعالیت ایزوتوپهای پرتوزایی که معمولاً در بیمارستانها استفاده می‌شوند در گسترهٔ تا چند میلی کوری است).

●●۳۸- فعالیت یک نمونهٔ ۲۰ng از ۹۲ Kr که دارای نیم عمر ۱/۸۴ s است، چقدر است؟

●●۳۹- یک گرم نمونه از ساماریوم، ذره‌های آلفا را با آهنگ ۱۲۰ ذره/s گسیل می‌دارد. ایزوتوپ مسئول این واپاشی ^{147}Sm است که فراوانی طبیعی آن در مادهٔ ساماریوم برابر با ۱۵/۰٪ است. نیم- عمر این فرایند واپاشی را محاسبه کنید.

●●۴۰- یک دز $۸/۶۰ \mu Ci$ از ایزوتوپ پرتوزایی به بیماری تزریق می‌شود. ایزوتوپ دارای نیم عمر ۳/۰h است. در این تزریق چقدر ایزوتوپ مادر وجود دارد؟

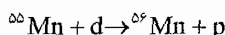
●●۴۱- نوکلید پرتوزای ^{64}Cu دارای نیم- عمر ۱۲/۷h است. اگر نمونه‌ای در $t = ۰$ شامل ۵/۵۰g ^{64}Cu که در ابتدا خالص است باشد، چه مقدار از آن بین $t = ۱۴/۰ h$ و $t = ۱۶/۰ h$ واپاشی خواهد کرد؟

●●۴۲- چشمه‌ای حاوی دو نوکلید پرتوزای ^{32}P $(T_{1/2} = ۱۴/۳ d)$ و ^{33}P $(T_{1/2} = ۲۵/۳ d)$ است. در ابتدا، ۱۰٪ از واپاشیها ناشی از ^{33}P است. چقدر باید صبر کرد تا ۹۰٪ از واپاشیها ناشی از آن باشد؟

●●۴۳- نوکلید پرتوزای معینی با آهنگ ثابت R در یک سیکلوترون تولید می‌شود. این نوکلید همچنین با ثابت فروپاشی λ واپاشی می‌کند. فرض کنید زمانی که فرایند تولید طول می‌کشد بسیار طولانیتر از نیم- عمر نوکلید پرتوزا باشد. (الف) نشان دهید که تعداد هسته‌های پرتوزایی که پس از چنین زمانی برجای می‌مانند، ثابت است و با رابطهٔ $N = R/\lambda$ داده می‌شود. (ب) اکنون نشان دهید که این نتیجه بدون توجه به اینکه چه تعداد هستهٔ پرتوزا در ابتدا موجود بوده است، برقرار می‌ماند. گفته می‌شود که این نوکلید با چشمهٔ خود در *تعادل دیرپا* است؛ در این حالت، آهنگ واپاشی درست با آهنگ تولید آن برابر است. **SSM**

●●۴۴- ایزوتوپ پلوتونیوم ^{239}Pu از طریق واپاشی آلفا با نیم- عمر ۲۴۱۰۰y وامی‌پاشد. چند میلی گرم هلیوم توسط یک نمونهٔ ۱۲/۰ گرمی از ^{239}Pu که در ابتدا خاص است، در پایان ۲۰۰۰۰y تولید می‌شود؟ (فقط هلیومی را در نظر بگیرید که مستقیماً توسط پلوتونیوم تولید شده است و نه متوسط محصولهای فرعی فرایند واپاشی).

●●۴۵- نوکلید پرتوزای ^{56}Mn دارای نیم- عمر ۲/۵۸h است و در یک سیکلوترون توسط بمباران یک هدف منگنز با دوترونها تولید می‌شود. هدف فقط حاوی ایزوتوپ پایدار منگنز است، و واکنش منگنز- دوترون که ^{55}Mn را تولید می‌کند به قرار زیر است



$$^{55}Mn + d \rightarrow {}^{56}Mn + p$$

اگر بمباران بسیار بیشتر از نیم- عمر ^{56}Mn طول بکشد، فعالیت ^{56}Mn تولید شده در هدف به یک مقدار نهایی $۸/۸۸ \times ۱۰^{۱۰}$ Bq می‌رسد. (الف) ^{56}Mn با چه آهنگی تولید می‌شود؟ (ب) آنگاه چه تعداد هستهٔ ^{56}Mn در هدف موجود است؟ (پ) جرم کل آنها چقدر است؟

●●۴۶- جرم یک نمونهٔ (در ابتدا خالص) ^{40}K را که دارای آهنگ واپاشی اولیهٔ $۱/۷۰ \times ۱۰^{۵}$ فروپاشی/s است، محاسبه کنید. نیم- عمر این ایزوتوپ برابر با $۱/۲۸ \times ۱۰^{۹}$y است.

●●۴۷- هوای داخل برخی از غارها حاوی مقدار زیادی گاز رادُن است که استنشاق طولانی آن می‌تواند به سرطان ریه منجر شود. در غارهای انگلستان، هوای داخل غار با بیشترین مقدار گاز، فعالیت بر حجمی برابر با $۱/۵۵ \times ۱۰^{۵}$ Bq/m^3 دارد. فرض کنید شما دو روز تمام در داخل غار سیاحت می‌کنید (و در همانجا می‌خوابید). در طول اقامت دو روزهٔ شما، تقریباً چه مقدار اتمهای ^{222}Rn به داخل ریهٔ شما وارد و خارج می‌شود؟ هستهٔ پرتوزای ^{222}Rn در گاز رادن نیم- عمری برابر با ۳/۸۲ روز دارد. نیاز دارید که گنجایش ریه و آهنگ میانگین دم و بازدم خود را تخمین بزنید.

1. Marie & Pierre Curie
2. Osmium

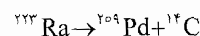
بخش ۴۲-۵ واپاشی آلفا

●**۴۸**- هرگاه یک هستهٔ ^{238}U با گسیل (الف) یک ذرهٔ آلفا و (ب) زنجیره‌ای از نوترون، پروتون، نوترون، پروتون واپاشی کند، چه مقدار انرژی آزاد می‌شود؟ (پ) هم با بحثی مستدل و هم با محاسبهٔ مستقیم خود را متقاعد کنید که اختلاف بین این دو عدد دقیقاً برابر با انرژی بستگی کل ذرهٔ آلفاست. (ت) آن انرژی بستگی را به دست آورید. برخی از جرمهای اتمی و جرمهای ذره‌ای مورد نیاز عبارت‌اند از:

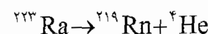
^{238}U	۲۳۸/۰۵۰۷۹u	^{234}Th	۲۳۴/۰۴۳۶۳u
^{237}U	۲۳۷/۰۴۸۷۳u	^{4}He	۴/۰۰۲۶۰u
^{236}Pa	۲۳۶/۰۴۸۹۱u	^{1}H	۱/۰۰۷۸۳u
^{235}Pa	۲۳۵/۰۴۵۴۴u	n	۱/۰۰۸۶۶u

●**۴۹**- عموماً نوکلیدهای پرجرمتر برای واپاشی آلفا تمایل بیشتری به ناپایدار شدن نشان می‌دهند. برای مثال، پایدارترین ایزوتوپ اورانیوم، ^{238}U، دارای یک واپاشی آلفا با نیم- عمر $4/5\times10^{9}$ y است. پایدارترین ایزوتوپ پلوتونیوم، ^{244}Pu با نیم- عمر $8/0\times10^{7}$ y ، و پایدارترین ایزوتوپ کوریوم ^{248}Cm با نیم- عمر $3/4\times10^{5}$ y است. هرگاه نیمی از نمونهٔ اولیهٔ ^{238}U واپاشی کند، چه کسری از نمونهٔ اولیهٔ (الف) پلوتونیوم و (ب) کوریوم بر جای می‌ماند؟ **SSM**

●●**۵۰**- در شرایط نادر معینی، یک هسته می‌تواند با گسیل ذره‌ای پرجرمتر از یک ذرهٔ آلفا، واپاشی کند. این واپاشیها را در نظر بگیرید.



$$^{223}Ra\to{}^{209}Pd+{}^{14}C$$



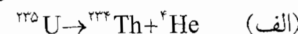
$$^{223}Ra\to{}^{219}Rn+{}^{4}He$$

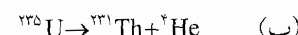
مقدار Q را برای (الف) نخستین و (ب) دومین واپاشی محاسبه کنید و نشان دهید که هر دو واکنش از نظر انرژی امکان پذیرند. (پ) ارتفاع سد کولنی برای گسیل یک ذرهٔ آلفا ۳۰/۰MeV است. ارتفاع سد برای گسیل ^{14}C چقدر است؟ جرمهای اتمی مورد نیاز عبارت‌اند از

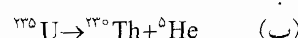
^{223}Ra	۲۲۳/۰۱۸۵۰u	^{14}C	۱۴/۰۰۳۲۴u
^{209}Pb	۲۰۸/۹۸۱۰۷u	^{4}He	۴/۰۰۲۶۰u
^{219}Rn	۲۱۹/۰۰۹۴۸u		

●●**۵۱**- هستهٔ ^{238}U یک ذرهٔ آلفای ۴/۱۹۶MeV گسیل می‌کند. با در نظر گرفتن انرژی پس زنی هستهٔ ^{234}Th باقیمانده، انرژی فروپاشی Q را برای این فرایند محاسبه کنید.

●●**۵۲**- نوکلیدهای پرتوزای بزرگ به جای سایر ترکیبهای نوکلئونی، یک ذرهٔ آلفا گسیل می‌دارند، زیرا ذرهٔ آلفا بسیار پایدار است و ساختار آن به طور محکمی مقید شده است. برای تأیید این موضوع، انرژیهای فروپاشی را برای فرایندهای واپاشی فرضی زیر محاسبه و دربارهٔ معنی یافته‌های خود بحث کنید:

(الف)  $^{235}U\to{}^{232}Th+{}^{3}He$

(ب)  $^{235}U\to{}^{231}Th+{}^{4}He$

(پ)  $^{235}U\to{}^{230}Th+{}^{5}He$

جرمهای اتمی مورد نیاز عبارت‌اند از

^{232}Th	۲۳۲/۰۳۸۱u	^{3}H	۳/۰۱۶۰u
^{231}Th	۲۳۱/۰۳۶۳u	^{4}He	۴/۰۰۲۶u
^{230}Th	۲۳۰/۰۳۳۱u	^{5}He	۵/۰۱۲۲u
^{235}U	۲۳۵/۰۴۳۹u		

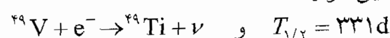
بخش ۴۲-۶ واپاشی بتا

●**۵۳**- الکترون آزاد بنابر معادلهٔ ۴۲-۲۶ واپاشی می‌کند. اگر اختلاف جرم اتم نوترون- هیدروژن برابر ۸۴۰μu باشد، انرژی جنبشی بیشینهٔ ممکن K_{max} برای الکترون تولید شده در یک واپاشی نوترونی چقدر است؟

●**۵۴**- الکترونی از نوکلیدی با جرم متوسط (مثلاً $A=150$) با انرژی جنبشی ۱/۰MeV گسیل شده است. (الف) طول موج دوبروی آن چقدر است؟ (ب) شعاع هستهٔ گسیلنده را محاسبه کنید. (پ) آیا می‌توان چنین الکترونی را به صورت یک موج ایستاده در "جعبه" ای با چنان ابعادی محبوس کرد؟ (ت) آیا می‌توانید از این عددها برای رد این اظهار نظر (شرم‌آور) که الکترونها در واقع در داخل هسته‌ها وجود دارند، استفاده کنید؟

●**۵۵**- ایزوتوپ سزیم ^{137}Cs در باران پرتوزای حاصل از انفجارهای فرازمینی بمبهای هسته‌ای موجود است. چون این ایزوتوپ با نیم- عمر آهسته‌ای (۳۰/۲y) به ^{137}Ba وامی‌پاشد، انرژی قابل ملاحظهٔ آزاد شده در این فرایند، از لحاظ زیست محیطی اهمیت دارد. جرمهای اتمی Cs و Ba به ترتیب برابر با ۱۳۶/۹۰۷۱u و ۱۳۶/۹۰۵۸u هستند؛ انرژی کل آزاد شده در این واپاشی را محاسبه کنید. **SSM**

●**۵۶**- برخی از نوکلیدهای پرتوزا با گیراندازی یکی از الکترونهای اتمی خود، مثلاً الکترون لایهٔ K، واپاشی می‌کنند. یک مثال به این قرار است



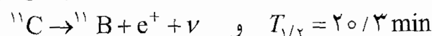
$$^{49}V+e^{-}\to{}^{49}Ti+\nu \quad \text{و} \quad T_{1/2}=331d$$

نشان دهید که انرژی فروپاشی Q برای این فرایند با رابطهٔ

$$Q=(m_V-m_{Ti})c^2-E_K$$

داده می‌شود، که در آن m_V و m_{Ti} به ترتیب جرمهای اتمی ^{49}V و ^{49}Ti، و E_K انرژی بستگی الکترون لایهٔ K وانادیوم است. (*راهنمایی*: $\mathbf{m}_V$ و $\mathbf{m}_{Ti}$ را به عنوان جرمهای هسته‌ای متناظر در نظر بگیرید و به روشی مشابه مسئلهٔ نمونهٔ ۴۲-۷ عمل کنید).

●●**۵۷**- نوکلید پرتوزای ^{11}C بنابر واکنش زیر واپاشی می‌کند



$$^{11}C\to{}^{11}B+e^{+}+\nu \quad \text{و} \quad T_{1/2}=20/3\,\text{min}$$

انرژی بیشینهٔ پوزیترونهای گسیل شده برابر با ۰/۹۶۰MeV است. (الف) نشان دهید که انرژی فروپاشی Q برای این فرایند با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$Q=(m_C-m_B-2m_e)c^2$$

که در آن m_C و m_B به ترتیب جرمهای ^{11}C و ^{11}B، و m_e جرم پوزیترون است. (ب) با در اختیار داشتن مقدارهای جرم $m_C=11/011424$u، $m_B=11/009305$u و $m_e=0/0005486$u،

مقدار Q را محاسبه و آن را با انرژی بیشینهٔ پوزیترون گسیل شده که در بالا داده شده است، مقایسه کنید. (*راهنمایی:* m_C و m_B را جرمهای هسته‌ای در نظر بگیرید و به روشی مشابه مسئلهٔ نمونهٔ ۴۲-۷ برای واپاشی بتا عمل کنید. توجه کنید که واپاشی بتا- مثبت یک استثنا برای این قاعدهٔ کلی است که اگر جرمهای اتمی در محاسبه‌های واپاشی هسته‌ای مورد استفاده قرار گیرند، جرم الکترون گسیل شده به طور خودکار در نظر گرفته می‌شود).

●●۵۸- دو مادهٔ پرتوزا که واپاشی آلفا می‌کنند، ^{238}U و ^{232}Th، و ماده‌ای که واپاشی بتا می‌کند، ^{40}K، به حد بسیار فراوانی در گرانیت موجودند و سهمی بسزا در گرمایش کرهٔ زمین از طریق انرژی واپاشی تولید شده، دارند. ایزوتوپهای واپاشی آلفا زنجیره‌ای از واپاشی را سبب می‌شوند که به هنگام تشکیل ایزوتوپهای پایدار سرب قطع می‌شود. ایزوتوپ ^{40}K یک تکْ واپاشی بتا دارد. (فرض کنید این تنها واپاشی ممکن آن ایزوتوپ است). آنچه که می‌دانیم به قرار زیر است:

مادر	مُد واپاشی	نیم‌-عمر (y)	نوکلید پایدار نهایی	Q (MeV)	f (ppm)
^{238}U	α	$۴/۴۷\times۱۰^{۹}$	^{206}Pb	۵۱/۷	۴
^{232}Th	α	$۱/۴۱\times۱۰^{۱۰}$	^{208}Pb	۴۲/۷	۱۳
^{40}K	β	$۱/۲۸\times۱۰^{۹}$	^{40}Ca	۱/۳۱	۴

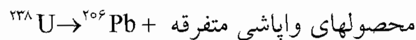
در این جدول، Q انرژی *کل* آزاد شده در واپاشی یک هستهٔ مادر به نوکلید پایدار *نهایی* و f فراوانی ایزوتوپ برحسب کیلوگرم بر کیلوگرم گرانیت، و ppm به معنی قسمت در هر میلیون است. (الف) نشان دهید که این مواد، انرژی را به صورت گرما با آهنگ $۱/۰\times۱۰^{-۹}$ W به ازای هر کیلوگرم گرانیت، تولید می‌کنند. (ب) با فرض اینکه $۲/۷\times۱۰^{۲۲}$ kg گرانیت در یک پوشهٔ کروی به ضخامت ۲۰km در سطح کرهٔ زمین وجود دارد، توان این فرایند واپاشی را در کل زمین تخمین بزنید. این توان را با توان کلی که از خورشید به زمین می‌رسد، یعنی $۱/۷\times۱۰^{۱۷}$ W، مقایسه کنید.

●●●۵۹- نوکلید پرتوزای ^{32}P آنطور که با معادلهٔ ۴۲-۲۴ توصیف شده به ^{32}S واپاشی می‌کند. در رویداد واپاشی خاصی، یک الکترون ۱/۷۱MeV، بیشترین مقدار ممکن، گسیل شده است. انرژی جنبشی پس زنی اتم ^{32}S در این رویداد چقدر است؟ (*راهنمایی:* برای الکترون لازم است که از عبارتهای نسبیتی برای انرژی جنبشی و اندازه حرکت خطی استفاده کنیم. اتم ^{32}S غیر نسبیتی است). **SSM WWW**

بخش ۴۲-۷ عمرسنجی پرتوزا

●۶۰- یک نمونهٔ زغال چوب ۵/۰۰ گرمی حاصل از یک آتشکدهٔ قدیمی دارای ^{14}C با فعالیت ۶۳/۰ فروپاشی/min است. یک درخت زنده دارای ^{14}C با فعالیت ۱۵/۳ فروپاشی/min بر ۱/۰۰g است. نیم‌-عمر ^{14}C برابر با ۵۷۳۰y است. نمونهٔ زغال چوب چقدر سن دارد؟

●۶۱- ایزوتوپ ^{238}U با نیم‌-عمر $۴/۴۷\times۱۰^{۹}$y به ^{206}Pb واپاشی می‌کند. اگر چه این واپاشی در چندین مرحلهٔ جداگانه رخ می‌دهد، نخستین مرحله دارای طولانیترین نیم‌-عمر است؛ بنابراین، اغلب می‌توان واپاشی را مستقیماً به سوی سرب در نظر گرفت. یعنی،



$^{238}U \to {}^{206}Pb +$ محصولهای واپاشی متفرقه

تخته‌سنگی حاوی ۴/۲۰mg از ^{238}U و ۲/۱۳۵mg از ^{206}Pb یافت شده است. فرض کنید که این تخته‌سنگ در لحظهٔ تشکیل شدن حاوی هیچ سربی نبوده است، به گونه‌ای که همهٔ سربی که اکنون موجود است ناشی از واپاشی اورانیوم است. در حال حاضر چه تعداد اتم (الف) ^{238}U و (ب) ^{206}Pd در تخته‌سنگ موجود است؟ (پ) چه تعداد اتم ^{238}U در لحظهٔ تشکیل تخته‌سنگ، موجود بوده است؟ عمر تخته سنگ چقدر است؟

●●۶۲- تصور می‌شود یک تخته‌سنگ خاص ۲۶۰ میلیون سال سن دارد. اگر این تخته‌سنگ حاوی ۳/۷۰mg از ^{238}U باشد، چقدر ^{206}Pb در آن وجود دارد؟ مسئله ۵۳ را ببینید.

●●۶۳- معلوم شده است تخته‌سنگی که از اعماق زمین کشف شده دارای ۰/۸۶mg از ^{238}U، ۰/۱۵mg از ^{206}Pb، و ۱/۶mg از ^{40}Ar است. این تخته‌سنگ احتمالاً حاوی چه مقدار ^{40}K است؟ فرض کنید ^{40}K با نیم‌-عمر $۱/۲۵\times۱۰^{۹}$y فقط به ^{40}Ar واپاشی می‌کند. همچنین فرض کنید که ^{238}U دارای نیم‌-عمر $۴/۴۷\times۱۰^{۹}$y است.

●●●۶۴- ایزوتوپ ^{40}K می‌تواند به ^{40}Ca یا ^{40}Ar واپاشی کند؛ فرض کنید هر دو واپاشی دارای نیم‌-عمر $۱/۲۶\times۱۰^{۹}$y است. نسبت Ca تولید شده به Ar تولید شده برابر با ۸/۵۴ = ۸/۵۴/۱ است. یک نمونه که در ابتدا فقط حاوی ^{40}K بوده است، اکنون دارای مقدارهای مساوی ^{40}K و ^{40}Ar است و این بدان معنی است که نسبت K به Ar برابر با ۱ = ۱/۱ است. عمر نمونه چقدر است؟ (*راهنمایی:* این مسئله را مانند سایر مسئله‌های عمرسنجی پرتوزا حل کنید، با این تفاوت که این واپاشی به جای یک محصول، دو محصول واپاشی دارد).

بخش ۴۲-۸ اندازه‌گیری دز تابشی

●۶۵- یک نمونه آلی به جرم ۴/۰۰hg، از طریق تابش نوترون کند (RBE=۵) ۲/۰۰mJ را جذب می‌کند. دز معادل (mSu) چقدر است؟

●۶۶- یک آشکارساز تابشی، ۸۷۰۰ شمارش را در ۱/۰۰min ثبت می‌کند. با فرض آنکه این آشکارساز همهٔ واپاشیها را ثبت کند، فعالیت چشمهٔ تابشی برحسب (الف) بکرل و (ب) کوری چقدر است؟

●۶۷- نوکلید ^{198}Au، با نیم‌-عمر ۲/۷۰ d، در درمان سرطان مورد استفاده قرار می‌گیرد. چه جرمی از این نوکلید برای ایجاد فعالیت ۲۵۰ Ci مورد نیاز است؟ **SSM**

●●●۶۸- کل بدن یک شخص ۷۵ کیلوگرمی دز تابشی $۲/۴\times۱۰^{-۴}$ Gy را دریافت می‌کند، که توسط ذره‌های آلفایی که برای آنها عامل RBE برابر ۱۲ است، داده شده است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) انرژی جذب شده برحسب ژول و دز معادل برحسب (ب) سیورت و (پ) رم.

●●●۶۹- کارگری به جرم ۸۵kg در راکتور زایشی یک نیروگاه هسته‌ای به طور اتفاقی ۲/۵mg از ^{۲۳۹}Pu را قورت می‌دهد. این ایزوتوپ دارای نیم- عمر ۲۴۱۰۰y است که با واپاشی آلفا وامی‌پاشد. انرژی ذره‌های آلفای گسیل شده ۵/۲MeV ، با عامل RBE برابر ۱۳ است. فرض کنید که پلوتونیوم به مدت ۱۲h در بدن کارگر باقی می‌ماند و ۹۵٪ از ذره‌های آلفای گسیل شده در داخل بدن متوقف می‌شوند. مطلوب است محاسبهٔ (الف) تعداد اتمهای پلوتونیوم خورده شده، (ب) تعداد اتمهایی که در حین ۱۲h واپاشی می‌کنند، (پ) انرژی جذب شده توسط بدن، (ت) دز بدنی حاصل برحسب گری، و (ث) دز معادل برحسب سیورت.

بخش ۴۲-۹ مدلهای هسته‌ای

۷۰- در فهرست نوکلیدهای زیر، تعیین کنید (الف) آنهایی که دارای لایه‌های نوکلئونی پر شده هستند (ب) آنهایی که یک نوکلئون در بیرون یک لایهٔ پر شده دارند، و (پ) آنهایی یک تهی‌جا در یک لایهٔ پر شدهٔ دیگر دارند: ^{۱۳}C ، ^{۱۸}O ، ^{۴۰}K ، ^{۴۹}Ti ، ^{۶۰}Ni ، ^{۹۱}Zr ، ^{۹۲}Mo ، ^{۱۲۱}Sb ، ^{۱۴۳}Nd ، ^{۱۴۴}Sm ، ^{۲۰۵}Tl ، و ^{۲۰۷}Pb.

●۷۱- یک هستهٔ میانی در یک واکنش هسته‌ای خاص در مدت $۱۰^{-۲۲}$s پس از تشکیل خود واپاشی می‌کند. (الف) عدم قطعیت ΔE در شناخت ما از این حالت میانی چقدر است؟ (ب) آیا می‌توان این حالت را یک هستهٔ مرکب نامید؟ (مسئلهٔ نمونهٔ ۴۲-۱۰ را ببینید)

●۷۲- انرژی جنبشی نوعی یک نوکلئون در هسته‌ای با جرم متوسط را می‌توان ۵/۰۰MeV در نظر گرفت. بر مبنای فرضهای مدل جمعی ساختار هسته‌ای، این متناظر با چه دمای مؤثر هسته‌ای است؟

●●●۷۳- سه فرایند تشکیل نشان داده شده برای هستهٔ مرکب ^{۲۰}Ne در شکل ۴۲-۱۳ را در نظر بگیرید. در اینجا برخی از جرمها داده شده‌اند:

^{۲۰}Ne	۱۹/۹۹۲۴۴u	α	۴/۰۰۲۶۰u
^{۱۹}F	۱۸/۹۹۸۴۰u	p	۱/۰۰۷۸۳u
^{۱۶}O	۱۵/۹۹۴۹۱u		

(الف) ذرهٔ آلفا، (ب) پروتون، و (پ) فوتون پرتو γ چقدر انرژی باید داشته باشند تا ۲۵/۰MeV انرژی برانگیختگی هستهٔ مرکب فراهم آید؟ **SSM**

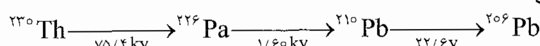
مسئله‌های اضافی

۷۴- در پایان جنگ جهانی دوم، زمامداران هلندی، هنرمند هلندی *هانس فون میگرن*[1] را به جرم خیانت دستگیر کردند، زیرا در حین جنگ، او یک تابلوی نقاشی مشهور را به *هرمن گورینگ*[2] نازی فروخته بود. این نقاشی، *عیسی و حواریون در امائوس*[3]، که توسط نقاش چیره دست هلندی *یوهانس ورمیر*[4] (۱۶۳۲-۱۶۷۵) کشیده شده بود، در سال ۱۹۳۷/۱۳۱۶ پس از تقریباً ۳۰۰ سال از زمانی که مفقود شده بود، توسط فون میگرن پیدا شد. خیلی زود پس از این کشف، متخصصات هنری اعلان کردند که این تابلو احتمالاً بهترین اثر ورمیر است که تاکنون دیده شده است. فروش چنین گنجینهٔ ملی هلند به دشمن، خیانتی غیرقابل باور بود.

ولی ، اندکی پس از دستگیری، فوَن میگرن به ناگهان ادعا کرد که او، و نه ورمیر، تابلو را کشیده است. توضیح داد که او با استفاده از یک کرباس ۳۰۰ ساله و انتخاب رنگها به شیوهٔ ورمیر، سبک ورمیر را به‌دقت تقلید کرده است؛ او سپس نام ورمیر را روی اثر امضا، و نقاشی را روی اجاق گرم کرده است تا به آن سندیت تاریخی بدهد.

آیا فوَن میگرن برای فرار از محکومیت به جرم خیانت، به این امید که صرفاً برای جرم سبکتر شیادی محاکمه شود، دروغ می‌گفت؟ از نظر متخصصان هنری، آن تابلو دقیقاً شبیه کارهای ورمیر بود، ولی در زمان محاکمهٔ فوَن میگرن به سال ۱۹۴۷/۱۳۲۶، هیچ روش علمی برای پاسخ گفتن به این پرسش وجود نداشت. تا اینکه در سال ۱۹۶۸/۱۳۴۷، *برنارد کیش*[5] از دانشگاه *کارنگی- ملون*[6] با استفاده از روشهای تحلیل پرتوزایی که به تازگی گسترش یافته بود، توانست به این پرسش، پاسخ دهد.

او مشخصاً نمونهٔ کوچکی از تکه رنگ سفید حاوی سربی را که از تابلو کنده شده بود، تحلیل کرد. این رنگ از سنگ معدن سرب استخراج شده بود، که در آن سرب با یک زنجیرهٔ واپاشی پرتوزای طولانی، که با ^{۲۳۸}U ناپایدار شروع و با ^{۲۰۶}Pb پایدار به پایان می‌رسد، تولید می‌شود. برای درک کردن جان مایهٔ تحلیل کیش، به بخش مختصر شده‌ای از آن زنجیرهٔ واپاشی توجه کنید، که در آن نوکلیدهای پرتوزای نسبتاً کوتاه- عمر میانی حذف شده‌اند:



$$^{۲۳۰}\mathrm{Th}\xrightarrow[۷۵/۴\,\mathrm{ky}]{}{}^{۲۲۶}\mathrm{Pa}\xrightarrow[۱/۶۰\,\mathrm{ky}]{}{}^{۲۱۰}\mathrm{Pb}\xrightarrow[۲۲/۶\,\mathrm{y}]{}{}^{۲۰۶}\mathrm{Pb}$$

نیم- عمرهای طولانیتر و مهمتر در این بخش از زنجیرهٔ واپاشی مشخص شده‌اند.

(الف) نشان دهید که در یک نمونهٔ سنگ معدن سرب، آهنگی که با آن تعداد هسته‌های ^{۲۱۰}Pb تغییر می‌کنند با رابطهٔ زیر داده می‌شود

1. Hans Van Meegren
2. Herman Goering
3. Christ and His Disciples at Emmaus
4. Johannes Vermeer
5. Bernard Keisch
6. Carengi- Mellon

$$\frac{dN_{210}}{dt} = \lambda_{226}N_{226} - \lambda_{210}N_{210}$$

که در آن N_{210} و N_{226} تعداد هسته‌های ^{210}Pb و ^{226}Ra در نمونه و λ_{210} و λ_{226} ثابتهای فروپاشی متناظر هستند.

چون زنجیرهٔ واپاشی برای میلیاردها سال فعال بوده و چون نیم‌-عمر ^{210}Pb بسیار کمتر از ^{226}Ra است، نوکلیدهای ^{226}Ra و ^{210}Pb در حال *تعادل* هستند؛ یعنی، تعداد این نوکلیدها (و بنابراین غلظت آنها) در نمونه تغییر نمی‌کند. (ب) نسبت R_{226}/R_{210} فعالیتهای این نوکلیدها در نمونهٔ سنگ معدن سربی چقدر است؟ (پ) نسبت N_{226}/N_{210} تعداد آنها چقدر است؟

وقتی رنگدانهٔ سرب از سنگ معدن استخراج می‌شود، بیشتر ^{226}Ra از دست می‌رود. فرض کنید فقط ۱/۰۰٪ از آن بر جای بماند. درست پس از آنکه رنگدانه تولید شد، نسبتهای (ت) R_{226}/R_{210} و (ث) N_{226}/N_{210} چقدر است؟

کیش دریافت که با گذشت زمان، نسبت R_{226}/R_{210} رنگدانه بتدریج تغییر می‌کند و از مقدار رنگدانهٔ تازه استخراج شده به مقدار موجود در سنگ معدن، به هنگام تعادل میان ^{210}Pb و مابقی ^{226}Ra بازمی‌گردد. اگر تابلو توسط ورمیر نقاشی شده بود و نمونهٔ تکه رنگ کنده شده از آن به هنگام تحلیل آن در سال ۱۹۶۸/۱۳۴۷، ۳۰۰ سال قدمت داشت، این نسبت باید به پاسخ قسمت (ب) نزدیک می‌بود. اگر تابلو توسط فون میگرن در دههٔ ۳۰ میلادی کشیده شده بود و نمونه فقط ۳۰ سال عمر داشت، این نسبت باید به پاسخ قسمت (ت) نزدیک می‌بود. کیش این نسبت را برابر با ۰/۰۹ دریافت. (ج) آیا تابلو اثر ورمیر است؟

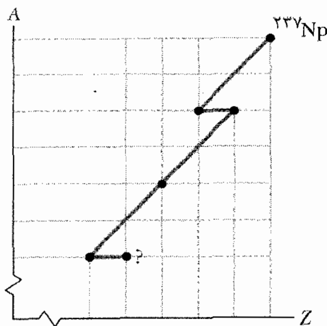
۷۵- یکی از خطرهای غبار پرتوزای حاصل از یک بمب هسته‌ای ^{90}Sr آن است، که با نیم‌- عمر ۲۹ سال واپاشی می‌کند. چون خواص شیمیایی آن بسیار شبیه به کلسیم است، اگر وارد بدن گاو شود، در شیر گاو جمع می‌شود. قدری از آن ^{90}Sr سرانجام به استخوانهای فردی وارد می‌شود که آن شیر را نوشیده است. الکترونهای پرانرژی گسیل شده در واپاشی بتای ^{90}Sr مغز استخوان را تخریب می‌کنند و بنابراین به تولید یاخته‌های قرمز خون صدمه می‌رسانند. یک مگاتن بمب، تقریباً ۴۰۰g از ^{90}Sr تولید می‌کند. اگر غبار پرتوزا به طور یکنواخت در مساحت ۲۰۰۰ km^2 پخش شود، چه مساحتی از زمین مقدار پرتوزایی برابر با حد "مجاز" برای یک شخص را، که ۷۴۰۰۰ شمارش/s است، دریافت می‌کند؟ **SSM**

۷۶- به دلیل انفجار سال ۱۹۸۶/۱۳۶۵ و آتش‌سوزی در نیروگاه هسته‌ای *چرنوبیل*[1] در شمال اکراین، بخشی از این کشور با هستهٔ ^{137}Ce که واپاشی بتا- منفی با نیم- عمر ۳۰/۲ سال پیدا می‌کند، آلوده شده بود. در سال ۱۹۹۶/۱۳۷۵، فعالیت کلی این آلودگی روی مساحتی برابر با $2/6\times10^5$ km^2 حدوداً 1×10^{16}Bq تخمین زده شد. فرض کنید ^{137}Ce به طور یکنواخت روی این سطح توزیع شده باشد و الکترونهای واپاشی بتا مستقیماً رو به بالا یا رو به پایین حرکت می‌کنند. اگر شما به مدت 1h (الف) در سال ۱۹۹۶/۱۳۷۵ و (ب) در حال حاضر، روی سطح زمین دراز کشیده باشید، چه تعداد الکترون حاصل از واپاشی بتا به شما برخورد می‌کند؟ (برای این منظور نیاز دارید که مساحت سطح مقطع خود را که با آن الکترونها برخورد می‌کند، تخمین بزنید.

۷۷- نوکلید پرتوزای ^{32}P $(T_{1/2} = 14/28d)$ اغلب به عنوان ردیاب برای ردگیری مسیر واکنشهای شیمیایی حاوی فسفر به کار گرفته می‌شود. (الف) اگر آهنگ شمارش در یک آزمایش خاص در ابتدا ۳۰۵۰ شمارش/s باشد، چقدر طول می‌کشد تا مقدار آن به ۱۷۰ شمارش/s کاهش یابد؟ (ب) محلولی حاوی ^{32}P به مجموعهٔ ریشهٔ یک گیاه گوجه‌فرنگی آزمایشگاهی خورانده می‌شود، و فعالیت ^{32}P، ۳/۴۸ روز بعد در یک برگ آن اندازه‌گیری می‌شود. عدد اندازه‌گیری شده باید در چه عاملی ضرب شود تا برای واپاشی رخ داده در آغاز آزمایش، درست باشد؟

۷۸-در سنگ معینی، نسبت اتمهای سرب به اتمهای اورانیوم ۰/۳۰۰ است. فرض کنید که نیم عمر اورانیوم $4/47\times10^9$ g و سنگ در موقع تشکیل هیچ اتم سربی نداشته است. عمر سنگ چقدر است؟

۷۹- شکل ۴۲-۲۰ بخشی از طرحوارهٔ واپاشی ^{237}Np را روی نموداری از عدد جرمی A برحسب عدد پروتونی Z نشان می‌دهد؛ پنج پاره خطی که نشان‌دهندهٔ واپاشی آلفا یا واپاشی بتا- منفی هستند نقطه‌هایی را که نشان‌دهندهٔ ایزوتوپها هستند، به هم وصل می‌کنند. ایزوتوپی که در انتهای پنج واپاشی قرار دارد (مشخص شده با علامت پرسش در شکل ۴۲-۲۰) کدام است؟



شکل ۴۲-۲۰ مسئلهٔ ۷۹

۸۰- عنصر پرتو زای AA می‌تواند یا به عنصر BB یا عنصر CC واپاشی کند. واپاشی به شانس بستگی دارد، ولی نسبت تعداد اتمهای BB حاصل به تعداد اتمهای CC همواره ۲/۱ است. واپاشی نیم عمر ۸/۰۰ روز را دارد. با نمونهٔ خالص AA شروع می‌کنیم. چقدر باید صبر کنیم تا تعداد اتمهای CC مساوی ۱/۵۰ برابر اتمهای AA باشد.

۸۱••- دز تابشی پرتو x نوعی برای قفسهٔ سینه برابر با ۲۵۰ μSv است که توسط پرتوهای x با عامل RBE برابر با ۰/۸۵ داده می‌شود. با فرض آنکه جرم بافت در معرض تابش

1. Chernobyl

برابر با نصف جرم ۸۸ کیلوگرمی بیمار باشد، انرژی جذب شده را برحسب ژول محاسبه کنید.

۸۲- یک چشمهٔ رادیوم حاوی $1/00\,mg$ از ^{226}Ra است که با نیم- عمر $1600\,y$ ، برای تولید گاز بی‌اثر ^{222}Rn ، واپاشی می‌کند. این ایزوتوپ رادن به نوبهٔ خود توسط گسیل آلفا با نیم- عمر $3/82\,d$ وامی‌پاشد. اگر این فرایند برای زمانی بسیار بزرگتر از نیم- عمر ^{222}Rn ادامه یابد، آهنگ واپاشی ^{222}Rn به یک مقدار حدی برابر با آهنگی که با آن ^{222}Rn تولید شده است می‌رسد، که این آهنگ به دلیل نیم- عمر نسبتاً طولانی ^{226}Ra ، تقریباً ثابت است. برای چشمه‌ای در این شرایط حدی (الف) فعالیت ^{226}Ra، (ب) فعالیت ^{222}Rn و (پ) جرم کل ^{222}Rn چقدر است؟

۸۳- چون یک نوکلئون در هسته محدود شده است، می‌توانیم عدم قطعیت در مکان آن را تقریباً شعاع هسته‌ای r در نظر بگیریم. برای تعیین عدم قطعیت ΔP در اندازه حرکت خطی نوکلئون، از اصل عدم قطعیت استفاده کنید. با استفاده از تقریب $P \approx \Delta P$ و این واقعیت که هسته غیر نسبیتی است، انرژی جنبشی نوکلئون هسته‌ای با $A = 100$ را محاسبه کنید.

۸۴- فرض کنید هستهٔ طلا دارای شعاع $6/23\,fm$ و شعاع یک ذرهٔ آلفا $1/80\,fm$ است. انرژی ذرهٔ آلفای فرودی چقدر باید باشد تا با هستهٔ طلا مطابق روش حل مسئلهٔ نمونهٔ ۴۲-۱ ، "تماس" پیدا کند.

۸۵- برای کاهش فعالیت ^{14}C به ۰/۰۲۰ فعالیت اولیه‌اش به چند سال زمان نیاز دارد؟ نیم- عمر ^{14}C برابر با $5730\,y$ است.

۸۶- پس از تابش‌دهی مختصر نقره با نوترون، دو ایزوتوپ به وجود می‌آیند: $^{108}Ag(T_{1/2} = 2/42\,min)$ با آهنگ واپاشی اولیهٔ $3/1\times10^{5}/s$ ، و $^{110}Ag(T_{1/2} = 24/6\,s)$ با آهنگ واپاشی $4/1\times10^{6}/s$. نموداری نیم‌لگاریتمی مشابه شکل ۴۲-۸ ترتیب دهید که آهنگ واپاشی مرکب کل دو ایزوتوپ را برحسب تابعی از زمان، از $t=0$ تا $t=10\,min$ نشان دهد. از شکل ۴۲-۸ برای نحوهٔ به دست آوردن نیم- عمر واپاشیهای ساده (یک ایزوتوپ) استفاده کرده‌ایم. با فرض اینکه در اینجا فقط نمودار آهنگ واپاشی کل برای دستگاه دو ایزوتوپی داده شده باشد، روشی را برای تحلیل آن به منظور یافتن نیم- عمرهای هر دو ایزوتوپ پیشنهاد کنید.

۸۷- نوکلید پایدار معینی، پس از جذب یک نوترون، الکترونی را گسیل می‌دارد، و این نوکلید جدید به طور خودبه‌خودی به دو ذرهٔ آلفا تقسیم می‌شود. نوکلید را شناسایی کنید.

۸۸- نوکلیدهای پرتوزای پر جرم، که ممکن است گسیلنده‌های آلفا یا بتا باشند، بسته به اینکه آیا عدد جرمی A آنها به شکل $4n$، $4n+1$ ، $4n+2$ ، یا $4n+3$ باشد، که n یک عدد درست مثبت است، به یکی از چهار زنجیرهٔ واپاشی تعلق دارند. (الف) درستی این اظهار نظر را تحقیق کنید و نشان دهید که اگر یک هسته متعلق به یکی از این خانواده‌ها باشد، همهٔ محصولهای واپاشی آن به همان خانواده تعلق دارد. نوکلیدهایی را که در پی می‌آید بسته به خانوادهٔ آنها دسته‌بندی کنید: (ب) ^{235}U، (پ) ^{236}U، (ت) ^{238}U، (ث) ^{239}Pu، (ج) ^{240}Pu، (چ) ^{245}Cm ، (ح) ^{246}Cm ، (خ) ^{249}Cf ، و (د) ^{253}Fm.

۸۹- هستهٔ ^{238}U را در نظر بگیرید که از یک ذرهٔ آلفا (^{4}He) و یک هستهٔ باقیمانده (^{234}Th) درست شده است. انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی $U(r)$ را رسم کنید، که r فاصلهٔ میان این ذره‌هاست. گسترهٔ تقریبی $10\,fm < r < 100\,fm$ را در نظر بگیرید و نمودار خود را با شکل ۴۲-۹ مقایسه کنید.

۹۰- با استفاده از داده‌های ارائه شده در چند پاراگراف نخستین بخش ۴۲-۴، مطلوب است (الف) ثابت فروپاشی λ و (ب) نیم- عمر ^{238}U.

۹۱- نقشه نوکلیدی مشابه شکل ۴۲-۵ را برای ۲۵ نوکلید $^{118-122}Te$ ، $^{117-121}Sb$ ، $^{116-120}Sn$ ، $^{115-119}In$ ، و $^{114-118}Cd$ رسم کنید. (الف) همهٔ خطهای ایزوبار (A ثابت) و (ب) همهٔ خطهای فزونی نوترون ثابت را، که به صورت $N-Z$ تعریف شده است، رسم و مشخص کنید.

۹۲- نوکلیدهای نشان داده شده در جدول ۴۲-۱ را در نقشهٔ نوکلیدی شکل ۴۲-۴ قرار دهید. تحقیق کنید که آنها در منطقهٔ پایداری قرار می‌گیرند.

۹۳- اگر یکای جرم اتمی به گونه‌ای تعریف شده بود که جرم ^{1}H دقیقاً برابر با $1/000000\,u$ بود، جرم (الف) ^{12}C (جرم واقعی $12/000000\,u$) و (ب) ^{238}U (جرم واقعی $238/050785\,u$) چقدر می‌بود؟

۹۴- با استفاده از یک نقشهٔ نوکلیدی، نمادهای مربوط به (الف) همهٔ ایزوتوپهای پایدار با $Z = 60$ ، (ب) همهٔ نوکلیدهای پرتوزا با $N = 60$ ، و (پ) همهٔ نوکلیدهای با $A = 60$ را بنویسید.

۹۵- شعاع یک هستهٔ کروی که با روشهای پراکندگی الکترون اندازه‌گیری شده است برابر با $3/6\,fm$. عدد جرمی احتمالی این هسته چقدر است؟

۹۶- زمان هسته‌ای مشخصه‌ای، کمیتی سودمند ولی با تعریفی نادقیق است که برابر با زمان لازم برای آنکه نوکلئونی با چند میلیون الکترون- ولت انرژی جنبشی، مسافتی معادل با قطر یک نوکلید با جرم متوسط را طی کند، در نظر گرفته می‌شود. مرتبهٔ بزرگی این کمیت چقدر است؟ نوترونهای $5\,MeV$ را در نظر بگیرید که قطر هسته‌ای ^{197}Au را طی می‌کنند؛ از معادلهٔ ۴۲-۳ استفاده کنید.

۹۷- انرژی فروپاشی Q برای واپاشی ^{49}V توسط گیراندازی الکترون لایهٔ K را به دست آورید (مسئلهٔ ۵۶ را ببینید). داده‌های مورد نیاز عبارت‌اند از $m_V = 48/948512\,u$ ، $m_{Ti} = 48/947871\,u$ و $E_K = 5/47\,keV$.

۴۳ انرژی هسته‌ای



این تصویری است که جهان پس از جنگ جهانی دوم را تا کنون مبهوت کرده است. هنگامی که *رابرت اُپنهایمر*[1]، سرپرست گروه علمی برای توسعهٔ بمب اتمی، نخستین انفجار اتمی را مشاهده کرد، به نقل از یک متن مقدس هندو چنین گفت: "اینک من در خور نام مرگ هستم، ویرانگر دنیاها."

فیزیکِ فراسوی این تصویر، که جهانیان را چنین بیمناک کرده است، چیست؟

پاسخ در همین فصل

1. Robert Oppenheimer

۴۳-۱ فیزیک چیست؟

اکنون که برخی از خواص هسته‌ها را بررسی کرده‌ایم، می‌خواهیم به یکی از دلبستگی‌های اصلی فیزیک و اقسام معینی از مهندسی بپردازیم: آیا می‌توانیم انرژی مفیدی از منابع هسته‌ای به دست آوریم، همانطور که آدمیان برای هزاران سال این کار را با سوزاندن موادی چون چوب یا زغال سنگ، از منابع اتمی به انجام رسانیده‌اند؟

همانطور که دیده‌ایم، پاسخ این پرسش، مثبت است، ولی تفاوتهایی اساسی میان دو منبع انرژی وجود دارد. وقتی انرژی را از چوب یا زغال سنگ با سوزاندن آنها به دست می‌آوریم، اتمهای کربن و اکسیژن را با ترتیب مجدد الکترونهای خارجی آنها برای رسیدن به ترکیبهای پایدارتری، به هم پیوند می‌دهیم. وقتی انرژی را در یک راکتور هسته‌ای از اورانیوم به دست می‌آوریم، دوباره سوختی را می‌سوزانیم، ولی اکنون با ترتیب مجدد نوکلئونهای هستهٔ اورانیوم برای رسیدن به ترکیبهای پایدارتری، در آن تغییراتی می‌دهیم.

الکترونها توسط نیروی الکترومغناطیسی کولنی در اتم نگه داشته می‌شوند، و فقط چند الکترون- ولت لازم است تا یکی از آنها از اتم جدا شود. از سوی دیگر، نوکلئونها توسط نیرویی قوی در هسته نگه داشته می‌شوند، و برای جدا کردن یکی از آنها به چند *میلیون* الکترون- ولت نیاز است. ضریب چند میلیون به این واقعیت بازمی‌گردد که می‌توانیم چندین میلیون بار انرژی بیشتری از یک کیلوگرم اورانیوم نسبت به یک کیلوگرم زغال سنگ، به دست آوریم.

هم در سوزاندن اتمی و هم در هسته‌ای، آزادشدن انرژی، بنا بر معادلهٔ $Q=-\Delta mc^2$ ، با یک کاهش جرم همراه است. اختلاف اصلی میان سوختن زغال سنگ و سوختن اورانیوم در این است که در مورد اولی، بخش بسیار بزرگتری از جرم موجود (دوباره، با ضریب چند میلیون) مصرف می‌شود.

فرایندهای مختلفی که می‌توانند برای سوزاندن اتمی یا هسته‌ای مورد استفاده قرار گیرند، سطحهای متفاوتی از توان، یا آهنگهایی را که با آن انرژی آزاد می‌شود، به دست می‌دهند. در حالت هسته‌ای، می‌توانیم یک کیلوگرم اورانیوم را در یک بمب به گونهٔ انفجاری یا در یک راکتور هسته‌ای به گونه‌ای تدریجی بسوزانیم. در حالت اتمی، می‌توانیم انفجار یک قطعه دینامیت یا هضم شدن یک دونات ژله‌ای را در نظر بگیریم.

جدول ۴۳-۱ نشان می‌دهد که چه مقدار انرژی می‌تواند از 1kg ماده با انجام فرایندهایی مختلف به دست آید. به جای اینکه انرژی به طور مستقیم داده شود، جدول نشان می‌دهد که انرژی به دست آمده تا چه مدت می‌تواند یک لامپ 100W را روشن نگهدارد. فقط فرایندهای سه سطر نخست جدول واقعاً انجام پذیرفته‌اند؛ سه سطر دیگر حدهای نظری را نشان می‌دهند که ممکن است قابل انجام نباشند. سطر آخر، نابودی متقابل کل ماده و پادماده، یک هدف غایی در تولید انرژی است. در این فرایند، *همهٔ* انرژی جرمی به شکلهای دیگر انرژی تبدیل می‌شود.

مقایسه‌های جدول ۴۳-۱ بر مبنای «در یکای جرم» محاسبه شده‌اند. از یک کیلوگرم اورانیوم، چند میلیون بار انرژی بیشتری نسبت به یک کیلوگرم زغال سنگ یا یک کیلوگرم آب در حال سقوط به دست می‌آید. از سویی دیگر، زغال سنگ فراوانی در پوستهٔ کرهٔ زمین وجود دارد، و آب به آسانی در پشت یک سد ذخیره می‌شود.

جدول ۳۶-۱

انرژی آزاد شده توسط 1kg ماده

شکل ماده	فرایند	زمان*
آب	سقوط از آبشار ۵۰	۵s
زغال سنگ	سوختن	۸h
UO_2 غنی شده	شکافت در راکتور	۶۹۰ y
^{235}U	شکافت کامل	۳×۱۰^۴ y
گاز دوتریم داغ	همجوشی کامل	۳×۱۰^۴ y
ماده و پادماده	نابودی کامل	۳×۱۰^۷ y

* این ستون، بازهٔ زمانی را نشان می‌دهد که در آن انرژی تولید شده می‌تواند یک لامپ 100W را روشن نگهدارد.

۴۳-۲ شکافت هسته‌ای: فرایند اصلی

در سال ۱۹۳۲/۱۳۱۱، فیزیکدان انگلیسی *جیمزچادویک*[1] نوترون را کشف کرد. چند سال بعد، *انریکو فرمی*[2] در رُم دریافت هنگامی که چند عنصر مختلف توسط نوترونها بمباران شوند، عنصرهای پرتوزای جدیدی تولید می‌شوند. فرمی پیش‌بینی کرده بود که نوترون، با توجه به اینکه بدون بار است، می‌تواند پرتابهٔ هسته‌ای سودمندی باشد؛ نوترون بر خلاف پروتون یا ذرهٔ آلفا، وقتی به نزدیکی یک سطح هسته‌ای برسد، تحت تأثیر هیچ نیروی کولنی دافعه‌ای قرار نمی‌گیرد. حتی *نوترونهای گرمایی*، که نوترونهای متحرک کندی در تعادل حرارتی با مادهٔ پیرامونی در دمای اتاق، و با انرژی جنبشی فقط در حدود 0/04eV هستند، پرتابه‌های سودمندی در مطالعات هسته‌ای به شمار می‌آیند.

در اواخر دههٔ ۱۹۳۰ فیزیکدانی به نام *لیز مایتنر*[3] و شیمیدانهایی به نامهای *اُتو هان*[4] و *فریتز استراسمن*[5] که کار فرمی و همکارانش را در برلین پی می‌گرفتند، محلولهای

1. James Chadwick
2. Enrico Fermi
3. Lise Meitner
4. Otto Hahn
5. Fritz Strassmann

نمکهای اورانیوم را با این نوترونهای گرمایی بمباران کردند. آنها دریافتند که پس از بمباران، تعدادی نوکلید پرتوزای جدید به وجود می‌آیند. در سال ۱۹۳۹/۱۳۱۸، یکی از نوکلیدهای پرتوزایی که به این روش ایجاد شده بود، پس از آزمایشهای مکرری، به طور قطعی باریم شناخته شد. ولی، هان و استراسمن در شگفت بودند که چگونه ممکن است چنین عنصری با جرم متوسط $(Z=56)$ توسط بمباران اورانیوم $(Z=92)$ با نوترونها ایجاد شده باشد؟

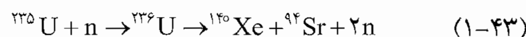
این معما در عرض چند هفته توسط مایتنر و خواهرزاده‌اش *اُتو فریش*[1] حل شد. آنها سازوکاری را پیشنهاد کردند که از طریق آن یک هستهٔ اورانیوم که نوترونی گرمایی را جذب کرده می‌توانست با آزاد کردن انرژی به دو بخش تقریباً مساوی شکافته شود، که یکی از آنها احتمالاً می‌تواند باریم باشد. فریش این فرایند را **شکافت** نامید.

نقش اصلی مایتنر در کشف شکافت به طور کامل شناخته نشده بود، تا اینکه بررسیهای تاریخی اخیر آن را روشن ساخت. او در جایزهٔ نوبل شیمی که در سال ۱۹۴۴/۱۳۲۳ به اتو هان اهدا شد، سهمی نداشت. ولی، به احترام هان و مایتنر عنصرهایی به نام آنها نامگذاری شد: *هانیوم*[2] (نماد $Z=105$, Ha) و *مایتنریوم*[3] (نماد $Z=109$, Mt).

نگاهی دقیقتر به شکافت

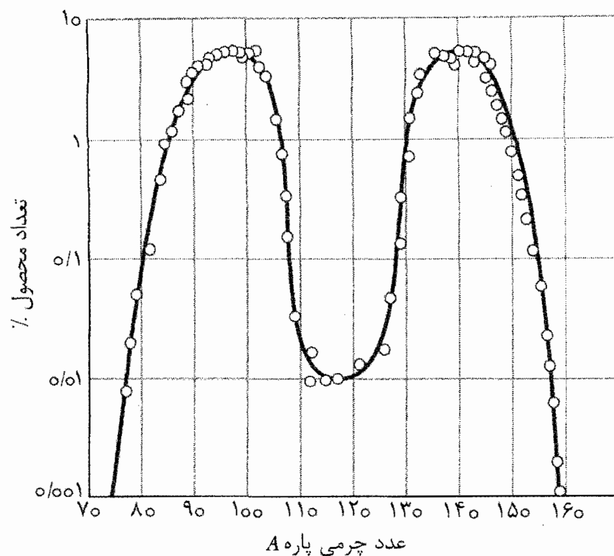
شکل ۴۳-۱ توزیع حاصل از عدد جرمی پاره‌های تولید شده را هنگام بمباران کردن ^{235}U با نوترونهای گرمایی نشان می‌دهد. محتملترین عددهای جرمی، که در حدود ۷٪ رویدادها رخ می‌دهند، در حول و حوش $A \approx 95$ و $A \approx 140$ متمرکز شده‌اند. عجیب اینکه، مشخصهٔ "دو قله‌ای" شکل ۴۳-۱ هنوز فهمیده نشده است.

در رویداد شکافت نوعی ^{235}U، هستهٔ ^{235}U با جذب نوترون گرمایی، هستهٔ مرکب ^{236}U را در حالتی بسیار برانگیخته ایجاد می‌کند. *این* هسته است که در واقع شکافته و به دو پاره تقسیم می‌شود. این پاره‌ها که- بین آنها- به‌سرعت دو نوترون گسیل می‌شود، (در یک حالت نوعی) $^{140}Xe\,(Z=54)$ و $^{94}Sr\,(Z=38)$ به عنوان پاره‌های شکافت برجای می‌مانند. بنابراین، معادلهٔ مرحله به مرحلهٔ شکافت برای این رویداد چنین است



$$^{235}U + n \rightarrow {}^{236}U \rightarrow {}^{140}Xe + {}^{94}Sr + 2n \qquad (۴۳-۱)$$

توجه کنید که در حین تشکیل و شکافت هستهٔ مرکب، تعداد پروتونها و نوترونهای درگیر در این فرایند (و در نتیجه جرم کل و بار خالص آنها) پایسته می‌ماند.



شکل ۴۳-۱ توزیع حاصل از عدد جرمی پاره‌ها که از بررسی چندین رویداد شکافت به دست آمده است. توجه کنید که مقیاس محور قائم لگاریتمی است.

در معادلهٔ ۴۳-۱، پاره‌های ^{140}Xe و ^{94}Sr که هر دو به میزان زیادی ناپایدارند، بر اثر واپاشی بتا (با تبدیل نوترون به پروتون و گسیل یک الکترون و یک نوترینو) سرانجام به محصول نهایی پایداری می‌رسند. برای گزنون زنجیرهٔ واپاشی چنین است

$$^{140}Xe \rightarrow {}^{140}Cs \rightarrow {}^{140}Ba \rightarrow {}^{140}La \rightarrow {}^{140}Ce \qquad (۴۳-۲)$$

	^{140}Xe	^{140}Cs	^{140}Ba	^{140}La	^{140}Ce
$T_{1/2}$	۱۴s	۶۴s	۱۳d	۴۰h	پایدار
Z	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸

و برای استرونسیوم

$$^{94}Sr \rightarrow {}^{94}Y \rightarrow {}^{94}Zr \qquad (۴۳-۳)$$

	^{94}Sr	^{94}Y	^{94}Zr
$T_{1/2}$	۷۵ s	۱۹min	پایدار
Z	۳۸	۳۹	۴۰

بنا به آنچه که در بخش ۴۲-۶ آموختیم، عددهای جرمی (۱۴۰و ۹۴) پاره‌ها در حین این فرایندهای واپاشی بتا بدون تغییر می‌مانند و عددهای اتمی (در ابتدا ۵۴ و ۳۸) در هر مرحله به اندازهٔ یک واحد افزایش می‌یابند.

بررسی نوار پایداری روی نقشهٔ نوکلیدی شکل ۴۲-۴ نشان می‌دهد که چرا پاره‌های شکافت ناپایدارند. نوکلید ^{236}U، که هستهٔ شکافته شده در واکنش معادلهٔ ۴۳-۱ است، ۹۲ پروتون و ۹۲-۲۳۶، یا ۱۴۳، نوترون دارد که نسبت پروتون/ نوترون تقریباً برابر ۱/۶ است. پاره‌های اولیه که بی‌درنگ پس از واکنش شکافت تشکیل می‌شوند تقریباً همین نسبت پروتون/ نوترون را دارند. ولی، نوکلیدهای پایدار در ناحیهٔ جرمهای میانی، نسبت پروتون/ نوترون کوچکتری، در گسترهٔ ۱/۳ تا ۱/۴، دارند. بنابراین، پاره‌های اولیه که *پُرنوترون* هستند (آنها نوترونهای

1. Otto Frisch
2. hahnium
3. meitnerium

بسیار زیادی دارند) و چند نوترون را بیرون می‌اندازند، که در مورد واکنش معادلهٔ ۴۳-۱ دو نوترون است. پاره‌هایی که باقی می‌مانند هنوز برای پایدارشدن، نوترونهای زیادی دارند. واپاشی بتا، سازوکاری را برای خلاص شدن از دست این نوترونهای اضافی پیشنهاد می‌کند- یعنی، با تغییر آنها به پروتون در داخل هسته.

انرژی آزاد شده توسط شکافت یک نوکلید پر جرم را می‌توان با بررسی انرژی بستگی کل بر نوکلئون ΔE_{ben} پیش و پس از شکافت، برآورد کرد. نکته این است که چون انرژی جرمی کل کاهش می‌یابد، شکافت می‌تواند رخ دهد؛ یعنی، برای آنکه محصولهای شکافت به طور محکمتری مقید باشند، ΔE_{ben} *افزایش* می‌یابد. بنابراین، انرژی Q آزاد شده توسط شکافت عبارت است از:

$$Q = \begin{pmatrix}\text{انرژی بستگی}\\ \text{نهایی کل}\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\text{انرژی بستگی}\\ \text{اولیه}\end{pmatrix} \qquad (۴-۴۳)$$

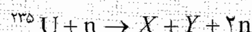
برای برآورد خود فرض می‌کنیم که شکافت، یک هستهٔ پر جرم اولیه را به دو هسته با جرم متوسط و با همان تعداد نوکلئون تبدیل می‌کند. آنگاه، خواهیم داشت

$$Q = \begin{pmatrix}\Delta E_{ben}\\ \text{نهایی}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{تعداد نهایی}\\ \text{نوکلئونها}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\Delta E_{ben}\\ \text{اولیه}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{تعداد اولیهٔ}\\ \text{نوکلئونها}\end{pmatrix} \qquad (۵-۴۳)$$

از شکل ۴۲-۶ درمی‌یابیم که برای یک نوکلید پرجرم $(A \approx ۲۴۰)$، انرژی بستگی به نوکلئون تقریباً برابر با ۷/۶MeV/نوکلئون است. برای نوکلیدهای با جرم متوسط $(A \approx ۱۲۰)$، این مقدار تقریباً برابر با ۸/۵MeV/نوکلئون است. بنابراین، انرژی آزاد شده توسط شکافت یک نوکلید پر جرم به دو نوکلید با جرم متوسط چنین می‌شود

$$Q = \left(۸/۵\,\frac{\text{MeV}}{\text{نوکلئون}}\right)(\text{۲هسته})\left(۱۲۰\,\frac{\text{نوکلئون}}{\text{هسته}}\right) - \left(۷/۶\,\frac{\text{MeV}}{\text{نوکلئون}}\right)(\text{۲۴۰ نوکلئون}) \approx ۲۰۰\,\text{MeV} \qquad (۶-۴۳)$$

✔ نکتهٔ وارسی ۱ یک رویداد شکافت نوعی چنین است



$${}^{۲۳۵}\text{U} + \text{n} \rightarrow X + Y + ۲\text{n}$$

کدامیک از جفتهایی که در پی می‌آید نشان دهندهٔ X و Y هستند: (الف) ${}^{۹۳}\text{Sr}$، ${}^{۱۴۱}\text{Xe}$؛ (ب) ${}^{۹۵}\text{Rb}$، ${}^{۱۹۳}\text{Cs}$؛ (پ) ${}^{۷۹}\text{Ge}$، ${}^{۱۵۶}\text{Nd}$؛ (ت) ${}^{۱۱۳}\text{Ru}$، ${}^{۱۲۱}\text{In}$.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۳-۱

برای رویداد شکافت معادلهٔ ۴۳-۱، و با توجه به واپاشی پاره‌های شکافت به ترتیبی که در معادله‌های ۴۳-۲ و ۴۳-۳ نشان داده شده است، انرژی فروپاشی Q را به دست آورید. برخی از جرمهای اتمی و ذره‌ای مورد نیاز عبارت‌اند از:

${}^{۲۳۵}\text{U}$	۲۳۵/۰۴۳۹u	${}^{۱۴۰}\text{Ce}$	۱۳۹/۹۰۵۴u
n	۱/۰۰۸۶۶u	${}^{۹۴}\text{Zr}$	۹۳/۹۰۶۳u

نکته‌های کلیدی (۱) انرژی فروپاشی Q، انرژی منتقل شده از انرژی جرمی به انرژی جنبشی محصولهای واپاشی است. (۲) $Q = -\Delta m c^2$، که در آن Δm تغییر جرم است.

محاسبه‌ها: چون می‌خواهیم واپاشی پاره‌های شکافت را به حساب آوریم، معادله‌های ۴۳-۱، ۴۳-۲ و ۴۳-۳ را ترکیب می‌کنیم و تبدیل کلی را به صورت زیر می‌نویسیم

$${}^{۲۳۵}\text{U} \rightarrow {}^{۱۴۰}\text{Ce} + {}^{۹۴}\text{Zr} + \text{n} \qquad (۷-۴۳)$$

در اینجا فقط یک نوترون تنها ظاهر می‌شود، زیرا نوترون اولیه در سمت چپ معادلهٔ ۴۳-۱، یکی از دو نوترون در سمت راست آن معادله را حذف می‌کند. اختلاف جرم برای واکنش معادلهٔ ۴۳-۷ برابر است با

$$\Delta m = (۱۳۹/۹۰۵۴\ \text{u} + ۹۳/۹۰۶۳\ \text{u} + ۱/۰۰۸۶۶\ \text{u}) - (۲۳۵/۰۴۳۹\ \text{u})$$
$$= -۰/۲۲۳۵۴\,\text{u}$$

و انرژی فروپاشی مربوط به آن چنین است

$$Q = -\Delta m\, c^2 = (-۰/۲۲۳۵۴\ \text{u})(۹۳۱/۴۹۴۰۱۳\ \text{MeV/u})$$
$$= ۲۰۸\,\text{MeV} \qquad \text{(پاسخ)}$$

که با برآورد ما از معادلهٔ ۴۳-۶ به خوبی سازگار است.

اگر رویداد شکافت در جامدی با حجم زیاد روی دهد، بیشتر این انرژی فروپاشی، که در ابتدا به انرژی جنبشی محصولهای واپاشی تبدیل می‌شود، سرانجام به صورت افزایش در انرژی درونی آن جسم ظاهر می‌شود، که خود را با افزایش در دما آشکار می‌سازد. ولی، تقریباً پنج یا شش درصد انرژی فروپاشی به نوترینوهایی وابسته‌اند که در حین واپاشی بتای پاره‌های شکافت اولیه گسیل می‌شوند. این انرژی به بیرون دستگاه منتقل می‌شود و از دست می‌رود.

۴۳-۳ مدلی برای شکافت هسته‌ای

به‌زودی پس از کشف شکافت، *نیلز بور* و *جان ویلر*[1] برای توضیح ویژگیهای اصلی هسته‌ای [شکافت] مدل جمعی هسته (بخش ۴۲-۹) را به کار بردند که بر مبنای تشابه میان هسته و یک قطرهٔ مایع باردار است. شکل ۴۳-۲، با استفاده از این دیدگاه، چگونگی روند فرایند شکافت را نشان می‌دهد. هرگاه یک هستهٔ پرجرم- مثلاً ${}^{۲۳۵}\text{U}$- یک نوترون کند (گرمایی) را جذب کند، مانند شکل ۴۳-۲ الف، آن نوترون در چاه پتانسیل وابسته به نیروهای قوی که در فضای داخل هسته‌ای عمل می‌کنند، فرو می‌افتد. سپس انرژی پتانسیل نوترون، به ترتیبی که شکل ۴۳-۲ ب نشان می‌دهد، به انرژی برانگیختگی داخلی

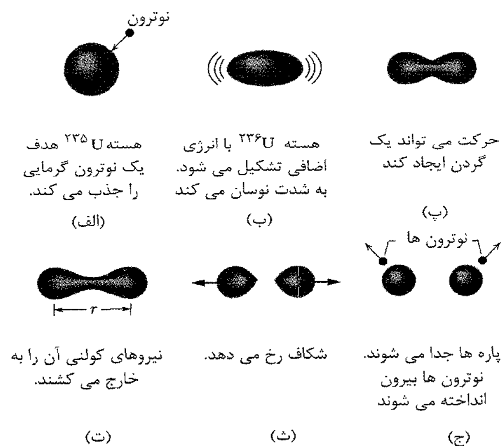
1. John Wheeler

هسته تبدیل می‌شود. مقدار انرژی برانگیختگی که نوترون کند به داخل هسته حمل می‌کند برابر با انرژی بستگی E_n نوترون در آن هسته است، که تغییر انرژی جرمی دستگاه نوترون-هسته بر اثر گیراندازی نوترونی است.

شکلهای ۴۳-۲ پ و ت نشان می‌دهند این هسته، که مانند یک قطرهٔ مایع باردار شدیداً در حال نوسان رفتار می‌کند، دیر یا زود "گردن" کوتاهی تشکیل می‌دهد و شروع به جدا شدن به صورت "دو گوی" باردار می‌کند. اگر نیروی دافعهٔ الکتریکی میان این دو گوی آنها را به قدر کافی از هم دور کند تا گردن پاره شود، دو پاره که هر یک هنوز مقداری انرژی برانگیختگی باقیمانده را در خود دارند، از هم جدا می‌شوند. (شکلهای ۴۳-۲ ث و ج). شکافت رخ داده است.

این مدل، تصویر کیفی خوبی را از فرایند شکافت به دست می‌داد. ولی آنچه که برای بررسی باقی مانده بود این بود که آیا این مدل می‌تواند پاسخی برای این پرسش دشوار ارائه کند: چرا برخی از نوکلیدهای پرجرم (مثل ^{235}U و ^{239}Pu) به آسانی توسط نوترونهای گرمایی شکافت‌پذیرند، در حالی که نوکلیدهایی دیگر با همان جرم (مثل ^{238}U و ^{243}Am) اینگونه نیستند؟

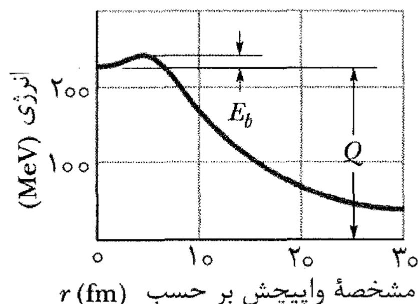
بور و ویلر توانستند به این پرسش پاسخ گویند. شکل ۴۳-۳ نموداری از انرژی پتانسیل هستهٔ در حال شکافتی را در مرحله‌های مختلف نشان می‌دهد، که از مدل آنها برای فرایند شکافت حاصل شده است. این انرژی برحسب *مشخصهٔ واپیچش* r رسم شده است، که میزانی تقریبی از اندازه‌ای است که در آن هستهٔ در حال نوسان از شکل کروی خارج می‌شود.



شکل ۴۳-۲ مرحله‌های یک فرایند شکافت نوعی، بنا بر مدل جمعی بور و ویلر.

شکل ۴۳-۲ ت نشان می‌دهد که چگونه این مشخصه درست پیش از آنکه شکافت رخ دهد، تعریف شده است. هرگاه پاره‌ها از هم دور باشند، این مشخصه صرفاً فاصلهٔ میان مرکزهای آنهاست.

اختلاف انرژی میان حالت اولیه ($r=0$) و حالت نهایی ($r=\infty$) هستهٔ در حال شکافت- یعنی، انرژی فروپاشی Q - در شکل ۴۳-۳ مشخص شده است. ولی، ویژگی اصلی شکل این است که منحنی انرژی پتانسیل از بیشینه‌ای در یک مقدار معین r می‌گذرد. بنابراین، یک *سد پتانسیل* به بلندی E_b وجود دارد که پیش از آنکه شکافت بتواند رخ دهد، باید بر آن فائق آمد (یا در آن تونل زد). این، ما را به یاد واپاشی آلفا می‌اندازد (شکل ۴۲-۹)، که آن نیز فرایندی است که توسط یک سد پتانسیل بازداشته می‌شود.



شکل ۴۳-۳ انرژی پتانسیل در مرحله‌های مختلف فرایند شکافت، به ترتیبی که مدل جمعی بور و ویلر پیش‌بینی کرده است. مقدار Q واکنش (حدود ۲۰۰ MeV) و بلندی سد شکافت E_b، هر دو نشان داده شده‌اند.

ملاحظه می‌کنیم که شکافت فقط در صورتی رخ خواهد داد که نوترون جذب شده، انرژی برانگیختگی E_n به حد کافی بزرگی را برای غلبه بر سد، فراهم آورد. لازم نیست این انرژی E_n، به دلیل احتمال تونل‌زنی حاصل از فیزیک کوانتومی، *واقعاً* به بزرگی ارتفاع سد E_b باشد.

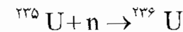
جدول ۴۳-۲، این آزمون را که آیا گیراندازی یک نوترون گرمایی می‌تواند باعث شکافت شود، برای چهار نوکلید پرجرم، نشان می‌دهد. جدول برای هر نوکلید، هم بلندی سد E_b هسته‌ای که توسط گیراندازی نوترون تشکیل شده است و هم انرژی برانگیختگی E_n ناشی از این گیراندازی را نشان می‌دهد. مقدارهای E_b از نظریهٔ بور و ویلر محاسبه شده‌اند. مقدارهای E_n از تغییر انرژی جرمی ناشی از گیراندازی نوترونی به دست آمده‌اند.

جدول ۴۳-۲

آزمون شکافت پذیری چهار نوکلید

نوکلید هدف	نوکلیدی که شکافته می‌شود	E_n (MeV)	E_b (MeV)	شکافت توسط نوترونهای گرمایی؟
^{235}U	^{236}U	۶/۵	۵/۲	بلی
^{238}U	^{239}U	۴/۸	۵/۷	خیر
^{239}Pu	^{240}Pu	۶/۴	۴/۸	بلی
^{243}Am	^{244}Am	۵/۵	۵/۸	خیر

به عنوان یک مثال از محاسبهٔ E_n ، سراغ نخستین ردیف جدول می‌رویم که فرایند گیراندازی نوترونی را نمایش می‌دهد



$$^{235}\text{U} + \text{n} \rightarrow {}^{236}\text{U}$$

جرمهای درگیر عبارت‌اند از ۲۳۵/۰۴۳۹۲۲u برای ^{235}U، ۱/۰۰۸۶۶۴u برای نوترون، و ۲۳۶/۰۴۵۵۶۲u برای ^{236}U. به سادگی می‌توان نشان داد که به دلیل گیراندازی نوترونی، جرم به اندازهٔ $۷/۰۲۴ \times ۱۰^{-۳}$ u کاهش می‌یابد. بنابراین، انرژی از انرژی جرمی به انرژی برانگیختگی E_{n} تبدیل می‌شود. با ضرب این تغییر جرم در $c^2 (= ۹۳۱/۴۹۴۰۱۳ \text{ MeV/u})$ به $E_{\text{n}} = ۶/۵ \text{MeV}$ می‌رسیم، که در نخستین سطر جدول آورده شده است.

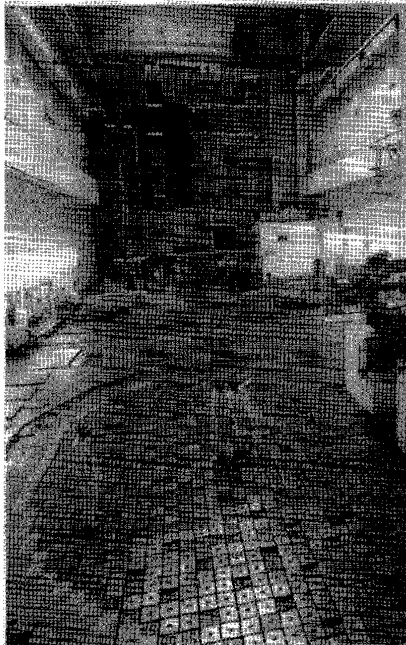
نتایج نخستین و سومین سطرهای جدول ۴۳-۲ از لحاظ تاریخی اهمیت بسزایی دارند، زیرا آنها اساس دو بمب اتمی به کار رفته در جنگ جهانی دوم هستند که حاوی ^{235}U (نخستین بمب) و ^{239}Pu (دومین بمب) بودند. یعنی، برای ^{235}U و ^{239}Pu، $E_{\text{n}} > E_{\text{b}}$ است. این بدان معنی است که برای این نوکلیدها، رخ دادن شکافت از طریق جذب یک نوترون گرمایی پیش‌بینی می‌شود. برای دو نوکلید دیگر جدول ۴۳-۲ (^{238}U و ^{243}Am)، $E_{\text{n}} < E_{\text{b}}$ است؛ بنابراین، انرژی حاصل از نوترون گرمایی برای برانگیختن هسته به منظور غلبه بر سد یا تونل‌زنی مؤثر در آن، کافی نیست. به جای شکافت، هسته با گسیل یک فوتونِ پرتو گاما از دست انرژی برانگیختگی خود خلاص می‌شود.

با این حال، نوکلیدهای ^{238}U و ^{243}Am را می توان شکافت، در صورتی که آنها یک نوترون بسیار پرانرژی را (به جای نوترون گرمایی) جذب کنند. مثلاً، هستهٔ ^{238}U می‌تواند شکافته شود، در صورتی که نوترونی با انرژی دست کم ۱/۳MeV را در فرایندی که *شکافت سریع* نامیده می‌شود ("سریع" از آن‌رو که آن نوترون، سریع است) جذب کند.

دو بمب اتمی به کار رفته در جنگ جهانی دوم به این قابلیت نوترونهای گرمایی وابسته بودند که باعث می‌شوند چندین نوکلید پرجرم واقع در مغز بمبها، به منظور شکافتی که منجر به خروج انرژی انفجاری و ویران کننده می‌شود، تقریباً در یک لحظه شکافته شوند. در نخستین بمب از ^{235}U استفاده شد، زیرا مقداری کافی از آن برای ساختن آن بمب و یک بمب آزمایشی، از سنگ معدن اورانیوم حاصل شده بود. (سنگ معدن اورانیوم، عمدتاً از ^{238}U تشکیل شده است، که همانطور که دیده‌ایم توسط نوترونهای گرمایی شکافته نمی‌شود.) در دومین بمب، تنها بر مبنای محاسبه‌های نظری که در جدول ۴۳-۲ خلاصه شده است، از ^{239}Pu استفاده شد، زیرا هنگامی که بمب دوم دستور داده شده بود، ^{235}U اضافی به حد کافی موجود نبود.

۴۳-۴ راکتور هسته‌ای

برای آزادسازی انرژی بزرگ- مقیاس حاصل از شکافت، یک رویداد شکافت باید بقیه را راه‌اندازد، تا این فرایند در سرتاسر سوخت هسته‌ای مانند زبانهٔ آتشی روی یک کنده، گسترش یابد. این واقعیت که در شکافت، نوترونهای تولید شده بیشتر از نوترونهای مصرف شده است، احتمال دقیقاً چنین **واکنش زنجیره‌ای** را که در آن هر نوترون تولید شده قابلیت راه‌اندازی شکافت دیگری را دارد، افزایش می‌دهد. این واکنش می‌تواند سریع (مانند یک بمب هسته‌ای) یا کنترل شده (مانند یک راکتور هسته‌ای) باشد.



واحد ۳ راکتور *چرنوبیل* (نزدیک *کیف*). این واحد پس از آنکه واحد ۴ در آوریل ۱۹۸۶/۱۳۶۵ منفجر شد و تقریباً همهٔ نوکلیدهای پرتوزای فرّار داخل راکتور، در هوا پراکنده شده بودند، در سال ۲۰۰۰/۱۳۷۹ بسته شد.

فرض کنید که می‌خواهیم راکتوری را بر مبنای شکافت ^{235}U توسط نوترونهای گرمایی، طراحی کنیم. اورانیوم طبیعی حاوی ۰/۷٪ از این ایزوتوپ، و ۹۹/۳٪ باقی آن از ^{238}U است که توسط نوترونهای گرمایی شکافت‌پذیر نیست. خود را به مرزی از *غنی سازی* مصنوعی سوخت اورانیوم محدود می‌کنیم که می‌تواند حاوی ۳٪ از ^{235}U باشد. کماکان سه مشکل بر سر راه یک راکتور در حال کار وجود دارد.

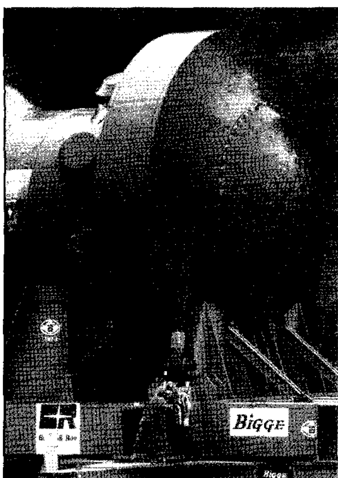
۱. *مسئلهٔ نشت نوترون.* برخی از نوترونهای تولید شده توسط شکافت، از راکتور به بیرون نشت می‌کنند و بنابراین، بخشی از واکنش زنجیره‌ای نخواهند بود. نشتی، یک اثر سطحی است؛ بزرگی آن متناسب با مربع بُعد یک راکتور نوعی است (مساحت سطح مکعبی به ضلع a برابر با $6a^2$ است). ولی، تولید نوترون در سرتاسر حجم سوخت رخ می‌دهد و بنابراین، متناسب با مکعب یک بُعد نوعی است (حجم همان مکعب برابر با a^3 است). کسر نوترونهای گم شده بر اثر نشتی را می‌توانیم با به حد کافی بزرگ ساختن مغز

راکتور، تا آنجا که می‌خواهیم کوچک کنیم، که این به کاهش نسبت سطح به حجم ($6/a$=برای مکعب) می‌انجامد.

۲. *مسئلهٔ انرژی نوترون.* نوترونهای تولید شده توسط شکافت، سریع‌اند و انرژی جنبشی آنها حدود MeV ۲ است. با این حال، شکافت به مؤثرترین وجهی توسط نوترونهای گرمایی راه می‌افتد. نوترونهای سریع را می‌توان با آمیختن سوخت اورانیوم با ماده‌ای- موسوم به **کُندساز**- که دارای دو ویژگی زیر است، کند کرد: کندساز در کندکردن نوترونها از طریق برخوردهای کشسان مؤثر است، و نوترونها را با جذب آنها از مغز راکتور نمی‌کند، بدین ترتیب آنها نقشی در شکافت نخواهند داشت. بیشتر راکتورهای قدرت هسته‌ای در آمریکای شمالی از آب به عنوان کندساز استفاده می‌کنند؛ هسته‌های هیدروژن (پروتونها) در آب، جزء مؤثری هستند. در فصل ۹ دیدیم که اگر یک ذرهٔ در حال حرکت، با ذرهٔ ساکنی برخورد کشسان رودررو داشته باشد، ذرهٔ متحرک همهٔ انرژی جنبشی خود را، در صورتی که دو ذره دارای جرم یکسانی باشند، از دست می‌دهد. بنابراین، پروتونها کندساز مؤثری هستند، زیرا آنها تقریباً همان جرم نوترونهای سریعی را دارند که می‌خواهیم سرعت آنها را کاهش دهیم.

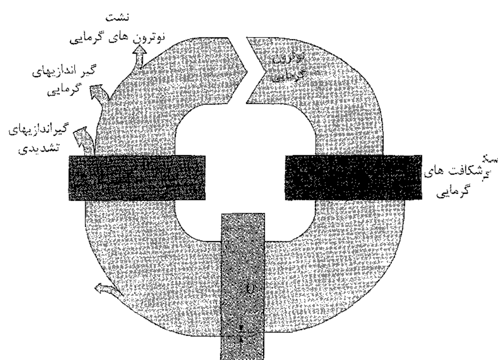
۳. *مسئلهٔ گیراندازی نوترون.* وقتی نوترونهای سریع (MeV ۲) تولید شده توسط فرایند شکافت در کندساز تا انرژیهای گرمایی (حدود ۰/۰۴eV) کند شوند، باید از یک بازهٔ انرژی بحرانی (از ۱ تا ۱۰۰MeV) بگذرند که در این بازه، بخصوص برای گیرافتادن غیرشکافتی توسط هستهٔ ^{238}U مستعدند. چنین *گیراندازی تشدیدی*، که به گسیل پرتو گاما می‌انجامد، نوترون را از زنجیرهٔ شکافت خارج می‌کند. برای کمینه کردن این گیراندازی غیر شکافتی، سوخت اورانیوم و کندساز به طور کامل آمیخته نمی‌شوند، بلکه آنها را در ناحیه‌های مختلفی در حجم راکتور قرار می‌دهند.

در یک راکتور نوعی، سوخت اورانیوم به شکل ساچمه‌هایی از اکسید اورانیوم است که پشت سرهم در لوله‌های فلزی توخالی بلندی قرار گرفته‌اند. مایع کندساز دسته‌های این **میله‌های سوخت** را که **مغز** راکتور را تشکیل می‌دهند، احاطه کرده‌اند. این آرایش هندسی، این احتمال را که نوترون سریع تولید شده در میلهٔ سوخت به هنگام عبور از بازهٔ بحرانی انرژی، در کندساز یافت شود، افزایش می‌دهد. هنگامی که نوترون به انرژیهایی گرمایی رسیده است، هنوز ممکن است به روشهایی که به شکافت نمی‌انجامند، گیر انداخته شود (موسوم به *گیراندازی گرمایی*). ولی، بسیار محتملتر آن است که نوترون گرمایی رو به عقب به سمت میلهٔ سوخت برگردد و یک رویداد شکافت به وقوع بپیوندد.



مخزن راکتوراز کار افتاده‌ای را برای قرار دادن در زیرزمینی در *پایگاه هسته‌ای هانفورد*[1] در نزدیکی *ریچلند*[2] واشنگتن، آماده می‌کنند.

شکل ۴۳-۴ توازن نوترونی در یک راکتور قدرت نوعی را که با توان ثابتی کار می‌کند، نشان می‌دهد. ردّ نمونه‌ای از ۱۰۰۰ نوترون گرمایی را در حین یک چرخهٔ کامل، یا *نسل*، در مغز راکتور پی می‌گیریم. آنها بر اثر شکافت در سوخت ^{235}U، ۱۳۳۰ نوترون، و بر اثر شکافت سریع ^{238}U، ۴۰ نوترون تولید می‌کنند که مجموعاً ۳۷۰ نوترون بیشتر از ۱۰۰۰ نوترون اولیه است، که همهٔ آنها سریع‌اند. وقتی راکتور با توان پایایی کار می‌کند، دقیقاً همین تعداد نوترون (۳۷۰ تا) بر اثر نشت از مغز توسط گیراندازی غیر شکافتی از دست می‌رود، و بدین ترتیب ۱۰۰۰ نوترون گرمایی برای شروع نسل بعد بر جای می‌ماند. البته، در این چرخه، هر یک از ۳۷۰ نوترون تولید شده توسط رویدادهای شکافت، نشان دهندهٔ یک ذخیرهٔ انرژی در مغز راکتور است که به گرم شدن مغز می‌انجامد.

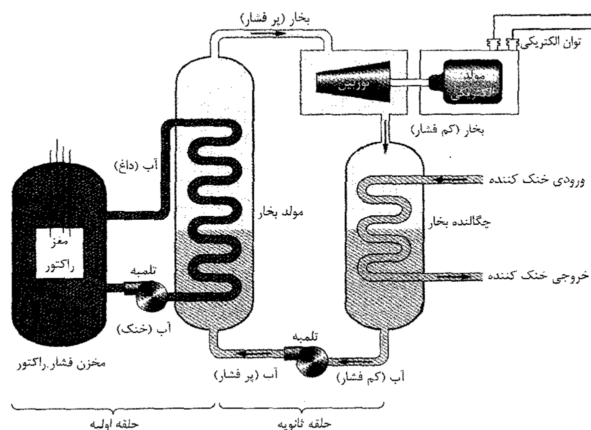


شکل ۴۳-۴ دادوستد نوترونی در یک راکتور. نسلی از ۱۰۰۰ نوترون گرمایی با سوخت ^{235}U، قالب ^{238}U، و کندساز برهم‌کنش می‌کند. آنها بر اثر شکافت، ۱۳۷۰ نوترون تولید می‌کنند، ولی ۳۷۰ تای آنها بر اثر گیراندازی غیرشکافتی یا بر اثر نشت، از دست می‌روند، که این بدان معنی است که ۱۰۰۰ نوترون گرمایی برای تشکیل نسل بعدی برجای مانده است. شکل، برای راکتوری که با توان پایایی کار می‌کند، رسم شده است.

1. Hanford Nuclear Reservation
2. Richland

ضریب تکثیر k - یک عامل مهم در راکتور- نسبت تعداد نوترونهای موجود در آغاز یک نسل خاص به تعداد نوترونهای موجود در آغاز نسل بعدی است. در شکل ۴۳-۴، ضریب تکثیر ۱۰۰۰/۱۰۰۰، یا دقیقاً برابر واحد است. برای $k = 1$ ، گفته می‌شود که عمل راکتور دقیقاً *بحرانی* است، که همان حالتی است که می‌خواهیم در عمل با توان پایا داشته باشیم. راکتورها در واقع به گونه‌ای طراحی می‌شوند که ذاتاً *فوق بحرانی‌اند* ($k > 1$) ؛ بنابراین، با کار گذاشتن **میله‌های کنترل** در مغز راکتور، ضریب تکثیر در مقدار بحرانی ($k = 1$) تنظیم می‌شود. این میله‌ها شامل موادی از قبیل کادمیوم است که به آسانی نوترونها را جذب می‌کنند، می‌توانند برای کاهش توان عملیاتی، بیشتر فرو برده شوند و برای افزایش توان یا برای جبران گرایش راکتورها برای رسیدن به وضعیت *زیر بحرانی* به هنگامی که محصولهای شکافت (که جذب کنندهٔ نوترون‌اند) در حین کار ممتد راکتور در قلب آن ساخته می‌شوند، بیرون کشیده شوند.

اگر یکی از میله‌های کنترل به‌سرعت بیرون کشیده شود، توان راکتور با چه سرعتی افزایش خواهد یافت؟ این *زمان پاسخ* توسط شرط جالب توجهی کنترل می‌شود که در آن بخش کوچکی از نوترونهای تولید شده توسط شکافت، بی‌درنگ از پاره‌های شکافتی که به تازگی تشکیل شده‌اند نمی‌گریزند، بلکه در زمانی دیرتر، هنگامی که پاره‌ها بر اثر تابش بتا واپاشی می‌کنند، از این پاره‌ها گسیل می‌شوند. مثلاً از ۳۷۰ نوترون "جدید" تولید شده در شکل ۴۳-۴، ممکن است ۱۶ تای آنها درنگ کنند، و از پاره‌هایی که با نیم- عمرهایی در گسترهٔ $0/2\,s$ تا $55\,s$ واپاشی بتا می‌کنند گسیل شوند. تعداد این نوترونهای

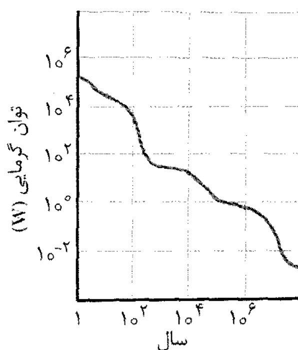


شکل ۴۳-۵ طرح ساده شدهٔ یک نیروگاه هسته‌ای، مبتنی بر راکتور آب- تحت فشار. بسیاری از جزئیات حذف شده‌اند- که از آن جمله ساختاری است که مغز راکتور را در وضعیتهای اضطراری، خنک می‌کند.

درنگیده کم است، ولی آنها به عنوان هدف اساسی برای کند کردن زمان پاسخ راکتور جهت انطباق با زمانهای واکنش مکانیکی عملی، به کار می‌روند.

شکل ۴۳-۵ طرحی کلی از یک نیروگاه برق را نشان می‌دهد که مبتنی بر یک *راکتور آب- تحت فشار* (PWR) ، نوعی متداول در آمریکای شمالی است. در چنین راکتوری، آب هم به عنوان کندساز و هم به عنوان عامل انتقال گرما استفاده می‌شود. در *حلقهٔ اولیه*، آب در مخزن راکتور گردش می‌کند و انرژی را در دما و فشار بالا (تقریباً $600\,K$ و $150\,atm$) از مغز داغ راکتور به مولد بخار، که بخشی از *حلقهٔ ثانویه* است منتقل می‌کند. در مولد بخار، بخار پرفشار حاصل از تبخیر روی توربینی که مولد الکتریکی را راه می‌اندازد، اثر می‌کند. برای آنکه حلقهٔ ثانویه کامل شود، بخار کم‌فشار حاصل از توربین سرد شده و به صورت آب، چگالیده و سپس توسط تلمبه‌ای دوباره به مولد بخار برگردانده می‌شود. برای آنکه تصوری از مقیاسها به دست آورید، یک مخزن راکتور نوعی برای یک نیروگاه (برق) $1000\,MW$ ممکن است $12\,m$ ارتفاع و $4\,MN$ وزن داشته باشد. آب از طریق حلقهٔ اولیه با آهنگی در حدود $1\,ML/min$ شارش می‌یابد.

یک ویژگی اجتناب‌ناپذیر عمل راکتور، جمع‌شدن پسماندهای پرتوزاست که هم شامل محصولهای شکافت و هم نوکلیدهای سنگین *فرا اورانیومی* از قبیل پلوتونیوم و آمریسیوم، است. یک معیار پرتوزایی آنها، آهنگی است که با آن انرژی را به شکل گرمایی، آزاد می‌کنند. شکل ۴۳-۶ ، توان گرمایی ایجاد شده توسط چنین پسماندهایی را پس از یک سال کار یک نیروگاه هسته‌ای بزرگ نوعی، نشان می‌دهد. توجه کنید که هر دو مقیاس لگاریتمی هستند. بیشتر میله‌های سوخت "مصرف شده" ناشی از کار راکتور قدرت، با فرو برده شدن در آب، در محلی انبار می‌شوند؛ امکانات انبارسازی امن دائمی برای پسماندهای حاصل از راکتور هنوز باید کامل شود. بیشتر پسماندهای پرتوزای حاصل از جنگ افزارها در حین جنگ جهانی دوم و سالهای پس از آن هنوز در انبارهایی انباشته شده‌اند. پسماندهای پرتوزا و اجزای آلوده دقیقاً ناپدید نشده‌اند- این نگرانی برای آیندهٔ دور باقی خواهد ماند.



شکل ۴۳-۶ توان گرمایی آزاد شده توسط پسماندهای پرتوزا ناشی از یک سال کار یک نیروگاه هسته‌ای بزرگ نوعی، به صورت تابعی از زمان نشان داده شده است. منحنی، حاصل از برهم‌نهی اثرهای چندین نوکلید پرتوزا، با گسترهٔ گوناگونی از نیم- عمرهاست. توجه کنید که هر دو مقیاس، لگاریتمی هستند.

مسئلهٔ نمونه ۴۳-۲

یک نیروگاه مولد برق بزرگ توسط یک راکتور هسته‌ای آب-تحت فشار کار می‌کند. توان گرمایی ایجاد شده در مغز راکتور برابر با $۳۴۰۰ MW$ است، و $۱۱۰۰ MW$ الکتریسیته توسط نیروگاه تولید می‌شود. بار سوخت برابر $۸/۶۰ \times ۱۰^۴ kg$ اورانیوم است که به شکل اکسید اورانیوم در $۵/۷۰ \times ۱۰^۴$ میلهٔ سوخت توزیع شده است. اورانیوم تا ۳٪ برای ^{۲۳۵}U غنی شده است.

(الف) بازدهٔ نیروگاه چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی بازده برای این نیروگاه یا هر وسیلهٔ انرژی دیگری عبارت است در: نسبت توان خروجی (آهنگی که با آن انرژی مفید تولید می‌شود) به توان ورودی (آهنگی که با آن انرژی باید داده شود).

محاسبه: در اینجا بازده برابر است با

$$\text{بازده} = \frac{\text{خروجی مفید}}{\text{ورودی انرژی}} = \frac{۱۱۰۰ MW\ (\text{الکتریکی})}{۳۴۰۰ MW\ (\text{گرمایی})} = ۰/۳۲ \text{ یا } ۳۲\%$$

این بازده- مانند بازدهٔ همهٔ نیروگاهها- با قانون دوم ترمودینامیک کنترل می‌شود. برای کار کردن این نیروگاه، انرژی با آهنگ $۳۴۰۰ MW - ۱۱۰۰ MW$، یا $۲۳۰۰ MW$، باید به صورت انرژی گرمایی در محیط تخلیه شود.

(ب) رویدادهای شکافت با چه آهنگ R در مغز راکتور رخ می‌دهند؟

نکته‌های کلیدی (۱) رویدادهای شکافت، توان ورودی $P = ۳۴۰۰ MW (= ۳/۴ \times ۱۰^۹ J/s)$ را به دست می‌دهند و (۲) از معادلهٔ ۴۳-۶، انرژی Q آزاد شده توسط هر رویداد، تقریباً برابر با $۲۰۰ MeV$ است.

محاسبه: برای کار در وضعیت پایا (P ثابت)، داریم

$$R = \frac{P}{Q} = \left(\frac{۳/۴ \times ۱۰^۹ \ J/s}{۲۰۰ MeV/\text{شکافت}}\right)\left(\frac{۱ MeV}{۱/۶۰ \times ۱۰^{-۱۳} J}\right) = ۱/۰۶ \times ۱۰^{۲۰} \text{شکافت}/s \approx ۱/۱ \times ۱۰^{۲۰} \text{شکافت}/s$$

(پ) سوخت ^{۲۳۵}U با چه آهنگی (بر حسب کیلوگرم بر روز) مصرف می‌شود؟ شرایط را در لحظهٔ شروع در نظر بگیرید.

نکتهٔ کلیدی که ^{۲۳۵}U بر اثر دو فرایند مصرف می‌شود: (۱) فرایند شکافت با آهنگ محاسبه شده در قسمت (ب) و (۲) گیراندازی غیرشکافتی نوترونها با آهنگی حدود $\frac{۱}{۴}$ آهنگ قسمت (ب).

محاسبه‌ها: آهنگ کلی که با آن ^{۲۳۵}U مصرف می‌شود برابر است با

$$(۱ + ۰/۲۵)(۱/۰۶ \times ۱۰^{۲۰} \text{ اتم}/s) = ۱/۳۳ \times ۱۰^{۲۰} \text{ اتم}/s$$

حال به جرم هر اتم ^{۲۳۵}U نیاز داریم. از جرم مولی اورانیوم که در پیوست ج داده است نمی‌توانیم استفاده کنیم، زیرا آن جرم مولی ^{۲۳۸}U، متداولترین ایزوتوپ اورانیوم، است. به جای این، فرض می‌کنیم که جرم هر اتم ^{۲۳۵}U بر حسب یکاهای جرم اتمی برابر با عدد جرمی A است. بنابراین، جرم هر اتم ^{۲۳۵}U برابر با $۲۳۵u\ (= ۳/۹۰ \times ۱۰^{-۲۵} kg)$ است. آنگاه، آهنگی که با آن سوخت ^{۲۳۵}U مصرف می‌شود، چنین است

$$\frac{dM}{dt} = (۱/۳۳ \times ۱۰^{۲۰} \text{ اتم}/s)(۳/۹۰ \times ۱۰^{-۲۵} \ kg/atom) = ۵۱۹ \times ۱۰^{-۵} kg/s \approx ۴/۵ kg/d \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ت) با این آهنگ مصرف سوخت، موجودی سوخت ^{۲۳۵}U چقدر دوام می‌آورد؟

محاسبه: در لحظهٔ شروع، می‌دانیم که جرم کل ^{۲۳۵}U برابر با ۳/۰٪ جرم $۸/۶۰ \times ۱۰^۴ kg$ اکسید اورانیوم است. زمان T مورد نیاز برای مصرف این جرم کلی ^{۲۳۵}U با آهنگ پایای kg/d ۴/۵، برابر است با

$$T = \frac{(۰/۰۳۰)(۸/۶۰ \times ۱۰^۴ \ kg)}{۴/۵ \ kg/d} \approx ۵۷۰ d \qquad \text{(پاسخ)}$$

در عمل، میله‌های سوخت (معمولاً به صورت بسته‌های چندتایی) باید پیش از آنکه محتویات ^{۲۳۵}U آنها کاملاً مصرف شود، جایگزین شوند.

(ث) بر اثر شکافت ^{۲۳۵}U در مغز راکتور، جرم با چه آهنگی به شکلهای دیگر انرژی تبدیل می‌شود؟

نکتهٔ کلیدی تبدیل انرژی جرمی به شکلهای دیگر انرژی، فقط به شکافتی که توان ورودی ($۳۴۰۰ MW$) را ایجاد می‌کند وابسته است و نه به گیراندازی غیرشکافتی نوترونها (اگر چه هر دو این فرایندها بر آهنگ مصرف ^{۲۳۵}U تأثیر می‌گذارند).

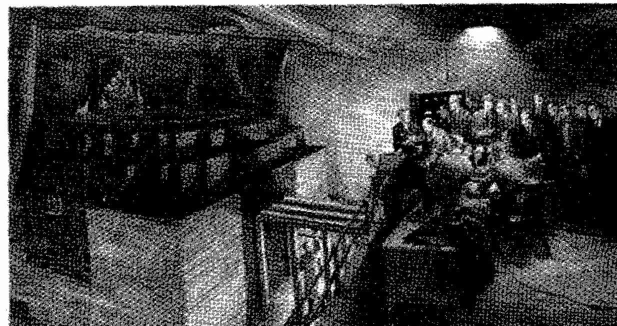
محاسبه: از رابطهٔ اینشتین $E = mc^2$، می‌توان چنین نوشت

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dE/dt}{c^2} = \frac{۳/۴ \times ۱۰^۹ \ W}{(۳/۰۰ \times ۱۰^۸ \ m/s)^2} = ۳/۸ \times ۱۰^{-۸} kg/s = ۳/۳ g/d \qquad \text{(پاسخ)}$$

از اینجا درمی‌یابیم که آهنگ تبدیل جرم حدود جرم یک سکهٔ معمولی در روز است، که به طور قابل ملاحظه‌ای کوچکتر از آهنگ مصرف سوخت محاسبه شده در قسمت (پ) است.

۴۳-۵ یک راکتور هسته‌ای طبیعی

انریکو فرمی و همکارانش حق داشتند، هنگامی که نخستین راکتور آنها در ۲ دسامبر ۱۹۴۲ عملیاتی شد (شکل ۴۳-۷)، ادعا کنند که آنها نخستین راکتور شکافتی را که تا آن موقع روی این کرهٔ خاکی ساخته شده بود، به راه انداخته‌اند. حدود ۳۰ سال بعد، معلوم شد که اگر آنها واقعاً چنین می‌اندیشیدند، در اشتباه بوده‌اند.



شکل ۴۳-۷ یک نقاشی از نخستین راکتور هسته‌ای، که در خلال جنگ جهانی دوم در زمین اسکواش دانشگاه شیکاگو توسط گروهی به سرپرستی انریکو فرمی بنا نهاده شد. این راکتور که در ۲ دسامبر سال ۱۹۴۲ به وضعیت بحرانی رسید، از تکه‌های اورانیوم جاسازی شده در قالبهای گرافیتی ساخته شده بود. این راکتور، نمونه‌ای برای راکتورهای بعدی شد که هدف آنها تولید پلوتونیوم برای ساخت جنگ‌افزارهای هسته‌ای بود.

حدود دو میلیارد سال پیش، در یک معدن اورانیوم که اکنون از در گابن واقع در آفریقای غربی حفر شده، ظاهراً یک راکتور شکافت طبیعی عملیاتی شد و احتمالاً تا چندین هزار سال، تا پیش از خاموش شدن، فعال بوده است. اینکه آیا این امر می‌توانست واقعاً رخ داده باشد موردی است که می‌توانیم آن را با در نظر گرفتن دو پرسش بیازماییم:

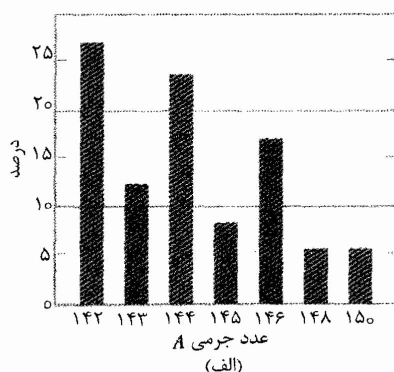
۱. *آیا سوخت کافی وجود داشته است؟* سوخت یک راکتور شکافت مبتنی بر اورانیوم باید ایزوتوپ به آسانی شکافت پذیر ^{235}U باشد، که همانطور که پیشتر اشاره کردیم، فقط ۰/۷۲٪ اورانیوم طبیعی را تشکیل می‌دهد. این نسبت ایزوتوپی برای نمونه‌های زمینی، در صخره‌های ماه، و در شهاب‌سنگها اندازه‌گیری شده است؛ در همهٔ حالتها، مقدارهای فراوانی، یکسان‌اند. سر نخ این کشف در آفریقای غربی، این بود که در آن معدن اورانیوم دارای کمبود ^{235}U بود، به گونه‌ای که برخی از نمونه‌ها دارای فراوانی کوچک ۰/۴۴٪ بودند. بررسیها به این گمانه‌زنی انجامید که این کمبود ^{235}U را می‌توان بدین گونه توضیح داد که در زمانی در گذشته، ^{235}U بر اثر عمل یک راکتور شکافت طبیعی، به طور ناتمام مصرف شده است.

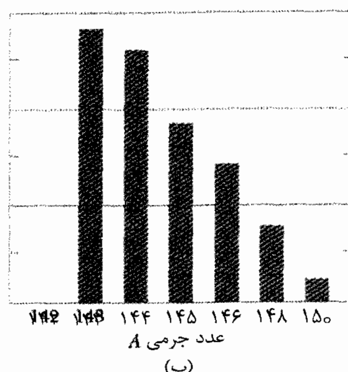
مشکل جدی باقی مانده این است که (همانطور که فرمی و گروهش دریافتند) با یک فراوانی ایزوتوپی به میزان ۰/۷۲٪، یک راکتور را می‌توان فقط پس از طراحی اندیشمندانه و با ملاحظات وسواس گونه در جزئیات، بنا کرد. این گونه به نظر می‌رسد که یک راکتور هسته‌ای شانسی ندارد که بتواند به "طور طبیعی" به وضعیت بحرانی برسد.

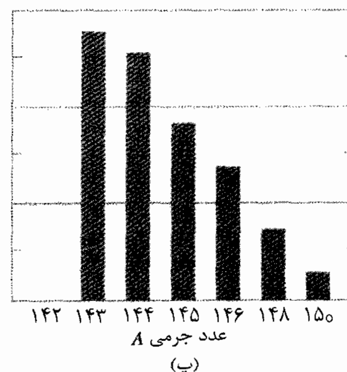
ولی، چیزها در گذشتهٔ دور متفاوت بودند. هم ^{235}U و هم ^{238}U پرتوزا هستند، به ترتیب با نیم- عمرهای $7/04\times10^{8}$ y و $44/7\times10^{8}$ y. بنابراین، نیم- عمر ^{235}U به آسانی شکافت‌پذیر، تقریباً ۶/۴ برابر کوتاهتر از نیم عمر ^{238}U است. چون ^{235}U سریعتر وامی‌پاشد، در گذشته مقدار آن نسبت به ^{238}U بیشتر بوده است. در واقع، دو میلیارد سال پیش، این فراوانی، مانند امروزه، ۰/۷۲٪ نبوده، بلکه ۳/۸٪ بوده است. این فراوانی تقریباً به همان اندازه‌ای است که اورانیوم طبیعی را برای استفاده به عنوان سوخت در راکتورهای قدرت امروزی، به طور مصنوعی غنی می‌کنند.

با این سوخت به آسانی شکافت‌پذیر و در دسترس، وجود راکتور طبیعی (با شرط اینکه سایر شرایط معین نیز فراهم باشند) کمتر تعجب برانگیز است. سوخت موجود بوده است. اتفاقاً، دو میلیارد سال پیش، عالی‌ترین شکل حیات که تکامل یافته است، جلبک آبی- سبز بود.

۲. *شواهد کدام است؟* صرف کاستی ^{235}U در یک معدن، وجود یک راکتور شکافت طبیعی را ثابت نمی‌کند. باید در پی شواهد متقاعد کنندهٔ بیشتری باشیم.







شکل ۴۳-۸ توزیع بر حسب عدد جرمی ایزوتوپهای نئودیمیوم به ترتیبی که در (الف) معدنهای زمینی سنگ معدن این عنصر و (ب) سوخت مصرف شده در یک راکتور قدرت، یافت می‌شوند. (پ) توزیع به دست آمده (پس از چند تصحیح) برای نئودیمیوم حاصل از معدن اورانیوم واقع در گابن، در آفریقای غربی. توجه کنید که (ب) و (پ) عملاً یکسان هستند و کاملاً با (الف) متفاوت‌اند.

اگر راکتوری وجود می‌داشت، امروزه باید محصولهای شکافت آن موجود می‌بود. از ۳۰ یا تعداد بیشتر عنصرهایی که ایزوتوپهای پایدار آنها در راکتور تولید شده‌اند، باید هنوز برخی از آنها باقی باشند. مطالعهٔ فراوانیهای ایزوتوپی آنها می‌تواند شواهد مورد نیاز ما را فراهم سازد.

از چندین عنصر بررسی شده، مورد نئودیمیوم به‌طور بارزی متقاعدکننده است. شکل ۴۳-۸ الف فراوانیهای ایزوتوپی هفت ایزوتوپ نئودیمیوم پایدار را نشان می‌دهد که به طور عادی در طبیعت یافت می‌شوند. شکل ۴۳-۸ ب، این فراوانیها را به صورتی که آنها در میان محصولهای در نهایت پایدار شکافت ^{235}U ظاهر می‌شوند، نشان می‌دهد. تفاوتهای آشکار این دو شکل، با در نظر گرفتن ریشه‌های کاملاً متفاوت این دو مجموعهٔ ایزوتوپها، شگفت آور نیست. بخصوص توجه کنید که ^{142}Nd، ایزوتوپ غالب در عنصر طبیعی، در محصولهای شکافت وجود ندارد.

پرسش مهم این است: ایزوتوپهای نئودیمیوم یافت شده در سنگ معدن اورانیوم در آفریقای غربی شبیه چیست؟ اگر یک راکتور طبیعی در آنجا کار کرده باشد، باید انتظار داشته باشیم ایزوتوپهایی از هر دو چشمه (یعنی، ایزوتوپهای طبیعی به همراه ایزوتوپهای حاصل از شکافت) پیدا شوند. شکل ۴۳-۸ پ فراوانیها را پس از درنظر گرفتن هر دو چشمه و سایر تصحیحهایی که روی داده‌ها انجام شده است، نشان می‌دهد.

اینکه سیر کاستی محصولهای شکافت در راکتور طبیعیِ آفریقای غربی در طی حدود دو میلیارد سال از محل تولیدشان ادامه یافته است، می‌تواند توجه به ذخیره‌سازی طولانی مدتِ پسماندهای پرتوزا را در محیطهایی زمین شناختی که به طور مناسبی انتخاب شده‌اند، تقویت کند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۳-۳

امروزه نسبت ^{235}U به ^{238}U در ذخایر اورانیوم طبیعی برابر با ۰/۰۰۷۲ است. این نسبت در $۲/۰\times۱۰^{۹}$ y سال پیش چقدر بوده است؟ نیم‌- عمرهای این دو ایزوتوپ به ترتیب عبارت‌اند از $۷/۰۴\times۱۰^{۸}$ y و $۴۴/۷\times۱۰^{۸}$ y.

نکتهٔ کلیدی نسبت $N_۵/N_۸$، ^{235}U به ^{238}U در لحظهٔ $t=۰$ برابر با ۰/۰۰۷۲ (نسبت امروزی، در زمان $t=۲/۰\times۱۰^{۹}$ y) نبوده است، زیرا این دو ایزوتوپ با آهنگهای مختلفی واپاشی کرده‌اند.

محاسبه‌ها: فرض کنیم $N_۵(۰)$ و $N_۸(۰)$ تعداد این ایزوتوپها در یک نمونهٔ اورانیوم در لحظهٔ $t=۰$، و $N_۵(t)$ و $N_۸(t)$ تعداد این ایزوتوپها در یک زمان بعدی t باشد. آنگاه، برای هر ایزوتوپ می‌توانیم از معادلهٔ ۴۲-۱۵، $N=N_۰e^{-\lambda t}$، برای نوشتن تعداد ایزوتوپها در زمان t بر حسب تعداد آنها در زمان $t=۰$، استفاده کنیم:

$$N_۵(t)=N_۵(۰)e^{-\lambda_۵ t} \quad , \quad N_۸(t)=N_۸(۰)e^{-\lambda_۸ t}$$

که در آن $\lambda_۵$ و $\lambda_۸$ ثابتهای فروپاشی مربوط هستند. تقسیم آنها چنین به دست می‌دهد

$$\frac{N_۵(t)}{N_۸(t)}=\frac{N_۵(۰)}{N_۸(۰)}e^{-(\lambda_۵-\lambda_۸)t}$$

چون نسبت $N_۵(۰)/N_۸(۰)$ را می‌خواهیم، آن را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{N_۵(۰)}{N_۸(۰)}=\frac{N_۵(t)}{N_۸(t)}e^{(\lambda_۵-\lambda_۸)t} \qquad (۸-۴۳)$$

ثابتهای فروپاشی بنابر معادلهٔ ۴۲-۱۸، $T_{۱/۲}=(\ln ۲)/\lambda$، به نیم‌- عمرها مربوط‌اند، که چنین به دست می‌دهند

$$\lambda_۵=\frac{\ln ۲}{۷/۰۴\times۱۰^{۸}\ \text{y}}=۹/۸۵\times۱۰^{-۱۰}\ \text{y}^{-۱}$$

و

$$\lambda_۸=\frac{\ln ۲}{۴۴/۷\times۱۰^{۸}\ \text{y}}=۱/۵۵\times۱۰^{-۱۰}\ \text{y}^{-۱}$$

آنگاه توان نمایی در معادلهٔ ۴۳-۸ چنین می‌شود

$$(\lambda_۵-\lambda_۸)t=[(۹/۸۵-۱/۵۵)\times۱۰^{-۱۰}\text{y}^{-۱}](۲\times۱۰^{۹}\text{y})$$
$$=۱/۶۶$$

و در نتیجه از معادلهٔ ۴۳-۸ خواهیم داشت

$$\frac{N_۵(۰)}{N_۸(۰)}=\frac{N_۵(t)}{N_۸(t)}e^{(\lambda_۵-\lambda_۸)t}=(۰/۰۰۷۲)(e^{۱/۶۶})$$
$$=۰/۰۳۷۹\approx۳/۸\%$$

(پاسخ)

۴۳-۶ گداخت گرما-هسته‌ای: فرایند اصلی

منحنی انرژی بستگی شکل ۴۲-۶ نشان می‌دهد که اگر دو هستهٔ سبک برای تشکیل یک تکْ هستهٔ بزرگتر ترکیب شوند، آن انرژی می‌تواند آزاد شود؛ فرایندی که **گداخت** هسته‌ای نامیده شده است. دافعهٔ کولنی جلوی این فرایند را می‌گیرد، به این ترتیب که مانع نزدیک شدن کافی دو ذرهٔ باردار مثبت و قرار گرفتن در محدودهٔ نیروهای هسته‌ای جاذبه‌ای و در نتیجه "همجوشی" می‌شود. بلندی این *سدّ کولنی* به بارها و شعاعهای دو هستهٔ برهم‌کنش کننده بستگی دارد. در مسئلهٔ نمونهٔ ۴۳-۴، برای دو پروتون $(Z=۱)$ نشان خواهیم داد که بلندی سد برابر با ۴۰۰keV است. البته، برای ذره‌هایی با بار بیشتر، سد نیز بلندتر است.

برای تولید مقدارهای مفید انرژی، گداخت هسته‌ای باید در حجم زیادی از ماده رخ دهد. بهترین امیدواری برای رسیدن به چنین وضعیتی، افزایش دمای ماده تا حدی است که ذره‌ها برای نفوذ در سدّ کولنی دارای انرژی کافی- ناشی از صرفاً حرکتهای گرمایی‌شان- باشند. این فرایند را **گداخت گرما - هسته‌ای** می‌نامند.

در بررسیهای گرما هسته‌ای، دماها بر حسب انرژی جنبشی K ذره‌های برهم کنش کننده بنا بر رابطهٔ زیر ارائه می‌شوند

$$K = kT \qquad (۹-۴۳)$$

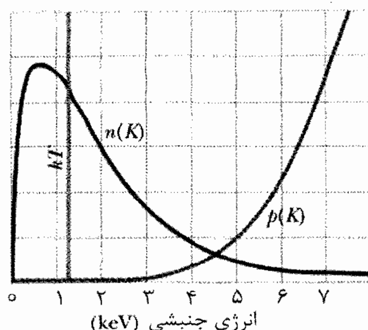
که در آن K انرژی جنبشی مربوط به *محتملترین تندی* ذره‌های برهم‌کنش کننده، k ثابت بولتزمن، و T دما بر حسب کلوین است. بنابراین، به جای اینکه گفته شود "دما در مرکز خورشید $۱/۵\times۱۰^{۷}$ K است" متداولتر آن است که گفته شود: "دما در مرکز خورشید ۱٫۳ keV است."

دمای اتاق متناظر با $K\approx ۰/۰۳\text{eV}$ است؛ ذره‌ای صرفاً با این مقدار انرژی نمی‌تواند امیدوار باشد که بر سدّی به بلندی، مثلاً ۴۰۰keV فائق آید. حتی در مرکز خورشید، که در آنجا $kT = ۱/۳$ keV است، چشم انداز گداخت گرما- هسته‌ای در نگاه نخست امیدوار کننده به نظر نمی‌رسد. با این حال می‌دانیم که گداخت گرما- هسته‌ای نه تنها در مغز خورشید رخ می‌دهد، بلکه ویژگی غالب خورشید و همهٔ ستارگان دیگر است.

این معما هنگامی حل می‌شود که دو واقعیت را به‌خوبی درک کنیم: (۱) انرژی محاسبه شده با معادلهٔ ۴۳-۹، همانگونه که در بخش ۱۹-۷ معرفی شد، برای ذره‌هایی با *محتملترین* تندی است؛ دنبالهٔ بلندی از ذره‌هایی با تندیهای به مراتب بزرگتر، و در نتیجه با انرژیهای به مراتب بزرگتر وجود دارد. (۲) بلندی سدهایی را که محاسبه کردیم، *قله‌های* سدها را نمایش می‌دهند. تونل‌زنی در سد در انرژیهایی به مراتب پایینتر از این قله‌ها رخ می‌دهد، همانطور که در واپاشی آلفا در بخش ۴۲-۵ مشاهده کردیم.

شکل ۴۳-۹، موارد بالا را جمع‌بندی می‌کند. این منحنی که با $n(k)$ در شکل مشخص شده است، منحنی توزیع ماکسول برای پروتونها در مغز خورشید است، که بر حسب دمای مرکزی خورشید رسم شده است. تفاوت این منحنی با منحنی توزیع ماکسول در شکل ۱۵-۷ در این است که در اینجا، منحنی برحسب انرژی و نه برحسب تندی، رسم شده است. مخصوصاً، برای هر انرژی جنبشی K، رابطهٔ $n(K)dK$ احتمالی را به دست می‌دهد که یک پروتون دارای انرژی جنبشی میان مقدارهای K و $K+dK$ باشد. مقدار kT در مغز خورشید با خط قائم، در شکل مشخص شده است؛ توجه کنید که بسیاری از پروتونهای مغز خورشید دارای انرژیهایی بزرگتر از این مقدار هستند.

آن منحنی که با $p(K)$ در شکل ۴۳-۹ مشخص شده است، احتمال نفوذ به سد، توسط دو پروتون برخورد کننده است. دو منحنی شکل ۴۳-۹ اشاره بر آن دارند که یک انرژی پروتون خاص وجود دارد که در آن انرژی، رویدادهای گداخت پروتون- پروتون با آهنگ بیشینه‌ای رخ می‌دهند. در انرژیهایی بسیار بالاتر از این مقدار، سد به حدّ کافی نفوذپذیر است، ولی پروتونهای بسیار اندکی دارای چنین انرژیهایی هستند، و بنابراین واکنش گداخت نمی‌تواند ادامه یابد. در انرژیهایی بسیار پایینتر از این مقدار، پروتونهای زیادی دارای چنین انرژیهایی هستند، ولی سدّ کولنی بسیار نفوذناپذیر است.



شکل ۴۳-۹ منحنی مشخص شده با $n(K)$، چگالی عددی بر یکای انرژی پروتونها را در مرکز خورشید به دست می‌دهد. آن منحنی که با $p(K)$ مشخص شده است، احتمال نفوذ به سد (و بنابراین رخ دادن گداخت) را برای برخوردهای پروتون -- پروتون در دمای مغز خورشید، به دست می‌دهد. خط قائم، مقدار kT را در این دما نشان می‌دهد. توجه کنید که دو منحنی در مقیاسهای قائم دلخواه (جدا از هم) رسم شده‌اند.

✔ ***نکتهٔ وارسی ۲*** کدامیک از این واکنشهای گداخت محتمل به آزادسازی خالص انرژی *نمی‌انجامد*: (الف) $^{6}\text{Li}+^{6}\text{Li}$، (ب) $^{4}\text{He}+^{4}\text{He}$، (پ) $^{12}\text{C}+^{12}\text{C}$، (ت) $^{20}\text{Ne}+^{20}\text{Ne}$، (ث) $^{35}\text{Cl}+^{35}\text{Cl}$، و (ج) $^{14}\text{N}+^{35}\text{Cl}$؟ (*راهنمایی*: از منحنی شکل ۴۲-۶ کمک بگیرید.)

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۳-۴

فرض کنید که پروتون، کره‌ای به شعاع $R\approx 1\text{fm}$ است. دو پروتون با انرژی جنبشی یکسان K به سوی یکدیگر شلیک می‌شوند.

(الف) K باید چقدر باشد تا ذره‌ها به هنگامی که دقیقاً در "تماس" با یکدیگرند بر اثر دافعهٔ کولنی متقابل خود ساکن شوند؟ این مقدار K را به عنوان یک اندازهٔ نوعی از بلندی سدّ کولنی در نظر بگیرید.

نکتهٔ کلیدی انرژی مکانیکی E دستگاه دو پروتونی، هنگامی که پروتونها به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند و به طور لحظه‌ای متوقف می‌شوند، پایسته است. مخصوصاً، انرژی مکانیکی اولیهٔ E_i برابر با انرژی مکانیکی E_f به هنگامی است که آنها متوقف می‌شوند. انرژی اولیهٔ E_i شامل فقط انرژی جنبشی کلّ $2K$ دو پروتون است. هرگاه پروتونها متوقف شوند، انرژی E_f فقط شامل انرژی پتانسیل الکتریکی U است، که با معادلهٔ ۲۴-۴۳ $(U=q_1q_2/4\pi\varepsilon_0 r)$ داده می‌شود.

محاسبه‌ها: در اینجا فاصلهٔ r میان پروتونها هنگامی که متوقف می‌شوند برابر با فاصلهٔ مرکز به مرکز $2R$ آنهاست، و بارهای q_1

و $q_۲$ آنها هر دو برابر با e است. از این‌رو می‌توانیم پایستگی انرژی $E_i = E_f$ را چنین بنویسیم

$$۲K = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{e^۲}{۲R}$$

که به ازای مقدارهای معلوم، چنین به دست می‌دهد

$$K = \frac{e^۲}{۱۶\pi\varepsilon_۰ R}$$

$$= \frac{(۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}\ \mathrm{C})^۲}{(۱۶\pi)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{F/m})(۱\times۱۰^{-۱۵}\ \mathrm{m})}$$

$$= ۵/۷۵\times۱۰^{-۱۴}\ \mathrm{J} = ۳۶۰\ \mathrm{keV} \approx ۴۰۰\ \mathrm{keV}$$ (پاسخ)

(ب) در چه دمایی یک پروتون در یک گاز پروتونی دارای انرژی جنبشی متوسط محاسبه شده در قسمت (الف)، و در نتیجه دارای انرژی یکسانی با بلندی سدّ کولنی است؟

نکتهٔ کلیدی اگر با گاز پروتونی مانند یک گاز آرمانی رفتار کنیم، آنگاه از معادلهٔ ۱۵-۲۴، انرژی متوسط پروتونها برابر با $K_{\mathrm{avg}} = \frac{۳}{۲}kT$ می‌شود، که در آن k ثابت بولتزمن است.

محاسبه‌ها: با حل این معادله برای T و استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) خواهیم داشت

$$T = \frac{۲K_{\mathrm{avg}}}{۳k} = \frac{(۲)(۵/۷۵\times۱۰^{-۱۴}\ \mathrm{J})}{(۳)(۱/۳۸\times۱۰^{-۲۳}\ \mathrm{J/K})}$$

$$\approx ۳\times۱۰^۹\ \mathrm{K}$$ (پاسخ)

دمای مغز خورشید فقط حدود $۱/۵\times۱۰^۷\ \mathrm{K}$ است؛ بنابراین، گداخت در مغز خورشید باید شامل پروتونهایی باشد که انرژیهای آنها بسیار بالاتر از انرژی میانگین است.

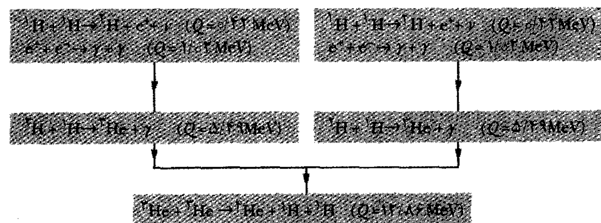
۴۳-۷ گداخت گرما-هسته‌ای در خورشید و ستارگان دیگر

خورشید با آهنگ $۳/۹\times۱۰^{۲۶}\ \mathrm{W}$ تابش می‌کند و این کار میلیاردها سال است که انجام می‌گیرد. همهٔ این انرژی از کجا می‌آید؟ سوختن شیمیایی پاسخ مناسبی نیست؛ اگر خورشید از زغال سنگ و اکسیژن با نسبتهای مناسبی برای سوختن ساخته شده بود، فقط حدود ۱۰۰۰ y دوام می‌آورد. احتمال دیگر آن است که خورشید تحت تأثیر عمل نیروهای گرانشی خود، به آرامی منقبض می‌شود. در این صورت با تبدیل انرژی پتانسیل گرانشی به انرژی گرمایی، خورشید ممکن بود دمای خود را حفظ کند و به تابیدن ادامه دهد. ولی، محاسبه نشان می‌دهد که این سازوکار نیز مردود است؛ چرا که بر اساس این سازوکار، عمر خورشید با عاملی دست کم برابر با ۵۰۰، بسیار کوتاه می‌شود. پس فقط گداخت گرما-هسته‌ای باقی می‌ماند. خورشید، همانطور که خواهید دید، نه زغال‌سنگ بلکه هیدروژن را، در یک کورهٔ هسته‌ای و نه در نوع اتمی یا شیمیایی آن، می‌سوزاند.

واکنش گداخت در خورشید یک فرایند چند مرحله‌ای است که در آن هیدروژن برای تشکیل هلیوم می‌سوزد، هیدروژن "سوخت" و هلیوم "خاکستر" است. شکل ۴۳-۱۰، چرخهٔ **پروتون - پروتون** (p-p) را نشان می‌دهد که از طریق آن، این فرایند رخ می‌دهد.

چرخهٔ p-p با برخورد دو پروتون $(^۱\mathrm{H} + {}^۱\mathrm{H})$ برای تشکیل دوترون $(^۲\mathrm{H})$، به همراه آفرینش همزمان یک پوزیترون (e^+) و یک نوترینو (ν)، آغاز می‌شود. پوزیترون خیلی سریع با یک الکترون آزاد (e^-) در خورشید مواجه می‌شود، و بدین ترتیب هر دو ذره نابود شده (بخش ۲۱-۶ را ببینید) و انرژی جرمی آنها به صورت دو فوتون گاما (γ) ظاهر می‌شود.

یک جفت از چنین رویدادهایی در بالاترین ردیف شکل ۴۳-۱۰ نشان داده شده است. این رویدادها در حقیقت بسیار نادرند. در واقع، از حدود $۱۰^{۲۶}$ برخورد پروتون- پروتون، فقط یک بار دوترون تشکیل می‌شود؛ در اغلب موارد، دو پروتون صرفاً به طور کشسان از یکدیگر وامی‌جهند. آهستگی این فرایند "در تنگنا" است که آهنگ تولید انرژی را تنظیم می‌کند و خورشید را از انفجار بازمی‌دارد. به رغم این آهستگی، آنقدر پروتونهای بی‌شماری در حجم بزرگ و چگالیدهٔ مغز خورشید وجود دارد که دوتریوم درست به همین روش با آهنگ $۱۰^{۱۲}\ \mathrm{kg/s}$ تولید می‌شود.



شکل ۴۳-۱۰ سازوکار برخورد پروتون- پروتون که مسئول تولید انرژی در خورشید است. در این فرایند، پروتونها برای تشکیل یک ذرهٔ آلفا $(^۴\mathrm{He})$ با آزادسازی انرژی خالص ۲۶/۷ MeV برای هر رویداد، به هم جوش می‌خورند.

وقتی یک دوترون تولید شود، آن دوترون به سرعت با پروتون دیگری برخورد می‌کند و همانطور که ردیف میانی شکل ۴۳-۱۰ نشان می‌دهد، یک هستهٔ $^۳\mathrm{He}$ تشکیل می‌شود. دو تا از چنین هسته‌های $^۳\mathrm{He}$ ممکن است سرانجام (در طی $۱۰^۵\ \mathrm{y}$، که زمان بسیار زیادی است) همدیگر را بیابند و یک ذرهٔ آلفا $(^۴\mathrm{He})$ و دو پروتون، همانطور که پایینترین ردیف شکل نشان می‌دهد، تشکیل دهند.

به طور کلی، از شکل ۴۳-۱۰ درمی‌یابیم که چرخهٔ p-p معادل با ترکیبی از چهار پروتون و دو الکترون برای تشکیل یک ذرهٔ آلفا، دو نوترینو، و شش فوتون پرتو گاما است. یعنی،

$$4\,{}^1H + 2e^- \rightarrow {}^4He + 2\nu + 6\gamma \qquad (۱۰-۴۳)$$

حال فرض کنید دو الکترون به هر طرف معادلهٔ ۴۳-۱۰ اضافه کنیم، خواهیم داشت

$$(4\,{}^1H + 4e^-) \rightarrow ({}^4He + 2e^-) + 2\nu + 6\gamma \qquad (۱۱-۴۳)$$

در نتیجه کمیتهای داخل دو پرانتز، *اتمهای* (نه هسته‌های) هیدروژن و هلیوم هستند. این به ما امکان می‌دهد تا آزادسازی انرژی در واکنش کلی معادلهٔ ۴۳-۱۰ (و معادلهٔ ۴۳-۱۱) را به صورت زیر محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} Q &= -\Delta mc^2 \\ &= -[4/002603\,u - (4)(1/007825\,u)][931/5\,MeV/u] \\ &= 26/7\,MeV \end{aligned}$$

که در آن $4/002603u$ جرم اتم هلیوم و $1/007825u$ جرم اتم هیدروژن است. نوترینوها جرم کوچک قابل اغماضی دارند، و فوتونهای پرتو گاما بدون جرم‌اند؛ بنابراین، آنها در محاسبهٔ انرژی فروپاشی وارد نمی‌شوند.

همین مقدار Q از جمع کردن مقدارهای Q در مرحله‌های جداگانهٔ چرخهٔ پروتون- پروتون شکل ۴۳-۱۰ به دست می‌آید (همانطور که باید هم باشد). بنابراین،

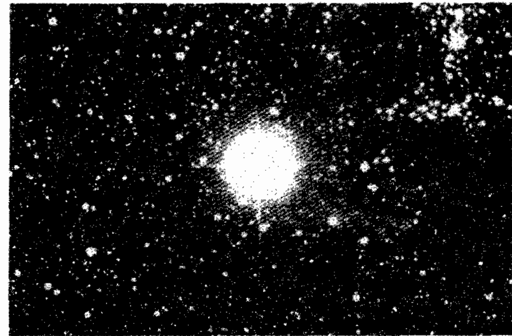
$$\begin{aligned} Q &= (2)(0/42\,MeV) + (2)(1/02\,MeV) + (2)(5/49\,MeV) \\ &+ 12/86\,MeV = 26/7\,MeV \end{aligned}$$

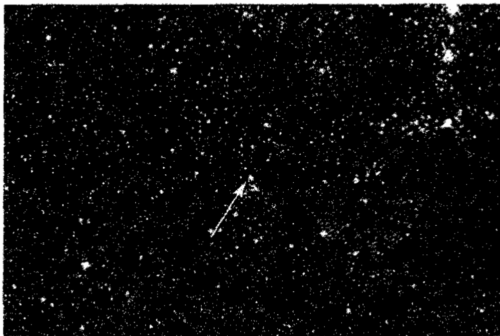
حدود $0/5\,MeV$ از این انرژی توسط دو نوترینویی که در معادله‌های ۴۳-۱۰ و ۴۳-۱۱ مشخص شده‌اند، به بیرون از خورشید منتقل می‌شوند؛ بقیه $(=26/2\,MeV)$ در مغز خورشید به صورت انرژی گرمایی بر جای می‌ماند. این انرژی گرمایی بتدریج به سطح خورشید منتقل می‌شود، و از آنجا به صورت موجهای الکترومغناطیسی از جمله نور مرئی، از خورشید تابیده می‌شود.

سوختن هیدروژن در مرکز خورشید، کیمیاگری در یک مقیاس بزرگ، به مفهوم تبدیل یک عنصر به عنصری دیگر است. ولی، کیمیاگران قرون وسطی، به تبدیل سرب به طلا علاقه داشتند نه تبدیل هیدروژن به هلیوم. از این جهت، آنها در مسیر درستی بودند، با این تفاوت که کوره‌هایشان به حد کافی داغ نبود. به جای اینکه دمای کوره‌ها، مثلاً، $600K$ باشد، آنها باید دست کم تا 10^8K داغ می‌شدند.

سوختن هیدروژن در خورشید در طی حدود 5×10^9y ادامه دارد و محاسبه نشان می‌دهد که هیدروژن کافی برای ادامهٔ حیات خورشید در مدت زمانی تقریباً به همین مقدار در آینده، وجود دارد. ولی، در ۵ میلیارد سال، مغز خورشید که در آن زمان بیشتر هلیوم خواهد بود، شروع به خنک شدن خواهد کرد و خورشید بر اثر گرانی خود شروع به رمبش می‌کند. این عمل دمای مغز خورشید را بالا می‌برد و باعث می‌شود که رویهٔ خارجی انبساط یافته و خورشید به آنچه که *غول قرمز* خوانده می‌شود، تبدیل شود.

اگر دمای مغز دوباره تا حدود 10^8K افزایش یابد، انرژی می‌تواند دوباره از طریق گداخت تولید شود- این بار با سوختن هلیوم برای تشکیل کربن. وقتی ستاره‌ای بیشتر تحول یابد و مدام داغتر شود، عنصرهای دیگری می‌توانند توسط واکنشهای گداخت دیگر تشکیل شوند. با این حال، عنصرهای سنگینتر از آنهایی که نزدیک به قلهٔ منحنی انرژی بستگی شکل ۴۲-۶ هستند، نمی‌توانند از طریق فرایندهای گداخت بیشتر تولید شوند. تصور می‌شود عنصرها با عددهای جرمی فراتر از قلهٔ آن منحنی، از طریق گیراندازی نوترونی در حین انفجارهای ستاره‌ای عظیم که *اَبَرنواَختر* نامیده می‌شوند (شکل ۴۳-۱۱)، تشکیل شده باشند. در چنین رویدادی، پوستهٔ خارجی ستاره به سمت بیرون در فضا منفجر می‌شود، که در آنجا با محیط رقیقی که فضای میان ستاره‌ها را پر می‌کند آمیخته شده- و بخشی از آن می‌شود.





شکل ۴۳-۱۱ (الف) ستاره‌ای موسوم به *سندولیک*[1] که در سال ۱۹۸۷/۱۳۶۶ پدیدار شد. (ب) سپس شروع به دریافت نور از اَبَرنواَختر آن ستاره کردیم، که به آن نماد SN1987a تخصیص داده شده است؛ این انفجار،۱۰۰ میلیون بار درخشانتر از خورشید ما بود و می‌توانست با چشم غیر مسلح دیده شود. این انفجار در فاصلهٔ ۱۵۵۰۰۰ سال نوری دور از ما رخ داده و بنابراین در واقع۱۵۵۰۰۰ سال پیش روی داده است.

1. Sanduleak

فراوانی عنصرهای سنگینتر از هیدروژن و هلیوم روی زمین نشان دهندهٔ آن است که منظومهٔ شمسی ما از مواد بین ستاره‌ای که بقایای چنین انفجارهایی هستند، چگالیده شده است. بنابراین، همهٔ عنصرهای اطراف ما — که شامل عنصرهای بدن خود ما نیز می‌شود — در درون ستاره‌هایی ساخته شده‌اند که اینک وجود ندارند. به قول دانشمندی: «در حقیقت، ما فرزند ستاره‌ها هستیم.»

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۳-۵

با چه آهنگ dm/dt هیدروژن در مغز خورشید از طریق چرخهٔ p-p شکل ۴۳-۱۰ مصرف می‌شود؟

نکتهٔ کلیدی آهنگ dE/dt که با آن انرژی توسط مصرف هیدروژن (پروتون) در درون خورشید تولید می‌شود با آهنگ P که با آن انرژی توسط خورشید تابش می‌شود، برابر است

$$P=\frac{dE}{dt}$$

محاسبه‌ها: برای آنکه آهنگ مصرف جرم dm/dt را در این معادله وارد کنیم، آن را می‌توانیم چنین بازنویسی کنیم

$$P=\frac{dE}{dt}=\frac{dE}{dm}\frac{dm}{dt}\approx\frac{\Delta E}{\Delta m}\frac{dm}{dt} \qquad (۱۲-۴۳)$$

که در آن ΔE انرژی تولید شده به هنگامی است که پروتونها به جرم Δm مصرف شده‌اند. از بحث خود در این فصل می‌دانیم که هرگاه چهار پروتون مصرف شوند، $۲۶/۲\text{MeV}(=۴/۲۰\times۱۰^{-۱۲}\text{J})$ انرژی گرمایی تولید می‌شود. یعنی، $\Delta E=۴/۲۰\times۱۰^{-۱۲}\text{J}$ برای مصرف جرم $\Delta m=۴(۱/۶\times۱۰^{-۲۷}\text{kg})$. با قراردادن این مقدارها در معادلهٔ ۴۳-۱۲ و استفاده از توان P خورشید داده شده در پیوست پ، داریم

$$\frac{dm}{dt}=\frac{\Delta m}{\Delta E}P=\frac{۴(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}\text{kg})}{۴/۲۰\times۱۰^{-۱۲}\text{J}}(۳/۹۰\times۱۰^{۲۶}\text{W})$$
$$=۶/۲\times۱۰^{۱۱}\text{kg/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

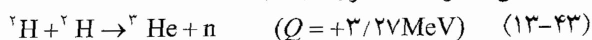
بنابراین، مقدار عظیمی از هیدروژن در هر ثانیه توسط خورشید مصرف می‌شود. با این حال، لازم نیست خیلی راجع به از دست رفتن هیدروژن از خورشید نگران باشید، زیرا جرم $۲\times۱۰^{۳۰}\text{kg}$ آن، سوختن آن را حالا حالاها ادامه خواهد داد.

۴۳-۸ گداخت گرما هسته‌ای کنترل شده

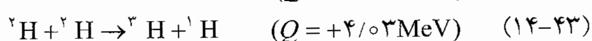
نخستین واکنش گرما هسته‌ای روی زمین در *اِنیوتُک آتول*[1] در نوامبر سال ۱۹۵۲/۱۳۳۱ رخ داد، هنگامی که کشور آمریکا یک وسیلهٔ گداخت را منفجر کرد، که این به آزاد سازی انرژی معادل با ۱۰ میلیون تن TNT انجامید. دماها و چگالیهای بالای لازم برای آغاز چنین واکنشی با استفاده از یک بمب شکافتی به عنوان ماشه فراهم شده بود.

دستیابی به یک منبع انرژی حاصل از گداخت که مداوم و قابل کنترل باشد- یک راکتور گداخت به عنوان بخشی از، مثلاً، یک نیروگاه مولد برق- به طور قابل ملاحظه‌ای دشوارتر است. با این وجود، این هدف شدیداً در بسیاری از کشورهای سرتاسر جهان پی‌گیری می‌شود، زیرا افراد بسیاری به راکتور گداخت به عنوان منبع انرژی در آینده، دست کم برای تولید برق، چشم دوخته‌اند.

طرحوارهٔ p-p نشان داده شده در شکل ۴۳-۱۰ برای راکتور گداخت مناسب نیست، زیرا به طرز ناامید کننده‌ای کند است. این فرایند فقط به دلیل چگالی فوق العاده زیاد پروتونها در مرکز خورشید، به طور موفقیت آمیزی در خورشید رخ می‌دهد. جالب توجه‌ترین واکنشها برای استفادهٔ زمینی می‌تواند به صورت دو واکنش دوترون- دوترون (d-d)

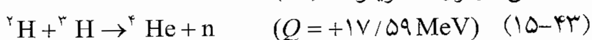


$$^{۲}\text{H}+{}^{۲}\text{H}\rightarrow{}^{۳}\text{He}+\text{n} \qquad (Q=+۳/۲۷\text{MeV}) \qquad (۱۳-۴۳)$$



$$^{۲}\text{H}+{}^{۲}\text{H}\rightarrow{}^{۳}\text{H}+{}^{۱}\text{H} \qquad (Q=+۴/۰۳\text{MeV}) \qquad (۱۴-۴۳)$$

و واکنش دوترون- تریتون *(d-t)



$$^{۲}\text{H}+{}^{۳}\text{H}\rightarrow{}^{۴}\text{He}+\text{n} \qquad (Q=+۱۷/۵۹\text{MeV}) \qquad (۱۵-۴۳)$$

باشد. دوتریوم، چشمهٔ دوترونها برای این واکنشها، دارای فراوانی ایزوتوپی فقط ۱ بخش در ۶۷۰۰ است، ولی در مقدارهای نامحدود به صورت بخشی از آب دریا قابل دسترسی است. آنهایی که طرفدار کسب انرژی از هسته هستند توضیح می‌دهند که انتخاب نهایی ما برای انرژی- پس از آنکه همهٔ سوختهای فسیلی سوزانده شدند- یا "صخره‌های سوزان" (شکافت اورانیوم استخراج شده از سنگهای معدن) یا "آب سوزان" (گداخت دوتریوم استخراج شده از آب) است.

برای یک راکتور گرما هسته‌ای موفق سه شرط باید برقرار باشد.

۱. *چگالی ذره‌ای بالای n* چگالی ذره‌ای ذره‌های برهم‌کنش کننده (مثلاً تعداد دوترونها بر یکای حجم) باید به حد کافی بزرگ باشد تا تضمین کند که آهنگ برخورد d-d به حد کافی بالاست. در دماهای بالای مورد نیاز، دوتریوم کاملاً یونیده می‌شود و بدین ترتیب **پلاسمایی** (گاز یونیده‌ای) که از لحاظ الکتریکی خنثاست از دوترونها و الکترونها تشکیل می‌شود.

۲. *پلاسمای دما بالای T*. پلاسما باید داغ باشد. در غیر این صورت دوترونهای برخورد کننده انرژی کافی برای رخنه در سدّ کولنی، که می‌خواهد آنها را دور از هم نگه دارد، نخواهند داشت. دمای یون پلاسمایی ۳۵ keV که معادل با $۴\times۱۰^{۸}\text{K}$ است، در آزمایشگاه به دست آمده است. این دما ۳۰ برابر بزرگتر از دمای مرکز خورشید است.

۳. *زمان محصور کردن τ طولانی*. یک مسئلهٔ اصلی، نگهداری پلاسمای داغ به مدت طولانی در چگالی و دمای به حدّ کافی بالاست تا گداخت سوخت تضمین شود. روشن است که هیچ ظرف جامدی نمی‌تواند در برابر دماهای بالای مورد نیاز برای گداخت تاب بیاورد، ولی روشهای نگهداری هوشمندانه‌ای پیشنهاد شده است؛ دو تا از این روشها را به اختصار توضیح می‌دهیم.

---

1. Eniwetok Atoll

*. هستهٔ ایزوتوپ هیدروژن ^{۳}H (تریتیوم)، *تریتون* نامیده می‌شود. این هسته، نوکلیدی پرتوزا با نیم- عمر ۱۲/۳ y است.

می‌توان نشان داد که برای عمل موفقیت آمیز یک راکتور گرما- هسته‌ای که از واکنش d-t استفاده می‌کند، لازم است داشته باشیم

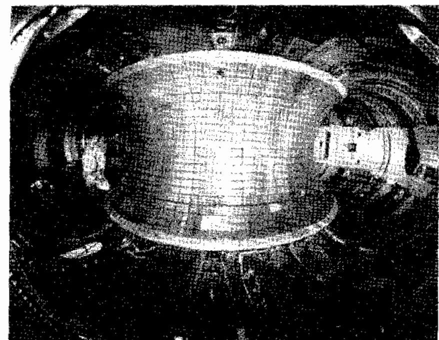
$$n\tau > 10^{20}\ \text{s/m}^3 \qquad (۱۶-۴۳)$$

این شرط، که به نام **معیار لاوسون**[1] نامیده می‌شود، بیان می‌دارد که ما این انتخاب را داریم که یا تعداد زیادی ذره را در زمانی کوتاه یا تعداد کمی ذره را در زمانی طولانی محصور کنیم. علاوه بر تحقق این معیار، هنوز لازم است که دمای پلاسما به حدّ کافی بالا باشد.

هم اکنون دو روش برای تولید انرژی هسته‌ای کنترل شده تحت مطالعه است. اگرچه هنوز هیچ یک از این روشها موفق نبوده‌اند، با این حال هر دو روش به دلیل وعده‌هایشان و به دلیل اهمیت بالقوهٔ گداخت کنترل شده برای حل مسائل انرژی جهان، پی‌گیری می‌شوند.

محصور کردن مغناطیسی

یک راه برای گداخت کنترل شده نگهداری مادهٔ گداختی در میدان مغناطیسی بسیار قوی است، که **محصور کردن مغناطیسی** نامیده می‌شود. در یکی از این روشها برای محبوس کردن پلاسمای داغ در اتاقک دونات شکل تخلیه شده‌ای به نام **توکامک**[2] از میدان مغناطیسی استفاده می‌شود (نام توکامک مخففی است شامل بخشهایی از سه کلمهٔ روسی). نیروهای مغناطیسی وارد بر ذره‌های باردار که پلاسمای داغ را تشکیل می‌دهند، پلاسما را از تماس با دیواره‌های اتاقک بازمی‌دارند. شکل ۴۳-۱۲ چنین وسیله‌ای را در آزمایشگاه فیزیک پلاسمای دانشگاه پرینستون نشان می‌دهد.



شکل ۴۳-۱۲ راکتور آزمایشی گداخت توکامک واقع در دانشگاه پرینستون.

پلاسما با اعمال جریانی به داخل آن و توسط بمباران آن با باریکه‌ای از ذره‌های شتابدار خارجی گرم می‌شود. نخستین هدف این روش، دستیابی به وضعیت **رودررو شدن** است و آن هنگامی رخ می‌دهد که معیار لاوسون، محقق یا از آن فزونی گرفته باشد. هدف نهایی، **اشتعال** است که وابسته به واکنش گرما هسته‌ای خودنگه‌دار و تولید خالص انرژی است. تا سال ۲۰۰۴/۱۳۸۳، اشتعال نه در توکاماکها و نه در سایر وسیله‌های محصور کردن مغناطیسی حاصل نشده است.

محصورکردن لختی

دومین روش، موسوم به **محصور کردن لختی**، مستلزم "یورش" همه‌جانبه به یک گلولهٔ سوخت جامد با باریکه‌های لیزری پرشدت است که به بخارشدن بخشی از مادهٔ سطح گلوله می‌انجامد. این مادهٔ جوشان موجب یک موج شوکی متحرک رو به داخل می‌شود که مغز گلوله را متراکم می‌کند و بدین ترتیب هم چگالی ذره‌ای و هم دمای آن را افزایش می‌دهد. این فرایند از آنرو محصور کردن لختی نامیده می‌شود که (الف) سوخت در گلوله *محصور* شده است و (ب) ذره‌ها به دلیل *لختی* خود (جرم خود) در حین بازهٔ بسیار کوتاه یورش، از گلولهٔ گرم شده نمی‌گریزند.



شکل ۴۳-۱۳ کره‌های کوچک روی سکه، گلوله‌های سوخت دوتریم- تریتیوم هستند که برای استفاده در اتاقک گداخت لیزری طراحی شده‌اند.

گداخت لیزری، با استفاده از روش محصور کردن لختی، در بسیاری از آزمایشگاههای آمریکا و سایر نقاط جهان بررسی شده است. برای مثال، در آزمایشگاه *لاورنس لیورمور*[3] گلوله‌های سوخت دوتریوم- تریتیوم، هر یک کوچکتر از یک دانهٔ شن (شکل ۴۳-۱۳) با ۱۰ تپ لیزری پرقدرتِ همگام شده، که به طور متقارنی به دور گلوله قرار گرفته‌اند، مورد یورش قرار می‌گیرند. تپهای لیزری طوری طراحی شده‌اند که در کل، حدود $200\,\text{kJ}$ انرژی را در زمانی کمتر از یک نانو ثانیه به هر گلولهٔ سوخت وارد می‌کنند. این توان داده شده در حین تپ، حدود $2\times10^{14}\,\text{W}$ است که تقریباً ۱۰۰ برابر ظرفیت نیروگاههای الکتریکی نصب شده (و در حال کار) جهان است!

در راکتور گرما هسته‌ای در حال کار از نوع لیزر- گداخت، گلوله‌های سوخت با آهنگیَ شاید برابر ۱۰ تا ۱۰۰ بر ثانیه- مانند بمبهای هیدروژنی کوچکی- منفجر می‌شوند. امکان‌پذیر بودن گداخت لیزری به عنوان مبنایی برای راکتور قدرت گرما- هسته‌ای تا سال ۲۰۰۴/۱۳۸۳ نشان داده نشده است، ولی پژوهش در این موضوع با گامهای بلندی ادامه دارد.

1. Lawson's criterion
2. tokamak
3. Lawerence Livermore

مسئلهٔ نمونه ۴۳-۶

فرض کنید یک گلولهٔ سوخت در وسیلهٔ گداخت لیزری شامل تعداد یکسانی از اتمهای دوتریوم و تریتیوم (و نه مادهٔ دیگر) باشد. چگالی $d = ۲۰۰\,\text{kg/m}^۳$ گلوله بر اثر عمل تپهای لیزر با عامل $۱۰^۳$ افزایش می‌یابد.

(الف) گلوله در حالت فشردهٔ خود شامل چه تعداد ذره بر یکای حجم (هم دوترون و هم تریتون) است؟ جرم مولی M_d اتمهای دوتریوم برابر با $۲/۰ \times ۱۰^{-۳}\,\text{kg/mol}$ و جرم مولی M_t اتمهای تریتیوم برابر با $۳/۰ \times ۱۰^{-۳}\,\text{kg/mol}$ است.

نکتهٔ کلیدی برای سامانه‌ای که شامل فقط یک نوع ذره است، چگالی (جرمی) آن سامانه را می‌توانیم بر حسب جرمهای ذره‌ای و چگالی عددی بنویسیم:

$$\begin{pmatrix}\text{چگالی}\\ \text{kg/m}^۳\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{چگالی عددی}\\ \text{m}^{-۳}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{جرم ذره}\\ \text{kg}\end{pmatrix} \qquad (۱۷-۴۳)$$

فرض کنیم n تعداد کل ذره‌ها بر یکای حجم در گلولهٔ فشرده باشد. آنگاه، تعداد اتمهای دوتریوم بر یکای حجم برابر با $n/۲$، و تعداد اتمهای تریتیوم بر یکای حجم نیز برابر با $n/۲$ است.

محاسبه‌ها: معادلهٔ ۴۳-۱۷ را می‌توانیم با نوشتن چگالی d^* گلولهٔ فشرده به صورت مجموع چگالیهای مجزا، به سامانهٔ شامل دو ذره تعمیم دهیم:

$$d^* = \frac{n}{۲}m_d + \frac{n}{۲}m_t \qquad (۱۸-۴۳)$$

که در آن m_d و m_t به ترتیب جرم اتمهای دوتریوم و تریتیوم است. این جرمها را می‌توانیم با رابطه‌های زیر با جرمهای مولی داده شده جایگزین کنیم

$$m_d = \frac{M_d}{N_A} \quad , \quad m_t = \frac{M_t}{N_A}$$

که در آن N_A عدد آووگادرو است. پس از این جایگزینی‌ها و قراردادن $۱۰۰۰d$ به جای چگالی d^* گلولهٔ فشرده، معادلهٔ ۴۳-۱۸ را برای n حل می‌کنیم. به دست می‌آوریم

$$n = \frac{۲۰۰۰\,dN_A}{M_d + M_t}$$

و از آنجا داریم

$$n = \frac{(۲۰۰۰)(۲۰۰\,\text{kg/m}^۳)(۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\,\text{mol}^{-۱})}{۲/۰ \times ۱۰^{-۳}\,\text{kg/mol} + ۳/۰ \times ۱۰^{-۳}\,\text{kg/mol}} = ۴/۸ \times ۱۰^{۳۱}\,\text{m}^{-۳} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) بنابر معیار لاوسون، اگر عمل رودررو شدن رخ دهد، این گلوله چه مدت باید این چگالی ذره‌ای را نگهدارد؟

نکتهٔ کلیدی گر عمل رودررو شدن رخ دهد، چگالی فشردگی باید برای دورهٔ زمانی τ که با معادلهٔ ۴۳-۱۶ داده می‌شود $(n\tau > ۱۰^{۲۰}\,\text{s/m}^۳)$ حفظ شود.

محاسبه: اکنون می‌توان نوشت:

$$\tau > \frac{۱۰^{۲۰}\,\text{s/m}^۳}{۴/۸ \times ۱۰^{۳۱}\,\text{m}^{-۳}} \approx ۱۰^{-۱۲}\,\text{s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(دمای پلاسما نیز باید به میزان مناسبی بالا باشد.)

بازنگری و خلاصهٔ درس

انرژی هسته‌ای فرایندهای هسته‌ای تقریباً یک میلیون بار، بر یکای جرم، مؤثرتر از فرایندهای شیمیایی در تبدیل جرم به سایر شکلهای انرژی هستند.

شکافت هسته‌ای معادلهٔ ۴۳-۱ یک **شکافت** ^{۲۳۶}U را نشان می‌دهد که بر اثر بمباران ^{۲۳۵}U با نوترونهای گرمایی ایجاد شده است. معادله‌های ۴۳-۲ و ۴۳-۳ زنجیره‌های واپاشی بتای پاره‌های شکافت اولیه را نشان می‌دهند. انرژی آزاد شده در چنین رویداد شکافتی برابر با $Q \approx ۲۰۰\,\text{MeV}$ است.

شکافت می‌تواند بر مبنای مدل جمعی فهمیده شود، که در آن هسته به یک قطرهٔ مایع باردار که حامل انرژی برانگیختگی معینی است، ربط داده می‌شود. اگر قرار باشد شکافت رخ دهد، از یک سدّ پتانسیل باید تونل زده شود. شکافت پذیری به رابطهٔ میان بلندی سدّ E_b و انرژی برانگیختگی E_n بستگی دارد.

نوترونهای آزاد شده در حین شکافت، **واکنش زنجیره‌ای** را ممکن می‌سازند. شکل ۴۳-۴ توازن نوترونی را برای چرخهٔ یک راکتور نوعی نشان می‌دهد. شکل ۴۳-۵، طرح یک نیروگاه هسته‌ای کامل را نمایش می‌دهد.

گداخت هسته‌ای آزادسازی انرژی از طریق **گداخت** دو هستهٔ سبک، توسط سدّ کولنی متقابل آن دو ذره بازداشته می‌شود. گداخت تنها در صورتی می‌تواند در تودهٔ ماده رخ دهد که دما برای آنکه تونل‌زنی محسوس در سد رخ دهد به حدّ کافی بالا باشد (یعنی، در صورتی که انرژی ذره به حدّ کافی زیاد باشد).

انرژی خورشید عمدتاً از سوختن گرما- هسته‌ای هیدروژن برای تشکیل هلیوم از طریق چرخهٔ **پروتون- پروتون** حاصل می‌شود، که طرح آن در شکل ۴۳-۱۰ کشیده شده است. هرگاه منبع سوخت هیدروژنی یک ستاره به مصرف رسیده باشد، عنصرهای تا $A \approx ۵۶$ (قلهٔ منحنی انرژی بستگی) می‌توانند توسط فرایندهای گداخت دیگری ایجاد شوند.

گداخت کنترل شده **گداخت گرما هسته‌ای** کنترل شده برای تولید انرژی تا کنون به دست نیامده است. واکنشهای d-d و d-t امیدوارکننده‌ترین سازوکارها هستند. یک راکتور گداخت موفق باید با **معیار لاوسون**

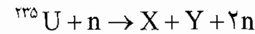
$$n\tau > ۱۰^{۲۰}\,\text{s/m}^۳ \qquad (۱۶-۴۳)$$

سازگار، و دارای دمای پلاسمای به حد کافی بالای T باشد.

در **توکاماک**، پلاسما توسط یک میدان مغناطیسی محصور شده است. در **گداخت لیزری**، از محصور کردن لختی استفاده می‌شود.

پرسشها

۱. برای واکنشِ شکافت



$$^{235}U + n \rightarrow X + Y + 2n$$

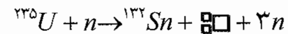
گزینه‌های زیر برای X (یا Y) را به گونه‌ای مرتب کنید که محتملترین در ابتدا باشد: ^{152}Nd، ^{140}I، ^{128}In، ^{115}Pd، ^{105}Mo.
(*راهنمایی:* شکل ۴۳-۱ را ببینید.)

۲. برای ساخت عنصرهای بسیار بزرگ در جدول تناوبی که اخیراً کشف شده است، پژوهشگران هسته‌ای با اندازهٔ متوسطی را به سمت هستهٔ بزرگی پرتاب کردند. گاهی هستهٔ پرتابه با هستهٔ هدف جوش می‌خورند و تشکیل هستهٔ بسیار بزرگی را می‌دهند. در این همجوشی آیا جرم محصول از مجموع جرمهای هسته پرتاب و هدف بیشتر است یا کمتر؟

۳. اگر هسته‌ای با از دست دادن انرژی به دو هستهٔ کوچکتر تقسیم شود، آیا میانگین انرژی بستگی بر نوکلئون افزایش می‌یابد یا کاهش؟

۴. اگر فرایند همجوشی به جذب انرژی احتیاج داشته باشد، آیا میانگین انرژی بستگی بر نوکلئون افزایش می‌یابد یا کاهش؟

۵. در یک فرایند همجوشی داریم



$$^{235}U + n \rightarrow ^{132}Sn + \square\square + 3n$$

چه عددی در (الف) مربع بالایی (شاخص بالا) و (ب) مربع پایینی (مقدار z) قرار می‌گیرد؟

۶- آیا پاره‌های شکافت اولیهٔ تشکیل شده بر اثر شکافت، دارای پروتونهای بیشتری نسبت به نوترونها هستند، دارای نوترونهای بیشتری نسبت به پروتونها هستند، یا تقریباً مقدار یکسانی از هر یک دارند؟

۷- فرض کنید که هستهٔ ^{238}U نوترونی را "می‌بلعد" و سپس نه از طریق شکافت بلکه از طریق واپاشی بتا، یک الکترون و یک نوترینو گسیل می‌دارد. پس از این واپاشی، کدام نوکلید باقی می‌ماند: ^{239}Pu، ^{238}Np، ^{239}Np، یا ^{238}Pa؟

۸- محتملترین عضو هر جفت را طوری برگزینید که یکی از پاره‌های شکافت اولیه‌ای باشد که توسط رویداد شکافت تشکیل می‌شود: (الف) ^{93}Sr یا ^{93}Ru، (ب) ^{140}Gd یا ^{140}I، (پ) ^{155}Nd یا ^{155}Lu. (*راهنمایی:* شکل ۴۲-۴ و جدول تناوبی را ببینید.)

۹- یک راکتور هسته‌ای با توان معینی، با ضریب تکثیر k که روی واحد تنظیم شده است، کار می‌کند. اگر میله‌های کنترل برای کاهش توان خروجی راکتور تا ۲۵٪ مقدار پیشین آن مورد استفاده قرار گیرند، آیا اکنون ضریب تکثیر کمی کوچکتر از واحد، به میزان قابل توجهی کوچکتر از واحد، یا هنوز برابر واحد است؟

۱۰- کدامیک از این عنصرها توسط فرایندهای گداخت گرما-هسته‌ای در ناحیه‌های داخلی ستاره "پخته" *نمی‌شوند:* کربن، سیلیسیوم، کروم، برم؟

۱۱- معیار لاوسون برای واکنش d-t (معادلهٔ ۴۳-۱۶) به صورت $n\tau > 10^{20}\ s/m^3$ است. برای واکنش d-d، آیا توقع دارید که عدد سمت راست دارای همان مقدار، کوچکتر یا بزرگتر باشد.

۱۲- حدود ۲٪ انرژی تولید شده در مغز خورشید بر اثر واکنش p-p توسط نوترینوها از خورشید به بیرون برده می‌شوند. آیا انرژی وابسته به این شار نوترینویی برابر با، بزرگتر از، یا کمتر از انرژی تابیده شده از سطح خورشید به صورت تابش الکترومغناطیسی است؟

مسئله‌ها

GO مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است
●●● تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

بخش ۴۳-۳ مدلی برای شکافت هسته‌ای

●۱- انرژی فروپاشی Q را برای شکافت ^{52}Cr به دو پارهٔ شکافت مساوی محاسبه کنید. جرمهایی که به آنها نیاز دارید عبارت‌اند از ۵۱/۹۴۰۵۱u برای ^{52}Cr و ۲۵/۹۸۲۵۹u برای ^{26}Mg. GO

●۲- ویژگیهای شکافتی ایزوتوپ ^{239}Pu پلوتونیوم بسیار شبیه به این ویژگیها در ^{235}U است. انرژی متوسط آزاد شده در هر شکافت برابر با ۱۸۰MeV است. اگر تمام اتمهای موجود در ۱/۰۰kg از ^{239}Pu خالص شکافته شوند، چقدر انرژی، برحسب MeV، آزاد می‌شود؟

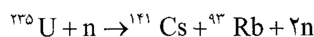
●۳- هسته‌های ^{235}U با چه آهنگی باید توسط بمباران نوترونی شکافته شوند تا انرژی با آهنگ ۱/۰W تولید شود؟ فرض کنید که $Q = 200\,MeV$.

●۴- (الف)-(ت) جدول زیر را که مربوط به واکنش شکافت کلی $^{235}U + n \rightarrow X + Y$ است، کامل کنید.

X	Y	b
^{140}Xe	(الف)	۱
^{139}I	(ب)	۲
(پ)	^{100}Zr	۲
^{141}Cs	^{92}Rb	(ت)

●۵- (الف) چه تعداد اتم در ۱/۰kg از ^{235}U خالص وجود دارد؟ (ب) چه مقدار انرژی، بر حسب ژول، بر اثر شکافت کامل ۱/۰kg از ^{235}U آزاد می‌شود؟ (پ) این انرژی تا چه مدت یک لامپ ۱۰۰W را روشن نگه می‌دارد؟

●۶- انرژی آزاد شده در واکنش شکافت زیر را محاسبه کنید

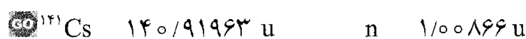


$$^{235}U + n \rightarrow {}^{141}Cs + {}^{93}Rb + 2n$$

جرمهای اتمی و ذره‌ای مورد نیاز عبارت‌اند از



^{235}U ۲۳۵/۰۴۳۹۲u ^{93}Rb ۹۲/۹۲۱۵۷u



^{141}Cs ۱۴۰/۹۱۹۶۳ u n ۱/۰۰۸۶۶u

●۷- ایزوتوپ ^{235}U از طریق گسیل آلفا با نیم‌-عمر ۷/۰×۱۰^۸ y واپاشی می‌کند. این ایزوتوپ همچنین (به‌ندرت) بر اثر شکافت خود به خودی واپاشی می‌کند، و اگر واپاشی آلفا رخ نداده باشد، نیم عمر ناشی از صرفاً شکافت خود به خودی برابر با ۳/۰×۱۰^۱۷ y است. (الف) شکافت خود به خودی با چه آهنگی در ۱/۰g از ^{235}U رخ می‌دهد؟ (ب) چه تعداد رویداد واپاشی آلفای ^{235}U به ازای هر رویداد شکافت خود به خودی وجود دارد؟

●۸- نوکلید ^{238}Np به ۴/۲ MeV انرژی برای شکافت نیاز دارد. برای کندن یک نوترون از این نوکلید به انرژی بیشتر ۵/۰MeV نیاز است. آیا ^{237}Np با نوترونهای گرمایی قابل شکافت است؟

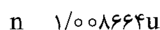
●۹- نوترون گرمایی (تقریباً با انرژی جنبشی صفر) به وسیلهٔ هستهٔ ^{238}U جذب می‌شود. چقدر انرژی از انرژی جرم به نوسانهای ایجاد شدهٔ هسته منتقل می‌شود؟ در اینجا برخی از جرمهای اتمی و جرم نوترون آمده است.



^{237}U ۲۳۷/۰۴۸۷۲۳u ^{238}U ۲۳۸/۰۵۰۷۸۲u



^{239}U ۲۳۹/۰۵۴۲۸۷u ^{240}U ۲۴۰/۰۵۶۵۸۵u



n ۱/۰۰۸۶۶۴u

●۱۰- (الف) انرژی فروپاشی Q را برای شکافت ^{98}Mo به دو بخش مساوی محاسبه کنید. جرمهایی که به آنها نیاز دارید عبارت‌اند از ۹۷/۹۰۵۴۱u برای ^{98}Mo و ۴۸/۹۵۰۰۲u برای ^{49}Sc. (ب) اگر Q مثبت به دست آید، توضیح دهید که چرا این فرایند به طور خود به خودی رخ نمی‌دهد.

●۱۱- در طول جنگ سرد، نخست وزیر شوروی، امریکا را با بمب ^{239}Pu تهدید کرد. (هر یک معادل انفجار ۲/۰ مگاتون TNT است که ۱ مگاتون از TNT ، ۲/۶×۱۰MeV آزاد می‌کند.) اگر پلوتونیوم شکافته شدهٔ واقعی دارای ۸/۰۰٪ جرم کل پلوتونیوم در چنین سلاحی باشد، جرم کل چقدر بوده است؟

●●۱۲- هستهٔ ^{236}U شکافته شده و به دو پارهٔ با جرم متوسط ^{140}Xe ، ^{96}Sr تقسیم می‌شود. (الف) مساحت سطح محصولهای شکافت با چه درصدی از مساحت سطح هستهٔ ^{236}U اولیه متفاوت است؟ (ب) حجم با چه درصدی تغییر می‌کند؟ (پ) انرژی پتانسیل الکتریکی با چه درصدی تغییر می‌کند؟ انرژی پتانسیل الکتریکی یک کرهٔ باردار یکنواخت به شعاع r و بار Q با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$U = \frac{3}{5}\left(\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)$$

●●۱۳- در یک رویداد شکافت خاص که در آن ^{235}U توسط نوترونهای کند شکافته می‌شود، هیچ نوترونی گسیل نشده است و یکی از پاره‌های شکافت اولیه ^{83}Ge است. (الف) پارهٔ شکافت دیگر چیست؟ انرژی فروپاشی برابر با $Q = ۱۷۰$ MeV است. چه مقدار از این انرژی به (پ) پارهٔ ^{83}Ge و (ت) پارهٔ دیگر می‌رود؟ درست پس از شکافت، تندی (ت) پارهٔ ^{83}Ge و (ث) پارهٔ دیگر چقدر است؟ **WWW SSM**

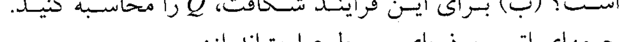
●●۱۴- در یک بمب اتمی، انرژی بر اثر شکافت کنترل نشدهٔ ^{239}Pu (یا ^{235}U) آزاد می‌شود. مرتبهٔ بمب برابر با بزرگی انرژی آزاد شده است که بر حسب جرم TNT مورد نیاز برای تولید همین مقدار انرژی، مشخص می‌شود. یک مگاتُن TNT ، انرژیی برابر با ۲/۶×۱۰^۲۸ MeV را آزاد می‌کند. (الف) مرتبهٔ یک بمب اتمی را که حاوی ۹۵/۰kg از ^{239}Pu است، و در واقع ۲/۵kg آن شکافته می‌شود، بر حسب تُن TNT محاسبه کنید (مسئلهٔ ۴ را ببینید.) (ب) چرا ۹۲/۵kg دیگر ^{239}Pu، با اینکه شکافته نمی‌شوند، لازم است؟

●●۱۵- یک بمب اتمی ۶۶ کیلوتن با ^{235}U خالص سوخت‌دهی می‌شود (شکل ۴۳-۱۴)، که در واقع ۴/۰٪ آن شکافته می‌شود. (الف) جرم اورانیوم موجود در بمب چقدر است؟ (۶۶ کیلو تن نیست- این، مقدار انرژی آزاد شده است که بر حسب جرم TNT مورد نیاز برای تولید همان مقدار انرژی، مشخص شده است.) (ب) چه تعداد پاره‌های شکافت اولیه تولید شده‌اند؟ (پ) چه تعداد نوترون شکافتی تولید شده در محیط آزاد می‌شود؟ (به طور متوسط، هر شکافت، ۲/۵ نوترون تولید می‌کند.) **SSM**

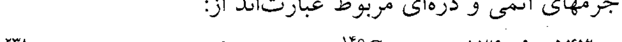


شکل ۴۳-۱۴ مسئلهٔ ۱۵. یک "قرص ^{235}U" که آمادهٔ ذوب مجدد و ساختن کلاهک برای یک موشک است.

●●۱۶- شکافت ^{238}U توسط نوترونهای سریع را در نظر بگیرید. در یک رویداد شکافت، هیچ نوترونی گسیل نشده است و محصولهای نهایی پایدار، پس از واپاشی بتای پاره‌های شکافت اولیه، ^{140}Ce و ^{90}Ru هستند. (الف) تعداد کل رویدادهای واپاشی بتا در این دو زنجیرهٔ واپاشی بتا چقدر است؟ (ب) برای این فرایند شکافت، Q را محاسبه کنید. جرمهای اتمی و ذره‌ای مربوط عبارت‌اند از:



^{238}U ۲۳۸/۰۵۰۷۹u ^{140}Ce ۱۳۹/۹۰۵۴۳u



n ۱/۰۰۸۶۶u ^{90}Ru ۹۸/۹۰۵۹۴u

●●۱۷- فرض کنید درست پس از شکافت ^{236}U بنا بر معادلهٔ ۴۳-۱، هسته‌های ^{140}Xe و ^{94}Sr حاصل، درست در سطحهای خود در تماس‌اند. (الف) با فرض اینکه هسته‌ها کروی‌اند، انرژی پتانسیل الکتریکی وابسته به دافعهٔ میان دو پارهٔ شکافت را محاسبه کنید. (*راهنمایی:* از معادلهٔ ۴۲-۳ برای محاسبهٔ شعاع پاره‌ها استفاده کنید.) (ب) این انرژی را با انرژی آزاد شده در یک رویداد شکافت نوعی مقایسه کنید.



بخش ۴۳-۴ راکتور هسته‌ای

●۱۸– یک راکتور شکافت ۲۰۰MW که نیمی از سوخت خود را در ۳/۰۰y مصرف می‌کند، در ابتدا حاوی چقدر ^{235}U بوده است؟ فرض کنید که همهٔ انرژی تولید شده ناشی از شکافت ^{235}U است و این نوکلید فقط توسط فرایند شکافت مصرف شده است.

●●۱۹– وقتی تابش حاصل از یک نوکلید پرتوزا در ماده جذب می‌شود، انرژی گرمایی تولید شده می‌تواند به عنوان مبنای یک منبع انرژی کوچک برای استفاده در ماهواره‌ها، ایستگاههای هواشناسی دوردست، و سایر مکانهای منزوی باشد. چنین نوکلیدهای پرتوزایی به وفور در راکتورهای هسته‌ای تشکیل می‌شوند و آنها را می‌توان به طریق شیمیایی از سوخت مصرف شده جدا کرد. یک نوکلید پرتوزای مناسب ^{238}Pu $(T_{1/2} = 87/7\,y)$ است، که گسیلندهٔ آلفا با $Q = 5/50\,MeV$ است. انرژی گرمایی تولید شده در ۱/۰۰kg از این ماده با چه آهنگی تولید می‌شود؟

●●۲۰– (مسئلهٔ ۱۹ را ببینید.) $^{90}Sr\,(T_{1/2} = 29\,y)$ یکی از چندین محصولهای شکافت است که می‌توان آن را به طور شیمیایی از سوخت مصرف شدهٔ یک راکتور طبیعی به دست آورد. این ایزوتوپ در راکتورهای بزرگ نوعی با آهنگی حدود ۱۸ kg/s تولید می‌شود. این ایزوتوپ با واپاشی پرتوزای خود، انرژی گرمایی را با آهنگ ۰/۹۳W/g تولید می‌کند. (الف) انرژی فروپاشی مؤثر Q_{eff} وابسته به واپاشی هستهٔ ^{90}Sr را محاسبه کنید (این انرژی شامل سهمهایی از واپاشی محصولهای دختر ^{90}Sr در زنجیرهٔ واپاشی آن است، ولی نوترونها که به طور کامل از نمونه خارج می‌شوند، سهمی ندارند.) (ب) می‌خواهیم یک منبع انرژی مولد ۱۵۰ W (برق) را برای استفاده در راه‌اندازی ابزاری الکترونیکی در بخش دیدبانی آکوستیکی یک زیر دریایی، بنا کنیم. اگر منبع انرژی مبتنی بر انرژی گرمایی تولید شده توسط ^{90}Sr باشد و اگر بازدهی فرایند تبدیل انرژی گرمایی – انرژی الکتریکی ۵/۰٪ باشد، به چقدر ^{90}Sr نیاز است؟

●●۲۱–زمان یک نسل نوترون t_{gen} در یک راکتور، زمان متوسط مورد نیاز برای آن است که یک نوترون سریع گسیل شده در رویداد شکافت، توسط کندساز تا انرژی گرمایی کند شده و سپس رویداد شکافت دیگری آغاز شود. فرض کنید که توان خروجی راکتور در زمان $t = 0$ برابر با P_0 باشد. نشان دهید توان خروجی در زمان بعدی t برابر $P(t)$ است که $P(t) = P_0 k^{t/t_{gen}}$ و k ضریب تکثیر است. برای توان خروجی ثابت، $k = 1$.

●●۲۲–راکتوری با توان ۴۰۰MW با زمان نسل نوترون (مسئلهٔ ۲۱ را ببینید) ۳۰/۰ms کار می‌کند. اگر توان در مدت ۵/۰۰min با ضریب تکثیر ۱/۰۰۰۳ افزایش یابد، توان خروجی در پایان ۵/۰۰min چقدر است؟

●●۲۳–(الف) نوترونی به جرم m_n و انرژی جنبشی K با یک اتم ساکن به جرم m برخورد کشسان رودررو می‌کند. نشان دهید که کسر انرژی جنبشی از دست رفتهٔ نوترون با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{4 m_n m}{(m + m_n)^2}$$

$\Delta K / K$ را برای هر یک از موارد زیر به عنوان اتم ساکن پیدا کنید: (ب) هیدروژن، (پ) دوتریوم، (ت) کربن و (ث) سرب. (ج) اگر در ابتدا $K = 1/00\,MeV$ و اتمهای ساکن مورد برخورد دوتریوم، یک کندساز متداول، باشد آنگاه چه تعداد از چنین برخوردهایی باید صورت پذیرد تا انرژی جنبشی نوترون به مقدار گرمایی (۰/۰۲۵eV) کاهش یابد؟ (در کندسازهای واقعی، بیشتر برخوردها رودررو نیست.) **SSM**

●●۲۴–زمان یک نسل نوترون t_{gen} (مسئلهٔ ۱۸ را ببینید) در یک راکتور خاص برابر با ۱/۰ms است. اگر این راکتور با توان ۵۰۰MW کار کند، حدوداً در هر لحظه چه تعداد نوترون آزاد در راکتور وجود دارد؟

●●۲۵–زمان یک نسل نوترون (مسئلهٔ ۲۱ را ببینید) یک راکتور خاص برابر با ۱/۳ ms است. این راکتور، انرژی را با آهنگ ۱۲۰۰/۰MW تولید می‌کند. برای انجام بررسیهای فنی معین، توان به طور موقت تا ۳۵۰/۰۰MW کاسته می‌شود. اگر بخواهیم که این گذار به توان کاهش یافته، ۲/۶۰۰۰s طول بکشد، ضریب تکثیر باید در چه مقدار (ثابت) تنظیم شود تا گذار در زمان موردنظر انجام شود؟ **WWW SSM**

بخش ۴۳-۵ یک راکتور هسته‌ای طبیعی

●۲۶–چه مدت پیش نسبت $^{235}U/^{238}U$ در معادن اورانیوم طبیعی برابر ۰/۱۵ بوده است؟

●۲۷–تخمین زده می‌شود که راکتور شکافت طبیعی که در بخش ۴۳-۵ معرفی شد، ۱۵ گیگاوات- سال انرژی را در طی نیم- عمر خود تولید کرده است. (الف) اگر این راکتور برای ۲۰۰۰۰۰y دوام آورده باشد، با چه توان متوسطی عمل کرده است؟ (ب) در حین نیم- عمر خود چند کیلوگرم ^{235}U مصرف کرده است؟

●●۲۸–معلوم شده است که برخی از نمونه‌های اورانیوم حاصل از محل راکتور طبیعی معرفی شده در بخش ۴۳-۵، به جای آنکه از ^{235}U تهی شده باشند، قدری از این ایزوتوپ *غنی شده‌اند*. این غنی شدن را بر اساس نوترون جذب شده توسط ایزوتوپ فراوان ^{238}U و واپاشیهای بعدی بتا و آلفای محصولهای آن توجیه کنید.

●●۲۹–امروزه سنگ معدن اورانیوم استخراج شده حاوی فقط ۰/۷۲٪ از ایزوتوپ شکافت پذیر ^{235}U است، که برای تولید سوخت راکتوری مناسب شکافت با نوترونهای گرمایی بسیار ناچیز است. به همین دلیل، سنگ معدن استخراج شده باید با ^{235}U غنی شود. هم $^{235}U\,(T_{1/2} = 7/0 \times 10^8\,y)$ و هم $^{238}U\,(T_{1/2} = 4/5 \times 10^9\,y)$ پرتوزا هستند. چه مدت پیش، سنگ معدن اورانیوم طبیعی، یک سوخت راکتور عملی با نسبت $^{235}U/^{238}U$ برابر ۳/۰ بوده است؟ **SSM**

بخش ۴۳-۶ گداخت گرما- هسته‌ای: فرایند اصلی

●۳۰- ثابت کنید که گداخت ۱/۰kg دوتریوم با واکنش



$$^{2}H + ^{2}H \rightarrow ^{3}He + n \qquad (Q = +3.27\,MeV)$$

می‌تواند یک لامپ ۱۰۰W را برای 3×10^{4}y روشن نگهدارد.

●●۳۱- بلندی سد کولنی را برای برخورد رودررو دو دوترون محاسبه کنید. شعاع مؤثر دوترون را ۲/۱fm در نظر بگیرید. SSM

●●۳۲- در شکل ۴۳-۹، معادلهٔ $n(K)$، چگالی عددی بر یکای انرژی ذره‌ها، چنین است

$$n(K) = 1.13n\frac{K^{1/2}}{(kT)^{3/2}}e^{-K/kT}$$

که در آن n چگالی عددی کل ذره است. در مرکز خورشید، دما برابر با 1.50×10^{7}K و انرژی پروتونی متوسط K_{avg} برابر با ۱/۹۴KeV است. نسبت چگالی عددی پروتونی در ۵/۰۰KeV به چگالی عددی در انرژی پروتونی متوسط چقدر است؟

●●۳۳-بلندی سدّ کولنی را برای دو هستهٔ ^{7}Li که به سوی یکدیگر با انرژی جنبشی یکسان شلیک شده‌اند، محاسبه کنید. (*راهنمایی:* از معادلهٔ ۴۲-۳ برای محاسبهٔ شعاع هسته‌ها استفاده کنید.)

●●۳۴-برای غلبه بر سدِ کولنی جهت گداخت، روشهایی غیر از گرم کردن مادهٔ گداخت پذیر پیشنهاد شده است. برای مثال، اگر از دو شتابدهندهٔ ذره برای شتاب دادن دو باریکهٔ دوترون به طور مستقیم به سوی یکدیگر استفاده کنیم به گونه‌ای که به طور رودررو به هم برخورد کنند، (الف) هر شتابدهنده برای آنکه دوترونهای برخورد کننده بر سدِ کولنی غلبه کنند به چه ولتاژی نیاز دارد؟ (ب) فکر می‌کنید چرا این روش در حال حاضر مورد استفاده قرار نمی‌گیرد؟

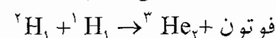
بخش ۴۳-۷ گداخت گرما- هسته‌ای در خورشید و ستارگان دیگر

●۳۵-خورشید دارای جرم 2.0×10^{30} kg است و انرژی را با آهنگ 3.9×10^{26} W تابش می‌کند. (الف) خورشید با چه آهنگی جرم خود را به سایر شکلهای انرژی تبدیل می‌کند؟ (ب) چه کسری از جرم اولیهٔ خورشید، از زمانی که شروع به سوزاندن هیدروژن در حدود 4.5×10^{9} y پیش کرده، از این طریق تلف شده است؟

●۳۶-دیده‌ایم که Q برای چرخهٔ کامل گداخت پروتون- پروتون برابر با ۲۶/۷MeV است. چگونه می‌توانید این عدد را به مقدارهای Q واکنشهایی که این چرخه را، به ترتیبی که در شکل ۴۳-۱۰ نشان داده شده است، ایجاد می‌کنند ربط دهید؟

●۳۷-نشان دهید انرژی آزاد شده هنگامی که سه ذرهٔ آلفا برای تشکیل ^{12}C همجوشی کنند برابر با ۷/۲۷ MeV است. جرم اتمی ^{4}He برابر با ۴/۰۰۲۶ u و جرم اتمی ^{12}C برابر با ۱۲/۰۰۰۰u است.

●۳۸-برای این فرایند همجوشی، Q چقدر است؟

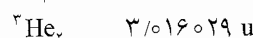


$$^{2}H_{1} + ^{1}H_{1} \rightarrow ^{3}He_{2} + \text{فوتون}$$

در اینجا برخی از جرمهای اتمی داده شده است. 



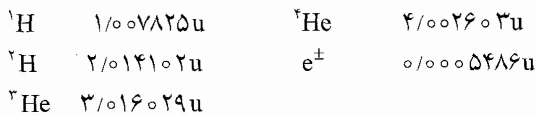
$^{2}H_{1}$	۲/۰۱۴۱۰۲ u	$^{1}H_{1}$	۱/۰۰۷۸۲۵ u



$^{3}He_{2}$ ۳/۰۱۶۰۲۹ u

●●۳۹- فرض کنید پروتونها در یک گلوله داغ پروتونها هر یک دارای انرژی جنبشی برابر kT هستند که k ثابت بولتزمن و T دمای مطلق هستند. اگر $T = 1\times10^{7}$ K باشد، کمترین جدایی بین دو پروتون (به طور تقریب) چقدر می‌تواند باشد؟

●●۴۰- سه مقدار Q گزارش شده برای واکنشهای داده شده در شکل ۴۳-۱۰ را ثابت کنید. جرمهای اتمی و ذره‌ای مورد نیاز عبارت‌اند از



^{1}H	۱/۰۰۷۸۲۵u	^{4}He	۴/۰۰۲۶۰۳u
^{2}H	۲/۰۱۴۱۰۲u	$e^{\pm}$	۰/۰۰۰۵۴۸۶u
^{3}He	۳/۰۱۶۰۲۹u		

(*راهنمایی:* جرمهای هسته‌ای و اتمی را به دقت تمیز دهید، و پوزیترونها را به طور کامل در نظر بگیرید.)

●●۴۱-(الف) آهنگی که با آن خورشید، نوترینوها را تولید می‌کند محاسبه کنید. فرض کنید این تولید انرژی کاملاً از طریق چرخهٔ گداخت پروتون-پروتون صورت می‌پذیرد. (ب) نوترینوهای خورشیدی با چه آهنگی به سطح کرهٔ زمین می‌رسند؟

●●۴۲-انرژی آزاد شده توسط (الف) گداخت ۱/۰kg هیدروژن را در اعماق خورشید و (ب) شکافت ۱/۰kg از ^{235}U در یک راکتور شکافت، محاسبه و با هم مقایسه کنید.

●●۴۳-زغال سنگ مطابق واکنش $C + O_2 \rightarrow CO_2$ می‌سوزد. گرمای احتراقی برابر با 3.3×10^{7} J/kg از کربن اتمی مصرف شده است. (الف) آن را بر حسب انرژی بر اتم کربن بیان کنید. (ب) آن را بر حسب انرژی بر کیلوگرم واکنش دهنده‌های اولیه، کربن و اکسیژن، بیان کنید. (پ) فرض کنید که خورشید (به جرم 2.0×10^{30}kg) از کربن و اکسیژن با نسبتهای قابل احتراق ساخته شده است و به تابش انرژی با آهنگ حال حاضر خود، یعنی 3.9×10^{26}W، ادامه می‌دهد. خورشید چقدر دوام می‌آورد؟ WWW SSM

●●۴۴-در ستاره‌های معینی چرخهٔ *کربنی* مؤثرتر از چرخهٔ پروتون- پروتون در تولید انرژی است. این چرخهٔ کربنی عبارت است از



$$^{12}C + ^{1}H \rightarrow ^{13}N + \gamma \qquad Q_1 = 1.95\,MeV$$



$$^{13}N \rightarrow ^{13}C + e^{+} + \nu \qquad Q_2 = 1.19\,MeV$$



$$^{13}C + ^{1}H \rightarrow ^{14}N + \gamma \qquad Q_3 = 7.55\,MeV$$



$$^{14}N + ^{1}H \rightarrow ^{15}O + \gamma \qquad Q_4 = 7.30\,MeV$$



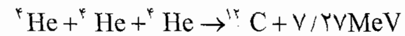
$$^{15}O \rightarrow ^{15}N + e^{+} + \nu \qquad Q_5 = 1.73\,MeV$$



$$^{15}N + ^{1}H \rightarrow ^{12}C + ^{4}He \qquad Q_6 = 4.97\,MeV$$

(الف) نشان دهید این چرخه از لحاظ اثرهای کلی دقیقاً معادل با چرخهٔ پروتون- پروتون شکل ۴۳-۱۰ ب است. (ب) ثابت کنید که این دوچرخه، همانطور که انتظار می‌رود، دارای مقدار Q یکسانی هستند.

●●۴۵-ستاره‌ای همهٔ هیدروژن خود را به هلیوم تبدیل می‌کند و بدین ترتیب به ترکیب ۱۰۰٪ هلیوم می‌رسد. سپس این هلیوم را از طریق فرایند سه گانه- آلفای زیر به کربن تبدیل می‌کند

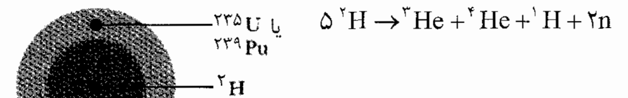


$$^{4}He + ^{4}He + ^{4}He \to ^{12}C + 7/27\,MeV$$

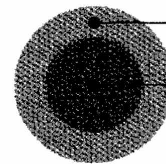
جرم این ستاره $4/6\times10^{32}$ kg است و انرژی را با آهنگ $5/3\times10^{30}$ W تولید می‌کند. چقدر طول می‌کشد که همهٔ هلیوم با این آهنگ به کربن تبدیل شود؟ GO

۴۶●●● - فرض کنید جرم مغز خورشید یک هشتم جرم خورشید است و درون کره‌ای که شعاع آن یک‌-چهارم شعاع خورشیدی است فشرده شده باشد. همچنین فرض کنید که ۳۵٪ از ترکیب جرم مغز، هیدروژن است و اساساً همهٔ انرژی خورشیدی در آنجا تولید می‌شود. اگر خورشید به سوزاندن هیدروژن با آهنگ محاسبه شده در مسئلهٔ نمونهٔ ۴۳-۵ ادامه دهد، چقدر طول می‌کشد تا هیدروژن به طور کامل مصرف شود؟ جرم خورشید برابر با $2/0\times10^{30}$ kg است.

۴۷●● - شکل ۴۳-۱۵ طرح پیشنهادی اولیه برای بمب هیدروژنی را نشان می‌دهد. سوخت گداخت، دوتریوم ^{2}H است. دما و چگالی ذره‌ای بالای مورد نیاز برای گداخت توسط یک ماشهٔ بمب اتمی فراهم می‌شود که حاوی سوخت شکافتی ^{235}U یا ^{239}Pu است که برای ایجاد انفجار که منجر به موج شوکی روی دوتریوم می‌شود، آرایش یافته است. واکنش گداخت چنین است



$$5\,^{2}H \to ^{3}He + ^{4}He + ^{1}H + 2n$$



شکل ۴۳-۱۵ مسئلهٔ ۴۷

(الف) مقدار Q را برای این واکنش شکافت محاسبه کنید. برای جرمهای اتمی مورد نیاز، مسئلهٔ ۴۰ را ببینید. (ب) مرتبهٔ (مسئلهٔ ۱۴ را ببینید) بخش گداختی بمب را در صورتی محاسبه کنید که بمب شامل ۵۰۰kg دوتریوم باشد که از آن مقدار، ۳۰/۰٪ گداخت پیدا می‌کند.

بخش ۴۳-۸ گداخت گرما هسته‌ای کنترل شده

۴۸● - مقدارهای Q گزارش شده در معادله‌های ۴۳-۱۳، ۴۳-۱۴ و ۴۳-۱۵ را تحقیق کنید. جرمهای مورد نیاز عبارت‌اند از

^{1}H	۱/۰۰۷۸۲۵ u	^{4}He	۴/۰۰۲۶۰۳ u
^{2}H	۲/۰۱۴۱۰۲ u	n	۱/۰۰۸۶۶۴ u
^{3}H	۳/۰۱۶۰۴۹ u		

۴۹●●● - تقریباً ۰/۰۱۵٪ جرم آب معمولی را "آب سنگین" تشکیل می‌دهد که در آن یکی از دو هیدروژن در یک مولکول H_2O با دوتریوم، ^{2}H، جایگزین شده است. اگر همهٔ ^{2}H در یک لیتر آب را در ۱/۰۰ روز به طریقی "بسوزانیم" که در آن دوتریوم با واکنش $^{2}H + ^{2}H \to ^{3}He + n$ گداخت پیدا کند، چه مقدار توان گداخت متوسط می‌تواند به دست آید؟

مسئله‌های اضافی

۵۰- در واکنش گداخت دوترون- تریتون معادلهٔ ۴۳-۱۵، انرژی جنبشی (الف) ذرهٔ آلفا و (ب) نوترون چقدر است؟ از انرژیهای جنبشی نسبتاً کوچک دو ذرهٔ ترکیب شونده چشم‌پوشی کنید.

۵۱- در مرکز خورشید، چگالی برابر با $1/5\times10^{5}$ kg/m^3 است و ترکیب آن از لحاظ جرمی، ۳۵٪ هیدروژن و ۶۵٪ هلیوم است. (الف) چگالی پروتونها در آنجا چقدر است؟ (ب) نسبت این چگالی به چگالی ذره‌ها در یک گاز آرمانی در شرایط متعارفی دما ($0°C$) و فشار ($1/01\times10^{5}$ Pa) چیست؟

۵۲- مقدار Q مؤثر برای چرخهٔ پروتون- پروتون شکل ۴۳-۱۰ برابر با 26/2MeV است. (الف) این انرژی را به صورت انرژی بر کیلوگرم هیدروژن مصرف شده بیان کنید. (ب) توان خورشید برابر با $3/9\times10^{26}$ W است. اگر انرژی خورشید از چرخهٔ پروتون-پروتون به دست آید، با چه آهنگی هیدروژن را از دست می‌دهد؟ (پ) با چه آهنگی جرم خود را از دست می‌دهد؟ (ت) دلیل اختلاف نتایج (ب) و (پ) را بیان کنید. (ث) جرم خورشید برابر با $2/0\times10^{30}$ kg است. اگر خورشید جرم خود را با آهنگ ثابت محاسبه شده در قسمت (پ) از دست بدهد، چقدر طول می‌کشد که ۰/۱٪ از جرم خود را از دست دهد؟

۵۳- ترس زیادی وجود دارد که فناوری راکتور قدرت هسته‌ای احتمال جنگ هسته‌ای را افزایش دهد، زیرا راکتورها می‌توانند نه فقط برای تولید انرژی الکتریکی به کار روند، بلکه همچنین می‌توانند از طریق گیراندازی نوترونی با ^{238}U کم‌ارزش، محصول فرعی ^{239}Pu را بسازند، که "سوختی" برای بمبهای هسته‌ای است. چه دنبالهٔ ساده‌ای از واکنشها، شامل گیراندازی نوترونی و واپاشی بتا، این ایزوتوپ پلوتونیوم را به دست می‌دهد؟

۵۴- عبارتهای توزیع تندی ماکسول برای مولکولهای گاز در فصل ۱۵ داده شده است. (الف) نشان دهید که *محتملترین انرژی* با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$K_p = \frac{1}{2}kT$$

این نتیجه را با منحنی توزیع انرژی شکل ۴۳-۹، که برای آن $T = 1/5\times10^{7}$ K است، تحقیق کنید. (ب) نشان دهید که *محتملترین تندی* با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

مقدار آن را برای پروتونها در دمای $T = 1/5\times10^{7}$ K به دست آورید. (پ) نشان دهید که *انرژی مربوط به محتملترین تندی* (که همان محتملترین انرژی نیست) برابر است با

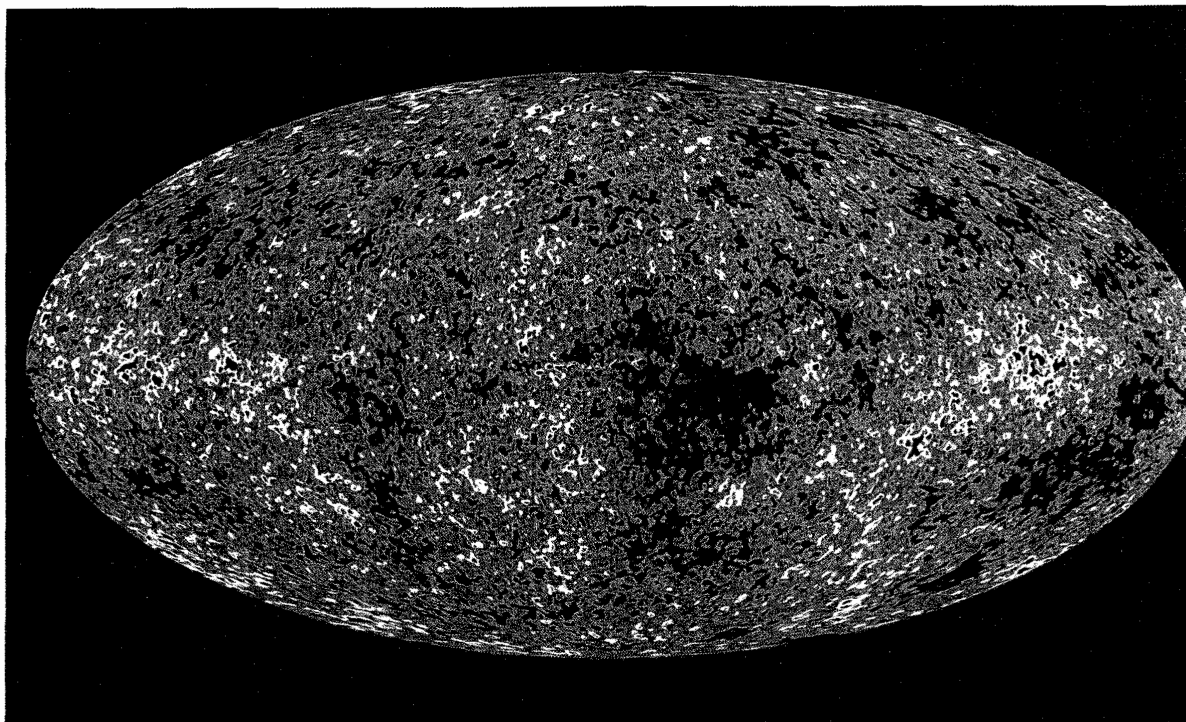
$$K_{v,p} = kT$$

این کمیت را روی شکل ۴۳-۹ مشخص کنید.

۵۵- ثابت کنید، همانطور که در بخش ۴۳-۲ بیان شد، نوترونهای در حال تعادل با ماده در دمای اتاق، 300K، دارای انرژی جنبشی متوسطی در حدود 0/04eV هستند.

۵۶- ثابت کنید، همانطور که در جدول ۴۳-۱ آمده است، شکافت ^{235}U در 1/0kg از UO_2 (که طوری غنی شده است که ۳/۰٪ از کل اورانیوم آن ^{235}U است) می‌تواند یک لامپ 100W را به مدت 690y روشن نگهدارد.

۴۴ کوارکها، لپتونها، و مهبانگ



این تصویر علامت‌گذاری شدهٔ رنگی، در واقع عکسی از عالم به هنگامی است که فقط ۳۷۹۰۰۰y عمر داشته است، یعنی تقریباً ۱۳/۷×۱۰^۹ y پیش. این تصویر، آن چیزی است که اگر در آن هنگام به همهٔ جهتها می‌نگریستید می‌توانستید مشاهده کنید (دید، در چنین تخم مرغی محدود شده است). لکه‌های نور ناشی از مجموعه‌ای از اتمهاست که در سرتاسر "آسمان" کشیده شده‌اند، ولی کهکشانها، ستارگان، و سیاره‌ها هنوز شکل نگرفته‌اند.

چگونه می‌تواند چنین عکسی از عالم اولیه برداشته شده باشد؟

پاسخ در همین فصل.

۴۴-۱ فیزیک چیست؟

فیزیکدانان اغلب برای متمایز ساختن نظریه‌های نسبیت و فیزیک کوانتومی از نظریه‌های مکانیک نیوتونی و الکترومغناطیس ماکسولی، که روی هم به عنوان "فیزیک کلاسیک" شناخته می‌شوند، به عنوان "فیزیک جدید" نام می‌برند. با گذشت سالها، به نظر می‌رسد که لفظ "جدید" برای نظریه‌هایی که مبنای آنها به سالهای آغازین قرن بیستم باز می‌گردد، کمتر و کمتر مناسب باشد. با این حال، این عنوان همچنان به کار برده می‌شود.

در این واپسین فصل، دو مسیر پژوهشی را که واقعاً "جدید" هستند ولی در عین حال دیرینه‌ترین ریشه‌ها را دارند، بررسی می‌کنیم. آنها روی دو پرسش به طور فریبنده‌ای ساده، متمرکزند:

عالم از چه چیزی ساخته شده است؟

چگونه عالم به شکلی که هست درآمده است؟

پیشرفت در پاسخگویی به این پرسشها در چند دهۀ اخیر سرعت گرفته است.

بسیاری از دیدگاههای جدید مبتنی بر آزمایشهایی هستند که با شتابدهنده‌های بزرگ ذره‌ها به انجام رسیده‌اند. ولی، با کوبیدن ذره‌ها به یکدیگر در انرژیهای بالاتر و بالاتر در شتابدهنده‌های بزرگتر و بزرگتر، فیزیکدانان به این باور رسیدند که هیچ شتابدهندۀ زمینی قابل تصوری نمی‌تواند ذره‌هایی را با انرژیهای به حد کافی بزرگ برای آزمودن نظریه‌های غایی فیزیک، تولید کند. تنها یک چشمۀ ذره‌ها با چنین انرژیهایی وجود داشته است، و آن خودِ عالم در چند میلی ثانیۀ آغاز پیدایشش بود.

در این فصل با اصطلاحهای جدید بی‌شمار و سیلی واقعی از ذره‌ها با نامهایی مواجه می‌شوید که لزومی ندارد سعی کنید آنها را به خاطر بسپارید. اگر برای لحظه‌ای سردرگم شوید، شما در سردرگمی فیزیکدانانی شریک شده‌اید که با این پیشرفتها زندگی کرده‌اند و در این مدت چیزی جز افزایش پیچیدگی ندیدند با این امید که اندکی از آنها را درک کنند. ولی اگر حیرت‌زده شده‌اید، شما در شور و هیجان فیزیکدانانی که اطلاعات حیرت‌آوری از شتابدهنده‌ها به دست آورده‌اند سهیم هستید، در عین اینکه نظریه‌ها یکی پس از دیگری ماندنی‌ترند و سرانجام به روشنی موانع را پشت سر خواهند گذاشت.

مهمترین پیام این کتاب این است که اگرچه آدمیان چیزهای فراوانی از فیزیک جهان آموخته‌اند، با این حال هنوز رازهای بزرگی بر جای مانده است.

۴۴-۲ ذره‌ها، ذره‌ها، ذره‌ها

در سالهای ۱۹۳۰/۱۳۱۵، فیزیکدانان زیادی وجود داشتند که می‌پنداشتند مسئلۀ ساختار غایی ماده در مسیر خوبی برای حل‌شدن است. اتم را می‌توان فقط بر حسب سه ذره- الکترون، پروتون، و نوترون- درک کرد. فیزیک کوانتومی برای ساختار اتم و واپاشی پرتوزای آلفا خیلی مفید واقع شد. نوترینو مفروض پنداشته می‌شد و اگرچه تا آن موقع مشاهده نشده بود، با این حال *انریکو فرمی* آن را در نظریۀ موفق واپاشی بتا وارد کرده بود. این امیدواری وجود داشت که نظریۀ کوانتومی که برای پروتونها و نوترونها به کار برده شده بود، خیلی زود ساختار هسته را نیز توضیح دهد. دیگر چه چیزی در هسته وجود داشت؟

این رضامندی دیری نپایید. پایان آن دهه شاهد آغاز دوره‌ای از کشف ذره‌های جدید بود که تا به امروز نیز ادامه دارد. ذره‌های جدید نامها و نمادهایی از قبیل *موئون* (μ)، *پیون* (π)، *کائون* (K)، و *سیگما* (Σ) دارند. همۀ این ذره‌های جدید ناپایدارند؛ یعنی، آنها به طور خود به خودی، مطابق همان توابع زمانی که برای هسته‌های ناپایدار به کار می‌رود، به انواع دیگر ذره‌ها تبدیل می‌شوند. بنابراین، اگر $N_\circ$ ذره از هر نوع در یک نمونه در زمان $t=\circ$ وجود داشته باشد، تعداد N آن ذره‌ها که در زمان بعدی t وجود دارند با معادلۀ ۴۲-۱۵ داده می‌شود

$$N = N_\circ e^{-\lambda t} \qquad (۴۴\text{-}۱)$$

آهنگ واپاشی R، از یک مقدار اولیۀ $R_\circ$، با معادلۀ ۴۲-۱۶ داده می‌شود

$$R = R_\circ e^{-\lambda t} \qquad (۴۴\text{-}۲)$$

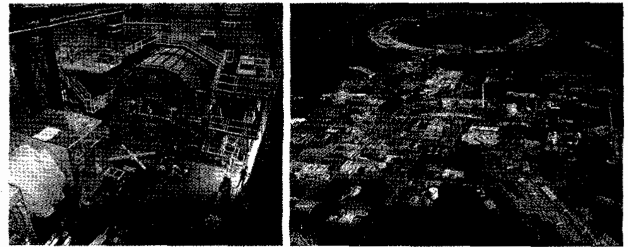
و نیم- عمر $T_{1/2}$، ثابت واپاشی λ، و عمر میانگین τ با معادلۀ ۴۲-۱۸ به هم مربوطاند

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2 \qquad (۴۴\text{-}۳)$$

نیم عمرهای ذره‌های جدید در گسترۀ از حدود 10^{-6}s تا 10^{-23}s قرار دارند. در واقع، عمر برخی از ذره‌ها به حدی کوتاه است که نمی‌توان آنها را به طور مستقیم آشکارسازی کرد ولی می‌توان آنها را فقط با شواهد غیر مستقیمی مورد تأیید قرار داد.

این ذره‌های جدید معمولاً در برخوردهای رودررو میان پروتونها یا الکترونهایی ایجاد می‌شوند که در شتابدهنده‌هایی واقع در مکانهایی نظیر آزمایشگاه ملی *بروکهاون*[1] (در لانگ آیلند، نیویورک)، *آزمایشگاه فرمی*[2] (نزدیک شیکاگو)، *سرن*[3] (نزدیک ژنو، سوئیس)، *اسلک*[4] (در دانشگاه استنفورد واقع در کالیفرنیا)، و *دِسی*[5] (نزدیک هامبورگ، آلمان)، با انرژیهای بالایی شتاب می‌گیرند. آنها با آشکارسازهای ذره‌ای کشف شده‌اند که تکامل زیادی یافته‌اند و فقط از نظر اندازه و پیچیدگی هماوردی برای شتابدهنده‌های چند دهه پیش بوده‌اند.

1. Brookhaven
2. Fermilab
3. CERN
4. SLAC
5. DESY



(الف) آشکارساز برخورد دهندهٔ یون سنگین نسبیتی (RHIC)[1] در آزمایشگاه ملی بروکهاون یک شگفتی مهندسی عظیم و پیچیده است که برای آشکار ساختن ذره‌ها در انرژیهای بالا طراحی شده است. (ب) با وجود چنین عظمتی، این آشکارساز هنوز کوچکتر از خود برخورد دهنده است، که روی دایرهٔ نشان داده شده در بالای شکل قرار دارد. برخورد دهنده، شتابدهنده‌ای دایره‌ای است که پیرامون آن ۳/۹ km است.

امروزه چند صد ذرهٔ شناخته شده وجود دارد. نامگذاری آنها از حروف الفبای یونانی گرفته شده است، و بیشتر آنها فقط با اعدادی که در گاهنامه‌های منتشر شده به آنها اختصاص داده می‌شود، شناخته شده‌اند. برای آنکه مفهومی برای این دسته ذره‌ها داشته باشیم، در پی معیار فیزیکی ساده‌ای هستیم که بر مبنای آن بتوانیم ذره‌ها را دسته‌بندی کنیم. نتیجهٔ این کار به عنوان **مدل استاندارد** ذره‌ها شناخته شده است. اگرچه این مدل همواره توسط نظریه‌پردازان به چالش گرفته شده است، با این حال بهترین طرح برای درک همهٔ ذره‌های شناخته شده تا به امروز است.

برای بررسی مدل استاندارد، سه دسته‌بندی ناقص زیر را میان ذره‌های شناخته شده در نظر می‌گیریم: فرمیون یا بوزون، هادرون یا لپتون، ذره یا پاد ذره؟ اکنون این دسته‌ها را یک به یک بررسی می‌کنیم.

فرمیون یا بوزون؟

همانطور که برای الکترونها، پروتونها، و نوترونها در بخش ۳۲-۷ توضیح دادیم، همهٔ ذره‌ها دارای اندازه حرکت زاویه‌ای ذاتی موسوم به **اسپین** هستند. با تعمیم نمادگذاری آن بخش، می‌توانیم مؤلفهٔ اسپین $\vec{S}$ را در هر جهتی (فرض کنید آن مؤلفه در جهت محور z است) چنین بنویسیم

$$S_z = m_s\hbar \qquad m_s = s, s-1, \cdots, -s \quad \text{به ازای} \qquad (۴۴-۴)$$

که در آن $\hbar$ برابر با $h/2\pi$ ، m_s *عدد کوانتومی مغناطیسی اسپینی*، و s *عدد کوانتومی اسپینی* است. این کمیت آخر می‌تواند یا مقدارهای نیم- درست مثبت $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots)$ یا مقدارهای درست نامنفی $(0, 1, 2, \ldots)$ داشته باشد. برای مثال، الکترون دارای مقدار $s=\frac{1}{2}$ است. بنابراین، اسپین الکترون (که در امتداد هر جهتی، مانند جهت z، اندازه گرفته می‌شود) می‌تواند دارای این مقدارها باشد

$$S_z = \frac{1}{2}\hbar \qquad \text{(اسپین بالا)}$$

یا

$$S_z = -\frac{1}{2}\hbar \qquad \text{(اسپین پایین)}$$

به طور گمراه کننده‌ای، اصطلاح *اسپین* به دو روش به کار می‌رود: کاملاً به معنی اندازه حرکت زاویه‌ای ذاتی $\vec{S}$، ولی اغلب به طور غیر دقیق به معنی عدد کوانتومی اسپینی s هم به کار رفته است. برای مثال، در حالت آخری گفته می‌شود ذره‌ای با اسپین $\frac{1}{2}-$.

ذره‌های با عددهای کوانتومی اسپینی نیم — درست (مانند الکترونها)، پس از آنکه *فرمی*، کسی که (به طور همزمان با *پل دیراک*) قانونهای آماری حاکم بر رفتار آنها را کشف کرد، *فرمیون* نامیده شده‌اند. پروتونها و نوترونها، مانند الکترونها، نیز دارای $s=\frac{1}{2}$ هستند و فرمیون‌اند.

ذره‌هایی با عددهای کوانتومی اسپینی صفر یا درست، پس از آنکه فیزیکدان هندی *ساتیندرانات بوز*[2]، کسی که (به طور همزمان با آلبرت اینشتین) قانونهای آماری حاکم بر *این* ذره‌ها را کشف کرد، **بوزون** نامیده شده‌اند. فوتونها، که $s=1$ دارند، بوزون‌اند؛ بزودی ذره‌های دیگری را در این دسته مشاهده خواهید کرد.

این ممکن است راهی کم اهمیت برای دسته‌بندی ذره‌ها به نظر برسد، ولی آن به دلیل زیر بسیار مهم است:

> فرمیونها از اصل طرد پاؤلی پیروی می‌کنند، که مبین آن است که فقط یک ذره می‌تواند به یک حالت کوانتومی معین اختصاص داده شود. بوزونها از این اصل پیروی *نمی‌کنند*. هر تعداد بوزون می‌تواند یک حالت کوانتومی معین را اشغال کند.

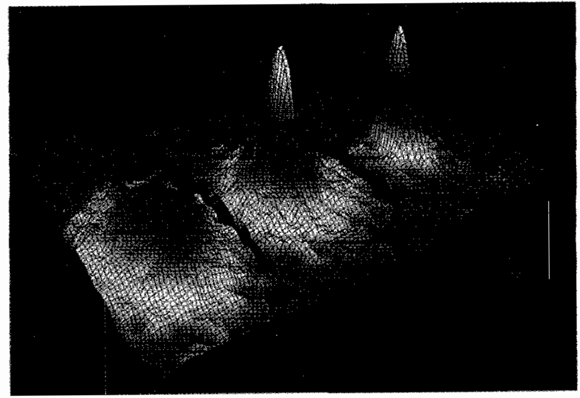
دیدیم که اصل طرد پاؤلی به هنگام "بناکردن" اتمها با اختصاص دادن الکترونها (اسپین $\frac{1}{2}-$) به حالتهای کوانتومی منفرد چقدر مهم است. به کارگیری این اصل به توصیف کامل ساختار و ویژگیهای اتمهایی از انواع مختلف و جامدهایی از قبیل فلزها و نیمرساناها می‌انجامد.

چون بوزونها از اصل پاؤلی پیروی نمی‌کنند؛ این ذره‌ها تمایل دارند در حالت کوانتومی پایینترین انرژی تجمع کنند. در سال ۱۹۹۵/۱۳۷۴، گروهی در *بولدر*[3] کلرادو موفق به ایجاد چگالشی از حدود ۲۰۰ اتم روبیدیوم- ۸۷ که بوزون هستند شدند- در یک تکْ حالت کوانتومی با انرژیی تقریباً برابر با صفر.

1. Relativistic Heavy Ion Collider

2. Satyendra Nath Bose

3. Boulder



شکل ۴۴-۱ سه نمودار از توزیع تندی ذره‌ای در بخار اتمهای روبیدیوم- ۸۷. دمای بخار به طور پیاپی از نمودار (الف) تا نمودار (پ) کاهش یافته است. نمودار (پ) قلهٔ تیزی را که به دور تندی صفر متمرکز شده است، نشان می‌دهد؛ این بدان معنی است که همهٔ اتمها در حالت کوانتومی یکسانی واقع‌اند. دستیابی به چنین چگالش بوز- اینشتین که غالباً *جام مقدس* فیزیک اتمی نامیده می‌شود، سرانجام در سال ۱۹۹۵/۱۳۷۴ گزارش شد.

برای آنکه این امر رخ دهد، روبیدیوم باید به صورت بخار با دمای بسیار پایین و چگالی بسیار بالا باشد تا موجهای دوبروی اتمهای منفرد، بزرگتر از فاصلهٔ جدایی میانگین میان اتمها باشند. هرگاه این شرط برقرار باشد، توابع موج این اتمهای منفرد همپوشانی می‌کنند و کلّ اتمهای گرد آمده، یک تکْ دستگاه کوانتومی (یک اتم بزرگ) می‌شود که این *چگالش بوز- اینشتین* نام دارد. شکل ۴۴-۱ نشان می‌دهد که با کم شدن دمای بخار روبیدیوم به حدود $1/70 \times 10^{-7}\,K$، اتمها در واقع به یک تکْ حالت کاملاً مشخص که متناظر با تندی تقریباً برابر صفر است، "می‌رمبند".

هادرون یا لپتون

ذره‌ها را همچنین می‌توانیم بر مبنای چهار نیروی بنیادی که بر آنها اثر می‌کنند، دسته‌بندی کنیم. *نیروی گرانشی* بر همهٔ ذره‌ها اثر می‌کند، ولی اثر آن در سطح ذره‌های زیر اتمی به قدری ضعیف است که نیازی به در نظر گرفتن این نیرو نداریم (دست کم در پژوهشهای امروزی نیازی نداریم). *نیروی الکترومغناطیسی* بر همهٔ ذره‌های *باردار شدهٔ الکتریکی* اثر می‌کند؛ اثرهای آن به خوبی شناخته شده است؛ و می‌توانیم هرگاه که نیاز داشته باشیم آن را در نظر بگیریم؛ ما کلاً این نیرو را در این فصل نادیده می‌گیریم.

می‌ماند *نیروی قوی*، که نیرویی است که نوکلئونها را به یکدیگر پیوند می‌دهد، و *نیروی ضعیف* که در واپاشی بتا و فرایندهای مشابه دخالت دارد. نیروی ضعیف روی همهٔ ذره‌ها و نیروی قوی روی برخی از ذره‌ها اثر می‌کند.

اینک می‌توانیم ذره‌ها را بر مبنای اینکه آیا نیروی قوی بر آنها اثر می‌کند یا نه، به طور نه‌چندان دقیقی دسته‌بندی کنیم. ذره‌هایی که نیروی قوی بر آنها اثر می‌کند، **هادرون** نامیده می‌شوند. ذره‌هایی که نیروی قوی بر آنها اثر *نمی‌کند* و نیروی ضعیف نیروی غالب است **لپتون** نامیده می‌شوند. پروتونها، نوترونها، و پیونها هادرون و الکترونها و نوترینوها لپتون هستند.

چون برخی از هادرونها، بوزون هستند (که آنها را *مزون* می‌نامیم)، می‌توانیم در میان هادرونها تمایز بیشتری ایجاد کنیم؛ پیون مثالی از این دسته است. سایر هادرونها، فرمیون هستند (که آنها را **باریون** می‌نامیم)؛ پروتون مثالی از این دسته است.

ذره یا پاد ذره؟

دیراک در سال ۱۹۲۸/۱۳۰۷ پیش‌بینی کرد که الکترون e^- باید دارای همتایی با بار مثبت، و با همان جرم و اسپین باشد. این همتا، *پوزیترون* e^+ است که در سال ۱۹۳۲/۱۳۱۱ توسط *کارل اندرسون*[1] در تابش کیهانی کشف شد. سپس فیزیکدانان بتدریج دریافتند که هر ذره‌ای دارای یک **پاد ذرهٔ** متناظر است. اعضای چنین جفتهایی دارای جرم و اسپین یکسانی هستند ولی بارهای الکتریکی (در صورتی که باردار باشند) و عددهای کوانتومی که هنوز آنها را معرفی نکرده‌ایم، با علامت مخالف دارند.

در ابتدا، از *ذره* برای اشاره به ذره‌های به خوبی شناخته شده‌ای از قبیل الکترونها، پروتونها، و نوترونها، و از *پادذره* برای اشاره به همتاهای بندرت کشف شدهٔ آنها، استفاده می‌شد. بعداً، برای ذره‌های کمتر شناخته شده، نامگذاری *ذره* و *پادذره* به گونه‌ای انجام گرفت که با قانونهای پایستگی معرفی شده در این فصل سازگار باشد. (گاهی به طور غیر روشن، هرگاه که تمایزی مورد نیاز نباشد، هم ذره‌ها و هم پادذره‌ها ذره نامیده می‌شوند. ما اغلب، و نه همیشه، یک پادذره را با قراردادن یک خط کوچک در بالای نماد مربوط به ذره نمایش می‌دهیم. بنابراین، p نماد پروتون، و $\bar{p}$ (که خوانده می‌شود "پی بار") نماد پاد پروتون است.

هرگاه ذره‌ای با پادذرهٔ خود برخورد کند، آن دو ذره می‌توانند یکدیگر را *نابود* کنند. یعنی، ذره و پادذره ناپدید می‌شوند و انرژی ترکیبی آنها به شکلهای دیگری دوباره پدیدار می‌شود. برای نابودی یک الکترون توسط یک پوزیترون، این انرژی دوباره به صورت دو فوتون پرتو گاما پدیدار می‌شود

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma \qquad (۴۴-۵)$$

اگر الکترون و پوزیترون به هنگام نابودی ساکن باشند، انرژی کلّ آنها برابر با انرژی جرمی کلّ آنهاست، و آن انرژی سپس به طور مساوی بین دو فوتون تقسیم می‌شود. برای حفظ پایستگی اندازه حرکت، و به دلیل اینکه فوتونها نمی‌توانند ساکن باشند، آنها در جهتهایی مخالف هم به حرکت درمی‌آیند.

هم‌اکنون تعداد زیادی از اتمهای پادهیدروژن (هر یک با یک پاد پروتون و پوزیترون به جای پروتون و یک الکترون در اتم هیدروژن) در CERN تولید شده و مورد مطالعه قرار گرفته است. مدل استاندارد پیش‌بینی می‌کند که یک گذار در اتم پاد

1. Carl Anderson

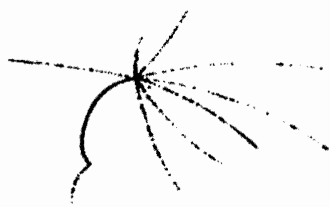
هیدروژن (مثلاً، میان نخستین حالت برانگیخته و حالت پایه) معادل با همان گذار در اتم هیدروژن است. بنابراین، هر اختلافی در این گذارها به‌روشنی نشاندهندهٔ نادرست بودن مدل استاندارد است؛ تا کنون هیچ اختلافی مشاهده نشده است.

تجمعی از پاد ذره‌ها، از قبیل اتم پاد هیدروژن، اغلب برای تمیز آن از تجمعی از ذره‌های معمولی (*ماده*)، *پاد ماده* نامیده می‌شود. (هرگاه واژهٔ "ماده" برای توصیف هر چیزی که جرم دارد به کار گرفته شود، این دو واژه می‌توانند به سادگی با هم اشتباه شوند.) می‌توانیم تصور کنیم که در آینده، دانشمندان و مهندسان ممکن است اشیایی از جنس پادماده بسازند. ولی، تا کنون هیچ شاهدی بر این وجود ندارد که در طبیعت در یک مقیاس نجومی پادماده ساخته شده باشد، زیرا به نظر می‌رسد که ستارگان و کهکشانها عمدتاً از ماده ساخته شده‌اند نه پاد ماده. این مشاهدهٔ حیرت‌آوری است، زیرا بدین معنی است که در آغاز آفرینش عالم، ویژگی خاصی، شرایط را به سوی ماده و به دور از پاد ماده منحرف کرد. (برای مثال، الکترونها در همه جا گسترده‌اند ولی پوزیترونها چنین نیستند.) علت این جهتگیری هنوز به خوبی درک نشده است.

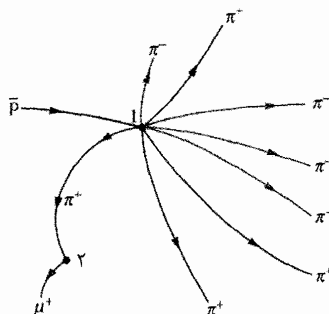
۴۴-۳ میان گفتار

پیش از آنکه به دسته‌بندی ذره‌ها بپردازیم، برای لحظه‌ای آن را به کنار می‌گذاریم و سرشت برخی پژوهشهای هسته‌ای را با تحلیل یک رویداد برای یک ذرهٔ نوعی- نظیر رویدادی که در تصویر اتاقک حباب شکل ۴۴-۲ الف نشان داده شده است- بررسی می‌کنیم.

در این شکل ردها از حبابهایی تشکیل شده‌اند که در امتداد مسیر ذره‌های باردار الکتریکی به هنگام حرکت آنها در اتاقکی پر شده با هیدروژن مایع به وجود آمده‌اند. می‌توانیم ذره‌ای را که ردّ خاصی- در میان ردهای دیگر- از خود بر جای می‌گذارد، با اندازه‌گیری فاصلهٔ نسبی میان حبابها شناسایی کنیم. اتاقک در میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد که ردهای ذره‌های باردار مثبت را به طور پادساعتگرد و ردهای ذره‌های باردار منفی را به طور ساعتگرد منحرف می‌کند. با اندازه‌گیری شعاع انحنای مسیر، می‌توانیم اندازه حرکت ذره‌ای که آن را به وجود آورده است، محاسبه کنیم. جدول ۴۴-۱ برخی از خواص ذره‌ها و پادذره‌هایی را نشان می‌دهد که در رویداد شکل ۴۴-۲ الف شرکت داشته‌اند، که شامل آنهایی که ردهایی را نساختند نیز می‌شود. مطابق معمول، جرم ذره‌های فهرست شده در جدول ۴۴-۱، و همهٔ جدولهای دیگر این فصل، برحسب یکای MeV/c^2 بیان شده است. دلیل این امر آن است که انرژی سکون یک ذره اغلب بیشتر از جرم آن مورد نیاز است. بنابراین، جرم پروتون نشان داده شده در جدول ۴۴-۱ برابر با $۹۸۳/۳\,\mathrm{MeV}/c^2$ است. برای یافتن انرژی سکون پروتون، این جرم را در c^2 ضرب می‌کنیم تا $۹۳۸/۳\,\mathrm{MeV}$ به دست آید.



(الف)



(ب)

شکل ۴۴-۲ (الف) یک عکس اتاقک حباب از رشته‌ای از رویدادها که توسط پادپروتونی که از چپ وارد اتاقک شده منشأ گرفته است. (ب) برای روشنی شکل، ردها دوباره رسم و مشخص شده‌اند. نقطه‌ها در مکانهای ۱ و ۲، محل رویدادهای ثانویهٔ خاصی هستند که در متن درس توضیح داده شده است. مسیرها از آنرو خمیده‌اند که در اتاقک، یک میدان مغناطیسی حضور دارد که به هر یک ذره‌های باردار متحرک نیروی منحرف کننده‌ای وارد می‌کند.

ابزار کلی ما برای تحلیل عکسهایی نظیر شکل ۴۴-۲ الف، عبارت‌اند از قانونهای پایستگی انرژی، اندازه حرکت خطی، اندازه حرکت زاویه‌ای، و بار الکتریکی، در کنار قانونهای پایستگی دیگری که تا کنون معرفی نکرده‌ایم. شکل ۴۴-۲ الف، در واقع یکی از جفت عکسهای سه بعدی است، زیرا در عمل، این تحلیلها در سه بعد انجام می‌پذیرد.

رویداد شکل ۴۴-۲ الف توسط یک پاد پروتون $(\bar{p})$ پرانرژی راه انداخته شده، که در *آزمایشگاه لاورنس برکلی*[1] تولید و از سمت چپ وارد اتاقک شده است. سه زیر- رویداد جداگانه وجود دارد؛ یکی در نقطهٔ ۱ شکل ۴-۲۲ ب، دومی در نقطهٔ ۲، و سومی در بیرون از چارچوب شکل رخ داده است. هر یک از این سه رویداد را بررسی می‌کنیم:

۱. *نابودی پروتون- پاد پروتون.* در نقطهٔ ۱ شکل ۴۴-۲ ب، پاد پروتون وارد شده به‌شدت با یک پروتون در هیدروژن مایع اتاقک برخورد می‌کند، و نتیجهٔ این عمل، نابودی متقابل است. می‌توانیم بگوییم که نابودی در حالی رخ می‌دهد که پادپروتون ورودی در حال حرکت بوده است، زیرا بیشتر ذره‌های تولید شده در برخورد رودررو، رو به سمت جلو حرکت می‌کنند — یعنی، به سمت راست شکل ۴۴-۲. بنا بر اصل پایستگی اندازه حرکت خطی، پادپروتون ورودی باید به هنگامی که نابود می‌شود، یک اندازه حرکت رو به جلو داشته باشد.

1. Lawrence Berkeley Laboratory

انرژی کلّ درگیر در برخورد پادپروتون و پروتون برابر با مجموع انرژی جنبشی پادپروتون و دو انرژی سکون (یکسان) آن دو ذره‌است($۲\times۹۳۸/۳$ MeV یا ۱۸۷۶/۶MeV). این انرژی برای به وجود آوردن تعدادی ذرهٔ سبکتر و دادن انرژی جنبشی به آنها کافی است. در این حالت، نابودی، چهار پیون مثبت (مسیرهای پررنگ) و چهار پیون منفی (مسیرهای کمرنگ) ایجاد می‌کند. (برای سادگی، فرض می‌کنیم که هیچ فوتون پرتو گامایی، که به دلیل نداشتن بار الکتریکی ردّی را از خود برجای نمی‌گذارد، ایجاد نشده است.) بنابراین نتیجه می‌گیریم که فرایند نابودی چنین است



$$p+\overline{p}\rightarrow ۴\pi^{+}+۴\pi^{-} \qquad (۶-۴۴)$$

از جدول ۴۴-۱ درمی‌یابیم که پیونهای مثبت (π^{+}) *ذره* و پیونهای منفی (π^{-}) *پادذره* هستند. واکنش معادلهٔ ۴۴-۶ یک *برهم‌کنش قوی* است (نیروی قوی در آن وارد می‌شود) زیرا همهٔ ذره‌های درگیر در آن، هادرون هستند.

حال می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا بار الکتریکی در این واکنش پایسته است یا خیر؟ برای این منظور، بار الکتریکی ذره را به صورت qe می‌نویسیم، که در آن q **عدد کوانتومی بار** است. حال تعیین اینکه آیا بار الکتریکی در این فرایند پایسته است معادل با تعیین آن است که آیا عدد کوانتومی بار خالص اولیه با عدد کوانتومی بار خالص نهایی برابر است یا نه. در فرایند معادلهٔ ۴۴-۶، عدد بار خالص اولیه برابر با $(-۱)+۱$، یا ۰، و عدد بار خالص نهایی برابر با $(-۱)۴+(۱)۴$، یا ۰، است. بنابراین، بار *پایسته است.*

برای توازن انرژی، با توجه به آنچه که در بالا گفته شد، انرژی حاصل از فرایند نابودی $p-\overline{p}$ ، دست‌کم برابر با مجموع انرژیهای سکون پروتون و پادپروتون، یعنی ۱۸۷۶/۶MeV، است. انرژی سکون پیون برابر با ۱۳۹/۶MeV است، که بدین معنی است که انرژیهای سکون هشت پیون برابر با $۸\times۱۳۹/۶$MeV، یا ۱۱۱۶/۸ MeV است. این مقدار انرژی دست کم حدود ۷۶۰ MeV را برای توزیع در میان هشت پیون به صورت انرژی جنبشی بر جای می‌گذارد. بنابراین، الزام پایستگی انرژی به‌سادگی محقق می‌شود.

۲. *واپاشی پیون.* پیونها ذره‌هایی ناپایدارند و با نیم- عمر میانگین $۲/۶\times۱۰^{-۸}$s وامی‌پاشند. در نقطهٔ ۲ شکل ۴۴-۲ ب، یکی از پیونهای مثبت در اتاقک به حال سکون درمی‌آید و به طور خود به خود به یک پادموئون μ^{+} (خط کمرنگ‌تر) و یک نوترینو ν وامی‌پاشد:



$$\pi^{+}\rightarrow\mu^{+}+\nu \qquad (۷-۴۴)$$

نوترینو، که بدون بار است، هیچ ردّی بر جای نمی‌گذارد. هم پادموئون و هم نوترینو، لپتون هستند؛ یعنی آنها ذره‌هایی هستند که نیروی قوی بر آنها اعمال نمی‌شود. بنابراین، فرایند واپاشی معادلهٔ ۴۴-۷، که نیروی ضعیف بر آن حاکم است، به صورت *برهم‌کنش ضعیف* توصیف می‌شود. با استفاده از جدول ۴۴-۱، انرژی سکون پادموئون برابر با ۱۰۵/۷MeV و انرژی سکون نوترینو تقریباً برابر با ۰ است. بنابراین، انرژی ۱۰۵/۷MeV − ۱۳۹/۶MeV، یا ۳۳/۹ MeV، موجود است که به صورت انرژی جنبشی میان پادموئون و نوترینو تقسیم می‌شود.

حال می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی نیز در فرایند معادلهٔ ۴۴-۷ پایسته است. این معادل آن است که تعیین کنیم آیا مؤلفهٔ خالص S_z اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی در امتداد محور دلخواه z می‌تواند بر اثر این فرایند پایسته بماند یا خیر. عددهای کوانتومی اسپینی s ذره‌های درگیر در این فرایند عبارت‌اند از ۰ برای پیون π^{+} و $\frac{۱}{۲}$ برای هم پاد موئون μ^{+} و هم نوترینو ν . بنابراین، برای π^{+} ، مؤلفهٔ S_z باید برابر با $۰\hbar$ و برای μ^{+} و ν می‌تواند، یا $+\frac{۱}{۲}\hbar$ یا $-\frac{۱}{۲}\hbar$ باشد.

مؤلفهٔ خالص S_z در فرایند معادلهٔ ۴۴-۷ در صورتی پایسته است که *راهی* وجود داشته باشد که در آن $S_z(=۰\hbar)$ اولیه بتواند با S_z خالص نهایی برابر شود. درمی‌یابیم که اگر یکی از محصولها، μ^{+} یا ν ، دارای $S_z=+\frac{۱}{۲}\hbar$ و دیگری دارای $S_z=-\frac{۱}{۲}\hbar$ باشد، آنگاه مقدار خالص نهایی آنها برابر با $۰\hbar$ می‌شود. بنابراین، چون S_z می‌تواند پایسته باشد، فرایند واپاشی معادلهٔ ۴۴-۷ *می‌تواند* رخ دهد.

همچنین از معادلهٔ ۴۴-۷ درمی‌یابیم که بار خالص در این فرایند پایسته است: پیش از این فرایند، عدد کوانتومی بار خالص برابر با ۱+ ، و پس از آن، برابر با $+۱+۰=+۱$ است.

۳. *واپاشی موئون.* موئونها (چه μ^{-} و چه μ^{+}) نیز ناپایدارند و با عمر میانگین $۲/۲\times۱۰^{-۶}$s وامی‌پاشند. اگرچه محصولهای واپاشی در شکل ۴۴-۲ ب نشان داده نشده است، پادموئون ایجاد شده در واکنش معادلهٔ ۴۴-۷ به حال سکون درمی‌آید و بنا بر واکنش زیر، به طور خود به خود وامی‌پاشد



$$\mu^{+}\rightarrow e^{+}+\nu+\overline{\nu} \qquad (۸-۴۴)$$

انرژی سکون پادموئون برابر با ۱۰۵/۷MeV و انرژی سکون پوزیترون فقط برابر با ۰/۵۱۱ MeV است، و بدین ترتیب ۱۰۵/۲ MeV انرژی باقی می‌ماند که به صورت انرژی جنبشی میان سه ذرهٔ ایجاد شده در فرایند واپاشی معادلهٔ ۴۴-۸، تقسیم می‌شود.

ممکن است تعجب کنید: چرا *دو* نوترینو در معادلهٔ ۴۴-۸ وجود دارند؟ چرا نه فقط یکی، مانند واپاشی پیون در معادلهٔ ۴۴-۷ ؟ یک پاسخ این است که عددهای کوانتومی اسپینی پادموئون، پوزیترون، و نوترینو هر یک برابر با $\frac{۱}{۲}$ است؛ فقط با یک نوترینو، مؤلفهٔ خالص S_z اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی نمی‌تواند در واپاشی پادموئون معادلهٔ ۴۴-۸ پایسته بماند. در بخش ۴۴-۴، دلیل دیگری را ارائه خواهیم کرد.

جدول ۴۴-۱

ذره‌ها و پاد ذره‌های درگیر در رویداد شکل ۴۴-۲

ذره	نماد	بار q	جرم $(MeV/c^۲)$	عدد کوانتومی اسپینی s	ماهیت	عمر میانگین (s)	پادذره
نوترینو	ν	۰	$\approx ۱\times ۱۰^{-۷}$	$\frac{۱}{۲}$	لپتون	پایدار	$\bar{\nu}$
الکترون	e^-	۱-	۰/۵۱۱	$\frac{۱}{۲}$	لپتون	پایدار	e^+
موئون	μ^-	۱-	۱۰۵/۷	$\frac{۱}{۲}$	لپتون	$۲/۲\times ۱۰^{-۶}$	μ^+
پیون	π^+	۱+	۱۳۹/۶	۰	مزون	$۲/۶\times ۱۰^{-۸}$	π^-
پروتون	p	۱+	۹۳۸/۳	$\frac{۱}{۲}$	باریون	پایدار	$\bar{p}$

مسئلهٔ نمونه ۴۴-۱

یک پیون مثبت در حال سکون می‌تواند مطابق زیر، واپاشی کند

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu$$

انرژی جنبشی پاد موئون μ^+ چقدر است؟ انرژی جنبشی نوترینو چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی در فرایند واپاشی پیون، هم انرژی کل و هم اندازه حرکت خطی کل باید پایسته بماند.

پایستگی انرژی: نخست پایستگی انرژی کل (انرژی سکون $mc^۲$ بعلاوهٔ انرژی جنبشی K) را برای فرایند واپاشی، چنین می‌نویسیم

$$m_\pi c^۲ + K_\pi = m_\mu c^۲ + K_\mu + m_\nu c^۲ + K_\nu$$

چون پیون ساکن بوده است، انرژی جنبشی K_π آن برابر صفر است. حال، با استفاده از جرمهای m_π ، m_μ و m_ν که در جدول ۴۴-۱ داده شده است، داریم

$$K_\mu + K_\nu = m_\pi c^۲ - m_\mu c^۲ - m_\nu c^۲$$
$$= ۱۳۹/۶\text{MeV} - ۱۰۵/۷\text{MeV} - ۰$$
$$= ۳۳/۹\text{MeV} \qquad (۹-۴۴)$$

که در آن m_ν را تقریباً صفر گرفته‌ایم.

پایستگی اندازه حرکت: معادلهٔ ۴۴-۹ را نمی‌توانیم برای K_μ یا K_ν به طور جداگانه حل کنیم، و از این رو از اصل پایستگی اندازه حرکت خطی برای فرایند واپاشی استفاده می‌کنیم. چون پیون به هنگام واپاشی ساکن است، این اصل ایجاب می‌کند که موئون و نوترینو پس از واپاشی در جهتهای مخالف حرکت کنند. فرض کنید حرکت آنها در امتداد یک محور است. پس، برای مؤلفه‌های در امتداد این محور، پایستگی اندازه حرکت خطی برای این واپاشی را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$p_\pi = p_\mu + p_\nu$$

که با $P_\pi = ۰$ ، چنین به دست می‌دهد

$$p_\mu = -p_\nu \qquad (۱۰-۴۴)$$

رابطهٔ بین p و K: می‌خواهیم این اندازه حرکتهای P_μ و $-P_\nu$ را به انرژیهای جنبشی K_μ و K_ν به گونه‌ای ربط دهیم که بتوانیم آن انرژیهای جنبشی را به دست آوریم. چون هیچ دلیلی برای باور اینکه فیزیک کلاسیکی می‌تواند برای حرکت موئون و نوترینو به کار گرفته شود وجود ندارد، از معادلهٔ ۳۷-۵۴، رابطهٔ اندازه حرکت- انرژی جنبشی از نسبیت خاص، استفاده می‌کنیم

$$(pc)^۲ = K^۲ + ۲Kmc^۲ \qquad (۱۱-۴۴)$$

از معادلهٔ ۴۴-۱۰، می‌دانیم که

$$(p_\mu c)^۲ = (p_\nu c)^۲ \qquad (۱۲-۴۴)$$

با قراردادن معادلهٔ ۴۴-۱۱ در دو طرف معادلهٔ ۴۴-۱۲ چنین به دست می‌آوریم

$$K_\mu^۲ + ۲K_\mu m_\mu c^۲ = K_\nu^۲ + ۲K_\nu m_\nu c^۲$$

با تقریب، جرم نوترینو را $m_\nu = ۰$ می‌گیریم، با قراردادن $K_\nu = ۳۳/۹\,\text{MeV} - K_\mu$ از معادلهٔ ۴۴-۹، و سپس حل آن برای K_μ ، درمی‌یابیم

$$K_\mu = \frac{(۳۳/۹\text{MeV})^۲}{(۲)(۳۳/۹\text{MeV} + m_\mu c^۲)}$$
$$= \frac{(۳۳/۹\text{MeV})^۲}{(۲)(۳۳/۹\text{MeV} + ۱۰۵/۷\text{MeV})}$$
$$= ۴/۱۲\text{MeV} \qquad \text{(پاسخ)}$$

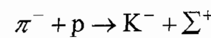
پس انرژی جنبشی نوترینو، با استفاده از معادلهٔ ۴۴-۹، چنین می‌شود

$$K_\nu = ۳۳/۹\,\text{MeV} - K_\mu = ۳۳/۹\,\text{MeV} - ۴/۱۲\,\text{MeV}$$
$$= ۲۹/۸\,\text{MeV} \qquad \text{(پاسخ)}$$

از اینجا درمی‌یابیم که اگرچه مقدارهای اندازه حرکت دو ذرهٔ پس‌زده یکسان است، نوترینو سهم بیشتری (۸۸٪) از انرژی جنبشی را به دست می‌آورد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۴-۲

پروتونهای ساکن در یک اتاقک حباب توسط پیونهای منفی پرانرژی بمباران می‌شوند، و این واکنش رخ می‌دهد



$$\pi^- + p \rightarrow K^- + \Sigma^+$$

انرژیهای سکون این ذره‌ها عبارت‌اند از

π^-	۱۳۹/۶MeV	K^-	۴۳۹/۷MeV
P	۹۳۸/۳MeV	Σ^+	۱۱۸۹/۴MeV

مقدار Q این واکنش چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی مقدار Q واکنش برابر است با

$$Q = \begin{pmatrix} \text{انرژی جرمی} \\ \text{کلّ اولیه} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{انرژی جرمی} \\ \text{کلّ نهایی} \end{pmatrix}$$

محاسبه: برای واکنش داده شده، داریم

$$Q = (m_\pi c^2 + m_p c^2) - (m_K c^2 + m_\Sigma c^2)$$
$$= (۱۳۹/۶\text{MeV} + ۹۳۸/۳\text{MeV})$$
$$-(۴۹۳/۷\text{MeV} + ۱۱۸۹/۴\text{MeV})$$
$$= -۶۰۵\text{MeV} \qquad \text{(پاسخ)}$$

علامت منفی بدین معنی است که واکنش، *انرژی‌گیر* است؛ یعنی، در صورتی که واکنش رخ دهد، پیون فرودی (π^-) باید دارای انرژی جنبشی بیشتری از یک مقدار آستانهٔ معین داشته باشد. انرژی آستانه بیشتر از ۶۰۵MeV است، زیرا اندازه حرکت خطی باید پایسته بماند، که این بدان معنی است که کائون (K^-) و سیگما (Σ^+) نه تنها باید تولید شوند، بلکه همچنین باید به آنها مقداری انرژی جنبشی داده شود. یک محاسبهٔ نسبیتی که جزئیات آن فراتر از محدودهٔ ماست، نشان می‌دهد که انرژی آستانه برای این واکنش برابر با ۹۰۷MeV است.

۴۴-۴ لپتونها

در این بخش و بخش بعدی، برخی از ذره‌ها در یکی از طرح‌های دسته‌بندی خود را بررسی می‌کنیم: لپتونها یا هادرونها. با لپتونها آغاز می‌کنیم، ذره‌هایی که نیروی قوی بر آنها عمل *نمی‌کند*. تا اینجا، ذره‌های آشنای الکترون و نوترینو را که در واپاشی بتا شرکت دارند، در نظر گرفتیم. موئون، که واپاشی آن با معادلهٔ ۴۴-۸ توصیف می‌شود، عضو دیگری از این خانواده است. فیزیکدانان بتدریج دریافتند که نوترینویی که در معادلهٔ ۴۴-۷، به همراه موئون تولید می‌شود، *همان ذره‌ای نیست* که به نام نوترینو در واپاشی بتا، به همراه ظهور یک الکترون، تولید می‌شود. هرگاه که لازم باشد آنها را از هم تمیز دهیم، قبلی را **نوترینوی موئون** (با نماد ν_μ) و بعدی را **نوترینوی الکترون** (با نماد ν_e) می‌نامیم.

معلوم شده است که این دو نوع نوترینو، ذره‌های متفاوتی هستند، زیرا اگر باریکه‌ای از نوترینوهای موئون (تولید شده از واپاشی پیون به صورت معادلهٔ ۴۴-۷) به هدف جامدی برخورد کند، *فقط موئونها* تولید می‌شوند و هرگز الکترونها تولید نمی‌شوند. از سوی دیگر، اگر نوترینوهای الکترون (تولید شده توسط واپاشی بتای محصولهای شکافت در یک راکتور هسته‌ای) به هدف جامدی برخورد کنند، *فقط الکترونها* تولید می‌شوند و هرگز موئونها تولید نمی‌شوند.

لپتون دیگر، *تاو*[1] ، در سال ۱۹۷۵/۱۳۵۴ در SLAC کشف شد؛ کاشف آن، *مارتین پرل*[2] ، در جایزهٔ نوبل فیزیک سال ۱۹۹۵ سهیم شد. تاو دارای نوترینوی وابسته به خودش است، که کماکان از دو نوترینوی دیگر متفاوت است. جدول ۴۴-۲، فهرستی از همهٔ لپتونها (هم ذره‌ها و هم پاد ذره‌ها) است؛ همهٔ آنها دارای عدد کوانتومی اسپینی s برابر $\frac{1}{2}$ هستند.

دلایلی برای تقسیم لپتونها به سه خانواده وجود دارد، که هر یک شامل یک ذره (الکترون، موئون، یا تاو)، نوترینوی وابسته به آن ذره، و پادذره‌های متناظر است. افزون بر این، دلایلی برای این باور وجود دارد که *فقط* سه خانوادهٔ لپتونی نشان داده شده در جدول ۴۴-۲ وجود دارند. لپتونها دارای هیچ ساختار داخلی و هیچ ابعاد قابل اندازه‌گیری نیستند؛ بر این باورند که آنها به هنگام برهم‌کنش با سایر ذره‌ها یا با موجهای الکترومغناطیسی، واقعاً ذره‌های بنیادی نقطه‌گونی هستند.

پایستگی عدد لپتونی

بنابر آزمایش، برهم‌کنشهای ذره‌ای مربوط به لپتونها از یک قانون پایستگی برای عددی کوانتومی موسوم به **عدد لپتونی** L پیروی می‌کنند. به هر (ذرهٔ عادی) در جدول ۴۴-۲، $L = +1$ و به هر پادذره، $L = -1$ اختصاص داده می‌شود. به همهٔ ذره‌های دیگر، که لپتون نیستند، $L = 0$ اختصاص داده می‌شود. همچنین بنا بر آزمایش،

> در همهٔ برهم‌کنشهای ذره‌ای، عدد لپتونی خالص *برای هر خانواده* به طور جداگانه پایسته است.

بنابراین، در واقع سه عدد لپتونی L_e ، L_μ و L_τ وجود دارد، و مقدار خالص هر یک از آنها باید در حین هر برهم‌کنش ذره‌ای بدون تغییر بماند. این واقعیت آزمایشگاهی، **قانون پایستگی عدد لپتونی** نامیده می‌شود.

این قانون را می‌توانیم با بررسی مجدد فرایند واپاشی پاد موئون نشان داده شده در معادلهٔ ۴۴-۸ شرح دهیم، که اکنون آن را به طور کاملتری چنین می‌نویسیم

1. tau
2. Martin Perl

$$\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$ (۱۳-۴۴)

جدول ۴۴-۲

لپتونها[a]

خانواده	ذره	نماد	جرم (MeV/c^2)	بار q	پاد ذره
الکترون	الکترون	e^-	۰/۵۱۱	۱-	e^+
	نوترینوی الکترون[b]	ν_e	$\approx$ ۱×۱۰^-۷	۰	$\bar{\nu}_e$
موئون	موئون	μ^-	۱۰۵/۷	۱-	μ^+
	نوترینوی موئون[b]	ν_μ	$\approx$ ۱×۱۰^-۷	۰	$\bar{\nu}_\mu$
تاو	تاو	τ^-	۱۱۷۷	۱-	τ^+
	نوترینوی تاو[b]	ν_τ	$\approx$ ۱×۱۰^-۷	۰	$\bar{\nu}_\mu$

[a] همهٔ لپتونها دارای عددهای کوانتومی اسپینی $\frac{1}{2}$ هستند و بنابراین فرمیون‌اند.

[b] جرم نوترینوها به درستی تعیین نشده است.

این را نخست بر حسب خانوادهٔ موئونی لپتونها بررسی می‌کنیم. μ^+ یک پاد ذره است (جدول ۴۴-۲ را ببینید) و بنابراین، دارای عدد لپتونی موئونی $L_\mu = -1$ است. دو ذرهٔ e^+ و ν_e به خانوادهٔ موئونی تعلق ندارند و بنابراین، برای آنها $L_\mu = 0$ است. بدین ترتیب $\bar{\nu}_\mu$ در سمت راست باقی می‌ماند، یک پادذره، که آن نیز دارای عدد لپتونی موئونی $L_\mu = -1$ است. بنابراین، هر دو طرف معادلهٔ ۴۴-۱۳ دارای عدد لپتونی موئونی خالص یکسانی- یعنی $-L_\mu = -1$ - هستند؛ اگر چنین نبود، μ^+ با این فرایند واپاشی نمی‌کرد.

هیچ عضوی از خانوادهٔ الکترون در سمت چپ معادلهٔ ۴۴-۱۳ ظاهر نشده است؛ بنابراین، عدد لپتونی الکترون خالص باید $L_e = 0$ باشد. در طرف راست معادلهٔ ۴۴-۱۳، پوزیترون، که یک پادذره است (دوباره جدول ۴۴-۲ را ببینید)، دارای عدد لپتونی الکترونی $L_e = -1$ است. نوترینوی الکترون ν_e، که یک ذره است، دارای عدد لپتونی الکترونی $L_e = +1$ است. بنابراین، عدد لپتونی الکترون خالص برای این دو ذرهٔ واقع در سمت راست معادلهٔ ۴۴-۱۳ نیز برابر با صفر است؛ پس عدد لپتونی الکترون نیز در این فرایند پایسته است.

چون هیچ عضوی از خانوادهٔ تاو در دو طرف معادلهٔ ۴۴-۱۳ ظاهر نمی‌شود، باید برای هر طرف $L_\tau = 0$ باشد. بنابراین، هر یک از عددهای کوانتومی لپتونی L_μ، L_e، و L_τ در حین فرایند واپاشی معادلهٔ ۴۴-۱۳ بدون تغییر باقی می‌مانند، که مقدارهای ثابت آنها به ترتیب ۱-، ۰ و ۰ است. این مثال صرفاً نمایشی از پایستگی عدد لپتونی است؛ این قانون برای همهٔ برهم‌کنشهای ذره‌ای برقرار است.

✔ **نکتهٔ وارسی ۱** (الف) مزون π^+ از طریق فرایند $\pi^+ \to \mu^+ + \nu$ وامی‌پاشد. نوترینوی ν به چه خانوادهٔ لپتونی تعلق دارد؟ (ب) آیا این نوترینو، ذره است یا پاد ذره؟ (پ) عدد لپتونی آن چند است؟

۴۴-۵ هادرونها

اکنون آماده‌ایم که هادرونها (باریونها و مزونها) را بررسی کنیم، ذره‌هایی که برهم‌کنش آنها توسط نیروی قوی صورت می‌گیرد. با افزودن یک قانون پایستگی دیگر به فهرست خود، این بحث را شروع می‌کنیم: قانون پایستگی عدد باریونی.

برای گسترش این قانون پایستگی، فرایند واپاشی پروتون را در نظر می‌گیریم

$$p \to e^+ + \nu_e$$ (۱۴-۴۴)

این فرایند هرگز رخ نمی‌دهد. این مایهٔ خرسندی است، زیرا در غیر این صورت همهٔ پروتونهای جهان بتدریج به پوزیترون تغییر می‌کردند، که نتایج آن برای ما فاجعه آمیز بود. با این وجود، این واپاشی، قانونهای پایستگی انرژی، اندازه حرکت خطی، یا عدد لپتونی را نقض نمی‌کند.

دلیل این پایداری آشکار پروتون- و نبود بسیاری از فرایندهای دیگری را که ممکن بود در غیر این صورت رخ دهند- با معرفی یک عدد کوانتومی جدید، **عدد باریونی** B، و یک قانون پایستگی جدید، **پایستگی عدد باریونی**، توضیح می‌دهیم:

> به هر باریون، $B = +1$ و به هر پادباریون، $B = -1$ را اختصاص می‌دهیم. به همهٔ ذره‌های از نوع دیگر، $B = 0$ اختصاص داده می‌شود. یک فرایند ذره‌ای در صورتی که عدد باریونی خالص آن تغییر کند، نمی‌تواند رخ دهد.

در فرایند معادلهٔ ۴۴-۱۴، پروتون دارای عدد باریونی $B = +1$، و پوزیترون و نوترینو هر دو دارای عدد باریونی $B = 0$ هستند. بنابراین، در این فرایند، عدد باریونی پایسته نمی‌ماند و نمی‌تواند رخ دهد.

✔ **نکتهٔ وارسی ۲** این مُد واپاشی برای نوترون مشاهده نشده است

$$n \to p + e^-$$

کدامیک از قانونهای پایستگی که در پی می‌آید، در این فرایند نقض می‌شوند: (الف) انرژی، (ب) اندازه حرکت زاویه‌ای، (پ) اندازه حرکت خطی، (ت) بار، (ث) عدد لپتونی، (ج) عدد باریونی؟ جرمها عبارت‌اند از $m_n = ۹۳۹/۶\ MeV/c^2$، $m_p = ۹۳۸/۳\ MeV/c^2$ و $m_e = ۰/۵۱۱\ MeV/c^2$.

مسئلهٔ نمونه ۴۴-۳

تعیین کنید که آیا یک پروتون ساکن می‌تواند به شکل زیر واپاشی کند

$$p \to \pi^0 + \pi^+$$

خواص پروتون و پیون π^+ در جدول ۴۴-۱ آمده است. پیون π° دارای بار صفر، اسپین صفر، و انرژی جرمی ۱۳۵/۰MeV است.

نکتهٔ کلیدی ببینیم آیا واپاشی پیشنهاد شده هیچ یک از قانونهای پایستگی را که بررسی کرده‌ایم نقض می‌کند یا نه.

بار الکتریکی: می‌بینیم که عدد کوانتومی بار خالص در ابتدا ۱+ و سرانجام ۰+۱، یا ۱+ است. بنابراین، بار در این واپاشی پایسته می‌ماند. عدد لپتونی نیز پایسته می‌ماند، زیرا هیچ یک از این سه ذره، لپتون نیست و بنابراین عدد لپتونی هر کدام برابر با صفر است.

اندازه حرکت خطی: چون پروتون ساکن است، با اندازه حرکت خطی صفر، دو پیون باید صرفاً در جهتهایی مخالف، با بزرگیهای اندازه حرکت خطی یکسان حرکت کنند (به منظور آنکه اندازه حرکت خطی کل نیز صفر باشد) تا اندازه حرکت خطی پایسته بماند. این واقعیت که اندازه حرکت خطی *می‌تواند* پایسته باشد بدین معنی است که این فرایند، پایستگی اندازه حرکت خطی را نقض نمی‌کند.

انرژی: آیا برای این واپاشی انرژی کافی وجود دارد؟ چون پروتون در حال سکون است، این پرسش معادل آن است که بپرسیم آیا انرژی جرمی پروتون برای تولید انرژیهای جرمی و انرژیهای جنبشی پیون کافی است یا خیر. برای پاسخ، مقدار Q را برای این واپاشی محاسبه می‌کنیم

$$Q = \begin{pmatrix}\text{انرژی جرمی}\\ \text{کلّ اولیه}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{انرژی جرمی}\\ \text{کلّ نهایی}\end{pmatrix}$$
$$= m_p c^2 - (m_\circ c^2 + m_+ c^2)$$
$$= ۹۳۸/۳\,\text{MeV} - (۱۳۵/۰\,\text{MeV} + ۱۳۹/۶\,\text{MeV})$$
$$= ۶۶۳/۷\,\text{MeV}$$

این واقعیت که Q مثبت است نشاندهندهٔ آن است که انرژی جرمی اولیه از انرژی جرمی نهایی بیشتر است. بنابراین، پروتون انرژی جرمی کافی برای تولید جفت پیون را *دارد*.

اسپین: آیا اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی توسط این واپاشی پایسته می‌ماند؟ این پرسش معادل آن است که تعیین کنیم آیا مؤلفهٔ خالص S_z گشتاور زاویه‌ای اسپینی در امتداد محور دلخواه z می‌تواند در این واپاشی پایسته بماند یا خیر. عددهای کوانتومی اسپینی s ذره‌ها در این فرایند عبارت‌اند از $\frac{1}{2}$ برای پروتون و ۰ برای هر دو پیون. بنابراین، برای پروتون، مؤلفهٔ S_z می‌تواند یا $+\frac{1}{2}\hbar$ یا $-\frac{1}{2}\hbar$ باشد و برای هر پیون این مؤلفه برابر با $0\hbar$ است. از اینجا درمی‌یابیم که هیچ راهی وجود ندارد که S_z بتواند پایسته بماند. بنابراین، اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی پایسته نیست و واپاشی پیشنهاد شده نمی‌تواند رخ دهد.

عدد باریونی: این واپاشی همچنین پایستگی عدد باریونی را نیز نقض می‌کند: پروتون دارای عدد باریونی $B = -1$ است، و هر دو پیون عدد باریونی $B = 0$ دارند. بنابراین، عدم پایستگی عدد باریونی دلیل دیگری بر این مدعاست که این واپاشی نمی‌تواند رخ دهد.

مسئلهٔ نمونه ۴۴-۴

ذره‌ای به نام ایکسی- منفی با نماد Ξ^- به صورت زیر وامی‌پاشد

$$\Xi^- \to \Lambda^\circ + \pi^-$$

ذرهٔ Λ° (موسوم به لاندای صفر) و ذرهٔ π هر دو ناپایدارند. فرایندهای واپاشی زیر به طور *پی‌درپی* رخ می‌دهند تا هنگامی که فقط محصولهای نسبتاً پایدار باقی بمانند:

$$\Lambda^\circ \to \text{P} + \pi^- \;,\quad \pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu \;,\quad \mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e$$

(الف) آیا ذرهٔ Ξ^-، لپتون است یا هادرون؟ اگر هادرون است، آیا باریون است یا مزون؟

نکته‌های کلیدی (۱) فقط سه خانوادهٔ لپتونی وجود دارد (جدول ۴۴-۲) و هیچ‌کدام شامل ذرهٔ Ξ^- نمی‌شود. بنابراین Ξ^- باید یک هادرون باشد. (۲) پاسخ به دومین پرسش، تعیین عدد باریونی ذرهٔ Ξ^- است. اگر این عدد برابر ۱+ یا ۱- باشد، آنگاه Ξ^- باریون است. ولی، اگر برابر صفر باشد، آنگاه Ξ^- مزون است.

عدد باریونی: برای بررسی این موضوع، طرح واپاشی کلی را از Ξ^- اولیه تا محصولهای نسبتاً پایدار نهایی، چنین می‌نویسیم

$$\Xi^- \to \text{p} + ۲(\text{e}^- + \bar{\nu}_e) + ۲(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu) \qquad (۱۵\text{-}۴۴)$$

در طرف راست، پروتون دارای عدد باریونی ۱+ و الکترون و نوترینو دارای عدد باریونی ۰ هستند. بنابراین، عدد باریونی خالص در طرف راست برابر با ۱+ است که این باید عدد باریونی ذرهٔ Ξ^- تنها در طرف چپ باشد. نتیجه می‌گیریم که Ξ^- یک باریون است.

(ب) آیا در این فرایند واپاشی، سه عدد لپتونی پایسته‌اند؟

نکتهٔ کلیدی در هر فرایند باید به طور جداگانه عدد لپتونی خالص برای هر خانوادهٔ لپتونی جدول ۴۴-۲ پایسته باشد.

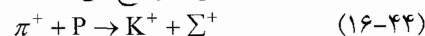
نخست، عدد لپتونی الکترونی L_e را در نظر می‌گیریم که، برای الکترون e^- برابر با ۱+، برای نوترینوی پاد الکترون $\bar{\nu}_e$ برابر ۱-، و برای سایر ذره‌های درگیر در واپاشی کلی معادلهٔ ۴۴-۱۵ برابر صفر است. از اینجا درمی‌یابیم که L_e خالص پیش از واپاشی برابر با صفر و پس از واپاشی برابر با $۲[+۱+(-۱)]+۲(۰+۰)=۰$ است. بنابراین، عدد لپتونی الکترونی خالص *پایسته است*. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که عدد لپتونی موئونی و عدد لپتونی تاوئی نیز پایسته می‌مانند.

(پ) دربارهٔ اسپین ذرهٔ Ξ^- چه می‌توان گفت؟

نکتهٔ کلیدی در واپاشی کلی معادلهٔ ۴۴-۱۵ مؤلفهٔ اسپینی خالص S_z باید پایسته بماند. بنابراین، مؤلفهٔ اسپین S_z ذرهٔ Ξ^- در طرف چپ معادلهٔ ۴۴-۱۵ را می‌توانیم با در نظر گرفتن مؤلفه‌های S_z نُه ذرهٔ طرف راست، تعیین کنیم. همهٔ این نُه ذره، ذره‌هایی با اسپین $\frac{1}{2}$– هستند و بنابراین، می‌توانند دارای S_z برابر با $+\frac{1}{2}\hbar$ یا $-\frac{1}{2}\hbar$ باشند. اینکه چگونه یکی از این دو مقدار ممکن S_z را برگزینیم، اهمیتی ندارد؛ S_z خالص برای این نُه ذره باید مضربی *نیم- درست* از $\hbar$ باشد. بنابراین S_z ذرهٔ Ξ^- باید مضربی نیم- درست از $\hbar$ باشد، و این بدان معنی است که عدد کوانتومی اسپینی s آن باید نیم- درست باشد. (در واقع، عدد کوانتومی اسپینی آن $\frac{1}{2}$ است.)

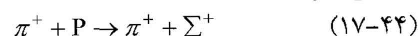
۴۴-۶ باز هم قانون پایستگی دیگر

ذره‌ها افزون بر خواصی که تا اینجا برای آنها برشمردیم: جرم، بار، اسپین، عدد لپتونی، و عدد باریونی، دارای خواص ذاتی نیز هستند. نخستینِ این خواص هنگامی کشف شد که پژوهشگران ذره‌های جدید معینی، مانند کائون (K) و سیگما (Σ) ، را مشاهده کردند که به نظر می‌رسد همواره به صورت جفتهایی ایجاد می‌شوند. به نظر غیر ممکن می‌رسد که فقط یکی از آنها را بتوان در هر لحظه ایجاد کرد. بنابراین، اگر باریکه‌ای از پیونهای پرانرژی با پروتونهای داخل یک اتاقک حباب برهم‌کنش کند، اغلب واکنش زیر رخ می‌دهد



$$\pi^+ + \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{K}^+ + \Sigma^+ \qquad (۴۴\text{-}۱۶)$$

واکنش زیر



$$\pi^+ + \mathrm{P} \rightarrow \pi^+ + \Sigma^+ \qquad (۴۴\text{-}۱۷)$$

که هیچ قانون پایستگی شناخته شده‌ای را در روزهای آغازین فیزیک ذره‌ها نقض نمی‌کند، هرگز رخ نمی‌دهد.

سرانجام پیشنهاد شد (توسط *موری گلمن*[1] در آمریکا و به طور مستقل توسط *نیشی‌جیما*[2] در ژاپن) که ذره‌های معینی دارای خاصیت جدیدی، موسوم به **شگفتی**، با عدد کوانتومی S مربوط به خود و قانون پایستگی مربوط به خود هستند. (مواظب باشید نماد S در اینجا را با اسپین اشتباه نگیرید.) نام شگفتی از این واقعیت برمی‌آید که پیش از آنکه این ذره‌ها به روشنی شناسایی شوند، آنها به نام "ذره‌های شگفت" شناخته شده بودند و این عنوان روی آنها باقی ماند.

پروتون، نوترون و پیون دارای $S = ۰$ هستند؛ یعنی، آنها "شگفت" نیستند. ولی پیشنهاد شد که ذرهٔ K^+ دارای $S = +۱$ و ذرهٔ Σ^+ دارای $S = -۱$ هستند. در واکنش معادلهٔ ۴۴-۱۶، شگفتی خالص هم در ابتدا و هم در انتها برابر صفر است؛ بنابراین، در این واکنش، شگفتی پایسته است. ولی، در واکنش نشان داده شده با معادلهٔ ۴۴-۱۷، شگفتی خالص نهایی برابر با ۱- است؛ بنابراین، در آن واکنش، شگفتی پایسته نمی‌ماند و نمی‌تواند رخ دهد. پس ظاهراً باید یک قانون پایستگی دیگر را به فهرست خود اضافه کنیم- قانون **پایستگی شگفتی**:

> ☜ شگفتی در واکنشهایی که در آنها نیروی قوی عمل می‌کند پایسته می‌ماند.

ممکن است به نظر برسد که به وجود آوردن یک خاصیت جدید برای ذره‌ها، آن هم فقط برای حل کردن معمای کوچکی مانند آن معمایی که معادله‌های ۴۴-۱۶ و ۴۴-۱۷ مطرح می‌کنند، کار جالبی نباشد. ولی، شگفتی و عدد کوانتومی آن بزودی خود را در بسیاری از حوزه‌های دیگر فیزیک ذره‌ها آشکار ساختند، و شگفتی امروزه به عنوان یک خاصیت ذره‌ای توجیه پذیر همتراز با خاصیتهایی چون بار و اسپین، به طور کامل پذیرفته شده است.

نباید ویژگی نامأنوس این نام شما را گمراه کند. شگفتی، یک خاصیت ذره‌ای اسرارآمیزتر از بار نیست. هر دو، خاصیتهایی هستند که ذره ممکن است دارا باشد (یا نباشد)، هر یک با یک عدد کوانتومی مناسب توصیف می‌شوند. هر یک از یک قانون پایستگی پیروی می‌کنند. با این حال، خاصیتهای دیگری از ذره‌ها کشف شده‌اند و نامهایی حتی عجیبتر گرفته‌اند، مانند *افسون* و *ته* ، ولی همهٔ آنها خاصیتهایی کاملاً توجیه پذیرند. به عنوان مثال، می‌خواهیم دریابیم که چگونه خاصیت جدید شگفتی با آشکارکردن نظم مهمی در خاصیت ذره‌ها "موجودیت خود را حفظ کرده است".

۴۴-۷ راه هشتگانه

هشت باریون وجود دارد- از جمله نوترون و پروتون- که دارای عدد کوانتومی اسپینی $\frac{1}{2}$ هستند. جدول ۴۴-۳ برخی از خواص دیگر آنها را نشان می‌دهد. شکل ۴۴-۳ الف نقش مجذوب کننده‌ای را نشان می‌دهد که اگر شگفتی این باریونها را برحسب عدد کوانتومی بار آنها، با استفاده از محور مایلی برای عددهای کوانتومی بار، رسم کنیم به دست می‌آید. شش تا از این هشت باریون تشکیل یک شش ضلعی را می‌دهند که دو باریون باقیمانده در مرکز آن قرار دارند.

حال می‌خواهیم توجه خود را از هادرونهای موسوم به باریون به هادرونهایی که مزون نامیده می‌شوند معطوف کنیم. نُه تا با اسپین صفر در جدول ۴۴-۴ آورده شده‌اند. اگر آنها را روی نمودار مایل شگفتی- بار رسم کنیم، مانند شکل ۴۴-۳ ب، همان نقش مجذوب کننده سر بر می‌آورد! اینها و نمودارهای وابسته‌شان نقشهای **راه هشتگانه** نامیده می‌شوند*، که به طور جداگانه‌ای در سال ۱۳۴۰/۱۹۶۱ توسط موری گلمن در انستیتو

1. Murray Gell-Mann
2. K.Nishijima

فنّاوری کالیفرنیا و *یووال نِویمن*[1] در کالج سلطنتی لندن پیشنهاد شدند. دو نقش شکل ۴۴-۳ نمایشگر تعداد بیشتری از نقشهای متقارنی هستند که در آنها دسته‌های باریونی و مزونی می‌توانند نمایش داده شوند.

جدول ۴۴-۳

هشت باریون با اسپین $\frac{1}{2}$

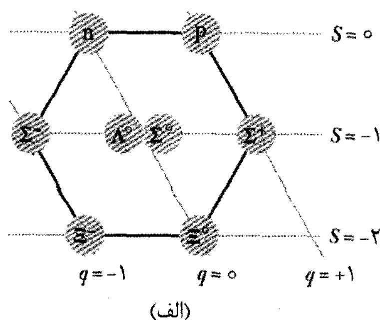
ذره	نماد	جرم (MeV/c^2)	عددهای کوانتومی: بار q	شگفتی S
پروتون	p	۹۳۸/۳	+۱	۰
نوترون	n	۹۳۹/۶	۰	۰
لاندا	Λ°	۱۱۱۵/۶	۰	−۱
سیگما	Σ^+	۱۱۸۹/۴	+۱	−۱
سیگما	Σ°	۱۱۹۲/۵	۰	−۱
سیگما	Σ^-	۱۱۹۷/۳	−۱	−۱
ایکسی	Ξ°	۱۳۱۴/۹	۰	−۲
ایکسی	Ξ^-	۱۳۲۱/۳	−۱	−۲

جدول ۴۴-۴

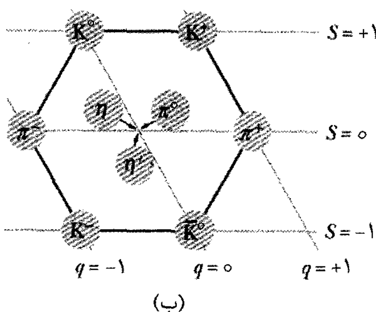
نُه مزون با اسپین صفر*

ذره	نماد	جرم (MeV/c^2)	عددهای کوانتومی: بار q	شگفتی S
پیون	π°	۱۳۵/۰	۰	۰
پیون	π^+	۱۳۹/۶	+۱	۰
پیون	π^-	۱۳۹/۶	−۱	۰
کائون	K^+	۴۹۳/۷	+۱	+۱
کائون	K^-	۴۹۳/۷	−۱	−۱
کائون	K°	۴۹۷/۷	۰	+۱
کائون	$\bar{K}^\circ$	۴۹۷/۷	۰	−۱
اِتا	η	۵۴۷/۵	۰	۰
اِتا پریم	η'	۹۵۷/۸	۰	۰

* همهٔ مزونها، بوزون‌اند و دارای اسپین ۰ ، ۱، ۲ و ... هستند. آنهایی که در اینجا فهرست شده‌اند همگی دارای اسپین ۰ هستند.



(الف)



(ب)

شکل ۴۴-۳ (الف) نقش راه هشتگانه برای هشت باریون با اسپین $\frac{1}{2}$ در جدول ۴۴-۳ آورده شده‌اند. ذره‌ها به صورت قرصهایی روی نمودار شگفتی- بار، با استفاده از یک محور مایل برای عدد کوانتومی بار، نمایش داده شده‌اند. (ب) نقش مشابهی برای نُه مزون با اسپین صفر که در جدول ۴۴-۴ آورده شده‌اند.

تقارن نقش راه هشتگانه برای باریونهای با اسپین $\frac{3}{2}$ (اینجا نشان داده نشده است)، ده ذره را نشان می‌دهند که مشابه نقش میله‌های ده‌گانهٔ هدف در بازی بولینگ چیده شده‌اند. ولی، هنگامی که این نقش برای نخستین بار پیشنهاد شد، فقط نُه عدد از چنین ذره‌هایی شناخته شده بود؛ "میلهٔ سر" پنهان بود. در سال ۱۹۶۲/۱۳۴۱، *گلمن* از نظریه و تقارنِ نقش، پیش‌بینی کرد که:

> *باریونی با اسپین $\frac{3}{2}$ وجود دارد که دارای بار ۱−، شگفتی ۳−، و انرژی سکونی در حدود ۱۶۸۰ MeV است. اگر در پی این ذرهٔ اُمگا منفی (آنطور که من آن را می‌نامم) هستید، به گمانم آن را خواهید یافت.*

گروهی از فیزیکدانان به سرپرستی *نیکلاس سامیوس*[2] در آزمایشگاه ملی بروکلین با تلاش بسیار این ذرهٔ "گمشده" را، با تأیید همهٔ خاصیتهای پیش‌بینی شدهٔ آن، یافتند. برای اعتمادسازی یک نظریه، هیچ چیز بهتر از تأیید آزمایشگاهی به موقع آن نیست.

نقشهای راه هشتگانه همان رابطه‌ای را در فیزیک ذره‌ها دارند که جدول تناوبی در شیمی دارد. در هر دو مورد، نقش نظام‌مندی وجود دارد که در آن جاهایی خالی است. (ذره‌ها یا عنصرهای گمشده) که مانند گاو پیشانی سفید فوراً به چشم

* این نام از عرفان شرقی به عاریت گرفته شده است. "هشت" به هشت عدد کوانتومی اشاره دارد (فقط چند تای از آنها در اینجا معرفی شده‌اند) که در نظریهٔ مبتنی بر تقارنی که وجود نقشها را پیش‌بینی می‌کند، وارد می‌شوند.

1. Yuval Ne'eman

2. Nicholas Samios

جدول ۴۴-۵

کوارکها *

ذره	نماد	جرم (MeV/c^2)	بار q	شگفتی S	عدد باریونی B	پاد ذره
			عددهای کوانتومی			
بالا	u	۵	$+\frac{۲}{۳}$	۰	$+\frac{۱}{۳}$	$\bar{u}$
پایین	d	۱۰	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$+\frac{۱}{۳}$	$\bar{d}$
افسون	c	۱۵۰۰	$+\frac{۲}{۳}$	۰	$+\frac{۱}{۳}$	$\bar{c}$
شگفتی	s	۲۰۰	$-\frac{۱}{۳}$	-۱	$+\frac{۱}{۳}$	$\bar{s}$
بالا	t	۱۷۵۰۰۰	$+\frac{۲}{۳}$	۰	$+\frac{۱}{۳}$	$\bar{t}$
ته	b	۴۳۰۰	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$+\frac{۱}{۳}$	$\bar{b}$

* همهٔ کوارکها (از جمله پاد کوارکها) دارای اسپین $\frac{۱}{۲}$ هستند و بنابراین فرمیون‌اند. عددهای کوانتومی q، S و B برای هر پادکوارک، منفی آن عددها برای کوارکهای متناظرشان است.

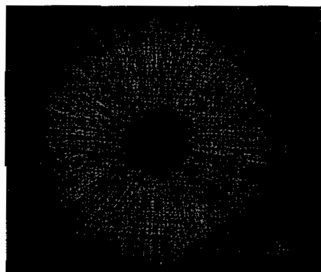
می‌آیند، و بدین ترتیب آزمایشگران را در پژوهشهای خود رهنمون می‌سازند. در مورد جدول تناوبی، صرفاً خود ماهیت آن قویاً اشاره بر این دارد که اتمهای عنصرها، ذره‌های بنیادی نیستند بلکه دارای یک ساختار درونی هستند. به همین ترتیب، نقشهای راه هشتگانه قویاً اشاره بر این دارند که مزونها و باریونها باید ساختاری درونی داشته باشند، که بر اساس آن، خواص آنها را می‌توان درک کرد. این ساختار را می‌توان بر مبنای *مدل کوارکی* توضیح داد، که اکنون به آن می‌پردازیم.

۴۴-۸ مدل کوارکی

در سال ۱۹۶۴/۱۳۴۳ *گلمن* و *جرج زوئیگ*[1] به طور مستقل اظهار داشتند که اگر مزونها و باریونها از زیر واحدهایی که *گلمن* آنها را **کوارک** نامید ساخته شده باشند، نقشهای راه هشتگانه را می‌توان به طریق ساده‌ای درک کرد. نخست سراغ سه‌تای از آنها می‌رویم، موسوم به *کوارک بالا* (با نماد u)، *کوارک پایین* (با نماد d)، و کوارک *شگفت* (با نماد s)، و به آنها خواص نشان داده شده در جدول ۴۴-۵ را اختصاص می‌دهیم. (نام این کوارکها، به همراه نامهایی که به سه کوارک دیگری که بعداً خواهیم دید اختصاص داده می‌شود هیچ معنایی ندارند، به جز اینکه نمادهایی قراردادی هستند. جمعاً، این نامها *طعمهای کوارکی* نامیده می‌شوند. همچنین می‌توانستیم آنها را به جای بالا، پایین، و شگفت، وانیل، شکلات، و توت فرنگی بنامیم.)

عددهای کوانتومی بار کسری کوارکها ممکن است شما را کمی آشفته کند. ولی، تا وقتی که ندیده‌اید چگونه این بارهای کسری، بارهای درست مشاهده شده برای مزونها و باریونها را با چه ظرافتی توضیح می‌دهند، از قضاوت بپرهیزید. در همهٔ وضعیتهای طبیعی، چه اینجا روی کرهٔ زمین و چه در فرایندهای نجومی، کوارکها همواره به دلایلی که هنوز به خوبی درک نشده است، به صورت دوتایی یا سه‌تایی به یکدیگر مقید شده‌اند. حال این را قاعدهٔ طبیعی برای ترکیبهای کوارکی می‌نامیم و به برخی از استثناهایی که اخیراً مشاهده شده است نظری می‌اندازیم.

یک استثنای هیجان برانگیز دیگر برای قاعدهٔ طبیعی در آزمایشهایی در برخورد دهندهٔ ذرهٔ RHIC واقع در آزمایشگاه ملی بروکهاون رخ داد. در نقطه‌ای که دو باریکهٔ پُرانرژی از هسته‌های طلا به طور رودررو برخورد می‌کردند، انرژی جنبشی این ذره‌ها به قدری زیاد بود که با انرژی جنبشی ذره‌هایی که درست پس از آفرینش عالم وجود داشتند (و در بخش ۴۴-۱۴ به آن خواهیم پرداخت) برابری می‌کرد. پروتونها و نوترونهای هسته‌های طلا به منظور تشکیل گازی لحظه‌ای از کوارکهای مجزا، شکافته شده بودند. (این گاز شامل گلوئونها نیز بود، ذره‌هایی که، همانطور که در بخش ۴۴-۹ خواهیم دید، کوارکها را به طور طبیعی کنار یکدیگر نگه می‌دارند.) این آزمایشها در RHIC، ممکن است نخستین مواردی پس از آفرینش عالم باشند که در آن کوارکها از یکدیگر رها شده‌اند.



برخورد رودرروی شدید دو باریکهٔ ۳ GeV از اتمهای طلا در شتابدهندهٔ RHIC واقع در آزمایشگاه ملی بروکهاون. در لحظهٔ برخورد، گازی از کوارکهای مجزا و گلوئونها تولید شده است.

کوارکها و باریونها

هر باریون ترکیبی از سه کوارک است؛ برخی از این ترکیبها در شکل ۴۴-۴ الف داده شده است. با توجه به عدد باریونی، درمی‌یابیم که هر سه کوارک (هر یک با $B=+\frac{۱}{۳}$) یک باریون واقعی (با $B = +۱$) را به دست می‌دهد.

همانطور که از سه مثال زیر می‌توانیم ببینیم، بارها نیز محاسبه می‌شوند. پروتون دارای ترکیب کوارکیِ uud است، و بنابراین، عدد کوانتومی بار آن برابر است با

$$q(\text{uud}) = \frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۳} + \left(-\frac{۱}{۳}\right) = +۱$$

1. George Zweig

نوترون دارای ترکیب کوارکی udd است، و بنابراین، عدد کوانتومی بار آن چنین می‌شود

$$q(\text{udd}) = \frac{۲}{۳} + \left(-\frac{۱}{۳}\right) + \left(-\frac{۱}{۳}\right) = ۰$$

ذرهٔ Σ^- (سیگما منفی) دارای ترکیب کوارکی dds است، و بنابراین، عدد کوانتومی بار آن چنین است

$$q(\text{dds}) = -\frac{۱}{۳} + \left(-\frac{۱}{۳}\right) + \left(-\frac{۱}{۳}\right) = -۱$$

عددهای کوانتومی شگفتی نیز محاسبه می‌شوند. این را می‌توانید با استفاده از جدول ۴۴-۳ برای عدد شگفتی Σ^- و جدول ۴۴-۵ برای عدد شگفتی کوارکهای dds بررسی کنید. ولی توجه کنید که جرم پروتون، نوترون، Σ^-، یا هر باریون دیگری جمع جرم کوارک‌های تشکیل دهندهٔ آن **نیست**. برای مثال، جرم کل سه کوارک در پروتون فقط $۲۰\,\text{MeV}/c^۲$ است، که به طور فاحشی کمتر از جرم پروتون $۹۳۸/۳\,\text{MeV}/c^۲$ است. تقریباً همهٔ جرم پروتون ناشی از انرژیهای داخلی (۱) جنبشی کوراک و (۲) میدان‌هایی که کوارک‌ها را به هم پیوند می‌دهند است (همانند بخشی که در بخش ۴۴-۹ انجام شد). (یادآور می‌شویم که جرم بنا بر معادلهٔ انیشتین، که می‌توانیم آن را به صورت $m = E/c^۲$ بنویسیم به انرژی مربوط است). بنابراین، چون بیشتر جرم شما به خاطر پروتونها و نوترونهای بدن شما هستند، جرم شما (در نتیجه وزن شما) اساساً معیاری از انرژی جنبش کوارکها و میدان‌های بستگی- کوارکها در بدن شماست.

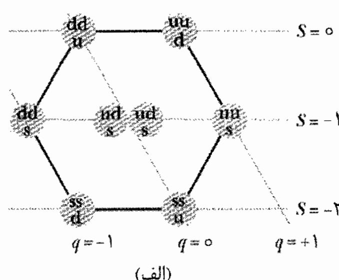
کوارکها و مزونها

مزونها، جفتهای کوارک- پادکوارک هستند؛ برخی از ترکیبهای آنها در شکل ۴۴-۴ ب داده شده است. مدل کوارک- پادکوارک با این واقعیت که مزونها، باریون نیستند سازگار است؛ یعنی، مزونها دارای عدد باریونی $B = ۰$ هستند. عدد باریونی کوارک برابر با $+\frac{۱}{۳}$ و برای پادکوارک برابر با $-\frac{۱}{۳}$ است؛ بنابراین، ترکیب عددهای باریونی در مزون برابر با صفر است.

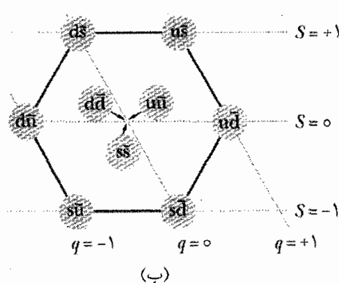
مزون π^+ را در نظر بگیرید، که شامل یک کوارک بالای u و یک کوارک پادپایین $\bar{\text{d}}$ است. از جدول ۴۴-۵ می‌بینیم که عدد کوانتومی بار کوارک بالا برابر با $+\frac{۲}{۳}$ و همین عدد برای کوارک پادپایین برابر $+\frac{۱}{۳}$ است (علامت آن مخالف علامت کوارک پایین است). جمع این دو به خوبی عدد کوانتومی بار ۱+ را برای مزون π^+ به دست می‌دهد؛ یعنی،

$$q(\text{u}\bar{\text{d}}) = \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳} = +۱$$

همهٔ عددهای کوانتومی بار و شگفتی شکل ۴۴-۴ ب با مقدارهای آنها در جدول ۴۴-۴ و شکل ۴۴-۳ ب سازگار است. خود را متقاعد کنید که همهٔ ترکیبهای ممکن کوارک- پادکوارک حاصل از کوارکهای بالا، پایین و شگفت بررسی شده‌اند و همهٔ مزونهای با اسپین صفر شناخته شده، توضیح داده شده‌اند. همه چیز با هم می‌خواند.



(الف)



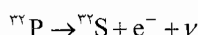
(ب)

شکل ۴۴-۴ (الف) ترکیبهای کوارکی هشت باریون با اسپین $\frac{۱}{۲}$ که در شکل ۴۴-۳ (الف) رسم شده است. (اگر چه دو باریون مرکزی دارای ساختار کوارکی یکسانی هستند، ولی ذره‌هایی متفاوت‌اند. ذرهٔ سیگما، یک حالت برانگیخته از ذرهٔ لانداست که با تابش یک فوتون پرتو گاما به لاندا وامی‌پاشد.) (ب) ترکیبهای کوارکی نُه مزون با اسپین صفر در شکل ۴۴-۳ ب رسم شده است.

> ✔ **نکتهٔ وارسی ۳** آیا ترکیب یک کوارک پایین (d) و یک کوارک پادبالا ($\bar{\text{u}}$)، (الف) مزون $\pi^۰$، (ب) پروتون، (پ) مزون π^-، (ت) مزون π^+، یا (ث) نوترون خوانده می‌شود؟

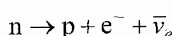
نگاهی تازه به واپاشی بتا

حال می‌خواهیم ببینیم که واپاشی بتا از منظر کوارک چگونه است؟ در معادلهٔ ۴۲-۲۴، یک مثال نوعی از فرایند زیر را ارائه کردیم



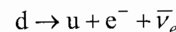
$$^{۳۲}\text{P} \rightarrow {}^{۳۲}\text{S} + \text{e}^- + \nu$$

پس از آنکه نوترون کشف شد و فرمی نظریهٔ خود دربارهٔ واپاشی بتا را بیان کرد، فیزیکدانان به این باور رسیدند که فرایند بنیادین واپاشی بتا همانند تغییر نوترون به پروتون در داخل هسته است، که از طرح زیر پیروی می‌کند



$$\text{n} \rightarrow \text{p} + \text{e}^- + \bar{\nu}_e$$

که در آن نوترینو به طور کاملتری شناسایی شد. امروزه، وقتی عمیقتر می‌نگریم درمی‌یابیم که نوترون (uud) می‌تواند با تغییر یک کوارک پایین به یک کوارک بالا، به پروتون تبدیل شود. حال به فرایند بنیادین واپاشی بتا چنین می‌نگریم



$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$$

بنابراین، وقتی می‌خواهیم دربارهٔ طبیعت بنیادین ماده بیشتر و بیشتر بدانیم، فرایندهای آشنا را می‌توانیم در سطحهای عمیقتر و عمیقتری بررسی کنیم. همچنین درمی‌یابیم که مدل کوارکی نه تنها ما را در درک ساختار ذره‌ها کمک می‌کند، بلکه راهنمایی برای درک برهم‌کنشهای آنها نیز هست.

باز هم کوارکهای بیشتر

ذره‌هایی دیگر و نقشهای راه هشتگانهٔ دیگری وجود دارند که ما آنها را بررسی نکرده‌ایم. برای توضیح آنها، لازم است سه کوارک دیگر را درنظر بگیریم، *کوارک افسون* c، *کوارک سر* t، و *کوارک ته* b. بنابراین، همانطور که در جدول ۴۴-۵ آورده شده است، مجموعاً شش کوارک وجود دارد.

توجه کنید که جرم این سه کوارک به طور استثنایی زیاد است، پرجرمترین آنها (کوارک سر) دارای جرمی تقریباً ۱۷۰ مرتبه بزرگتر از جرم پروتون است. برای تولید ذره‌هایی که شامل چنین کوارکهایی با چنین انرژیهای جرمی بزرگی باشند، باید به انرژیهای بالاتر و بالاتری برویم، که به همین دلیل این سه کوارک زودتر کشف نشدند.

نخستین ذرهٔ مشاهده شدهٔ شامل کوارک افسون، مزون J/Ψ بود، که ساختار کوارکی آن $c\bar{c}$ است. این ذره به طور همزمان و به‌طور جداگانه در سال ۱۹۷۴/۱۳۵۳ توسط گروههایی به سرپرستی *ساموئل تینگ*[1] درآزمایشگاه ملی بروکهاون و به سرپرستی *برتون ریچر*[2] در دانشگاه استنفورد کشف شد.

همهٔ تلاشها برای تولید کوارک سر در آزمایشگاه تا سال ۱۹۹۵/۱۳۷۶ نافرجام ماند، تا در این سال سرانجام وجود آن در تواترون، شتابدهندهٔ ذره‌های سنگین در آزمایشگاه فرمی، به اثبات رسید. در این شتابدهنده، پروتونها و پادپروتونها، هر یک با انرژی $۰/۹\,\mathrm{TeV}(=۹\times۱۰^{۱۱}\,\mathrm{eV})$، در مرکزهای دو آشکارساز بزرگ ذره‌ها برخورد داده می‌شوند. در موارد بسیار اندکی، پروتونهای برخورد کننده، جفت کوارک سر- پاد سر $(t\bar{t})$ تولید می‌کنند، که *بسیار* به‌تندی به ذره‌هایی وامی‌پاشند که می‌توانند آشکار شده و بنابراین، می‌توانند برای پی بردن به وجود جفت سر- پادسر به کار برده شوند.

برای لحظه‌ای به جدول ۴۴-۵ (خانوادهٔ کوارکی) و جدول ۴۴-۲ (خانوادهٔ لپتونی) نگاهی بیاندازید و به تقارن زیبای این دو "شش- بسته" از ذره‌ها توجه کنید، که هر یک به طور طبیعی به سه خانوادهٔ دو- ذره‌ای متناظر یکدیگر، تقسیم می‌شوند. بر مبنای آنچه که در حال حاضر می‌دانیم، اینگونه به نظر می‌رسد که کوارکها و لپتونها واقعاً ذره‌های بنیادی هستند و هیچ ساختار داخلی ندارند.

1. Samuel Ting
2. Burton Richter

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۴-۵

ذرهٔ Ξ^- (ایکسی منفی) دارای عدد کوانتومی اسپینی s برابر $\frac{۱}{۲}$، و عدد کوانتومی بار q برابر ۱-، و عدد کوانتومی شگفتی S برابر ۲- است. همچنین معلوم شده است که دارای کوارک ته نیست. چه ترکیبی از کوارکها، Ξ^- را می‌سازد؟

استدلال: از مسئلهٔ نمونهٔ ۴۴-۴ می‌دانیم که Ξ^- یک باریون است. بنابراین این ذره باید شامل سه کوارک باشد (نه دو کوارک، آنطور که برای مزون است).

سپس شگفتی $S=-۲$ ذرهٔ Ξ^- را در نظر می‌گیریم. فقط کوارک شگفت s و کوارک پاد شگفت $\bar{s}$ دارای مقدارهای شگفتی غیر صفر هستند (جدول ۴۴-۵ را ببینید). بعلاوه، چون فقط کوارک شگفت s دارای مقدار شگفتی *منفی* است، Ξ^- باید شامل این کوارک باشد. در واقع، برای آنکه Ξ^- دارای شگفتی برابر ۲- باشد، این ذره باید دو کوارک شگفت داشته باشد.

برای تعیین کوارک سوم، آن را x می‌نامیم، می‌توانیم سایر خواص شناخته شدهٔ Ξ^- را در نظر بگیریم. عدد کوانتومی بار q آن برابر با ۱-، و عدد کوانتومی بار q هر یک از دو کوارک شگفت برابر $-\frac{۱}{۳}$ است. بنابراین، کوارک x باید دارای عدد کوانتومی بار $-\frac{۱}{۳}$ باشد. از اینرو می‌توانیم چنین بنویسیم

$$q(\Xi^-) = q(\mathrm{ssx})$$

$$= -\frac{۱}{۳} + \left(-\frac{۱}{۳}\right) + \left(-\frac{۱}{۳}\right) = -۱$$

سوای کوارک شگفت، تنها کوارکهای با $q=-\frac{۱}{۳}$، کوارک پایین d و کوارک ته b هستند. چون صورت مسئله، کوارک ته را کنار گذاشته است، سومین کوارک باید کوارک پایین باشد. این نتیجه همچنین با عددهای کوانتومی باریونی سازگار است:

$$B(\Xi^-) = B(\mathrm{ssd})$$

$$= \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} = +۱$$

بنابراین، ترکیب کوارکی ذرهٔ Ξ^- عبارت است از ssd.

۴۴-۹ نیروهای اصلی و ذره‌های پیام‌رسان

اکنون از تقسیم‌بندی ذره‌ها، به بررسی نیروهای میان آنها می‌پردازیم.

نیروی الکترومغناطیسی

در سطح اتمی، می‌گوییم دو الکترون بنابر قانون کولن بر یکدیگر نیروهای الکترومغناطیسی وارد می‌کنند. در سطحی

عمیقتر، این برهم‌کنش توسط یک نظریهٔ بسیار موفقیت‌آمیز موسوم به **الکترودینامیک کوانتومی** (QED) توصیف می‌شود. از این منظر، می‌گوییم که هر الکترون حضور دیگری را با مبادلهٔ فوتونهایی با آن، حس می‌کند.

این فوتونها را نمی‌توانیم آشکار کنیم. چون آنها توسط یک الکترون گسیل و در زمان بسیار کوتاهی پس از آن توسط الکترون دیگری جذب می‌شوند. به دلیل ماهیت آشکار نشدنی آنها، این فوتونها را **فوتونهای مجازی** می‌نامیم. چون آنها میان دو ذرهٔ باردار برهم‌کنش کننده ارتباط برقرار می‌کنند، برخی اوقات این فوتونها را *ذره‌های پیام‌رسان* می‌نامیم.

اگر یک الکترون ساکن، فوتونی را گسیل کند و خودش بدون تغییر باقی بماند، انرژی پایسته نیست. ولی، اصل پایستگی انرژی توسط اصل عدم قطعیت حفظ می‌شود، که به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\Delta E . \Delta t \approx \hbar \qquad (۱۸-۴۴)$$

همانطور که در مسئلهٔ نمونهٔ ۴۲-۱۰ توضیح داده شد. در اینجا این رابطه را به این معنی تعبیر می‌کنیم که می‌توانیم یک مقدار انرژی ΔE را، با نقض پایستگی انرژی در صورتی "اضافه برداشت" کنیم که آن را در بازهٔ زمانی Δt که با $\hbar/\Delta E$ داده می‌شود "برگردانید" تا آن نقض انرژی نتواند مشاهده شود. فوتونهای مجازی درست همین کار را می‌کنند. هنگامی که، مثلاً، الکترون A یک فوتون مجازی گسیل می‌کند، وقتی آن الکترون یک فوتون مجازی را از الکترون B دریافت می‌دارد، اضافه برداشت انرژی به سرعت جبران می‌شود و بدین ترتیب نقض پایستگی انرژی برای جفت الکترون توسط این عدم قطعیت ذاتی، پنهان می‌ماند.

نیروی ضعیف

نظریهٔ نیروی ضعیف، که برای تمام ذره‌ها برقرار است، از قیاس با نظریهٔ نیروی الکترومغناطیسی بنا نهاده شده است. ولی، ذره‌های پیام‌رسان که نیروی ضعیف را میان ذره‌ها منتقل می‌کنند، فوتونها (که بدون جرم‌اند) نیستند، بلکه ذره‌های پرجرمی هستند که با نمادهای W و Z مشخص شده‌اند. این نظریه آنچنان موفقیت‌آمیز بود که نیروی الکترومغناطیسی و نیروی ضعیف را به عنوان جلوه‌های متفاوتی از یک **تکْ نیروی الکتروضعیف** نمایان ساخت. این دستاورد، گسترش منطقی کار *ماکسول* است، که نشان داد نیروهای الکتریکی و مغناطیسی جلوه‌های متفاوتی از یک تکْ نیروی *الکترومغناطیسی* هستند.

نظریهٔ الکتروضعیف در پیش‌بینی خواص ذره‌های پیام‌رسان دقیق بوده است. برای مثال، پیش‌بینی شد که بار و جرم آنها برابر مقدارهای زیرند

ذره	بار	جرم
W	$\pm e$	$۸۰/۶\,\mathrm{GeV}/c^2$
Z	۰	$۹۱/۲\,\mathrm{GeV}/c^2$

به خاطر آورید که جرم پروتون فقط $۰/۹۳۸\,\mathrm{GeV}/c^2$ است؛ پس اینها ذره‌های پرجرمی هستند! جایزهٔ نوبل سال ۱۹۷۹/۱۳۵۸ فیزیک به *شلدون گلاشو*[1]، *استیون واینبرگ*[2]، و *عبدالسلام*[3] به خاطر بنا ساختن نظریهٔ الکتروضعیف به آنها تعلق گرفت.

این نظریه در سال ۱۹۸۳/۱۳۶۲ توسط *کارلو روبیا*[4] و گروه همکارش در CERN به تأیید رسید؛ او به طور آزمایشگاهی بر وجود هر دو ذرهٔ پیام‌رسان صحه گذاشت و جرمهای آنها را که در توافق با مقدارهای پیش‌بینی شده بود، به دست آورد. جایزهٔ نوبل ۱۹۸۴/۱۳۶۳ فیزیک به *روبیا* و *سایمون فون در میر*[5] به خاطر این کار آزمایشگاهی درخشان، تعلق گرفت.

برخی مفاهیم پیچیدهٔ فیزیک ذره‌ها در حال حاضر و در گذشته را می‌توان با نگاهی به یک آزمایش فیزیک ذره‌های قدیمی- یعنی کشف نوترون که به جایزهٔ نوبل فیزیک انجامید- درک کرد. این کشف واقعاً مهم یک آزمایش "گل سرسبد" بود، که ذره‌های گسیل شده توسط مواد پرتوزای طبیعی را به عنوان پرتابه به خدمت می‌گرفت؛ این آزمایش در سال ۱۹۳۲/۱۳۱۱ تحت عنوان "احتمال وجود نوترون" گزارش شد که تنها نویسندهٔ آن جیمز *چادویک*[6] بود.

در مقابل، کشف ذره‌های پیام‌رسان W و Z در سال ۱۹۸۳/۱۳۶۲ در یک شتابدهندهٔ بزرگ ذره‌ها به انجام رسید، که پیرامون آن حدود ۷ km بود و در گسترهٔ چند صد میلیارد الکترون- ولت عمل می‌کرد. وزن آشکارساز ذره‌ای اصلی آن به تنهایی ۲۰ MN بود. در این آزمایش، متجاوز از ۱۳۰ فیزیکدان از ۱۲ مرکز پژوهشی در ۸ کشور، به همراه بخش عظیمی از کارمندان همکاری داشتند.

نیروی قوی

نظریهٔ نیروی قوی- یعنی، نیرویی که میان کوارکها برای پیوند دادن هادرونها به یکدیگر عمل می‌کند- نیز بنا شده است. در این حالت، ذره‌های پیام‌رسان **گلوئون** نامیده می‌شوند و پیش‌بینی شده است که مانند فوتون، بدون جرم باشند. این نظریه فرض می‌کند که هر "طعم" کوارک در سه دستهٔ گوناگون ظاهر می‌شود که برای راحتی کار با *قرمز*، *زرد*، و *آبی* مشخص شده‌اند*. بنابراین، سه کوارک بالا وجود دارد، هر یک با یکی از این سه رنگ، و نظایر آن. پادکوارکها نیز سه رنگ دارند که آنها را *پادقرمز*، *پادزرد*، و *پادآبی* می‌نامند. نباید تصور شود که

1. Sheldon Glashow
2. Steven Weinberg
3. Abdus Salam
4. Carlo Rubbia
5. Simon Van Der Meer
6. James Chadwick

*. توجه کنید که این دسته‌بندی یگانه نیست و مثلاً برخی از کتابها از سبز به جای زرد استفاده می‌کنند، م.

کوارکها مانند آب نباتهای پاستیل، واقعاً رنگی هستند. این نامها برای راحتی کار انتخاب شده‌اند، ولی همانطور که خواهیم دید، آنها دارای یک توجیه رسمی معین هستند.

نیرویی که میان کوارکها عمل می‌کند، **نیروی رنگ** نامیده می‌شود و نظریهٔ بنیادین آن در تشابه، با الکترودینامیک کوانتومی (QED)، **کرومودینامیک کوانتومی** (QCD) نامیده شده است. ظاهراً، کوارکها می‌توانند فقط در ترکیبهایی با *رنگ خنثی* ظاهر شوند.

دو راه برای خنثی کردن رنگ وجود دارد. در نظریهٔ رنگهای واقعی، قرمز + زرد + آبی، سفید را به دست می‌دهد که یک رنگ خنثی است، و ما از همین طرح در توضیح کوارکها استفاده می‌کنیم. بنابراین، برای تشکیل یک باریون می‌توانیم سه کوارک را گرد هم آوریم، با این شرط که یکی کوارک زرد، یکی کوارک قرمز، و یکی کوارک آبی باشد. پادقرمز + پادزرد + پادآبی نیز سفید است، به طوری که می‌توانیم سه پادکوارک را (از سه پادرنگ مناسب) برای تشکیل یک پادباریون گرد هم آوریم. سرانجام، قرمز + پادقرمز، یا زرد + پادزرد، یا آبی + پادآبی نیز سفید را به دست می‌دهند. بنابراین، برای تشکیل مزون می‌توانیم ترکیبی از کوارک و پادکوارک را گرد آوریم. قاعدهٔ رنگ خنثی هیچ ترکیب دیگری از کوارکها را مجاز نمی‌شمارد، و هیچ یک از چنین ترکیبهایی مشاهده نشده است.

نیروی رنگ نه تنها برای پیوند کوارکها به یکدیگر به صورت باریونها و مزونها اعمال می‌شود، بلکه میان چنین ذره‌هایی نیز اعمال می‌شود، که در این حالت مرسوم است که نیروی قوی نامیده می‌شود. بنابراین، نیروی رنگ، نه تنها کوارکها را برای تشکیل پروتونها و نوترونها به یکدیگر پیوند می‌دهد، بلکه همچنین پروتونها و نوترونها را برای ایجاد هسته‌ها به یکدیگر می‌پیوندد.

رؤیای اینشتین

وحدت نیروهای بنیادین طبیعت به یک تکْ نیرو– که ذهن اینشتین را به میزان زیادی در اواخر عمرش به خود مشغول داشته بود– یکی از مورد توجه‌ترین زمینه‌های پژوهشی حال حاضر است. دیده‌ایم که نیروی ضعیف به طور موفقیت‌آمیزی با نیروی الکترومغناطیسی ترکیب شده است، به طوری که آنها را با هم می‌توان به صورت جلوه‌هایی از یک تکْ *نیروی الکتروضعیف* در نظر گرفت. نظریه‌هایی که در تلاش‌اند نیروی قوی را به این ترکیب بیافزایند، *نظریه‌های وحدت بزرگ*[1] (GUT) نامیده شده‌اند و به طور فعالی پی گرفته می‌شوند. نظریه‌هایی که در پی کامل نمودن این کار با افزودن گرانش هستند و گاهی *نظریه‌های همه چیز*[2] (TOE) خوانده می‌شوند، دلگرم کننده‌اند ولی در حال حاضر در مرحلهٔ ذهنی قرار دارند.

۴۴-۱۰ درنگی برای اندیشه

حال جای واقعی آنچه را که آموخته‌ایم مطرح می‌کنیم. اگر تمام توجه ما ساختار جهان اطراف باشد، به خوبی می‌توانیم با الکترون، نوترینو، نوترون، و پروتون به آن برسیم. به قول یکی، فقط با همین ذره‌ها می‌توانیم "سفینهٔ فضایی زمین" را به بهترین وجهی هدایت کنیم. می‌توانیم ذره‌های ناشناختهٔ بیشتری را با جستجو در پرتوهای کیهانی بیابیم؛ ولی، برای مشاهدهٔ بیشتر آنها، باید شتابدهنده‌های بزرگی بسازیم و با تلاش و هزینهٔ بسیار دنبال آنها بگردیم.

دلیل اینکه باید چنین تلاشی را به انجام برسانیم این است که– به بیان انرژی– ما در جهان دماهای بسیار پایین زندگی می‌کنیم. حتی در مرکز خورشید، مقدار kT فقط حدود 1keV است. برای تولید ذره‌های ناشناخته باید بتوانیم پروتونها یا الکترونها را تا انرژیهایی در گسترهٔ GeV و TeV و بالاتر شتاب دهیم.

در زمانهایی خیلی پیش، دمای همه‌جا برای تولید چنین ذره‌هایی به حد کافی بالا *بود*. آن زمان دماهای فوق العاده بالا، در **مهبانگ** آغازین عالم پیش آمد، زمانی که عالم (و هم فضا و هم زمان) پا به عرصهٔ وجود نهاد. بنابراین، یک دلیل آنکه دانشمندان ذره‌ها را در انرژیهای بالا بررسی می‌کنند آن است که بفهمند جهان درست پس از پیدایش به چه می‌مانست؟

همانطور که به *اختصار* توضیح خواهیم داد، *همهٔ* فضای داخل عالم در ابتدا اندازهٔ بسیار ناچیزی داشت، و دمای ذره‌های داخل آن فضا به میزان ناباورانه‌ای بالا بود. ولی، با گذشت زمان عالم انبساط یافت و به دماهای پایینتری سرد شد، تا اینکه سرانجام به اندازه و دمایی رسید که امروز می‌بینیم.

در واقع، عبارت "امروز می‌بینم" جای مناقشه دارد: وقتی به فضا نگاه می‌کنیم، در واقع داریم به گذشته می‌نگریم، زیرا نور حاصل از ستارگان و کهکشانها زمان زیادی می‌برد که به ما برسد. دورترین اجسامی که می‌توانیم مشاهده کنیم **اختروَشها** (اجسام *شبه* ستاره‌ای) هستند، که مغزهای فوق العاده درخشانی از کهکشانها به فاصله‌ای به بزرگی 13×10^{9}ly از ما هستند. هر یک از چنین مغزهایی شامل یک سیاهچالهٔ غول پیکر است؛ وقتی ماده‌ای (گاز و حتی ستارگان) به درون یکی از این سیاهچاله‌ها کشیده شود، دمای آن ماده بالا می‌رود و مقدار قابل ملاحظه‌ای نور تابش می‌کند که به رغم فاصلهٔ عظیم آن، برای آنکه آن را آشکار سازیم کفایت می‌کند. بنابراین، یک اختروش را "می‌بینیم" ولی نه به صورتی که امروز هست، بلکه به صورتی

1. Grand Unification Theories

2. Theories Of Everything

که در زمانی پیش بوده، زمانی که آن نور سفر خود را به سوی ما از میلیاردها سال پیش آغاز کرده است.

۴۴-۱۱ عالم در حال انبساط است

همانطور که در بخش ۳۷-۱۰ دیدیم، این امکان وجود دارد که تندی نسبی نزدیک شدن یا دورشدن کهکشانها را با اندازه‌گیری انتقالهای طول موج نوری که آنها گسیل می‌کنند، اندازه بگیریم. اگر فقط به کهکشانهای دور، که در ورای مجاورهای کهکشانی ما هستند، نگاه کنیم به یک واقعیت متحیرکننده می‌رسیم: همگی آنها در حال دورشدن (پَس‌روی) از ما هستند!

در سال ۱۹۲۹/۱۳۰۸، *ادوین هابل*[1] رابطه‌ای میان تندی ظاهری دورشدن v یک کهکشان و فاصلهٔ r آن از ما برقرار کرد — که بیان می‌دارد آنها به طور مستقیم با هم متناسب‌اند:

$$v = Hr \quad \text{(قانون هابل)} \qquad (۴۴\text{-}۱۹)$$

که در آن H *ثابت هابل* نامیده می‌شود. مقدار H معمولاً برحسب یکای کیلومتر بر ثانیه- مگاپارسک (km/s.Mpc) اندازه‌گیری می‌شود، که در آن مگاپارسک یکای طولی است که به طور معمول در اختر فیزیک و نجوم به کار گرفته می‌شود:

$$1\,\text{Mpc} = ۳/۰۸۴\times ۱۰^{۱۹}\,\text{km} = ۳/۲۶۰\times ۱۰^{۶}\,\text{ly} \qquad (۴۴\text{-}۲۰)$$

ثابت هابل H نباید همان مقدار شروع عالم را داشته باشد. تعیین مقدار فعلی آن فوق‌العاده دشوار است، زیرا چنین کاری مستلزم اندازه‌گیریهایی در مورد کهکشانهای خیلی دور است. ولی، شواهد موجود در تصویر آغازین این فصل به پژوهشگران امکان می‌دهد که مقدار H را با دقت تعیین کنند

$$H = ۷۱/۰\,\text{km/s.Mpc} = ۲۱/۸\,\text{mm/s.ly}$$

دورشدن کهکشانها را به این معنی تعبیر می‌کنیم که عالم در حال انبساط است، به همان ترتیبی که کشمشهای یک کیک کشمشی در حال پختن با باد کردن خمیر از یکدیگر فاصلهٔ بیشتری می‌گیرند. ناظرهای روی کهکشانهای دیگر نیز درمی‌یابند فاصلهٔ کهکشانهایی که به سرعت از آنها دور می‌شوند، از قانون هابل پیروی می‌کند. با این قیاس می‌توانیم بگوییم که هیچ کشمشی (کهکشانی) دارای دیدگاه یگانه یا مرجحی نیست.

قانون هابل با این فرضیه سازگار است که عالم با مهبانگ آغاز شده و از آن موقع همواره در حال انبساط بوده است. اگر فرض کنیم که آهنگ انبساط ثابت بوده است (یعنی، مقدار H ثابت بوده است)، آنگاه می‌توانیم سن T عالم را با استفاده از معادلهٔ ۴۴-۱۹ با تقریب پیدا کنیم. همچنین فرض می‌کنیم که از آغاز مهبانگ، هر بخش معینی از عالم (مثلاً، یک کهکشان) از مکان ما با تندی v داده شده توسط معادلهٔ ۴۴-۱۹، دور شده است. پس زمان لازم برای آنکه آن بخش معین به اندازهٔ فاصلهٔ r دور شود، چنین است

$$T = \frac{r}{v} = \frac{r}{Hr} = \frac{1}{H} \quad \text{(سن برآورد شدهٔ عالم)} \qquad (۴۴\text{-}۲۲)$$

برای مقدار H در معادلهٔ ۴۴-۲۱، T برابر با $۱۳/۸\times ۱۰^{۹}\,\text{y}$ به دست می‌آید. بررسیهای بسیار پیشرفته‌تر در مورد انبساط عالم، T را برابر $۱۳/۷\times ۱۰^{۹}\,\text{y}$ تعیین کرده است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۴-۶

انتقال طول موج نور حاصل از یک اختروش خاص نشان می‌دهد که آن اختروش دارای تندی پس‌روی $۲/۸\times ۱۰^{۸}\,\text{m/s}$ است (که ۹۳٪ تندی نور است). این اختروش تقریباً در چه فاصله‌ای از ما قرار دارد؟

نکتهٔ کلیدی فرض می‌کنیم که فاصله و تندی با قانون هابل به هم مربوطاند.

محاسبه: از معادله‌های ۴۴-۱۹ و ۴۴-۲۱ درمی‌یابیم که

$$r = \frac{v}{H} = \frac{۲/۸\times ۱۰^{۸}\,\text{m/s}}{۲۱/۸\,\text{mm/s.ly}}(۱۰۰۰\,\text{mm/m}) = ۱۲/۸\times ۱۰^{۹}\,\text{ly} \quad \text{(پاسخ)}$$

این فقط یک تقریب است، زیرا اختروش همواره با تندی یکسان v از مکان ما پس‌روی نکرده است؛ یعنی، H در سرتاسر زمانی که در حین آن عالم در حال انبساط بوده، دارای مقدار فعلی خود نبوده است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۳-۴

یک خط گسیلی خاص که در نور حاصل از یک کهکشان مشاهده شده دارای طول موج آشکار شدهٔ $\lambda_{det} = ۱/۱\lambda$ است، که در آن λ طول موج خاص آن خط است. فاصلهٔ آن کهکشان از ما چقدر است؟

نکته‌های کلیدی (۱) فرض کنیم قانون هابل $(v = Hr)$ برای پس‌روی کهکشان برقرار است. (۲) فرض کنیم انتقال دوپلری نجومی معادلهٔ ۳۷-۳۶ $(v = c\Delta\lambda$ به ازای $v \ll c)$ برای انتقال طول موج حاصل از پس‌روی برقرار است. آنگاه می‌توانیم طرف راست این دو معادله را برابر یکدیگر قرار دهیم و چنین بنویسیم

حل: نکتهٔ کلیدی در اینجا این است که

$$Hr = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda} \qquad (۴۴\text{-}۲۳)$$

که به رابطهٔ زیر می‌انجامد

$$r = \frac{c\Delta\lambda}{H\lambda} \qquad (۴۴\text{-}۲۴)$$

در این معادله

$$\Delta\lambda = \lambda_{det} - \lambda = ۱/۱\lambda - \lambda = ۰/۱\lambda$$

آنگاه قراردادن این رابطه در معادلهٔ ۴۴-۲۴ چنین به دست می‌دهد

---
1. Edwin P. Hubble

$$r=\frac{c(0.1\lambda)}{H\lambda}=\frac{0.1c}{H}$$
$$=\frac{(0.1)(3.0\times10^{8}\ \text{m/s})}{21.8\ \text{mm/s.ly}}(1000\ \text{mm/m})$$
$$=1.4\times10^{9}\ \text{ly}$$ (پاسخ)

۴۴-۱۲ تابش زمینهٔ کیهانی

در سال ۱۹۶۵/۱۳۴۴ *آرنو پنزیاس*[1] و *رابرت ویلسون*[2] از مؤسسه‌ای که بعداً *آزمایشگاههای تلفن بل*[3] نامیده شد، در حال آزمایش یک گیرندهٔ میکروموج حساس بودند که برای پژوهشهای مخابراتی به کار می‌رفت. آنها "صدای هیس" زمینهٔ ضعیفی را کشف کردند که شدت آن بدون توجه به آنکه آنتن آنها به کدام سو باشد، بدون تغییر باقی ماند. بزودی روشن شد که پنزیاس و ویلسون **تابش زمینهٔ کیهانی** را مشاهده کرده‌اند، که در عالم قدیمی ایجاد شده بود و تقریباً به طور یکنواختی همه جا را پر کرده است. این تابش، در حال حاضر دارای یک شدت بیشینه در طول موج ۱/۱mm است که در ناحیهٔ میکروموج تابش الکترومغناطیسی (یا به اختصار، نور) قرار دارد. توزیع طول موج این تابش نظیر توزیع طول موج نوری است که از یک محفظهٔ آزمایشگاهی با دیواره‌هایی در دمای ۲/۷K تابش می‌شود. بنابراین، برای تابش زمینهٔ کیهانی می‌گوییم که محفظه، کلّ عالم است و آن عالم در دمای (میانگین) ۲/۷K قرار دارد. پنزیاس و ویلسون به خاطر کشف تابش زمینهٔ کیهانی موفق به اخذ جایزهٔ نوبل فیزیک در سال ۱۹۷۸/۱۳۵۷ شدند.

همانطور که در بخش ۴۴-۱۴ مطرح می‌کنیم، اکنون دانسته شده است که تابش زمینهٔ کیهانی نوری است که از زمان کوتاهی پس از آغاز عالم در میلیاردها سال پیش، بر فراز عالم در حرکت بوده است. وقتی که عالم خیلی جوانتر بود، نور نمی‌توانست مسافت قابل توجهی را بدون آنکه توسط همهٔ ذره‌های منفردِ پر سرعتی که در امتداد مسیر آن بودند پراکنده شود، طی کند. اگر یک پرتو نور، مثلاً، از نقطهٔ A شروع کرده بود، در جهتهای بسیار زیادی پراکنده می‌شد، به طوری که اگر می‌توانستید بخشی از آن را قطع کنید، قادر نبودید که بگویید آن پرتو از نقطهٔ A منشأ گرفته است. ولی، پس از آنکه ذره‌ها شروع به تشکیل اتمها کردند، پراکندگی نور به میزان زیادی کاهش یافت. آنگاه یک پرتو نور ناشی از نقطهٔ A می‌توانست برای میلیونها سال بی‌آنکه پراکنده شود، حرکت کند. این نور، همان تابش زمینهٔ کیهانی است.

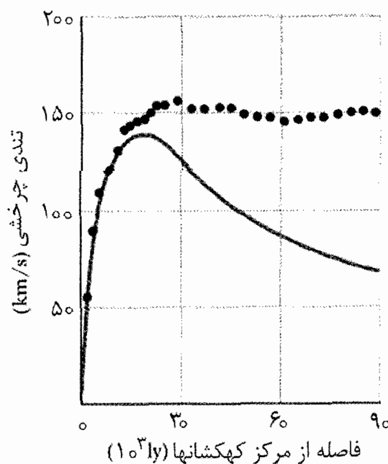
وقتی ماهیت این تابش شناخته شد، پژوهشگران در شگفت شدند، "آیا می‌توانیم از این تابش دریافتی برای تمیز نقطه‌هایی که تابش از آنجا منشأ گرفته است استفاده کنیم، به طوری که بتوانیم تصویری از عالم قدیمی بسازیم، در زمانی که اتمها برای نخستین بار تشکیل شدند و پراکندگی زیاد نور متوقف شد؟" پاسخ، مثبت است. تصویری که این فصل با آن آغاز می‌شود، چنین تصویری است.

1. Arno Penzias
2. Robert Wilson
3. Bell Telephone Laboratories

۴۴-۱۳ مادهٔ تاریک

در *رصدخانهٔ ملّی کیت پیک*[4] واقع در آریزونا، *ورا روبین*[5] و همکارش *کنت فورد*[6] آهنگ چرخش تعدادی از کهکشانهای دوردست را اندازه گرفتند. آنها این کار را با اندازه‌گیری انتقالهای دوپلری خوشه‌های درخشان ستارگانی به انجام رساندند که در داخل هر کهکشان در فاصله‌های مختلفی از مرکز کهکشانی قرار داشتند. همانطور که شکل ۴۴-۵ نشان می‌دهد، نتایج آنها شگفت‌آور بود: تندی مداری ستاره‌ها در لبهٔ مرئی بیرونی کهکشان تقریباً با تندی مداری ستاره‌های نزدیک به مرکز کهکشان برابر است.

همانطور که منحنی توپر شکل ۴۴-۵ گواهی می‌دهد، در صورتی که همهٔ جرم کهکشان توسط نور مرئی نشان داده می‌شد، این منحنی آن چیزی نبود که انتظارش را داشتیم. و نیز این نقش به دست آمده توسط روبین و فورد آن چیزی نیست که در منظومهٔ شمسی می‌یابیم. برای مثال، تندی مداری پلاتو



شکل ۴۴-۵ تندی چرخشی ستارگان در یک کهکشان نوعی برحسب تابعی از فاصلهٔ آنها تا مرکز کهکشان. منحنی توپر از لحاظ نظری نشان می‌دهد که اگر یک کهکشان فقط جرم مرئی را در بر داشته باشد، تندی چرخشی مشاهده شده با افزایش فاصله در مسافتهای دور، افت می‌کند. نقطه‌ها داده‌های تجربی هستند که نشان می‌دهند تندی چرخشی در فاصله‌های دور، تقریباً ثابت است.

(دورترین سیاره از خورشید) فقط در حدود یک- دهم تندی مداری عطارد (نزدیکترین سیاره به خورشید) است.

4. Kitt Peak National Observatory
5. Vera Rubin
6. Kent Ford

تنها توضیح برای یافته‌های روبین و فورد که با مکانیک نیوتونی سازگار است، این است که یک کهکشان نوعی، ماده‌ای بسیار بیشتر از آنچه که واقعاً می‌توانیم ببینیم، در بر دارد. در واقع، بخش مرئی یک کهکشان فقط در حدود ۵ تا ۱۰ درصد جرم کلّ کهکشان است. علاوه بر این مطالعات در مورد چرخش کهکشانی، رصدهای بی‌شمار دیگر به این نتیجه می‌انجامد که عالم مملو از ماده‌ای است که نمی‌توانیم آن را ببینیم. این مادهٔ نادیدنی از آنرو **مادهٔ تاریک** نامیده می‌شود که یا نوری گسیل نمی‌دارد یا گسیل نور آن برای آنکه آن را آشکار کنیم بسیار ضعیف است.

مادهٔ معمولی (از قبیل ستارگان، سیاره‌ها، غبار، و مولکولها) اغلب **مادهٔ باریونی** نامیده می‌شود، زیرا جرم آن عمدتاً ناشی از جرم مرکبی از پروتونها و نوترونهایی (باریونهایی) است که آن را تشکیل می‌دهند. (جرم الکترونها نادیده انگاشته شده است، زیرا جرم الکترون نسبت به جرم پروتون یا نوترون بسیار کوچک است.) برخی از مواد طبیعی، از قبیل ستارگان سوخته و گازهای بین ستاره‌ای کم‌سو، بخشی از مادهٔ تاریک در یک کهکشان هستند.

ولی، بنا بر محاسبه‌های مختلف، این مادهٔ معمولی تاریک فقط بخش کوچکی از کلّ مادهٔ تاریک است. بقیه، **مادهٔ تاریک غیر باریونی** نامیده می‌شود، زیرا شامل پروتونها و نوترونها نمی‌شود. فقط یکی از اعضای این نوع مادهٔ تاریک را می‌شناسیم— نوترینوها. اگرچه جرم نوترینو نسبت به جرم پروتون یا نوترون بسیار کوچک است، ولی تعداد نوترینوها در یک کهکشان بسیار زیاد، و بنابراین جرم کلّ نوترینوها بزرگ است. با این وجود، محاسبه‌ها نشان می‌دهد که حتی جرم کلّ نوترینوها برای توضیح جرم کلّ مادهٔ غیر باریونی کفایت نمی‌کند. به رغم گذشت یک صد سال که در آن ذره‌های بنیادی آشکار و مطالعه شده‌اند، ذره‌هایی که بقیهٔ این نوع از مادهٔ تاریک را تشکیل می‌دهند، آشکار ناپذیرند و ماهیت آنها ناشناخته مانده است. چون هیچ تجربه‌ای با آنها نداریم و آنها با ذره‌های معمولی فقط به طور گرانشی برهم کنش می‌کنند.

۴۴-۱۴ مهبانگ

در سال ۱۹۸۵/۱۳۷۴، فیزیکدانی در یک همایش علمی چنین بیان داشت:

> *اینکه عالم ۱۵ میلیارد سال پیش با یک مهبانگ آغاز شد به همان قطعیتی است که زمین به دور خورشید می‌گردد.*

این عبارت قوی حاکی از سطح اعتماد به نظریهٔ مهبانگ است، که نخستین بار توسط فیزیکدان بلژیکی *ژرژ لومایتره*[1] در بین کسانی که چنین مطالبی را مطالعه می‌کنند مطرح شد.

نباید تصور کنید که مهبانگ شبیه انفجار یک ترقهٔ غول پیکر است و اینکه شما، دست کم در اصول، می‌توانستید در یک طرف ایستاده و آن را تماشا کنید. هیچ "یک طرفی" وجود نداشت، زیرا مهبانگ بیانگر آغاز خود فضا- زمان است. از منظر عالم کنونی، هیچ مکانی در فضا وجود ندارد که بتوانید آن را نشان دهید و بگویید "مهبانگ در اینجا رخ داده است". آن در همه جا رخ داده است.

افزون بر این، "پیش از مهبانگ" وجود نداشت، زیرا زمان با آفرینش آن رویداد *آغاز شد*. در این وضعیت، واژهٔ "پیش" معنی خود را از دست می‌دهد. ولی، می‌توانیم دربارهٔ آنچه که در حین بازه‌های زمانی متوالی پس از مهبانگ رخ داده است، حدسهایی بزنیم. (شکل ۴۴-۶)

$t \approx 10^{-43}$ s . این قدیمی‌ترین زمانی است که در آن می‌توانیم چیز معنی‌داری دربارهٔ آفرینش عالم بگوییم. در این لحظه است که مفاهیم فضا و زمان معانی فعلی خود را می‌گیرند و قانونهای فیزیک آنطور که آنها را می‌شناسیم کاربرد پیدا می‌کنند. در این لحظه، کلّ عالم (یعنی، *تمام* وسعت فضایی عالم) بسیار کوچکتر از یک پروتون است و دمای آن حدود 10^{32} K است. افت و خیزها کوانتومی در ترکیب فضا زمان دانه‌هایی هستند که سرانجام به تشکیل کهکشانها، خوشه‌هایی کهکشانی و ابر خوشه‌های کهکشانی منجر خواهند شد.

$t \approx 10^{-34}$ s . تا این لحظه، عالم به طور سرسام آوری سریعاً متورم شده است، به طوری که اندازهٔ آن با عاملی در حدود 10^{30} افزایش یافته است و باعث تشکیل ماده در توزیع برقرار شده توسط افت و خیزهای کوانتومی اولیه می‌شود. عالم به صورت سوپ داغی از فوتونها، کوارکها، و لپتونها در دمایی در حدود 10^{27} K درآمده است، که برای تشکیل پروتونها و نوترونها بسیار داغ است.

$t \approx 10^{-4}$ s . اکنون کوارکها می‌توانند برای تشکیل پروتونها و نوترونها و پادذره‌هایشان ترکیب شوند. عالم اکنون با انبساط مداوم (ولی بسیار آهسته‌تر) به اندازه‌ای سرد شده است که فوتونها انرژی لازم برای شکستن این ذره‌های جدید را ندارند. ذره‌های ماده و پاد ماده برخورد کرده و یکدیگر را نابود می‌کنند. ماده کمی بیشتر است و نمی‌تواند زوجی برای نابودی بیابد. همین بازمانده‌ها هستند که عالم مادی امروزی را تشکیل می‌دهند.

1. Georges Lemaitre

$t \approx 1\text{min}$. در این موقع عالم به حدّ کافی سرد شده است به گونه‌ای که پروتونها و نوترونها، در برخورد، می‌توانند به یکدیگر بچسبند تا هسته‌های کم جرم ^{2}H، ^{3}He، ^{4}He، و ^{7}Li را تشکیل دهند. فراوانی نسبی پیش‌بینی شدهٔ این هسته‌ها دقیقاً همانی است که امروز در عالم مشاهده می‌کنیم. همچنین، در $t \approx 1\text{min}$ مقدار فراوانی تابش وجود دارد، ولی این نور نمی‌تواند پیش از آنکه با هسته برهم‌کنش کند مسافت زیادی را طی کند. بنابراین، عالم کدر است.

$t \approx 379000\text{y}$. اکنون دما تا ۲۹۷۰K کاهش یافته است، و الکترونها می‌توانند به هنگام برخورد با هستهٔ لُخت به آن بچسبند و اتمها را تشکیل دهند. چون نور به میزان قابل توجهی با ذره‌های (بدون بار)، مانند اتمهای خنثی، برهم‌کنش نمی‌کند، اکنون نور آزاد است که به فاصله‌های بزرگی حرکت کند. این تابش، تابش زمینهٔ کیهانی را تشکیل می‌دهد که در بخش ۴۴-۱۲ در مورد آن بحث شد. اتمهای هیدروژن و هلیوم، بر اثر نفوذ گرانش، شروع به انبوه شدن می‌کنند، که این آغاز تشکیل کهکشانها و ستارگان است. (شکل ۴۴-۶)

اندازه‌گیریهای اولیه نشان می‌دهند که تابش زمینهٔ کیهانی در تمام جهتها یکنواخت است، که این اشاره به آن دارد که ۳۷۹۰۰۰y پس از مهبانگ همهٔ مادهٔ موجود در عالم به طور یکنواختی توزیع شده است. این یافته بیشتر یک معما بود، زیرا ماده در عالم فعلی به طور یکنواخت توزیع نشده است، بلکه در عوض در کهکشانها، خوشه‌های کهکشانی و اَبَر خوشه‌های کهکشانی جمع شده است. همچنین *فضاهای خالی* وسیعی وجود دارند که در آن مادهٔ نسبتاً کمی موجود است، و نیز ناحیه‌های انبوهی از ماده وجود دارند که *دیواره‌ها* نامیده می‌شوند. اگر نظریهٔ مهبانگ برای آغاز عالم حتی به طور تقریبی درست باشد، این توزیع نایکنواخت ماده باید پیش از آنکه عالم ۳۷۹۰۰۰y سن داشته است به وقوع پیوسته باشد و اکنون باید به صورت توزیع نایکنواخت تابش زمینهٔ میکروموج نشان داده شود.

در سال ۱۹۹۲/۱۳۷۱، اندازه‌گیریهای انجام شده توسط ماهوارهٔ *کاوشگر زمینهٔ کیهانی*[1] (COBE) *ناسا* نشان داد که تابش زمینه، در واقع، کاملاً یکنواخت نیست. در سال ۲۰۰۳/۱۳۸۲، اندازه‌گیریهای به عمل آمده توسط *کاوهٔ ناهمسانگرد میکروموج ویلکینسون*[2] (WMAP) در *ناسا* به میزان زیادی تحلیل ما از این نایکنواختی را افزایش داد. این فصل با تصویر حاصل از اندازه‌گیریهای WMAP آغاز شد و آن عملاً یک عکس رمزینه شده با رنگ از عالم به هنگامی است که عالم فقط ۳۷۹۰۰۰y سن داشته است. همانطور که می‌توان از تغییر رنگها دریافت، تجمع بزرگ- مقیاسی از ماده، شروع شده است. بنابراین، نظریهٔ مهبانگ و نظریهٔ تورم در $t \approx 10^{-34}\text{s}$، در اصول، در مسیر درستی قرار دارند.

شکل ۴۴-۶ نمایشی از عالم از افت‌وخیزهای کوانتومی اولیه درست پس از t = ۰ (درست چپ) تا شتاب انبساط امروزی آن، $13/7\times10^{9}\text{y}$ بعدی. این نمایش را جدی نگیرید- چنین "منظرهٔ خارجی" از عالم وجود **ندارد** چون برای عالم خارجی وجود **ندارد**.

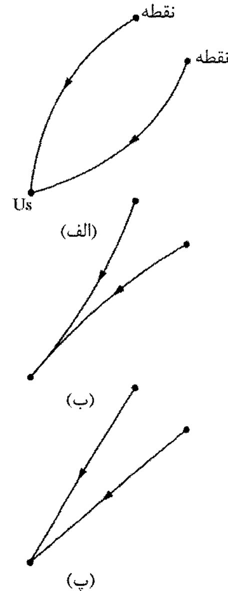
انبساط سریع عالم

از فصل ۱۳-۹ عبارتی را که جرم موجب خمیدگی فضا می‌شود، به خاطر بیاورید. اکنون که دیده‌ایم جرم شکلی از انرژی است که با معادلهٔ اینشتین $E = mc^{2}$ داده می‌شود، می‌توانیم آن عبارت را تعمیم بخشیم: انرژی می‌تواند موجب خمیدگی فضا شود. این امر یقیناً برای فضای اطراف انرژی فرو برده شده در سیاهچاله و، به طور ضعیفتری، برای فضای اطراف هر جسم نجومی دیگر رخ می‌دهد، ولی آیا فضای عالم در کل، بر اثر انرژی موجود در عالم خمیده می‌شود؟

این پرسش نخستین بار توسط اندازه‌گیریهای COBE از تابش زمینهٔ کیهانی در سال ۱۹۹۲/۱۳۷۱ پاسخ داده شد. سپس این پرسش به طور دقیقتری با اندازه‌گیریهای WMAP در سال ۲۰۰۳/۱۳۸۲، که تصویر آغازین این فصل مربوط به آن است، پاسخ گفته شد. لکه‌هایی که در آن تصویر می‌بینیم، چشمه‌های اولیهٔ تابش زمینهٔ کیهانی هستند، و توزیع زاویه‌ای این لکه‌ها، خمیدگی عالم را در مسیری که نور باید طی کند تا به ما برسد آشکار می‌کند. اگر لکه‌های مجاور از دید آشکارساز (یا دید ما) زاویهٔ بیشتر از 1° را بسازند (شکل ۴۴-۷ الف) یا کمتر از 1° را (شکل ۴۴-۷ ب)، آنگاه عالم خمیده است. تحلیل توزیع لکه‌ها در تصویر WMAP نشان می‌دهد که آن لکه‌ها تشکیل زاویه‌ای در حدود 1° را می‌دهند (شکل ۴۴-۷ پ)، که بدان معنی است که عالم تخت (بدون خمیدگی) است. بنابراین، خمیدگی اولیهٔ عالم احتمالاً باید هنگامی شروع شده باشد که عالم بر اثر تورم سریعی که در $t \approx 10^{-34}\text{s}$ داشته است از تختی خارج شده است.

1. Cosmic Background Explorer
2. Wilkinson Microwave Anistropy Probe (WMAP)

این تختی، مسئلهٔ بسیار دشواری را پیش روی فیزیکدانان قرار می‌دهد، زیرا لازم می‌دارد که عالم شامل مقدار معینی از انرژی (به صورت جرم یا صورتی دیگر) باشد. مشکل از آنجا ناشی می‌شود که همهٔ برآوردها از مقدار انرژی موجود در عالم (هم در شکلهای شناخته شده و هم در شکل نوع ناشناختهٔ مادهٔ تاریک) به میزان فاحشی کمتر از مقدار مورد نیاز است. در واقع، حدود دو سوم از این انرژی مورد نیاز در برآوردها گم شده است.



شکل ۴۴-۷ پرتوهای نور حاصل از دو لکهٔ مجاور تابش زمینهٔ کیهانی از دید ما، در زاویهٔ (الف) بزرگتر از 1° یا (ب) کوچکتر از 1° به ما می‌رسید، در صورتی که فضا در امتداد مسیرهای پرتو نور عبوری از عالم خمیده بود. (پ) زاویهٔ 1° به این معنی است که فضا خمیده نیست.

یک نظریهٔ پیشنهاد شده برای این انرژی گم شده، به آن نام وهم آور *انرژی تاریک* داده و پیش‌بینی کرده است که این انرژی خاصیت عجیبی دارد که موجب انبساط سریع عالم می‌شود. تا سال ۱۹۹۸/۱۳۷۷، تعیین اینکه آیا این انبساط واقعاً سریع بوده است بسیار دشوار بود، زیرا لازمهٔ آن، اندازه‌گیری مسافتهای اجسام نجومی بسیار دور، در جایی است که انبساط سریع ممکن بود رخ دهد.

ولی، در سال ۱۹۹۸/۱۳۷۷، پیشرفتهای فنّاوری نجومی، اخترشناسان را قادر ساخت تا نوع معینی از اَبَرنواَختر را در فاصله‌های بسیار دور آشکار کنند. مهمتر اینکه، اخترشناسان توانستند مدت انفجار نور از چنین اَبَرنواَخترهایی را اندازه‌گیری کنند. در طی این مدت، تابناکی اَبَرنواَخترها که توسط ناظری نزدیک به اَبَرنواَخترها دیده می‌شود، آشکار می‌گردد. با اندازه‌گیری مدت تابناکی اَبَر نواَخترها آنطور که از کرهٔ زمین دیده می‌شوند، اخترشناسان توانستند فاصله تا آن اَبَرنواَختر را تعیین کنند. با استفاده از انتقال به سرخ نور حاصل از کهکشانی که اَبَرنواَختر را در بر دارد، اخترشناسان همچنین توانستند تعیین کنند که آن کهکشان چقدر سریع از ما دور می‌شود. از ترکیب همهٔ این اطلاعات، آنها توانستند آهنگ انبساط عالم را تعیین کنند. نتیجه آنکه همانطور که توسط نظریهٔ انرژی تاریک پیش‌بینی می‌شد، انبساط عالم واقعاً سریع است. ولی، هنوز نشانه‌ای از اینکه این انرژی تاریک چیست، نداریم.

۴۴-۱۵ جمع‌بندی

حال در این پاراگرافهای پایانی می‌خواهیم بررسی کنیم که مخزن دانش ما دربارهٔ عالم که به‌سرعت در حال انباشته شدن است ما را به کجا رهنمون می‌سازد ؟ جای مناقشه نیست که این موضوع رضایت خاطر بخش زیادی از فیزیکدانان کنجکاوِ پرانگیزه و اخترشناسان را فراهم می‌آورد. ولی، برخی به آن بهٔ صورت یک تجربهٔ پیش پا افتاده می‌نگرند که به نظر می‌رسد هر افزایشی در دانش ما با وضوح بیشتری ناچیزی نسبی ما را در طرح عظیم خلقت نمایان می‌سازد. بنابراین، با یک نظم تاریخی تقریبی، ما آدمیان باید به این نتیجه برسیم که

زمین ما مرکز منظومه شمسی نیست.

خورشید ما فقط یک ستاره در میان چندین و چند ستارهٔ دیگر کهکشان ماست.

کهکشان ما فقط یکی از چندین و چند کهکشان، و خورشید ما یک ستارهٔ معمولی در آن است.

زمین ما شاید فقط به اندازهٔ یک– سوم سن عالم وجود داشته است و مطمئناً هنگامی که خورشید ما سوختش را به مصرف برساند و یک غول قرمز شود، از عرصهٔ عالم محو خواهد شد.

گونهٔ ما برای مدتی کمتر از یک میلیون سال روی زمین سکونت داشته است– چشم برهم زدنی در زمان کیهانی.

گرچه مکان ما در عالم ممکن است بی‌اهمیت باشد، ولی به نظر می‌رسد قانونهای فیزیکی که کشف کرده‌ایم (آشکار کرده‌ایم؟) در سرتاسر عالم و– تا هر جایی که می‌شناسیم– برقرار است، از هنگامی که عالم آغاز شد تا برای همهٔ زمانهای آینده. دست کم، هیچ گواهی وجود ندارد که قانونهای دیگری در بخشهای دیگر عالم برقرار باشد. بنابراین، تا وقتی که کسی ایراد نگیرد، روی مهر قانونهای فیزیک، عبارت "کشف شده روی زمین" را حک می‌کنیم. چیزهای بیشتری برای کشف شدن باقی است: "*عالم پر از چیزهای سحرآمیز است، که صبورانه در انتظار رشد سریعتر قابلیتهای ذهنی ما هستند.*" این اظهارنظر ما را مجاز می‌دارد که در انتها به این پرسش که مدام آن را در این کتاب بررسی کرده‌ایم، پاسخ دهیم "فیزیک چیست؟" فیزیک، مدخلی به آن چیزهای سحرآمیز است.

بازنگری و خلاصهٔ درس

لپتونها و کوارکها پژوهشهای اخیر این نظریه را تأیید می‌کند که همهٔ مواد از شش نوع **لپتون** (جدول ۴۴-۲)، شش نوع **کوارک** (جدول ۴۴-۵)، و ۱۲ **پادذره**، هر یک مربوط به هر یک از لپتونها و کوارکها، ساخته شده‌اند. همهٔ این ذره‌ها اسپین $\frac{1}{2}$ دارند و بنابراین **فرمیون** (ذره‌هایی با اسپین نیم-درست) هستند.

برهم کنشها ذره‌های با بار الکتریکی از طریق نیروی الکترومغناطیسی، با مبادلهٔ فوتونهای مجازی برهم‌کنش می‌کنند. لپتونها می‌توانند با یکدیگر و با کوارکها از طریق **نیروی ضعیف**، توسط ذره‌های پرجرم W و Z به عنوان پیام‌رسان، برهم‌کنش کنند. افزون بر این، کوارکها با یکدیگر از طریق **نیروی رنگ** برهم‌کنش می‌کنند. نیروهای الکترومغناطیسی و ضعیف جلوه‌های مختلفی از نیروی یکسانی، موسوم به **نیروی الکتروضعیف** هستند.

لپتونها سه لپتون (**الکترون**، **موئون**، و **تاو**) دارای بار الکتریکی برابر $-1e$ هستند. همچنین سه **نوترینو** بدون بار (که لپتون نیز هستند) وجود دارد، هر یک مربوط به یک لپتون باردار. پادذره‌های لپتونهای باردار، دارای بار مثبت هستند.

کوارکها شش کوارک (بالا، پایین، شگفت، افسون، ته و سر، به ترتیب افزایش جرم) هر یک دارای عدد باریونی $+\frac{1}{3}$ و باری برابر $+\frac{2}{3}e$ یا $-\frac{1}{3}e$ وجود دارند. کوارک شگفت دارای شگفتی ۱- است، در حالی‌که سایر کوارکها همگی دارای شگفتی ۰ هستند. این چهار علامت جبری برای پادکوارکها وارون می‌شوند.

هادرونها: باریونها و مزونها کوارکها در داخل ذره‌های برهم‌کنش کنندهٔ قوی موسوم به **هادرونها** ترکیب می‌شوند. **باریونها**، هادرونهایی با عددهای کوانتومی اسپینی نیم — درست ($\frac{1}{2}$ یا $\frac{3}{2}$) هستند. **مزونها**، هادرونهایی با عددهای کوانتومی اسپینی درست (۰ یا ۱) هستند و بنابراین، **بوزون** هستند. باریونها، فرمیون هستند. مزونها دارای عدد باریونی برابر صفرند؛ باریونها دارای عدد باریونی برابر با ۱+ یا ۱- هستند. **کرومودینامیک کوانتومی** پیش‌بینی می‌کند که ترکیبهای ممکن کوارکها، یا یک کوارک با یک پادکوارک، یا سه کوارک، یا سه پادکوارک هستند (این پیش‌بینی با آزمایش سازگار است).

انبساط عالم شواهد اخیر قویاً حاکی از آن است که عالم در حال انبساط است، به طوری که کهکشانهای دوردست با آهنگ v که با **قانون هابل** داده می‌شود، از ما دور می‌شوند:

$$v = Hr \quad \text{(قانون هابل)} \qquad (۴۴-۱۹)$$

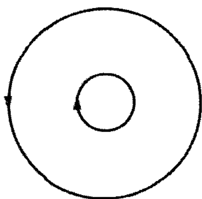
که در اینجا H، **ثابت هابل**، را برابر مقدار زیر اختیار می‌کنیم

$$H = ۷۱/۰\,\text{km/s.Mpc} = ۲۱/۸\,\text{mm/s.ly} \qquad (۴۴-۲۱)$$

انبساط توصیف شده با قانون هابل و وجود همه جا حاضر تابش میکروموج زمینه، آشکار می‌کند که عالم در یک "مهبانگ"، ۱۳/۷ میلیارد سال پیش آغاز شده است.

پرسشها

۱- شکل ۴۴-۸ مسیر دو ذره را در حرکت دایره‌ای در یک میدان یکنواخت نشان می‌دهد. ذره‌ها دارای بار یکسان ولی با علامت مخالف هستند. (الف) کدام مسیر مربوط به ذره سنگین‌تر است؟ (ب) اگر میدان مغناطیسی به سوی داخل صفحه باشد ذره سنگین‌تر دارای بار مثبت است یا منفی؟



شکل ۴۴-۸ پرسش ۱

۲- آیا واپاشی پیشنهادی $\Lambda^{0} \rightarrow p + K^{-}$ از نظر (الف) بار الکتریکی، (ب) اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی و (پ) شگفتی پایستار است؟ (ت) اگر ذرهٔ اولیه ساکن باشد، برای ایجاد محصولهای واپاشی آیا به قدر کافی انرژی وجود دارد؟

۳- نه تنها ذراتی مانند الکترونها و پروتونها بلکه کل اتمها نیز می‌توانند به صورت فرمیونها یا بوزونها طبقه‌بندی شوند، بسته به اینکه آیا عددهای کوانتومی اسپینی کلّ آنها به ترتیب نیم-درست یا درست باشد. ایزوتوپهای هلیوم ^{3}He و ^{4}He را در نظر بگیرید. کدامیک از عبارتهایی که در پی می‌آید درست است؟ (الف) هر دو فرمیون هستند. (ب) هر دو بوزون هستند. (پ) ^{4}He فرمیون، و ^{3}He بوزون است. (ت) ^{3}He فرمیون، و ^{4}He بوزون است. (دو الکترون هلیوم تشکیل یک لایهٔ بسته را می‌دهند و نقشی در پاسخ ندارند.)

۴- کدامیک از هشت پیون شکل ۴۴-۲ ب کمترین انرژی جنبشی را دارد؟

۵- الکترون نمی‌تواند به دو نوترینو واپاشی کند. در صورتی که این واپاشی رخ می‌داد، کدامیک از قانونهای پایستگی که در پی می‌آید نقض می‌شد: (الف) انرژی، (ب) اندازه حرکت زاویه‌ای، (پ) بار، (ت) عدد لپتونی، (ث) اندازه حرکت خطی و (ج) عدد باریونی؟

۶- همانطور که دیده‌ایم، مزون π^{-} دارای ساختار کوارکی $d\bar{u}$ است. اگر به جای این، مزون π^{-} از یک کوارک d و یک کوارک u ساخته شده بود، کدامیک از قانونهای پایستگی که در

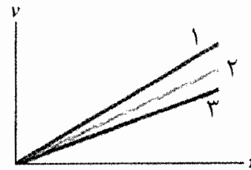
پی می‌آید نقض می‌شد: (الف) انرژی، (ب) اندازه حرکت زاویه‌ای، (پ) بار، (ت) عدد لپتونی، (ث) اندازه حرکت خطی و (ج) عدد باریونی؟

۷- پروتون نمی‌تواند به نوترون و نوترینو واپاشی کند. در صورتی که این واپاشی رخ می‌داد، کدامیک از قانونهای پایستگی که در پی می‌آید نقض می‌شد: (الف) انرژی (فرض کنید که پروتون ساکن است)، (ب) اندازه حرکت زاویه‌ای، (پ) بار، (ت) عدد لپتونی، (ث) اندازه حرکت خطی و (ج) عدد باریونی؟

۸- پروتونی دارای انرژی جرمی کافی برای واپاشی به صورت دسته‌ای از الکترونها، نوترینوها، و پاد ذره‌های آنهاست. در صورتی که این واپاشی رخ می‌داد، کدامیک از قانونهای پایستگی که در پی می‌آید لزوماً نقض می‌شد: عدد لپتونی الکترون یا عدد باریونی؟

۹- نوترینویی را که نماد آن $\bar{\nu}_\tau$ است در نظر بگیرید. (الف) آیا این کوارک، لپتون، مزون، یا باریون است؟ (ب) آیا این ذره است یا پاد ذره؟ (پ) آیا این بوزون است یا فرمیون؟ (ت) آیا این در برابر واپاشی خود به خود، پایدار است؟

۱۰- سه کیهانشناس هر یک روی نمودار شبه- هابل شکل ۴۴-۹ خطی رسم کرده‌اند، اگر از این سه نمودار سن مربوط به عالم را محاسبه کنیم، نمودارها را بنا بر سن به ترتیب بزرگی مرتب کنید.



شکل ۴۴-۹ مسئلهٔ ۱۰

۱۱- ذرهٔ Σ^+ دارای این عددهای کوانتومی است: شگفتی $S=-1$، بار $q=+1$، و اسپین $s=\frac{1}{2}$. کدامیک از ترکیبهای کوارکی زیر آن را تشکیل می‌دهد: (الف) dds، (ب) $s\bar{s}$، (پ) uus، (ت) ssu، یا (ث) $uu\bar{s}$؟

مسئله‌ها

GO مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس).
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
•-••• تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

بخش ۴۴-۳ میان گفتار

•۱- یک الکترون و یک پوزیترون دستخوش نابودی زوج (معادلهٔ ۴۴-۵) قرار می‌گیرند. اگر انرژی جنبشی آنها پیش از نابودی تقریباً برابر صفر باشد، طول موج هر یک از γهای تولید شده به وسیله این نابودی، چقدر است؟ GO

•۲- یک پیون خنثی که در ابتدا ساکن است به دو پرتو گاما وامی‌پاشد: $\pi^\circ \rightarrow \gamma+\gamma$. طول موج پرتوهای گاما را محاسبه کنید. چرا آنها باید یک طول موج داشته باشند؟

•۳- یک الکترون و یک پوزیترون به فاصلهٔ r از هم قرار گرفته‌اند. نسبت نیروی گرانشی به نیروی الکتریکی میان آنها را بیابید. با استفاده از این نتیجه، در ارتباط با نیروهای عمل کننده میان ذره‌های آشکار شده در اتاقک حباب چه نتیجه‌ای می‌توانید بگیرید؟

•۴- نظریه‌های معینی پیش‌بینی می‌کنند که پروتون با نیم- عمری در حدود $۱۰^{۳۲}$ سال، ناپایدار است. با فرض اینکه این نظریه‌ها درست باشند، تعداد پروتونی را که انتظار دارید در یک سال در آب یک استخر شنای المپیک که $۴/۳۲\times۱۰^۵ \mathrm{L}$ آب را در خود جای می‌دهد، واپاشی کند محاسبه کنید.

•۵- یک پیون باردار شدهٔ مثبت بنا بر معادلهٔ ۴۴-۷ وامی‌پاشد: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$. طرح واپاشی پیونی که دارای بار منفی است باید چگونه باشد؟ (*راهنمایی:* π^- پاد ذرهٔ π^+ است.)

••۶- یک تاو مثبت (τ^+، انرژی سکون = ۱۷۷۷MeV) با انرژی جنبشی ۲۲۰۰MeV در یک مسیر دایره‌ای عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت ۱/۲۰T در حال حرکت است. (الف) اندازه حرکت تاو را بر حسب کیلوگرم- متر بر ثانیه محاسبه کنید. اثرهای نسبیتی را در نظر بگیرید. (ب) شعاع مسیر دایره‌ای را به دست آورید.

•۷- رصد نوترینوهای گسیل شده توسط اَبَرنواَختر SN1987a (شکل ۴۳-۱۱ ب) حدّ بالای ۲۰eV را برای انرژی سکون نوترینوی الکترون به دست می‌دهد. اگر انرژی سکون نوترینوی الکترون واقعاً ۲۰eV باشد، اختلاف میان تندی نور و تندی نوترینوی الکترون ۱/۵ MeV چقدر خواهد بود؟

••۸- یک پیون خنثی دارای انرژی سکون ۱۳۵ MeV و عمر میانگین $۸/۳\times۱۰^{-۱۷}$s است. اگر این پیون با انرژی جنبشی اولیهٔ ۸۰MeV تولید شده باشد و پس از یک عمر میانگین واپاشد، طولانیترین مسیر ممکن که این ذره می‌تواند در یک اتاقک حباب از خود بر جای گذارد چقدر است؟ از اتساع زمان نسبیتی استفاده کنید. GO

••۹- انرژی سکون بسیاری از ذره‌های کوتاه- عمر را نمی‌توان به طور مستقیم اندازه‌گیری کرد، بلکه باید آنها را از اندازه حرکتهای اندازه‌گیری شده و انرژیهای سکون معلوم محصولهای واپاشی به دست آورد. مزون ρ° را در نظر بگیرید که توسط واکنش $\rho^\circ \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ وامی‌پاشد. انرژی سکون مزون ρ° را

که به پیونهای تشکیل شده اندازه حرکتهایی در خلاف جهت یکدیگر و بزرگی $358/3\text{MeV}/c$ می‌دهد، محاسبه کنید. جدول ۴۴-۴ را برای انرژیهای سکون پیونها ببینید. SSM

●●۱۰- (الف) ذرهٔ ساکن ۱ به ذره‌های ۲ و ۳ وامی‌پاشد، که با اندازه حرکتهای یکسان ولی در جهت مخالف حرکت می‌کنند. نشان دهید که انرژی جنبشی K_2 ذرهٔ ۲ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$K_2 = \frac{1}{2E_1}[(E_1 - E_2)^2 - E_3^2]$$

که در آن E_1 ، E_2 ، و E_3 انرژیهای سکون ذره‌هاست. (ب) نشان دهید که نتیجهٔ قسمت (الف) انرژی جنبشی موئون را همان مقدار محاسبه شده در مسئلهٔ نمونهٔ ۴۴-۱، به دست می‌دهد.

بخش ۴۴-۶ بازهم قانون پایستگی دیگر

●۱۱- کدامیک از قانونهای پایستگی در هر یک از این واپاشیهای پیشنهاد شده نقض می‌شود؟ فرض کنید ذرهٔ اولیه ساکن است و محصولهای واپاشی دارای اندازه حرکتهای زاویه‌ای مداری صفرند. (الف) $\mu^- \to e^- + \nu_\mu$ ؛ (ب) $\mu^- \to e^+ + \nu_e$ ؛ (پ) $\mu^+ \to \pi^+ + \nu_\mu$. SSM WWW

●۱۲- ذرهٔ A_2^+ و محصولهای واپاشی آن به ترتیب زیر وامی‌پاشند

$$A_2^+ \to \rho^\circ + \pi^+ \quad \text{و} \quad \mu^+ \to e^+ + \nu + \bar{\nu}$$
$$\rho^\circ \to \pi^+ + \pi^- \quad \text{و} \quad \pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}$$
$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu \quad \text{و} \quad \mu^- \to e^- + \nu + \bar{\nu}$$

(الف) محصولهای واپاشی پایدار نهایی کدام‌اند؟ بنا بر شواهد، (ب) آیا ذرهٔ A_2^+ فرمیون است یا بوزون؟ و (پ) آیا این ذره مزون است یا باریون؟ (ت) عدد باریونی آن چند است؟ (*راهنمایی:* مسئلهٔ نمونهٔ ۴۴-۴ را ببینید.)

●۱۳- در فرآیند واپاشی پیشنهاد شدهٔ بالا

$$\Xi^- \to \pi^- + \text{n} + \text{K}^- + \text{p}$$

کدام پایستگی برقرار است؟ (الف) بار (ب) عدد باریونی، (پ) اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی و (ت) شگفتی.

●۱۴- در واکنش پیشنهاد شدهٔ زیر

$$\text{p} + \bar{\text{p}} \to \Lambda^\circ + \Sigma^+ + \text{e}^-$$

کدام پایستگی برقرار است؟ (الف) بار (ب) عدد باریونی، (پ) عدد لپتونی الکترونی، (ت) اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی، (ث) شگفتی و (ج) عدد لپتونی موئویی.

بخش ۴۴-۷ راه هشتگانه

●۱۵- واکنش $\pi^+ + \text{p} \to \text{p} + \text{p} + \bar{\text{n}}$ از طریق برهم‌کنش قوی صورت می‌پذیرد. با به کار بردن قانونهای پایستگی، (الف) عدد کوانتومی بار، (ب) عدد باریونی، و (پ) شگفتی پادنوترون را پیدا کنید.

●۱۶- با بررسی شگفتی، تعیین کنید که کدامیک از واپاشیها یا واکنشهایی که در پی می‌آید از طریق برهم کنش قوی صورت می‌گیرند: (الف) $\Lambda^\circ + \text{p} \to \Sigma^- + \text{n}$ ؛ (ب) $\text{K}^\circ \to \pi^+ + \pi^-$ ؛ (پ) $\Lambda^\circ \to \text{p} + \pi^-$ ؛ (ت) $\text{K}^- + \text{p} \to \Lambda^\circ + \pi^\circ$.

●۱۷- کدام قانون پایستگی در هر یک از این واکنشها و واپاشیهای پیشنهاد شده نقض می‌شود؟ (فرض کنید که محصولها دارای اندازه حرکت زاویه‌ای مداری صفرند.) (الف) $\Lambda^\circ \to \text{p} + \text{K}^-$ ؛ (ب) $\Omega^- \to \Sigma^- + \pi^\circ$ (برای Ω^- ، $S=-3$ ، $q=-1$ ، $m = 1672\text{MeV}/c^2$ ، و $m_s = \frac{3}{2}$ است)؛ (پ) $\text{K}^- + \text{p} \to \Lambda^\circ + \pi^+$.

●۱۸- انرژی فروپاشی این واکنشها را محاسبه کنید (الف) $\pi^+ + \text{p} \to \Sigma^+ + \text{K}^+$ و (ب) $\text{K}^- + \text{p} \to \Lambda^\circ + \pi^\circ$.

●۱۹- نشان دهید که اگر، به جای رسم شگفتی S بر حسب q برای باریونهای با اسپین $\frac{1}{2}$ شکل ۴۴-۳ الف و برای مزونهای با اسپین صفر شکل ۴۴-۳ ب، کمیت $Y = B + S$ را بر حسب کمیت $T_z = q - \frac{1}{2}(B+S)$ رسم کنیم، بدون استفاده از محورهای مایل به نقشهای شش ضلعی دست می‌یابیم. (کمیت Y ، *اَبَربار* نامیده می‌شود، و T_z به کمیتی موسوم به ایزواسپین مربوط است.)

●●۲۰- یک ذرهٔ Σ^- که با انرژی جنبشی $220\ \text{MeV}$ در حال حرکت است بنا بر $\Sigma^- \to \pi^- + \text{n}$ وامی‌پاشد. انرژی جنبشی کلّ محصولهای واپاشی را محاسبه کنید.

●●۲۱- برای شناسایی ذرهٔ x در هر یک از واکنشهای زیر که توسط برهم‌کنش قوی صورت می‌پذیرند، از قانونهای پایستگی و جدولهای ۴۴-۳ و ۴۴-۴ استفاده کنید: (الف) $\text{p} + \text{p} \to \text{p} + \Lambda^\circ + x$ ؛ (ب) $\text{p} + \bar{\text{p}} \to \text{n} + x$ ؛ (پ) $\pi^- + \text{p} \to \Xi^\circ + \text{K}^\circ + x$.

●●۲۲- واپاشی $\Lambda^\circ \to \text{p} + \pi^-$ را با Λ° در حال سکون در نظر بگیرید. (الف) انرژی فروپاشی را محاسبه کنید. انرژی جنبشی (ب) پروتون و (پ) پیون چقدر است؟ (*راهنمایی:* مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰ را ببینید.)

●۲۳- کدام هادرون در جدول‌های ۴۴-۳ و ۴۴-۴ به بسته کوارک‌های (الف) ssu و (ب) dds مربوط می‌شود؟

بخش ۴۴-۸ مدل کوارکی

●۲۴- با استفاده از جدولهای ۴۴-۳ و ۴۴-۵، هویت باریونهای تشکیل شده از کوارکهای (الف) ddu ، (ب) uus ، و (پ) ssd را تعیین کنید. درستی پاسخهای خود را با هشتایی باریونی نشان داده شده در شکل ۴۴-۳ الف وارسی کنید.

●۲۵- ساختار کوارکی $\overline{\text{K}}^\circ$ چیست؟

●۲۶- چه ترکیب کوارکی برای تشکیل (الف) Λ° و (ب) Ξ° نیاز است؟

●۲۷- ترکیب کوارکی پروتون و نوترون به ترتیب uud و udd است. ترکیب کوارکی (الف) پاد پروتون و (ب) پادنوترون چیست؟

●۲۸- ۱۰ باریون با اسپین $\frac{۳}{۲}$ وجود دارد. نمادها و عددهای کوانتومی آنها برای بار q و شگفتی S به قرار زیر است:

	q	S		q	S
Σ^{*0}	۰	-۱	Δ^-	-۱	۰
Σ^{*-}	$+۱$	-۱	Δ^0	۰	۰
Ξ^{*-}	-۱	-۲	Δ^+	$+۱$	۰
Ξ^{*0}	۰	-۲	Δ^{++}	$+۲$	۰
Ω^-	-۱	-۳	Σ^{*-}	-۱	-۱

با استفاده از دستگاه مختصات مایل شکل ۴۴-۳، یک نمودار بار- شگفتی برای این باریونها رسم کنید. نمودار خود را با این شکل مقایسه کنید.

●۲۹- فقط با استفاده از کوارکهای بالا، پایین، و شگفت، در صورت امکان باریونی (الف) با $q=+۱$ و شگفتی $S=-۲$ و (ب) با $q=+۲$ و شگفتی $S=۰$ تشکیل دهید. **SSM WWW**

●●●۳۰- باریون Σ^{*0} با اسپین $\frac{۳}{۲}$ (مسئلهٔ ۲۸ را ببینید) دارای انرژی سکون ۱۳۸۵ MeV است (عدم قطعیت ذاتی را در اینجا نادیده می‌گیریم)؛ باریون Σ^0 با اسپین $\frac{۱}{۲}$ دارای انرژی سکون ۱۱۹۲/۵ MeV است. اگر هر یک از این دو ذره دارای انرژی جنبشی ۱۰۰۰ MeV باشند، (الف) کدامیک سریعتر حرکت می‌کند و (ب) به چه مقدار؟

بخش ۴۴-۱۱ عالم در حال انبساط است

●۳۱- طول موج رصد شدهٔ خط ۶۵۶ nm (بالمر نخستین) هیدروژن گسیل شده از کهکشانی در فاصلهٔ $۲/۴۰\times۱۰^۸$ ly چقدر است؟ فرض کنید انتقال دوپلری معادلهٔ ۳۷-۳۶ و قانون هابل برقرارند.

●۳۲- جسمی در فاصلهٔ $۱/۵\times۱۰^۴$ ly از ما قرار دارد و غیر از حرکت ناشی از انبساط عالم هیچ حرکتی نسبت به ما ندارد. اگر فضای بین ما و جسم بنا بر قانون هابل با $H=۲۱/۸\ \mathrm{mm/s}\cdot ly$ انبساط پیدا کند، (الف) سال بعد فاصلهٔ بین ما و جسم چقدر (برحسب متر) بیشتر افزایش پیدا می‌کند؟ (ب) تندی دور شدن جسم از ما چقدر است؟

●۳۳- اگر قانون هابل را بتوان تا فاصله‌های خیلی دور برون‌یابی کرد، در چه فاصله‌ای تندی پس‌روی ظاهری با تندی نور برابر می‌شود؟

●۳۴- به خاطر انبساط کیهان شناختی، یک گسیل معین از یک کهکشان دور دارای طول موجی است که دو برابر طول موجی است که گسیل در آزمایشگاه داراست. با فرض اینکه قانون هابل برقرار است و می‌توان محاسبه‌های انتقال دوپلری را به کار برد، وقتی نور گسیل شده فاصلهٔ آن برحسب سال نوری تا کهکشان چقدر بوده است؟

●۳۵- در آزمایشگاه، یکی از خطهای سدیم با طول موج ۵۹۰/۰ nm گسیل شده است. ولی، در نور حاصل از یک کهکشان خاص، این خط در طول موج ۶۰۲/۰nm دیده می‌شود. با فرض آنکه قانون هابل برقرار باشد و از انتقال دوپلری معادلهٔ ۳۷-۳۶ استفاده کنیم، فاصله تا کهکشان را محاسبه کنید.

●۳۶- الکترون در اتم هیدروژن در یک کهکشان دور با پرش از $n=۳$ به $n=۲$، نور گسیل می‌کند. اگر نور را با طول موج ۳/۰۰mm آشکار کنیم در این صورت از وقتی که نور گسیل شده است، طول موج و در نتیجه عالم چقدر انبساط یافته است؟ GO

●۳۷- چون تندیهای پس‌روی ظاهری کهکشانها و اَختروَشها در فاصله‌های دور به تندی نور نزدیک است، فرمول انتقال دوپلر نسبیتی (معادلهٔ ۳۷-۳۱) باید مورد استفاده قرارگیرد. این انتقال، به صورت انتقال به سرخ کسری $z=\Delta\lambda/\lambda_0$ گزارش شده است. (الف) نشان دهید که پارامتر تندی پس‌روی $\beta=v/c$ برحسب z با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\beta=\frac{z^۲+۲z}{z^۲+۲z+۲}$$

(ب) یک اَختروَش آشکار شده در سال ۱۹۸۷/۱۳۶۶ دارای $z=۴/۴۲$ است. پارامتر تندی آن را محاسبه کنید. (پ) فاصله تا آن اَختروَش را، با فرض آنکه قانون هابل برای این مسافتها معتبر است، به دست آورید.

●●۳۸- آیا عالم برای همیشه به انبساط ادامه می‌دهد؟ برای پاسخ به این پرسش، این فرض (معقول؟) را اختیار کنید که تندی پس‌روی v یک کهکشان به فاصلهٔ r از ما فقط با ماده‌ای که در داخل کره‌ای به مرکز ما و شعاع r قرار دارد، تعیین می‌شود. اگر جرم کلّ داخل این کره M باشد، تندی فرار v_e از این کره $v_e=\sqrt{۲GM/r}$ (معادلهٔ ۱۳-۲۸) است. (الف) نشان دهید که برای جلوگیری از انبساط نامحدود، چگالی میانگین ρ داخل کره باید دست کم برابر مقدار زیر باشد

$$\rho=\frac{۳H^۲}{۸\pi G}$$

(ب) این "چگالی حدّی" را به طور عددی محاسبه کنید؛ پاسخ خود را بر حسب اتمهای هیدروژن در هر متر مکعب بیان کنید. اندازه‌گیریهای چگالی واقعی دشوار است و در حضور مادهٔ تاریک پیچیده می‌شود.

بخش ۴۴-۱۲ تابش زمینهٔ کیهانی

●●۳۹- به دلیل وجود فراگیر تابش زمینهٔ کیهانی، کمترین دمای ممکن یک گاز در فضای بین ستاره‌ای یا بین کهکشانی نه ۰K بلکه ۲/۷ K است. این مبین آن است که کسر مهمی از مولکولهای فضا که می‌توانند در تراز پایین یک حالت برانگیخته باشند، ممکن است در واقع در همین حالت باشند. واانگیختگی

بعدی به گسیل تابشی می‌انجامد که می‌تواند آشکار شود. یک مولکول (فرضی) را با دقیقاً یک حالت برانگیختهٔ ممکن در نظر بگیرید. (الف) برای آنکه ۲۵٪ مولکولها در این حالت برانگیخته باشند، انرژی برانگیختگی باید چقدر باشد؟ (*راهنمایی:* معادلهٔ ۴۰-۲۹ را ببینید.) (ب) طول موج فوتون گسیل شده در یک گذار رو به عقب به حالت پایه چقدر است؟

بخش ۴۴-۱۳ مادهٔ تاریک

•**۴۰**- اگر پلوتون (بیرونیترین سیارهٔ منظومهٔ شمسی در بیشتر وقتها) دارای همان تندی مداری باشد که عطارد (درونیترین سیاره) امروزه دارد، جرم خورشید باید چقدر می‌شد؟ از داده‌های پیوست پ استفاده کنید، پاسخ خود را بر حسب جرم فعلی M_s خورشید بیان، و فرض کنید که مدارها دایره‌ای‌اند.

••**۴۱**- فرض کنید که شعاع خورشید به $۵/۹۰ \times ۱۰^{۱۲}$ m (شعاع میانگین مدار پلوتون) افزایش یابد، و اینکه چگالی این خورشید انبساط یافته یکنواخت باشد، و سیاره‌ها داخل این جسم رقیق می‌چرخند. (الف) تندی مداری زمین را در این پیکربندی جدید محاسبه کنید. (ب) نسبت تندی مداری محاسبه شده در قسمت (الف) به تندی مداری فعلی زمین، ۲۹/۸ km/s، چقدر است؟ فرض کنید شعاع مدار زمین بدون تغییر باقی می‌ماند (پ) دورهٔ چرخش جدید زمین چقدر است؟ (جرم خورشید بدون تغییر باقی می‌ماند.) **SSM**

••**۴۲**- فرض کنید که مادهٔ (ستارگان، گاز، غبار) یک کهکشان خاص، به جرم کلّ M، به طور یکنواخت در سرتاسر کره‌ای به شعاع R توزیع شده باشد. ستاره‌ای به جرم m به دور مرکز این کهکشان، در یک مدار دایره‌ای به شعاع $r < R$ در حال چرخش است. (الف) نشان دهید که تندی مداری v آن ستاره با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$v = r\sqrt{GM/R^۳}$$

و بنابراین، دورهٔ چرخش T ستاره برابر است با

$$T = ۲\pi\sqrt{R^۳/GM}$$

که مستقل از r است. هر نیروی مقاومی را نادیده بگیرید. (ب) سپس فرض کنید که جرم کهکشان در نزدیک مرکز کهکشان، در داخل کره‌ای که شعاع آن کمتر از r است، متمرکز شده است. در آن صورت، چه عبارتی دورهٔ چرخش مداری ستاره را به دست می‌دهد؟

بخش ۴۴-۱۴ مهبانگ

•**۴۳**- برای پاسخ گفتن به پرسشهایی که در پی می‌آید از قانون وین[1] (مسئلهٔ ۴۴ را ببینید) استفاده کنید: (الف) قلهٔ شدت تابش زمینهٔ کیهانی در طول موج ۱/۱ mm است. این مربوط به چه دمایی است؟ (ب) حدود ۳۷۹۰۰۰y پس از مهبانگ، عالم نسبت به تابش الکترومغناطیسی شفاف شده است. در آن هنگام، دما ۲۹۷۰K بوده است. در آن هنگام طول موجی که در آن تابش زمینه بیشترین شدت را داشت، چه بود؟

•**۴۴**- طول موجی که در آن یک تابشگر گرمایی در دمای T موجهای الکترومغناطیسی را با بیشترین شدت تابش می‌کند با قانون *وین* داده می‌شود: $\lambda_{max} = (۲۸۹۸\mu m.K)/T$. (الف) نشان دهید که انرژی E یک فوتون مربوط به آن طول موج را می‌توان از رابطهٔ زیر محاسبه کرد

$$E = (۴/۲۸ \times ۱۰^{-۱۰} MeV/K)T$$

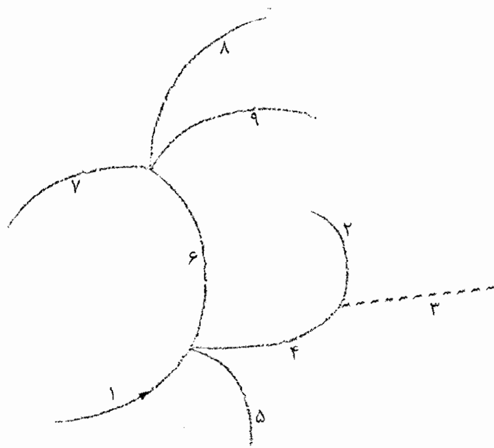
(ب) در چه دمای کمینه‌ای این فوتون می‌تواند یک جفت الکترون-پوزیترون تولید کند (که در بخش ۱۷-۶ توضیح داده شد)؟

مسئله‌های اضافی

۴۵- اگر زمین بر اثر برخورد با پاد- زمین نابود می‌شد، چقدر انرژی آزاد می‌شد؟ **SSM**

۴۶- *بازی ذره‌ای.* شکل ۴۴-۱۰ طرحواره‌ای از ردهایی است که توسط ذره‌ها در یک آزمایش اتاقک ابر *خیالی* (در حضور یک میدان مغناطیسی یکنواخت که جهت آن عمود بر صفحه است) درست شده است، و جدول ۴۴-۶ عددهای کوانتومی *خیالی* وابسته به ذره‌هایی که این مسیرها را می‌سازند، به دست می‌دهد. ذرهٔ A وارد اتاقک شده، ردّ ۱ را بر جای می‌گذارد و به سه ذره وامی‌پاشد. آنگاه ذره‌ای که ردّ ۶ را می‌آفریند به سه ذرهٔ دیگر و ذره‌ای که ردّ ۴ را می‌آفریند به دو ذرهٔ دیگر، که یکی از آنها از لحاظ الکتریکی بدون بار است، واپاشی می‌کند- مسیر آن ذرهٔ بدون بار توسط خطهای فاصله نمایش داده شده است. ذره‌ای که ردّ ۸ را آفریده است، ذره‌ای با عدد کوانتومی "جدیّت" صفر شناخته شده است.

از پایستگی عددهای کوانتومی خیالی در هر نقطهٔ واپاشی و با توجه به جهتهای خمیدگی این مسیرها، تعیین کنید که کدام ذره متعلق به مسیر (الف) ۱، (ب) ۲، (پ) ۳، (ت) ۴، (ث) ۵، (ج) ۶، (چ) ۷، (ح) ۸، و (خ) ۹ است؟ یکی از ذره‌های فهرست شده در جدول تشکیل نمی‌شود؛ بقیه فقط یک بار در هر مسیر ظاهر می‌شوند.



شکل ۴۴-۱۰ مسئلهٔ ۴۶

1. Wien

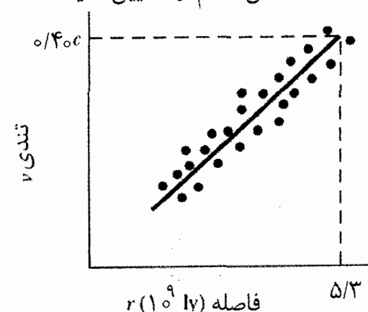
جدول ۴۴-۶

مسئلهٔ ۴۴-۴۶

ذره	بار	بوالهوسی	جدیت	ملاحت
A	۱	۱	۲-	۲-
B	۰	۴	۳	۰
C	۱	۲	۳-	۱-
D	۱-	۱-	۰	۱
E	۱-	۰	۴-	۲-
F	۱	۰	۰	۰
G	۱-	۱-	۱	۱-
H	۳	۳	۱	۰
I		۶	۴	۶
J	۱	۶-	۴-	۶-

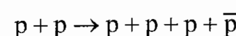
۴۷- هیچ مزون شناخته شده‌ای با عدد کوانتومی باری $q=+1$ و شگفتی $S=-1$ یا با $q=-1$ و $S=+1$ وجود ندارد. دلیل آن را بر مبنای مدل کوارکی توضیح دهید.

۴۸- شکل ۴۴-۱۱، یک نمودار فرضی از تندیهای پس‌روی v کهکشانها بر حسب فاصلهٔ r آنها از ماست؛ بهترین برازش داده‌های نقطه‌ای، خط مستقیمی است که در شکل نشان داده شده است. با استفاده از این نمودار و با فرض آنکه قانون هابل برقرار است و اینکه ثابت هابل در سرتاسر انبساط عالم مقدار یکسانی داشته است، سنّ عالم را تعیین کنید.



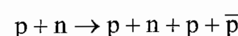
شکل ۴۴-۱۱ مسئلهٔ ۴۸

۴۹- شکل ۴۴-۱۲ بخشی از یک آرایش آزمایشگاهی را نشان می‌دهد که در آن پاد پروتونها در سالهای ۱۹۵۰/۱۳۳۰ کشف شدند. باریکه‌ای از پروتونهای ۶/۲ GeV از یک شتابدهندهٔ ذره‌ها خارج شده و با هسته‌های یک هدف مسی برخورد می‌کند. بنابر پیش‌بینیهای نظری در آن زمان، برخورد میان پروتونهای باریکه و پروتونها و نوترونهای هسته‌ها باید پادپروتونها را از طریق واکنشهای زیر تولید می‌کرد



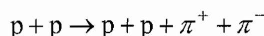
$$\mathrm{p+p \rightarrow p+p+p+\bar{p}}$$

و



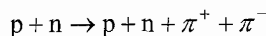
$$\mathrm{p+n \rightarrow p+n+p+\bar{p}}$$

ولی، حتی اگر این واکنشها رخ می‌داد، آنها در قیاس با واکنشهای زیر نادر بودند



$$\mathrm{p+p \rightarrow p+p+\pi^{+}+\pi^{-}}$$

و



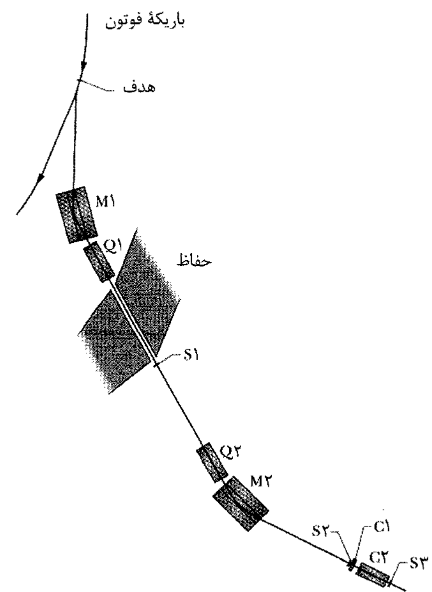
$$\mathrm{p+n \rightarrow p+n+\pi^{+}+\pi^{-}}$$

بنابراین، بیشتر ذره‌های تولید شده توسط برخوردهای میان پروتونهای ۶/۲ GeV و هدف مسی، پیونها بودند.

برای اثبات وجود آن پادپروتونها و اینکه آنها توسط تعداد محدودی از برخوردها تولید می‌شوند، ذره‌هایی که هدف را ترک می‌کردند به سوی رشته‌ای از میدانهای مغناطیسی و آشکارسازها، آنگونه که در شکل ۴۴-۱۲ نشان داده شده است، روانه می‌شدند. نخستین میدان مغناطیسی (M1) مسیر هر ذرهٔ باردار عبوری از آن را خم می‌کرد؛ افزون بر این، آن میدان به گونه‌ای ترتیب داده شده بود که فقط باید ذره‌هایی از آن خارج می‌شدند و به میدان مغناطیسی دوم (Q1) می‌رسیدند که دارای بار منفی (یک $\bar{\mathrm{p}}$ یا یک π^-) و اندازه حرکت $1/19\ \mathrm{GeV}/c$ بودند. میدان Q1 نوع خاصی از میدان مغناطیسی بود (یک *میدان چارقطبی*) که ذره‌هایی را که به آن می‌رسیدند در داخل یک باریکه متمرکز می‌کرد، و بدین ترتیب به آنها اجازه می‌داد که از حفرهٔ حفاظ ضخیمی بگذرند تا به *شمارشگر سوسوزن* S1 برسند. با عبور یک ذرهٔ باردار از میان این شمارشگر، سیگنالی راه می‌افتاد، به طوری که هر سیگنال نشاندهندهٔ عبور یک π^- با $1/19\mathrm{GeV}/c$ یا (احتمالاً) یک $\bar{\mathrm{p}}$ با $1/19\ \mathrm{MeV}/c$ بود.

پس از متمرکزشدن مجدد باریکه توسط میدان مغناطیسی Q2، آن ذره‌ها توسط میدان مغناطیسی M2 به سوی شمارشگر سوسوزن دوم S2 و سپس دو *شمارشگر چرنکوف* C1 و C2 هدایت می‌شدند. این آشکارسازهای اخیر می‌توانند به گونه‌ای طراحی شوند که فقط هنگامی یک سیگنال گسیل دارند که تندی ذرهٔ عبوری از میان آنها در گسترهٔ معینی قرار داشته باشد. در این آزمایش، ذره‌ای با تندی بیشتر از $0/79c$ موجب گسیل سیگنال از C1 و ذره‌ای با تندی میان $0/75c$ و $0/78c$ موجب گسیل سیگنالی از C2 می‌شد.

آنگاه دو راه برای تمیز پادپروتونهای نادر پیش‌بینی شده، از پیونهای منفی فراوان وجود داشت. هر دو راه مبتنی بر این واقعیت بود که تندی ذرهٔ $\bar{\mathrm{p}}$ با $1/19\ \mathrm{GeV}/c$ با تندی ذرهٔ π^- با $1/19\ \mathrm{GeV}/c$ متفاوت است: (۱) بنا بر محاسبه‌ها، یک ذرهٔ $\bar{\mathrm{p}}$ یکی از شمارشگرهای چرنکوف و یک ذرهٔ π^- شمارشگر دیگر را راه می‌انداخت. (۲) بازهٔ زمانی Δt میان سیگنالهای حاصل از S1 و S2، که به فاصلهٔ ۱۲ m از یکدیگر قرار داشتند، برای $\bar{\mathrm{p}}$ یک مقدار و برای π^- مقداری دیگری داشت. بنابراین، اگر شمارشگر چرنکوفِ مناسب راه می‌افتاد و بازهٔ زمانی Δt دارای مقدار مناسبی بود، این آزمایش وجود پاد پروتونها را به اثبات می‌رساند.



شکل ۴۴-۱۲ مسئلهٔ ۴۹

تندی (الف) یک پادپروتون با اندازه حرکت $1/19\text{GeV}/c$ و (ب) یک پیون منفی با همان اندازه حرکت چقدر است؟ (تندی پادپروتون عبوری از آشکارسازهای چرنکوف، در واقع قدری کمتر از مقدار محاسبه شده است، زیرا پادپروتون در میان آشکارسازها کمی انرژی از دست می‌دهد.) کدام آشکارساز چرنکوف توسط (پ) یک پاد پروتون و (ت) یک پیون منفی، راه افتاده است؟ کدام بازهٔ زمانی Δt ، نشانگر عبور (ث) یک پاد پروتون و (ج) یک پیون منفی است؟ [این مسئله از مقالهٔ "مشاهدهٔ پادپروتونها" نوشتهٔ چمبرلین، سگره، ویگاند، و ایپسیلانتیس[1] در Physical Review, Vol. 100, pp. 947-950 (1955) بر گرفته شده است.]

۵۰-ثابت کنید طرح واپاشی پروتون فرضی در معادلهٔ ۴۴-۱۴، قانون پایستگی (الف) بار، (ب) انرژی، و (پ) اندازه حرکت خطی را نقض نمی‌کند. (ت) در مورد اندازه حرکت زاویه‌ای چطور؟

۵۱-*انتقال به سرخ کیهانشناختی.* انبساط عالم غالباً با تصویری مانند شکل ۴۴-۱۳ الف نمایش داده می‌شود. در این شکل نمادی را که با MW مشخص شده است (برگرفته از نام لاتین کهکشان راه شیری – Milky Way –) در مبداء محور r قرار داده‌ایم که به طور شعاعی از ما در تمام جهتها دور می‌شود. سایر کهکشانهای بسیار دور نیز نمایش داده شده‌اند. آنچه که روی نمادهای آنها اضافه شده است، بردارهای سرعت آنهاست که از انتقال به سرخ نوری که از آن کهکشانها به ما می‌رسد، به دست آمده است. بنابر قانون هابل، تندی هر کهکشان متناسب با فاصلهٔ آن از ماست. چنین تصویرهایی ممکن است گمراه کننده باشند، زیرا آنها دلالت بر این دارند که (۱) آن انتقالهای به سرخ ناشی از حرکت کهکشانها نسبت به ماست، به طوری که گویی آنها در فضایی ایستا (ساکن) از ما دور می‌شوند، و (۲) اینکه ما در مرکز همهٔ این حرکتها هستیم.

در واقع، انبساط عالم و افزایش فاصلهٔ کهکشانها ناشی از یک حرکت رو به بیرون کهکشانها در فضایی از پیش موجود نیست، بلکه ناشی از انبساط خود فضا در سرتاسر عالم است. *فضا، پویاست و نه ایستا.*

شکلهای ۴۴-۱۳ ب، پ، و ت راههای متفاوتی را برای نمایش عالم و انبساط آن نشان می‌دهند. هر قسمت از این شکل، بخشی از یک مقطع یک بُعدی از عالم را (در امتداد محور z) به دست می‌دهد؛ دو بُعد فضایی دیگر عالم نشان داده نشده است. هر یک از این سه بخش شکل، کهکشان راه شیری و شش کهکشان دیگر را نشان می‌دهند (نمایش داده شده با نقطه‌ها)؛ این بخشها روی محور زمان قرار گرفته‌اند، که افزایش زمانی آن رو به بالاست. در بخش ب، در زودترین زمان این سه قسمت، کهکشان راه شیری و شش کهکشان دیگر، نسبتاً نزدیک به یکدیگر نمایش داده شده‌اند. وقتی زمان در شکلی رو به بالا افزایش می‌یابد، فضا منبسط می‌شود، و در نتیجه کهکشانها از هم دور می‌شوند. توجه کنید که بخشهای شکل نسبت به کهکشان راه شیری رسم شده‌اند، و از نظر این نقطهٔ مشاهده، همهٔ کهکشانهای دیگر به دلیل انبساط از آن دور می‌شوند. ولی، کهکشان راه شیری ویژگی خاصی ندارد- این کهکشانها همچنین نسبت به هر نقطهٔ مشاهدهٔ دیگری نیز که ممکن بود انتخاب کنیم، از هم دور می‌شوند.

شکلهای ۴۴-۱۳ الف و ب درست روی کهکشان راه شیری و یکی از کهکشانهای دیگر، کهکشان A، در دو زمان معین در حین انبساط متمرکز است. در بخش ث، کهکشان A در فاصلهٔ r از کهکشان راه شیری است و در حال گسیل یک موج نوری با طول موج λ است. در بخش ج، پس از بازهٔ زمانی Δt ، آن موج نوری روی زمین آشکار شده است. آهنگ انبساط عالم بر یکای طول فضا را با α نشان می‌دهیم، و فرض می‌کنیم در حین بازهٔ زمانی Δt ثابت است. آنگاه در طی بازهٔ زمانی Δt ، هر یکای طول از فضا (مثلاً، هر متر) به میزان $\alpha\Delta t$ انبساط می‌یابد. موج نوری شکلهای ۴۴-۱۳ ث و ج با تندی c از کهکشان A به سوی زمین حرکت می‌کنند. (الف) نشان دهید

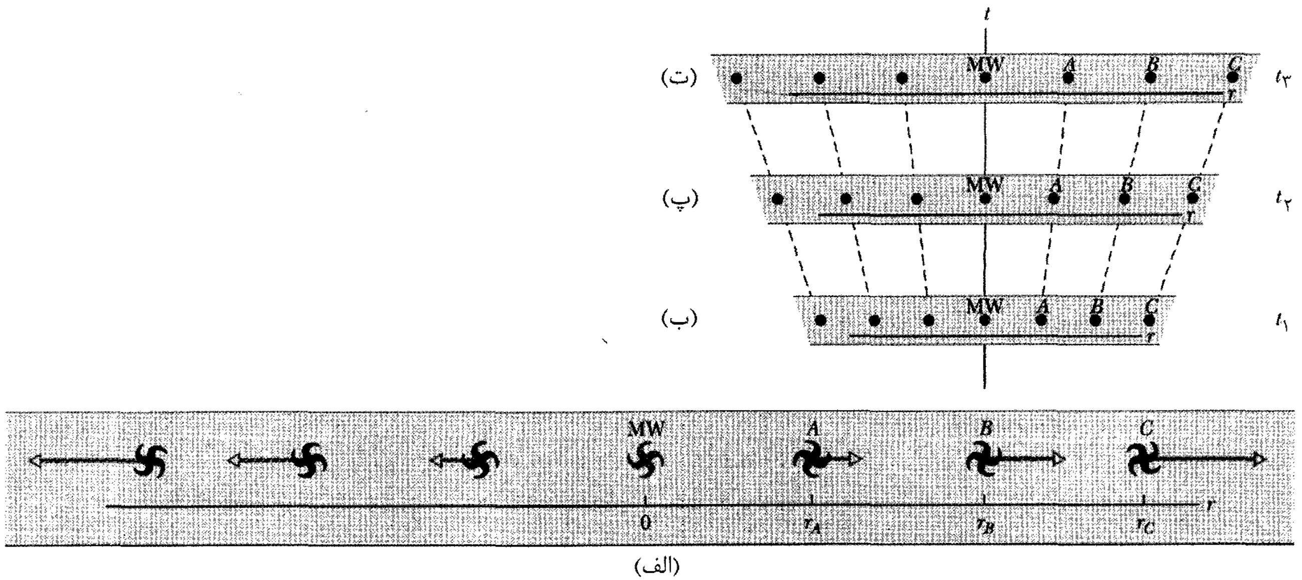
$$\Delta t = \frac{r}{c - r\alpha}$$

طول موج مشاهده شدهٔ λ' نور، بزرگتر از طول موج گسیل شدهٔ λ است، زیرا فضا در طی بازهٔ زمانی Δt انبساط یافته است. این افزایش در طول موج، **انتقال به سرخ کیهانشناختی** نامیده شده است؛ این یک اثر دوپلر نیست. (ب) نشان دهید که تغییر طول موج $\Delta\lambda (= \lambda' - \lambda)$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{r\alpha}{c - r\alpha}$$

(پ) سمت راست این معادله را با استفاده از بسط دوجمله‌ای (که در پیوست ث داده شده است) بسط دهید. (ت) اگر در این بسط فقط نخستین جمله را نگهدارید، معادلهٔ حاصل برای $\Delta\lambda / \lambda$ چه می‌شود؟

1. O.Chamberlain, E. Segrè, C. Wiegand, and T. Ypsilantis

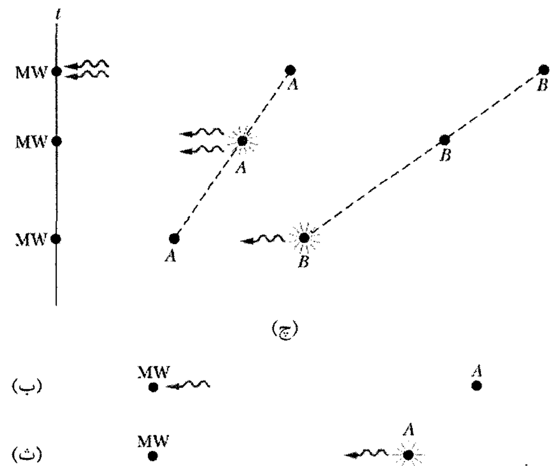


شکل ۴۴-۱۳ مسئلهٔ ۵۱

اگر، به جای این، فرض کنیم که شکل ۴۴-۱۳ الف برقرار است و $\Delta\lambda$ ناشی از اثر دوپلر است، آنگاه از معادلهٔ ۳۷-۳۶ خواهیم داشت

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{v}{c}$$

که در آن v سرعت شعاعی کهکشان A نسبت به زمین است. (ث) با استفاده از قانون هابل، این نتیجهٔ حاصل از اثر دوپلر را با نتیجهٔ حاصل از بسط کیهانشناختی (ت) مقایسه کنید و برای α مقداری به دست آورید. با استفاده از این تحلیل شما می‌توانید دریابید که این دو نتیجه، که از مدلهای کاملاً متفاوتی دربارهٔ انتقال به سرخ نور آشکار شده از کهکشانهای دور به دست آمده‌اند، با هم سازگارند.



شکل ۴۴-۱۴ مسئلهٔ ۵۱

فرض کنید نوری که ما از کهکشان A آشکار می‌کنیم دارای انتقال به سرخ $\Delta\lambda/\lambda=0/050$ باشد و اینکه آهنگ انبساط عالم در مقدار حال حاضر آن که در این فصل داده شده است، ثابت مانده باشد. (ج) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (ب)، فاصلهٔ میان این کهکشان و زمین را در هنگامی که نور گسیل شده بود، بیابید. سپس، (چ) با استفاده از قسمت (الف)، و (ح) با فرض اینکه انتقال به سرخ یک اثر دوپلر است، تعیین کنید که آن نور چه مدت قبل توسط کهکشان A گسیل شده است؟ (*راهنمایی:* برای قسمت (ح)، زمان دقیقاً برابر با فاصله در زمان گسیل بخش بر تندی نور است، زیرا اگر انتقال به سرخ دقیقاً ناشی از اثر دوپلر باشد، فاصله در حین حرکت نور به سوی ما تغییر نمی‌کند. اینجا نتایج حاصل از دو مدل مربوط به انتقال به سرخ نور متفاوت‌اند.) (خ) در زمان آشکارسازی، فاصلهٔ میان زمین و کهکشان A چقدر است؟ (فرض می‌کنیم که کهکشان A هنوز وجود دارد؛ اگر حیات آن به پایان رسیده باشد، بشر تا هنگامی که آخرین نور گسیل شده توسط آن کهکشان به ما نرسیده باشد، چیزی در مورد مرگ آن نمی‌داند.)

حال فرض کنید نوری که از کهکشان B آشکار می‌کنیم (شکل ۴۴-۱۴ پ) دارای انتقال به سرخ $\Delta\lambda/\lambda=0/080$ باشد. (د) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (ب) فاصلهٔ میان کهکشان B و کرهٔ زمین را در هنگامی که نور گسیل شده بود، به دست آورید. (ذ) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف)، به دست آورید که نور چه مدت پیش توسط کهکشان B گسیل شده است؟ (ر) وقتی نوری که توسط کهکشان A گسیل شده را آشکار می‌کنیم، فاصلهٔ میان کهکشان A و کهکشان B چقدر بوده است؟

۵۲- اختلاف جرم، بر حسب کیلوگرم، را بین موئون و پیون مسئلهٔ نمونهٔ ۴۴-۱ محاسبه کنید.

پیوست الف | دستگاه بین المللی یکاها (SI)[1]

۱- یکاهای اصلی SI

کمیت	نام	نماد	تعریف
طول	متر	m	«... مسافتی است که نور در فاصلهٔ زمانی ۱/۲۹۹,۷۹۲,۴۵۸ ثانیه در خلأ طی می‌کند.» (۱۳۶۱/۱۹۸۳)
جرم	کیلوگرم	kg	«... این نمونهٔ اصلی [استوانهٔ معینی از پلاتین - ایریدیم است] از این پس یکای جرم خواهد بود.» (۱۲۶۸/۱۸۸۹)
زمان	ثانیه	s	«... مدت زمان ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ برابر دورهٔ تناوب تابش مربوط به گذر میان ترازهای فوق ریز حالت پایهٔ اتم سزیم ۱۳۳ است» (۱۳۴۶/۱۹۶۷).
جریان الکتریکی	آمپر	A	«... جریان ثابتی است که اگر از دو رسانای راست موازی بی‌نهایت دراز با سطح مقطع دایره‌ای ناچیز و به فاصلهٔ ۱ متر از یکدیگر در خلأ بگذرد نیرویی برابر با ۲×۱۰^{-۷} نیوتون بر متر بین آنها ایجاد می‌کند.» (۱۳۲۵/۱۹۴۶).
دمای ترمودینامیکی	کلوین	K	«... عبارت است از ۱/۲۷۳,۱۶ دمای ترمودینامیکی نقطهٔ سه گانهٔ آب.» (۱۳۴۶/۱۹۶۷).
مقدار ماده	مول	mol	«... مقدار ماده یک دستگاه است که تعداد موجودات بنیادی آن برابر تعداد اتمهای موجود در ۰/۰۱۲ کیلوگرم کربن ۱۲ است.» (۱۳۵۰/۱۹۷۱).
شدت نور	شمع	cd	«... عبارت است از شدت نور در جهت عمود بر سطحی به مساحت ۱/۶۰۰,۰۰۰ متر مربع از یک جسم سیاه در دمای نقطهٔ انجماد پلاتین و فشار ۱۰۱/۳۲۵ نیوتون بر مترمربع ...» (۱۳۴۶/۱۹۶۷).

۱. اقتباس شده از

"The International system of Units (SI)," National Bureau of Standards Special publication 330, 1972 edition.

تعریفهای بالا در تاریخهای نوشته شده به وسیلهٔ کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها، به عنوان یک مرجع جهانی پذیرفته شده است. در این کتاب از یکای شمع استفاده نمی‌کنیم

۲- برخی یکاهای فرعی SI

کمیت	نام یکا	نماد	
مساحت	متر مربع	m^2	
حجم	متر مکعب	m^3	
بسامد	هرتز	Hz	s^{-1}
چگالی جرمی (چگالی)	کیلوگرم بر متر مکعب	kg/m^3	
تندی، سرعت	متر بر ثانیه	m/s	
سرعت زاویه‌ای	رادیان بر ثانیه	rad/s	
شتاب	متر بر ثانیه بر ثانیه	m/s^2	
شتاب زاویه‌ای	رادیان بر ثانیه بر ثانیه	rad/s^2	
نیرو	نیوتون	N	$kg.m/s^2$
فشار	پاسکال	Pa	N/m^2
کار، انرژی، مقدار گرما	ژول	J	N.m
توان	وات	W	J/s
مقدار بار الکتریکی	کولن	C	A.s
اختلاف پتانسیل، نیروی محرکه	ولت	V	W/A
شدت میدان الکتریکی	ولت برمتر (نیوتون بر کولن)	V/m	N/C
مقاوت الکتریکی	اهم	Ω	V/A
ظرفیت	فاراد	F	A.s/V
شار مغناطیسی	وبر	Wb	V.s
القایش	هانری	H	V.s/A
چگالی شار مغناطیسی	تسلا	T	Wb/m^2
شدت میدان مغناطیسی	آمپر بر متر	A/m	
انتروپی	ژول بر کلوین	J/K	
گرمای ویژه	ژول بر کیلوگرم کلوین	J/(kg.K)	
رسانندگی گرمایی	وات بر متر کلوین	W/(m.K)	
شدت تابشی	وات بر استرادیان	W/sr	

۳- یکاهای تکمیلی SI

کمیت	نام یکا	نماد
زاویهٔ تخت	رادیان	rad
زاویهٔ فضایی	استرادیان	Sr

پیوست ب — چند ثابت بنیادی فیزیک[1]

ثابت	نماد	اندازه محاسبه شده	اندازه[1]	عدم قطعیت[2]
تندی نور در خلأ	c	$۳/۰۰\times۱۰^{۸}$ m/s	۲/۹۹۷۹۲۴۵۸	دقیق
بار بنیادی	e	$۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}$C	۱/۶۰۲۱۷۶۴۶۲	۰/۳۳۹
ثابت گرانشی	G	$۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}$ $m^{۳}/s^{۲}$.kg	۶/۶۷۳	۱۵۰۰
ثابت جهانی گاز	R	۸/۳۱J/mol.K	۸/۳۱۴۴۷۲	۱/۷
ثابت آووگادرو	N_A	$۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}$ $mol^{-۱}$	۶/۰۲۲۱۴۱۹۹	۰/۰۷۹
ثابت بولتزمن	k	$۱/۳۸\times۱۰^{-۲۳}$J/K	۱/۳۸۰۶۵۰۳	۱/۷
ثابت استفان - بولتزمن	σ	$۵/۶۷\times۱۰^{-۸}$ $W/m^{۲}.K^{۴}$	۵/۶۷۰۴۰۰	۷
حجم مولی گاز کامل در STP[4]	V_m	$۲/۲۷\times۱۰^{-۲}$ $m^{۳}$/mol	۲/۲۷۱۰۹۸۱	۱/۷
ثابت گذردهی	$\varepsilon_۰$	$۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}$ F/m	۸/۸۵۴۱۸۷۸۱۷۶۲	دقیق
ثابت تراوایی	$\mu_۰$	$۱/۲۶\times۱۰^{-۶}$ H/m	۱/۲۵۶۶۳۷۰۶۱۴۳	دقیق
ثابت پلانک	h	$۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴}$ J/s	۶/۶۲۶۰۶۸۷۶	۰/۰۷۸
جرم الکترون[3]	m_e	$۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}$ kg	۹/۱۰۹۳۸۱۸۸	۰/۰۷۹
		$۵/۴۹\times۱۰^{-۴}$ u	۵/۴۸۵۷۹۹۱۱۰	۰/۰۰۲۱
جرم پروتون[3]	m_p	$۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}$kg	۱/۶۷۲۶۲۱۵۸	۰/۰۷۹
		۱/۰۰۷۳u	۱/۰۰۷۲۷۶۴۶۶۸۸	$۱/۳\times۱۰^{-۴}$
نسبت جرم پروتون به جرم الکترون	m_p / m_e	۱۸۴۰	۱۸۳۶/۱۵۲۶۶۷۵	۰/۰۰۲۱
نسبت بار الکترون به جرم آن	e / m_e	$۱/۷۶\times۱۰^{۱۱}$ C/kg	۱/۷۵۸۸۲۰۱۷۴	۰/۰۴۰
جرم نوترون[3]	m_n	$۱/۶۸\times۱۰^{-۲۷}$kg	۱/۶۷۴۹۲۷۱۶	۰/۰۷۹
		۱/۰۰۸۷u	۱/۰۰۸۶۶۴۹۱۵۷۸	$۵/۴\times۱۰^{-۴}$
جرم اتم هیدروژن[3]	$m_{۱H}$	۱/۰۰۷۸u	۱/۰۰۷۸۲۵۰۳۱۶	۰/۰۰۰۵
جرم اتم دوترون[3]	$m_{۲H}$	۲/۰۱۴۱u	۲/۰۱۴۱۰۱۷۷۷۹	۰/۰۰۰۵
جرم اتمی هلیوم اتمی[3]	$m_{۴He}$	۴/۰۰۲۶u	۴/۰۰۲۶۰۳۲	۰/۰۶۷
جرم میون	m_μ	$۱/۸۸\times۱۰^{-۲۸}$kg	۱/۸۸۳۵۳۱۰۹	۰/۰۸۴
گشتاور مغناطیسی الکترون	μ_e	$۹/۲۸\times۱۰^{-۲۲}$ J/T	۹/۲۸۴۷۶۳۶۲	۰/۰۴۰
گشتاور مغناطیسی پروتون	μ_p	$۱/۴۱\times۱۰^{-۲۶}$ J/T	۱/۴۱۰۶۰۶۶۶۳	۰/۰۴۱
مگنتون بور	μ_B	$۹/۲۷\times۱۰^{-۲۴}$ J/T	۹/۲۷۴۰۰۸۹۹	۰/۴۰
مگنتون هستهای	μ_N	$۵/۰۵\times۱۰^{-۲۷}$ J/T	۵/۰۵۰۷۸۳۱۷	۰/۴۰
شعاع بور	r_B	$۵/۲۹\times۱۰^{-۱۱}$m	۵/۲۹۱۷۷۲۰۸۳	۰/۰۰۳۷
ثابت ریدبرگ	R	$۱/۱۰\times۱۰^{۷}$ $m^{-۱}$	۱/۰۹۷۳۷۳۱۵۶۸۵۴۸	$۷/۶\times۱۰^{-۶}$
طول موج کامپتون الکترون	λ_C	$۲/۴۳\times۱۰^{-۱۲}$m	۲/۴۲۶۳۱۰۲۱۵	۰/۰۰۷۳

۱- اندازه داده شده در این ستون باید همان یکا و توان ۱۰ مربوط به اندازه محاسبه شده را داشته باشد. ۲- در میلیون. ۳- جرمهای داده شده برحسب u یعنی یکای جرم اتمی یکی شده هستند، که در آن $۱u = ۱/۶۶۰۵۳۸۷۳\times۱۰^{-۲۷}$kg است. ۴- STP به معنای دما و فشار استاندارد است: ۰°C و ۱/۰atm (۰/۱MPa)

۱. مقدارهای این جدول از مقدارهای توصیه شدهٔ CODATA در سال ۱۹۹۸ (www. Physics.nist.gov) برگزیده شدهاند.

پیوست پ برخی داده‌های نجومی

برخی فاصله‌ها از زمین

تا ماه[1]	$۳/۸۲\times۱۰^{۸}$ m
تا خورشید[1]	$۱/۵۰\times۱۰^{۱۱}$ m
تا نزدیکترین ستاره (پروکسیمای قنطورس)	$۴/۰۴\times۱۰^{۱۶}$ m
تا مرکز کهکشان ما	$۲/۲\times۱۰^{۲۰}$ m
تا کهکشهان آندرومدا (امرأة المسلسله)	$۲/۱\times۱۰^{۲۲}$ m
تا کرانهٔ جهان قابل مشاهده	$\sim۱۰^{۲۶}$ m

۱. فاصلهٔ میانگین

خورشید، زمین و ماه

کمیت	یکا	خورشید	زمین	ماه
جرم	kg	$۱/۹۹\times۱۰^{۳۰}$	$۵/۹۸\times۱۰^{۲۴}$	$۷/۳۶\times۱۰^{۲۲}$
شعاع میانگین	m	$۶/۹۶\times۱۰^{۸}$	$۶/۳۷\times۱۰^{۶}$	$۱/۷۴\times۱۰^{۶}$
چگالی میانگین	kg/m^3	۱۴۱۰	۵۵۲۰	۳۳۴۰
شتاب سقوط آزاد در سطح	m/s^2	۲۷۴	۹/۸۱	۱/۶۷
سرعت فرار	km/s	۶۱۸	۱۱/۲	۲/۳۸
دورهٔ تناوب چرخش[1]	–	۳۷ روز در قطبها[2]	۲۳ ساعت و ۵۶ دقیقه	۲۷/۳ روز
		۲۶ روز در استوا[2]		
توان تابشی[3]	W	$۳/۹۰\times۱۰^{۲۶}$		

۱- اندازه‌گیری شده نسبت به ستارگان

۲- خورشید گلوله‌ای از گاز است و به صورت یک جسم صلب نمی‌چرخد.

۳- با فرض تابش عمودی، درست در بیرون جوّ زمین انرژی خورشیدی با آهنگ $۱۳۴۰ W/m^2$ دریافت می‌شود.

خواص از سیاره‌ها

	عطارد	زهره	زمین	مریخ	مشتری	زحل	اورانوس	نپتون	پلوتون
فاصلهٔ میانگین از خورشید (10^6 km)	۵۷/۹	۱۰۸	۱۵۰	۲۲۸	۷۷۸	۱۴۳۰	۲۸۷۰	۴۵۰۰	۵۹۰۰
دورهٔ گردش، y	۰/۲۴۱	۰/۶۱۵	۱/۰۰	۱/۸۸	۱۱/۹	۲۹/۵	۸۴/۰	۱۶۵	۲۴۸
دورهٔ چرخش، d[1]	۵۸/۷	۲۴۳-[2]	۰/۹۹۷	۱/۰۳	۰/۴۰۹	۰/۴۲۶	۰/۴۵۱-[2]	۰/۶۵۸	۳۹/۶
تندی مداری km/h	۴۷/۹	۳۵/۰	۲۹/۸	۲۴/۱	۱۳/۱	۹/۶۴	۶/۸۱	۵/۴۳	۴/۷۴
انحراف محور نسبت به مدار	<۲۸°	≈۳°	۲۳/۴°	۲۵/۰°	۳/۰۸°	۲۶/۷°	۹۷/۹°	۲۹/۶°	۵۷/۵°
انحراف مدار نسبت به مدار زمین	۷/۰۰	۳/۳۹°		۱/۸۵°	۱/۳۰°	۲/۴۹°	۰/۷۷°	۱/۷۷°	۱۷/۲°
خروج از مرکز مدار	۰/۲۰۶	۰/۰۰۶۸	۰/۰۰۱۶۷	۰/۰۹۳۴	۰/۰۴۵۸	۰/۰۵۵۶	۰/۰۴۷۲	۰/۰۰۸۶	۰/۲۵۰
قطر استوایی km	۴,۸۸۰	۱۲,۱۰۰	۱۲,۸۰۰	۶,۷۹۰	۱۴۳,۰۰۰	۱۲۰,۰۰۰	۵۱,۸۰۰	۴۹,۵۰۰	۲,۳۰۰
جرم (زمین =۱)	۰/۰۵۵۸	۰/۸۱۵	۱/۰۰۰	۰/۱۰۷	۳۱۸	۹۵/۱	۱۴/۵	۱۷/۲	۰/۰۰۲
چگالی (آب =۱)	۵/۶۰	۵/۶۰	۵/۵۲	۳/۹۵	۱/۳۱	۰/۷۰۴	۱/۲۱	۱/۶۷	۲/۰۳
اندازه g در سطح[3] m/s^2	۳/۷۸	۸/۶۰	۹/۷۸	۳/۷۲	۲۲/۹	۹/۰۵	۷/۷۷	۱۱/۰	۰/۵
سرعت فرار[3] km/s	۴/۳	۱۰/۳	۱۱/۲	۵/۰	۹۵/۵	۳۵/۶	۲۱/۲	۲۳/۶	۱/۱
قمرهای شناخته شده	۰	۰	۱	۲	حلقه+۶۰	حلقه‌ها +۳۱	حلقه‌ها+۲۱	حلقه‌ها+۱۱	۱

۱- نسبت به ستارگان دور اندازه‌گیری شده است.

۲- زهره و اورانوس در خلاف جهت حرکت مداریشان می‌چرخند.

۳- شتاب گرانشی در استوای سیاره اندازه‌گیری شده است.

پیوست ت — ضریبهای تبدیل

ضریبهای تبدیل را به طور مستقیم از این جدولها می‌توان به‌دست آورد. برای نمونه، ۱ درجه مساوی $۲/۷۷۸\times۱۰^{-۳}$ دور است، پس $۱۶/۷^{\circ} = ۱۶/۷\times۲/۷۷۸\times۱۰^{-۳}$rev. کمیتهای SI با حروف سیاه مشخص شده‌اند. برگرفته از

G. Shortley and D. Williams, *Elements of physics* – 1971، Prentice- Hall, Englewood Cliffs, NJ.

زاویهٔ تخت

	°	“	،	**رادیان**	دور
۱ درجه =	۱	۶۰	۳۶۰۰	$۱/۷۴۵\times۱۰^{-۲}$	$۲/۷۷۸\times۱۰^{-۳}$
۱ دقیقه =	$۱/۶۷۷\times۱۰^{-۲}$	۱	۶۰	$۲/۹۰۹\times۱۰^{-۴}$	$۱/۶۳۰\times۱۰^{-۵}$
۱ ثانیه =	$۲/۷۷۸\times۱۰^{-۴}$	$۱/۶۷۷\times۱۰^{-۲}$	۱	$۴/۸۴۸\times۱۰^{-۶}$	$۷/۷۱۶\times۱۰^{-۷}$
۱ **رادیان** =	۵۷/۳۰	۳۴۳۸	$۲/۰۶۳\times۱۰^{-۵}$	۱	۱
۱ دور =	۳۶۰	$۲/۱۶\times۱۰^{۴}$	$۱/۲۹۶\times۱۰^{۶}$	۶/۲۸۳	۱

زاویهٔ فضایی

۱کره = ۴π استرادیان = ۱۲/۵۷ استرادیان

طول

	cm	**متر**	km	in.	ft	mi
۱ سانتی‌متر=	۱	$۱۰^{-۲}$	$۱۰^{-۵}$	۰/۳۹۳۷	$۳/۲۸۱\times۱۰^{-۲}$	$۶/۲۱۴\times۱۰^{-۶}$
۱ **متر** =	۱۰۰	۱	$۱۰^{-۳}$	۳۹/۳۷	۳/۲۸۱	$۶/۲۱۴\times۱۰^{-۴}$
۱ کیلومتر=	$۱۰^{۵}$	۱۰۰۰	۱	$۳/۹۳۷\times۱۰^{-۵}$	۳۲۸۱	۰/۶۲۱۴
۱ اینچ =	۲/۵۴۰	$۲/۵۴۰\times۱۰^{-۲}$	$۲/۵۴۰\times۱۰^{-۵}$	۱	$۸/۳۳۳\times۱۰^{-۲}$	$۱/۵۷۸\times۱۰^{-۵}$
۱ فوت =	۳۰/۴۸	۰/۳۰۴۸	$۳/۰۴۸\times۱۰^{۵}$	۱۲	۱	$۱/۸۹۴\times۱۰^{-۴}$
۱ مایل =	$۱/۶۰۹\times۱۰^{۵}$	۱۶۰۹	۱/۶۰۹	$۶/۳۳۶\times۱۰^{۴}$	۵۲۸۰	۱

۱ انگستروم = $۱۰^{-۱۰}$ متر — ۱ فرمی = $۱۰^{-۱۵}$ متر — ۱ فاتوم = ۶ فوت — ۱ راد = ۱۶/۵ فوت

۱ مایل دریایی = ۱۸۵۲ متر — ۱ سال نوری = $۹/۴۶۰\times۱۰^{۱۲}$ کیلومتر — ۱ شعاع بور = $۵/۲۹۲\times۱۰^{-۱۱}$ متر — ۱ میل = $۱۰^{-۳}$ اینچ

۶۰۷۶ فوت = ۱/۱۵۱ مایل — ۱ پارسک = $۳/۰۸۴\times۱۰^{۱۳}$ کیلومتر — ۱ یارد = ۳ فوت — ۱ نانومتر = $۱۰^{-۹}$ متر

مساحت

	متر مربع[۲]	cm^{۱}	ft^{۱}	in^{۱}.
۱ متر مربع =	۱	$۱۰^{۴}$	۱۰/۷۶	۱۵۵۰
۱ سانتی‌متر مربع=	$۱۰^{-۴}$	۱	$۱۰/۷۶\times۱۰^{-۳}$	۰/۱۵۵۰
۱ فوت مربع =	$۹/۲۹۰\times۱۰^{-۲}$	۹۲۹/۰	۱	۱۴۴
۱ اینچ مربع =	$۶/۴۵۲\times۱۰^{-۴}$	۶/۴۵۲	$۶/۹۴۴\times۱۰^{-۳}$	۱

۱ مایل مربع = $۲/۷۸۸\times۱۰^{۷}$ فوت مربع = ۶۴۰ ایکر — ۱ ایکر = ۴۳/۵۶۰ فوت مربع

۱ هکتار = $۱۰^{۴}$ متر مربع = ۲/۴۷۱ ایکر — ۱ بارن = $۱۰^{-۲۸}$ متر مربع

حجم

متر مکعب	cm^{۳}	L	ft^{۳}	in.^{۳}	
۱ **متر مکعب** =	۱	۱۰^{۶}	۱۰۰۰	۳۵/۳۱	۶/۱۰۲×۱۰^{۴}
۱ سانتی‌متر مکعب =	۱۰$^{-۶}$	۱	۱/۰۰۰×۱۰$^{-۳}$	۳/۵۳۱×۱۰$^{-۵}$	۶۱/۱۰۲×۱۰$^{-۲}$
۱ لیتر =	۱/۰۰۰×۱۰$^{-۳}$	۱۰۰۰	۱	۳/۵۳۱×۱۰$^{-۲}$	۶۱/۰۲
۱ فوت مکعب =	۲/۸۳۲×۱۰$^{-۲}$	۲/۸۳۲×۱۰^{۴}	۲۸/۳۲	۱	۱۷۲۸
۱ اینچ مکعب =	۱/۶۳۹×۱۰$^{-۵}$	۱۶/۳۹	۱/۶۳۹×۱۰$^{-۲}$	۵/۷۸۷×۱۰$^{-۴}$	۱

۱ گالن آمریکایی مایع = ۴ کوارت آمریکایی مایع = ۸ پینت آمریکایی = ۱۲۸ اونس آمریکایی مایع = ۲۳۱ اینچ مکعب.

۱ گالن امپریال بریتانیایی = ۲۷۷/۴ اینچ مکعب = ۱/۲۰۱ گالن آمریکایی مایع

جرم

کمیتهایی که در ناحیه‌های سایه‌دار آمده‌اند یکای جرم نیستند ولی اغلب به این عنوان به کار برده می‌شوند. برای نمونه، هرگاه بنویسیم ۱kg"="۲/۲۰۵lb، این بدان معناست که یک کیلوگرم جرمی است که در مکانی که g دارای مقدار استاندارد ۹/۸۰۶۶۵m/s^{۲} باشد، ۲/۲۰۵ پوند وزن دارد.

	g	**کیلوگرم**	Slug	u	oz	lb	**ton**
۱ گرم =	۱	۰/۰۰۱	۶/۸۵۲×۱۰$^{-۵}$	۶/۰۲۲×۱۰^{۲۳}	۳/۵۲۷×۱۰$^{-۲}$	۲/۲۰۵×۱۰$^{-۳}$	۱/۱۰۲×۱۰$^{-۶}$
۱ **کیلوگرم** =	۱۰۰۰	۱	۶/۸۵۲×۱۰$^{-۲}$	۶/۰۲۲×۱۰^{۲۶}	۳۵/۲۷	۲/۲۰۵	۱/۱۰۲×۱۰$^{-۳}$
۱ اسلاگ =	۱/۴۵۹×۱۰^{۴}	۱۴/۵۹	۱	۸/۷۸۶×۱۰^{۲۷}	۵۱۴/۸	۳۲/۱۷	۱/۶۰۹×۱۰$^{-۲}$
۱ یکای جرم اتمی =	۱/۶۶۱×۱۰$^{-۲۴}$	۱/۶۶۱×۱۰$^{-۲۷}$	۱/۱۳۸×۱۰$^{-۲}$	۱	۵/۸۵۷×۱۰$^{-۲۶}$	۳/۶۶۲×۱۰$^{-۲۷}$	۱/۸۳۰×۱۰$^{-۳۰}$
۱ اونس =	۲۸/۳۵	۲/۸۳۵×۱۰$^{-۲}$	۱/۹۴۳×۱۰$^{-۳}$	۱/۷۱۸×۱۰^{۲۵}	۱	۶/۲۵۰×۱۰$^{-۲}$	۳/۱۲۵×۱۰$^{-۵}$
۱ پوند =	۴۵۳/۶	۰/۴۵۳۶	۳/۱۰۸×۱۰$^{-۲}$	۲/۷۳۲×۱۰^{۲۶}	۱۶	۱	۰/۰۰۰۵
۱ تن =	۹/۰۷۲×۱۰^{۵}	۹۰۷/۲	۶۲/۱۶	۵/۴۶۳×۱۰^{۲۹}	۳/۲×۱۰^{۴}	۲۰۰۰	۱

۱ تن متریک = ۱۰۰۰kg

چگالی

کمیتهایی که در ناحیه‌های سایه‌دار آمده‌اند چگالیهای وزنی هستند و از نظر ابعادی با چگالیهای جرمی فرق دارند. به جدول جرم نگاه کنید.

	Slug/ft^{۳}	**متر مکعب/کیلوگرم**	g/cm^{۳}	lb/ft^{۳}	lb/in.^{۳}
۱ اسلاگ بر فوت مکعب =	۱	۵۱۵/۴	۰/۵۱۵۴	۳۲/۱۷	۱/۸۶۲×۱۰$^{-۲}$
۱ **کیلوگرم** بر **متر مکعب** =	۱/۹۴۰×۱۰$^{-۳}$	۱	۰/۰۰۱	۶/۲۴۳×۱۰$^{-۲}$	۳/۶۱۳×۱۰$^{-۵}$
۱ گرم بر سانتی‌متر مکعب =	۱/۹۴۰	۱۰۰۰	۱	۶۲/۴۳	۳/۶۱۳×۱۰$^{-۲}$
۱ پوند بر فوت مکعب =	۳/۱۰۸×۱۰$^{-۲}$	۱۶/۰۲	۱/۶۰۲×۱۰$^{-۲}$	۱	۳/۶۱۳×۱۰$^{-۴}$
۱ پوند بر اینچ مکعب =	۵۳/۷۱	۲/۷۶۸×۱۰^{۴}	۲۷/۶۸	۱۷۲۸	۱

زمان

	y	d	h	min	ثانیه
۱ سال =	۱	۳۶۵/۲۵	$۸/۷۶۶ \times ۱۰^{۳}$	$۵/۲۵۹ \times ۱۰^{۵}$	$۳/۱۵۶ \times ۱۰^{۷}$
۱ روز =	$۲/۷۳۸ \times ۱۰^{-۳}$	۱	۲۴	۱۴۴۰	$۸/۶۴۰ \times ۱۰^{۴}$
۱ ساعت =	$۱/۱۴۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۱۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۶۰	۳۶۰۰
۱ دقیقه =	$۱/۹۰۱ \times ۱۰^{-۶}$	$۶/۹۴۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۶۰
۱ ثانیه =	$۳/۱۶۹ \times ۱۰^{-۸}$	$۱/۱۵۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۷۷۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱

تندی

	ft/s	km/h	**متر/ثانیه**	mi/h	cm/s
۱ فوت بر ثانیه =	۱	۱/۰۹۷	۰/۳۰۴۸	۰/۶۸۱۸	۳۰/۴۸
۱ کیلومتر بر ساعت =	۰/۹۱۱۳	۱	۰/۲۷۷۸	۰/۶۲۱۴	۲۷/۷۸
۱ متر بر ثانیه =	۳/۲۸۱	۳/۶	۱	۲/۲۳۷	۱۰۰
۱ مایل بر ساعت =	۱/۴۶۷	۱/۶۰۹	۰/۴۴۷۰	۱	۴۴/۷۰
۱ سانتی‌متر بر ثانیه =	$۳/۲۸۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۳/۶ \times ۱۰^{-۲}$	۰/۰۱	$۲/۲۳۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱

۱ گره = ۱ مایل دریایی بر ساعت = ۱/۶۸۸ فوت بر ثانیه

۱ مایل بر دقیقه = ۸۸/۰۰ فوت بر ثانیه = ۶۰/۰۰ مایل بر ساعت

نیرو

یکاهای نیروهایی که در ناحیه‌های سایه‌دار نوشته شده‌اند امروزه کاربرد کمی دارند. به طور مثال: ۱ گرم نیرو (=1gf) نیروی گرانشی است که بر جسمی به جرم ۱ گرم در جایی که g دارای مقدار استاندارد $۹/۸۰۶۶۵ m/s^{2}$ است، وارد می‌شود.

	dyne	**نیوتون**	lb	pdl	gf	kgf
۱ دین =	۱	$۱۰^{-۵}$	$۲/۲۴۸ \times ۱۰^{-۶}$	$۷/۲۳۳ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۰۲۰ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۰۲۰ \times ۱۰^{-۶}$
۱ نیوتون =	$۱۰^{۵}$	۱	۰/۲۲۴۸	۷/۲۳۳	۱۰۲/۰	۰/۱۰۲
۱ پوند =	$۴/۴۴۸ \times ۱۰^{۵}$	۴/۴۴۸	۱	۳۲/۱۷	۴۵۳/۶	۰/۴۵۳۶
۱ پوندال =	$۱/۳۸۳ \times ۱۰^{۴}$	۰/۱۳۸۳	$۳/۱۰۸ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۱۴/۱۰	$۱/۴۱۰ \times ۱۰^{-۲}$
۱ گرم نیرو =	۹۸۰/۷	$۹/۸۰۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۲۰۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۷/۰۹۳ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۰/۰۰۱
۱ کیلوگرم نیرو =	۹/۸۰۷ × ۱۰۵	۹/۸۰۷	۲/۲۰۵	۷۰/۹۳	۱۰۰۰	۱

۱ تن = ۲۰۰۰ پوند

فشار

۰		atm	dyn/cm۲	اینچ آب	cm Hg	پاسکال	lb/in^{۲}	lb/ft^{۲}
۱ اتمسفر	=	۱	۱/۰۱۳ ×۱۰^{۶}	۴۰۶/۸	۷۶	۱/۰۱۳ ×۱۰^{۵}	۱۴/۷	۲۱۱۶
۱ دین بر سانتی‌متر مربع	=	۹/۸۶۹ ×۱۰$^{-۷}$	۱	۴/۰۱۵ ×۱۰$^{-۴}$	۷/۵۰۱ ×۱۰$^{-۵}$	۰/۱۰	۱/۴۰۵ ×۱۰$^{-۵}$	۲/۰۸۹ ×۱۰$^{-۳}$
۱ اینچ آب[۱] در ۴°C	=	۲/۴۵۸ ×۱۰$^{-۳}$	۲۴۹۱	۱	۰/۱۸۶۸	۲۴۹/۱	۳/۶۱۳ ×۱۰$^{-۲}$	۵/۲۰۲
۱ سانتی‌متر جیوه[۱] در ۰°C	=	۱/۳۱۶ ×۱۰$^{-۲}$	۱/۳۳۳ ×۱۰^{۴}	۵/۳۵۳	۱	۱۳۳۳	۰/۱۹۳۴	۲۷/۸۵
۱ پاسکال	=	۹/۸۶۹ ×۱۰$^{-۶}$	۱۰	۴/۰۱۵ ×۱۰$^{-۳}$	۷/۵۰۱ ×۱۰$^{-۴}$	۱	۱/۴۵۰ ×۱۰$^{-۴}$	۲/۰۸۹ ×۱۰$^{-۲}$
۱ پوند بر اینچ مربع	=	۶/۸۰۵ ×۱۰$^{-۲}$	۶/۸۹۵ ×۱۰^{۴}	۲۷/۶۸	۵/۱۷۱	۶/۸۹۵ ×۱۰^{۳}	۱	۱۴۴
۱ پوند بر فوت مربع	=	۴/۷۲۵ ×۱۰$^{-۴}$	۴۷۸/۸	۰/۱۹۲۲	۳/۵۹۱ ×۱۰$^{-۲}$	۴۷/۸۸	۶/۹۴۴ ×۱۰$^{-۳}$	۱

۱- در جایی که مقدار استاندارد شتاب گرانشی ۹/۸۰۶۶۵ m/s^{۲} است.

۱ بار= ۱۰^{۶} دین بر سانتی‌متر مربع = ۰/۱ مگا پاسکال

۱ میلی بار= ۱۰^{۳} دین بر سانتی‌متر مربع= ۱۰^{۲} پاسکال

۱ تور= یک میلی‌متر جیوه

توان

		Btu/h	ft.lb/s	hp	cal/s	kW	وات
۱ یکای بریتانیایی گرما بر ساعت	=	۱	۰/۲۱۶۱	۳/۹۲۹×۱۰$^{-۴}$	۶/۹۹۸×۱۰$^{-۲}$	۲/۹۳۰×۱۰$^{-۴}$	۰/۲۹۳۰
۱ فوت- ۱ پوند بر ثانیه	=	۴/۶۲۸	۱	۱/۸۱۸×۱۰$^{-۳}$	۰/۳۲۳۹	۱/۳۵۶×۱۰$^{-۳}$	۱/۳۵۶
۱ اسب بخار	=	۲۵۴۵	۵۵۰	۱	۱۷۸/۱	۰/۷۴۷۵	۷۴۵/۷
۱ کالری بر ثانیه	=	۱۴/۲۹	۳/۰۸۸	۵/۶۱۵×۱۰$^{-۳}$	۱	۴/۱۸۶×۱۰$^{-۳}$	۴/۱۸۶
۱ کیلو وات	=	۳۴۱۳	۷۳۷/۶	۱/۳۴۱	۲۳۸/۹	۱	۱۰۰۰
۱ وات	=	۳/۴۱۳	۰/۷۳۷۶	۱/۳۴۱×۱۰$^{-۳}$	۰/۲۳۸۹	۰/۰۰۱	۱

میدان مغناطیسی

		گاؤس	تسلا	میلی‌گاؤس
۱ گاؤس	=	۱	۱۰$^{-۴}$	۱۰۰۰
۱ تسلا	=	۱۰^{۴}	۱	۱۰^{۷}
۱ میلی گاؤس	=	۰/۰۰۱	۱۰$^{-۷}$	۱

۱ تسلا = متر مربع / وبر ۱

شار مغناطیسی

		ماکسول	وبر
۱ ماکسول	=	۱	۱۰$^{-۸}$
۱ وبر	=	۱۰^{۸}	۱

انرژی ، کار، گرما

کمیتهایی که در ناحیه‌های سایه‌دار آمده‌اند یکاهای خاص انرژی نیستند ولی به مناسبتهایی ذکر شده‌اند. این کمیتها از فرمول هم ارزی نسبیتی جرم- انرژی $E = mc^{۲}$ به دست می‌آیند و انرژی آزاد شده را هنگام تبدیل کامل یک کیلوگرم یا یک یکای جرم اتمی وحدت یافته (u) به کیلوگرم (دو سطر زیرین) یا جرمی را که باید به طور کامل به یک یکای انرژی تبدیل شود (دو ستون سمت چپ) نشان می‌دهند.

		Btu	erg	ft . lb	hp . h	ژول	cal	kW . h	eV	Mev	kg	u
۱ یکای بریتانیایی گرما	=	۱	۱/۰۵۵ $\times ۱۰^{۱۰}$	۷۷۷/۹	۳/۹۲۹ $\times ۱۰^{-۴}$	۱۰۵۵	۲۵۲/۰	۲/۹۳۰ $\times ۱۰^{-۴}$	۶/۵۸۵ $\times ۱۰^{۲۱}$	۶/۵۸۵ $\times ۱۰^{۱۵}$	۱/۱۷۴ $\times ۱۰^{-۱۴}$	۷/۰۷۰ $\times ۱۰^{۱۲}$
۱ ارگ	=	۹/۴۸۱ $\times ۱۰^{-۱۱}$	۱	۷/۳۷۶ $\times ۱۰^{-۸}$	۳/۷۲۵ $\times ۱۰^{-۱۴}$	$۱۰^{-۷}$	۲/۳۸۹ $\times ۱۰^{-۸}$	۲/۷۷۸ $\times ۱۰^{-۱۴}$	۶/۲۴۲ $\times ۱۰^{۱۱}$	۶/۲۴۲ $\times ۱۰^{۵}$	۱/۱۱۳ $۱۰^{-۲۴}$	۶۷۰/۲
۱ فوت- پوند	=	۱/۲۸۵ $\times ۱۰^{-۳}$	۱/۳۵۶ $\times ۱۰^{۷}$	۱	۵/۰۵۱ $\times ۱۰^{-۷}$	۱/۳۵۶	۰/۳۲۳۸	۳/۷۶۶ $\times ۱۰^{-۷}$	۸/۶۴۶ $\times ۱۰^{۱۸}$	۸/۴۶۴ $\times ۱۰^{۱۲}$	۱/۵۰۹ $۱۰^{-۱۷}$	۹/۰۳۷ $\times ۱۰^{۹}$
۱ اسب بخار - ساعت	=	۲۵۴۵	۲/۶۸۵ $\times ۱۰^{۱۳}$	۱/۹۸۰ $\times ۱۰^{۶}$	۱	۲/۶۸۵ $\times ۱۰^{۶}$	۶/۴۱۳ $\times ۱۰^{۵}$	۰/۷۴۵۷	۱/۶۷۶ $\times ۱۰^{۲۵}$	۱/۶۷۶ $\times ۱۰^{۱۹}$	۲/۹۸۸ $\times ۱۰^{-۱۱}$	۱/۷۹۹ $\times ۱۰^{۱۶}$
۱ ژول	=	۹/۴۸۱ $\times ۱۰^{-۴}$	$۱۰^{۷}$	۰/۷۳۷۶	۳/۷۲۵ $\times ۱۰^{-۷}$	۱	۰/۲۳۸۹	۲/۷۷۸ $\times ۱۰^{-۷}$	۶/۲۴۲ $\times ۱۰^{۱۸}$	۶/۲۴۲ $\times ۱۰^{۱۲}$	۱/۱۱۳ $\times ۱۰^{-۱۷}$	۶/۷۰۲ $\times ۱۰^{۹}$
۱ کالری	=	۳/۹۶۹ $\times ۱۰^{-۳}$	۴/۱۸۶ $\times ۱۰^{۷}$	۳/۰۸۸	۱/۵۶۰ $\times ۱۰^{-۶}$	۴/۱۸۶	۱	۱/۱۶۳ $\times ۱۰^{-۶}$	۲/۶۱۳ $\times ۱۰^{۱۹}$	۲/۶۱۳ $\times ۱۰^{۱۳}$	۴/۶۶۰ $\times ۱۰^{-۱۷}$	۲/۸۰۶ $\times ۱۰^{۱۰}$
۱ کیلو وات - ساعت	=	۳۴۳۱	۳/۶۰۰ $\times ۱۰^{۱۳}$	۲/۶۵۵ $\times ۱۰^{۶}$	۱/۳۴۱	۳/۶۰۰ $\times ۱۰^{۶}$	۸/۶۰۰ $\times ۱۰^{۵}$	۱	۲/۲۴۷ $\times ۱۰^{۲۵}$	۲/۲۴۷ $\times ۱۰^{۱۹}$	۴/۰۰۷ $\times ۱۰^{-۱۱}$	۲/۴۱۳ $\times ۱۰^{۱۶}$
۱ الکترون ولت	=	۱/۵۱۹ $\times ۱۰^{-۲۲}$	۱/۶۰۲ $\times ۱۰^{-۱۲}$	۱/۱۸۲ $\times ۱۰^{-۱۹}$	۵/۹۶۷ $\times ۱۰^{-۲۰}$	۱/۶۰۲ $\times ۱۰^{-۱۹}$	۳/۸۲۷ $\times ۱۰^{-۲۰}$	۴/۴۵۰ $\times ۱۰^{-۲۶}$	۱	$۱۰^{-۶}$	۱/۷۸۳ $\times ۱۰^{-۳۶}$	۱/۰۷۴ $\times ۱۰^{-۹}$
۱ میلیون الکترون ولت	=	۱/۵۱۹ $\times ۱۰^{-۱۶}$	۱/۶۰۲ $\times ۱۰^{-۶}$	۱/۱۸۲ $\times ۱۰^{-۱۳}$	۵/۹۶۷ $\times ۱۰^{-۲۰}$	۱/۶۰۲ $\times ۱۰^{-۱۳}$	۳/۸۲۷ $\times ۱۰^{-۱۴}$	۴/۴۵۰ $\times ۱۰^{-۲۰}$	$۱۰^{-۶}$	۱	۱/۷۸۳ $\times ۱۰^{-۳۰}$	۱/۰۷۴ $\times ۱۰^{-۳}$
۱ کیلوگرم	=	۸/۵۲۱ $\times ۱۰^{۱۳}$	۸/۹۸۷ $\times ۱۰^{۲۳}$	۶/۶۲۹ $\times ۱۰^{۱۶}$	۳/۳۴۸ $\times ۱۰^{۱۰}$	۸/۹۸۷ $\times ۱۰^{۱۶}$	۲/۱۴۶ $\times ۱۰^{۱۶}$	۲/۴۹۷ $\times ۱۰^{۱۰}$	۵/۶۱۰ $\times ۱۰^{۳۵}$	۵/۶۱۰ $\times ۱۰^{۲۹}$	۱	۶/۰۰۲ $\times ۱۰^{۲۶}$
۱ یکای اتمی یکی شده	=	۱/۴۱۵ $\times ۱۰^{-۱۳}$	۱/۴۹۲ $\times ۱۰^{-۳}$	۱/۱۰۱ $\times ۱۰^{-۱۰}$	۵/۵۵۹ $\times ۱۰^{-۱۷}$	۱/۴۹۲ $\times ۱۰^{-۱۰}$	۳/۵۶۴ $\times ۱۰^{-۱۱}$	۴/۱۴۶ $\times ۱۰^{-۱۷}$	۹/۳۲۰ $\times ۱۰^{۸}$	۹۳۲/۰	۱/۶۶۱ $\times ۱۰^{-۲۷}$	۱

پیوست ث — فرمولهای ریاضی

هندسه

در دایره به شعاع r: پیرامون $= 2\pi r$؛ مساحت $= \pi r^2$

در کره به شعاع r: مساحت $= 4\pi r^2$ ؛ حجم $= (4/3)\pi r^3$؛ در استوانه قائمی به شعاع r و ارتفاع h:

مساحت $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$؛ حجم $= \pi r^2 h$

در مثلثی به قاعدهٔ a و ارتفاع h: مساحت $= (1/2)ah$

فرمول معادلهٔ درجهٔ دو

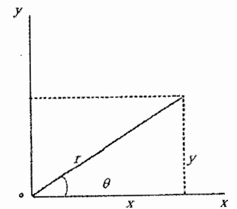
اگر $ax^2+bx+c=0$ ، آنگاه $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

تابعهای مثلثاتی زاویهٔ θ

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r}$$

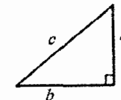
$$\tan\theta=\frac{y}{x},\ \cot\theta=\frac{x}{y}$$

$$\sec\theta=\frac{r}{x},\ \csc\theta=\frac{r}{x}$$



قضیهٔ فیثاغورس

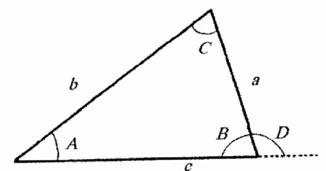
در مثلث قائم الزاویه



$$a^2+b^2=c^2$$

مثلثها

A، B و C زاویه و a، b و c ضلعهای مقابل به آنها هستند.



$$A+B+C=180^\circ$$

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

$D=A+C$ (زاویهٔ خارجی)

علامتها و نمادهای ریاضی

$=$ مساوی است

$\approx$ تقریباً مساوی است

$\sim$ مرتبهٔ بزرگی

$\neq$ مساوی نیست با

$\equiv$ متحد است با، تعریف می‌شود به صورت

$>$ بزرگتر است از ($\gg$ خیلی بزرگتر است از)

$<$ کوچکتر است از ($\ll$ خیلی کوچکتر است از)

$\geq$ بزرگتر است از یا مساوی است با

$\leq$ کوچکتر است از یا مساوی است با

$\pm$ به اضافه یا منها

$\propto$ متناسب است با

Σ مجموع

$\bar{x}$ مقدار میانگین x

اتحادهای مثلثاتی

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$$

$$\sin\theta/\cos\theta=\tan\theta$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$$

$$\csc^2\theta-\cot^2\theta=1$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{1}{2}(\alpha\pm\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha\mp\beta)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

قضیهٔ دوجمله‌ای

$$(1+x)^n=1+\frac{nx}{1!}+\frac{n(n-1)x^2}{2!}+\ldots \qquad (x^2<1)$$

بسط نمایی

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

بسط لگاریتمی

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots \qquad (|x|<1)$$

بسطهای مثلثاتی (θ برحسب رادیان)

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\ldots$$

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\ldots$$

$$\tan\theta=\theta+\frac{\theta^3}{3}+\frac{2\theta^5}{15}+\ldots$$

قاعدهٔ کرامر

جواب دو معادله با مجهولهای x و y

$a_1x+b_1y=c_1$ و $a_2x+b_2y=c_2$

به این صورت است

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

و

$$y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

ضرب بردارها

i و **j** و **k** را بردارهای یکه در راستای x، y و z در نظر بگیرید. داریم

$$\mathbf{i}.\mathbf{i}=\mathbf{j}.\mathbf{j}=\mathbf{k}.\mathbf{k}=1 \text{ و } \mathbf{i}.\mathbf{j}=\mathbf{j}.\mathbf{k}=\mathbf{k}.\mathbf{i}=0$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k} \text{ و } \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i} \text{ و } \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$$

برداری مانند **a** با مؤلفه‌های a_x، a_y و a_z در راستای محور x، y و z را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{a}=a_x\,\mathbf{i}+a_y\,\mathbf{j}+a_z\,\mathbf{k}$$

a، **b** و **c** را بردارهای اختیاری به بزرگیهای a، b و c در نظر بگیرید، داریم

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$$

$$(s\,\mathbf{a})\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times(s\,\mathbf{b})=s(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \quad (s=\text{نرده‌ای})$$

اگر θ کوچکترین زاویهٔ بین **a** و **b** باشد، داریم

$$\mathbf{a}.\mathbf{b}=\mathbf{b}.\mathbf{a}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=ab\cos\theta$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ a_x & a_z\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}$$

$$=(a_yb_z-b_ya_z)\mathrm{i}+(a_zb_x-b_za_x)\mathbf{j}+(a_xb_y-b_xa_y)\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=ab\sin\theta$$

$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}.(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}$$

مشتقها و انتگرالها

در رابطه‌های زیر، u و v تابعهایی از x هستند و a و m ثابت‌اند. برای هر یک از انتگرالهای نامعین باید یک ثابت اختیاری انتگرالگیری افزوده شود.

Handbook of Chemistry and Physics (CRC Press Inc)
جدولهای خیلی گسترده‌ای را ارائه می‌دهد.

۱- $\frac{dx}{dx}=1$

۲- $\frac{d}{dx}(au)=a\frac{du}{dx}$

۳- $\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$

۴- $\frac{d}{dx}x^m=mx^{m-1}$

۵- $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$

۶- $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$

۷- $\frac{d}{dx}e^x=e^x$

۸- $\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$

۹- $\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$

۱۰- $\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$

۱۱- $\frac{d}{dx}\cot x=-\csc^2 x$

۱۲- $\frac{d}{dx}\sec x=\tan x\sec x$

۱۳- $\frac{d}{dx}\csc x=-\cot x\csc x$

۱۴- $\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}$

۱۵- $\frac{d}{dx}\sin u=\cos u\frac{du}{dx}$

۱۶- $\frac{d}{dx}\cos u=-\sin u\frac{du}{dx}$

۱- $\int dx=x$

۲- $\int au\,dx=a\int u\,dx$

۳- $\int(u+v)\,dx=\int u\,dx+\int v\,dx$

۴- $\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}(m\neq-1)$

۵- $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|$

۶- $\int u\frac{dv}{d}dx=uv-\int v\frac{du}{x}dx$

۷- $\int e^x dx=e^x$

۸- $\int\sin x\,dx=-\cos x$

۹- $\int\cos x\,dx=\sin x$

۱۰- $\int\tan x\,dx=\ln|\sec x|$

۱۱- $\int\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$

۱۲- $\int e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}e^{-ax}$

۱۳- $\int xe^{-ax}dx=-\frac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$

۱۴- $\int x^2e^{-ax}dx=-\frac{1}{a^3}(a^2x^2+2ax+2)e^{-ax}$

۱۵- $\int_0^\infty x^ne^{-ax}dx=\frac{n!}{a^n+1}$

۱۶- $\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx=\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

۱۷- $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

۱۸- $\int \frac{x\,dx}{(x^{2}+a^{2})^{3/2}} = -\frac{1}{(x^{2}+a^{2})^{1/2}}$

۱۹- $\int \frac{dx}{(x^{2}+a^{2})^{3/2}} = \frac{x}{a^{2}(x^{2}+a^{2})^{1/2}}$

۲۰- $\int_{0}^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^{2}}\,dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad (a > 0)$

۲۱- $\int \frac{x\,dx}{x+d} = x - d\ln(x+d)$

پیوست ج | خواص عنصرها

همهٔ خواص فیزیکی در فشار ۱atm هستند در غیر این صورت مشخص شده‌اند.

عنصر	نماد	عدد اتمی Z	جرم مولی g/mol	چگالی g/cm^{۳} در ۲۰°C	نقطهٔ ذوب °C	نقطهٔ جوش °C	گرمای ویژه J/(g.°C) در ۲۵°C
آکتینیم	Ac	۸۹	(۲۲۷)	۱۰/۰۶	۱۳۲۳	(۳۴۷۳)	۰/۰۹۲
آلومینیوم	Al	۱۳	۲۶/۹۸۱۵	۲/۶۹۹	۶۶۰	۲۴۵۰	۰/۹۰۰
آمریسیم	Am	۹۵	(۲۴۳)	۱۳/۶۷	۱۵۴۱	–	–
انتیموان	Sb	۵۱	۱۲۱/۷۵	۶/۶۹۱	۶۳۰/۵	۱۳۸۰	۰/۲۰۵
آرگون	Ar	۱۸	۳۹/۹۴۸	۱/۶۶۲۶×۱۰$^{-۳}$	−۱۸۹/۴	−۱۸۵/۸	۰/۵۲۳
ارسنیک	As	۳۳	۷۴/۹۲۱۶	۵/۷۸	۸۱۷(۲۸atm)	۶۱۳	۰/۳۳۱
استاتین	At	۸۵	(۲۱۰)	–	(۳۰۲)	–	–
باریم	Ba	۵۶	۱۳۷/۳۴	۳/۵۹۴	۷۲۹	۱۶۴۰	۰/۲۰۵
برکلیم	Bk	۹۷	(۲۴۷)	۱۴/۷۹	–	–	–
بریلیم	Be	۴	۹/۰۱۲۲	۱/۸۴۸	۱۲۸۷	۲۷۷۰	۱/۸۳
بیسموت	Bi	۸۳	۲۰۸/۹۸۰	۹/۷۴۷	۲۷۱/۳۷	۱۵۶۰	۰/۱۲۲
بور	B	۵	۱۰/۸۱۱	۲/۳۴	۲۰۳۰	–	۱/۱۱
برم	Br	۳۵	۷۹/۹۰۹	۳/۱۲ (مایع)	−۷/۲	۵۸	۰/۲۹۳
کادمیم	Cd	۴۸	۱۱۲/۴۰	۸/۶۵	۳۲۱/۰۳	۷۶۵	۰/۲۲۶
کلسیم	Ca	۲۰	۴۰/۰۸	۱/۵۵	۸۳۸	۱۴۴۰	۰/۶۲۴
کالیفرنیم	Cf	۹۸	(۲۵۱)	–	–	–	–
کربن	C	۶	۱۲/۰۱۱۱۵	۲/۲۶	۳۷۲۷	۴۸۳۰	۰/۶۹۱
سریم	Ce	۵۸	۱۴۰/۱۲	۶/۷۶۸	۸۰۴	۳۴۷۰	۰/۱۸۸
سزیم	Cs	۵۵	۱۳۲/۹۰۵	۱/۸۷۳	۲۸/۴۰	۶۹۰	۰/۲۴۳
کلر	Cl	۱۷	۳۵/۴۵۳	۳/۲۱۴×۱۰$^{-۳}$	−۱۰۱	−۳۴/۷	۰/۴۸۶
کرم	Cr	۲۴	۵۱/۹۹۶	۷/۱۹	۱۸۵۷	۲۶۶۵	۰/۴۴۸
کبالت	Co	۲۷	۵۸/۹۳۳۲	۸/۸۵	۱۴۹۵	۲۹۰۰	۰/۴۲۳
مس	Cu	۲۹	۶۳/۵۴	۸/۹۶	۱۰۸۳/۴۰	۲۵۹۵	۰/۳۸۵
کوریم	Cm	۹۶	(۲۴۷)	۱۳/۳	–	–	–
دیسپروزیم	Dy	۶۶	۱۶۲/۵۰	۸/۵۵	۱۴۰۹	۲۳۳۰	۰/۱۷۲
اینشتینیم	Es	۹۹	(۲۵۴)	–	–	–	–
اربیم	Er	۶۸	۱۶۷/۲۶	۹/۱۵	۱۵۲۲	۲۶۳۰	۰/۱۶۷
اروپیم	Eu	۶۳	۱۵۱/۹۶	۵/۲۴۳	۸۱۷	۱۴۹۰	۰/۱۶۳

فرمیم	Fm	۱۰۰	(۲۷۳)	–	–	–	–
فلوئور	F	۹	۱۸/۹۹۸۴	۱/۶۹۶×۱۰$^{-۳}$ (۰°C)	-۲۱۹/۶	-۱۸۸/۲	۰/۷۵۳
فرانسیم	Fr	۸۷	(۲۲۳)	–	(۲۷)	–	–
گادولینیم	Gd	۶۴	۱۵۷/۲۵	۷/۹۰	۱۳۱۲	۲۷۳۰	۰/۲۳۴
گالیم	Ga	۳۱	۶۹/۷۲	۵/۹۰۷	۲۹/۷۵	۲۲۳۷	۰/۳۷۷
ژرمانیم	Ge	۳۲	۷۲/۵۹	۵/۳۲۳	۹۳۷/۲۵	۲۸۳۰	۰/۳۲۲
طلا	Au	۷۹	۱۹۶/۹۶۷	۱۹/۳۲	۱۰۶۴/۴۳	۲۹۷۰	۰/۱۳۱
هافنیم	Hf	۷۲	۱۷۸/۴۹	۱۳/۳۱	۲۲۲۷	۵۴۰۰	۰/۱۴۴
هاهنیم	Ha	۱۰۵	–	–	–	–	–
هاسیوم	Hs	۱۰۸	–	–	–	–	–
هلیوم	He	۲	۴/۰۰۲۶	۰/۱۶۶۴×۱۰$^{-۳}$	-۲۶۹/۷	-۲۶۸/۹	۵/۲۳
هولمیم	Ho	۶۷	۱۶۴/۹۳۰	۸/۷۹	۱۴۷۰	۲۳۳۰	۰/۱۶۵
هیدروژن	H	۱	۱/۰۰۷۹۷	۰/۰۸۳۷۵×۱۰$^{-۳}$	-۲۵۹/۱۹	-۲۵۲/۷	۱۴/۴
ایندیم	In	۴۹	۱۱۴/۸۲	۷/۳۱	۱۵۶/۶۳۴	۲۰۰۰	۰/۲۳۳
ید	I	۵۳	۱۲۶/۹۰۴۴	۴/۹۳	۱۱۳/۷	۱۸۳	۰/۲۱۸
ایریدیم	Ir	۷۷	۱۹۲/۲	۲۲/۵	۲۴۴۷	(۵۳۰۰)	۰/۱۳۰
آهن	Fe	۲۶	۵۵/۸۴۷	۷/۸۷۴	۱۵۳۶/۵	۳۰۰۰	۰/۴۴۷
کریپتون	Kr	۳۶	۸۳/۸۰	۳/۴۸۸×۱۰$^{-۳}$	-۱۵۷/۳۷	-۱۵۲	۰/۲۴۷
لانتان	La	۵۷	۱۳۸/۹۱	۶/۱۸۹	۹۲۰	۳۴۷۰	۰/۱۹۵
لورنسیم	Lr	۱۰۳	(۲۵۷)		–	–	
سرب	Pb	۸۲	۲۰۷/۱۹	۱۱/۳۵	۳۲۷/۴۵	۱۷۲۵	۰/۱۲۹
لیتیم	Li	۳	۶/۹۳۹	۰/۵۳۴	۱۸۰/۵۵	۱۳۰۰	۳/۵۸
لوتسیم	Lu	۷۱	۱۷۴/۹۷	۹/۸۴۹	۱۶۶۳	۱۹۳۰	۰/۱۵۵
منیزیم	Mg	۱۲	۲۴/۳۱۲	۱/۷۳۸	۶۵۰	۱۱۰۷	۱/۰۳
منگنز	Mn	۲۵	۵۴/۹۳۸۰	۷/۴۴	۱۲۴۴	۲۱۵۰	۰/۴۸۱
میتنریم	Mt	۱۰۹	–	–	–	–	–
مندلویم	Md	۱۰۱	(۲۵۶)	–	–	–	–
جیوه	Hg	۸۰	۲۰۰/۵۹	۱۳/۵۵	-۳۸/۸۷	۳۵۷	۰/۱۳۸
مولیبدن	Mo	۴۲	۹۵/۹۴	۱۰/۲۲	۲۶۱۷	۵۵۶۰	۲۵۱
نئودیمیم	Nd	۶۰	۱۴۴/۲۴	۷/۰۰۷	۱۰۱۶	۳۱۸۰	۰/۱۸۸
نئون	Ne	۱۰	۲۰/۱۸۳	۰/۸۳۸۷×۱۰$^{-۳}$	-۲۴۸/۵۹۷	-۲۴۶/۰	۱/۰۳
نپتونیم	Np	۹۳	(۲۳۷)	۲۰/۲۵	۶۳۷	–	۱/۲۶
نیکل	Ni	۲۸	۵۸/۷۱	۸/۹۰۲	۱۴۵۳	۲۷۳۰	۰/۴۴۴
نیلزبوریم	Ns	۱۰۷	–	–	–	–	–
نیوبیم	Nb	۴۱	۹۲/۹۰۶	۸/۵۷	۲۴۶۸	۴۹۲۷	۰/۲۶۴

نیتروژن (ازت)	N	۷	۱۴/۰۰۶۷	$۱/۱۶۴۹\times۱۰^{-۳}$	−۲۱۰	−۱۹۵/۸	۱/۰۳
نوبلیم	No	۱۰۲	(۲۵۵)	–	–	–	–
اسمیم	Os	۷۶	۱۹۰/۲	۲۲/۵۹	۳۰۲۷	۵۵۰۰	۰/۱۳۰
اکسیژن	O	۸	۱۵/۹۹۹۴	$۱/۳۳۱۸\times۱۰^{-۳}$	−۲۱۸/۸۰	−۱۸۳/۰	۰/۹۱۳
پالادیم	Pb	۴۶	۱۰۶/۴	۱۲/۰۲	۱۵۵۲	۳۹۸۰	۰/۲۴۳
فسفر	P	۱۵	۳۰/۹۷۳۸	۱/۸۳	۴۴/۲۵	۲۸۰	۰/۷۴۱
پلاتین	Pt	۷۸	۱۹۵/۰۹	۲۱/۴۵	۱۷۶۹	۴۵۳۰	۰/۱۳۴
پلوتونیم	Pu	۹۴	(۲۴۴)	۱۹/۸	۶۴۰	۳۲۳۵	۰/۱۳۰
پولونیم	Po	۸۴	(۲۱۰)	۹/۳۲	۲۵۴	–	–
پتاسیم	K	۱۹	۹۳/۱۰۲	۰/۸۶۲	۶۳/۲۰	۷۶۰	۰/۷۵۸
پرازئودیمیم	Pr	۵۹	۱۴۰/۹۰۷	۶/۷۷۳	۹۳۱	۳۰۲۰	۰/۱۹۷
پرومتیم	Pm	۶۱	(۱۴۵)	۷/۲۲	(۱۰۲۷)	–	–
پروتاکتینیم	Pa	۹۱	(۲۳۱)	۱۵/۳۷ (براورد)	۱۲۳۰	–	–
رادیم	Ra	۸۸	(۲۲۶)	۵/۰	۷۰۰	–	–
رادون	Rn	۸۶	(۲۲۲)	$۹/۹۶\times۱۰^{-۳}$	(−۷۱)	−۶۱/۸	۰/۰۹۲
رنیم	Re	۷۵	۱۸۶/۲	۲۱/۰۲	۳۱۸۰	۵۹۰۰	۰/۱۳۴
رودیم	Rh	۴۵	۱۰۲/۹۰۵	۱۲/۴۱	۱۹۶۳	۴۵۰۰	۰/۲۴۳
روبیدیم	Rb	۳۷	۸۵/۴۷	۱/۵۳۲	۳۹/۴۹	۶۸۸	۰/۳۶۴
روتنیم	Ru	۴۴	۱۰۱/۱۰۷	۱۲/۳۷	۲۲۵۰	۴۹۰۰	۰/۲۳۹
راترفوردیم	Rf	۱۰۴	–	–	–	–	–
ساماریم	Sm	۶۲	۱۵/۰۳۵	۷/۵۲	۱۰۷۲	۱۶۳۰	۰/۱۹۷
اسکاندیم	Sc	۲۱	۴۴/۹۵۶	۲/۹۹	۱۵۳۹	۲۷۳۰	۰/۵۶۹
سیبورکیم	Sg	۱۰۶	–	–	–	–	–
سلنیم	Se	۳۴	۷۸/۹۶	۴/۷۹	۲۲۱	۶۸۵	۰/۳۱۸
سیلیسیم	Si	۱۴	۲۸/۰۸۶	۲/۳۳	۱۴۱۲	۲۶۸۰	۰/۷۱۲
نقره	Ag	۴۷	۱۰۷/۸۷۰	۱۰/۴۹	۹۶۰/۸	۲۲۱۰	۰/۲۳۴
سدیم	Na	۱۱	۲۲/۹۸۹۸	۰/۹۷۱۲	۹۷/۸۵	۸۹۲	۱/۲۳
استرونسیم	Sr	۳۸	۸۷/۶۲	۲/۵۴	۷۶۸	۱۳۸۰	۰/۷۳۷
گوگرد	S	۱۶	۳۲/۰۶۴	۲/۰۷	۱۱۹/۰	۴۴۴/۶	۰/۷۰۷
تانتال	Ta	۷۳	۱۸۰/۹۴۸	۱۶/۶	۳۰۱۴	۵۴۲۵	۰/۱۳۸
تکنسیم	Tc	۴۳	(۹۹)	۱۱/۴۶	۲۲۰۰	–	۰/۲۰۹
تلور یا تلوریم	Te	۵۲	۱۲۷/۶۰	۶/۲۴	۴۴۹/۵	۹۹۰	۰/۲۰۱
تربیم	Tb	۶۵	۱۵۸/۹۲۴	۸/۲۲۹	۱۳۵۷	۲۵۳۰	۰/۱۸۰
تالیم	Ti	۸۱	۲۰۴/۳۷	۱۱/۸۵	۳۰۴	۱۴۵۷	۰/۱۳۰
توریم	Th	۹۰	(۲۳۲)	۱۱/۷۲	۱۷۵۵	(۳۸۵۰)	۰/۱۱۷

قلع	Sn	۵۰	۱۱۸/۶۹	۷/۲۹۸۴	۲۳۱/۸۶۸	۲۲۷۰	۰/۲۲۶
تیتان یا تیتانیم	Ti	۲۲	۴۷/۹۰	۴/۵۴	۱۶۷۰	۳۲۶۰	۰/۵۲۳
تنگستن	W	۷۴	۱۸۳/۸۵	۱۹/۳	۳۳۸۰	۵۹۳۰	۰/۱۳۴
اورانیوم	U	۹۲	(۲۳۸)	۱۸/۹۵	۱۱/۳۲	۳۸۱۸	۰/۱۱۷
وانادیم	V	۲۳	۵۰/۹۴۲	۶/۱۱	۱۹۰۲	۳۴۰۰	۰/۴۹۰
گزنون	Xe	۵۴	۱۳۱/۳۰	$۵/۴۹۵\times ۱۰^{-۳}$	۱۱۱/۷۹-	۱۰۸-	۰/۱۵۹
ایتربیم	Yb	۷۰	۱۷۳/۰۴	۶/۹۶۵	۸۲۴	۱۵۳۰	۰/۱۵۵
ایتریم	Y	۳۹	۸۸/۹۰۵	۴/۴۶۹	۱۵۲۶	۳۰۳۰	۰/۲۹۷
روی	Zn	۳۰	۶۵/۳۷	۷/۱۳۳	۴۱۹/۵۸	۹۰۶	۰/۳۸۹
زیرکونیم	Zr	۴۰	۹۱/۲۲	۶/۵۰۶	۱۸۵۲	۳۵۸۰	۰/۲۷۶

اندازه‌های درون پرانتزها در ستون جرمهای مولی، عددهای جرمی ایزوتوپهای با عمر طولانی عنصرهایی‌اند که پرتوزا هستند.

نقطه‌های ذوب و نقطه‌های جوش در پرانتزها قطعیتی ندارند.

داده‌های گازها فقط هنگامی که اینها در حالت مولکولی معمولی مانند H_2 ، He ، O_2 و Ne و غیره هستند معتبر است.

گرماهای ویژهٔ گاز مقدارهای در فشار ثابت‌اند.

منبع: برگرفته از J. Emsley, The Elements, 3rd ed., 1998, Clarendon Press, Oxford. همچنین برای دیدن آخرین مقدارها و جدیدترین عنصرها به www.webelements.com مراجعه کنید.

پیوست چ — جدول تناوبی عنصرها

فلزها | شبه فلزها | نافلزها

فلزهای قلیایی — گازهای نادر — فلزهای واسطه — تناوبهای افقی

تناوب	IA	IIA	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIIIB	VIIIB	VIIIB	IB	IIB	IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	0
۱	۱ H																	۲ He
۲	۳ Li	۴ Be											۵ B	۶ C	۷ N	۸ O	۹ F	۱۰ Ne
۳	۱۱ Na	۱۲ Mg											۱۳ Al	۱۴ Si	۱۵ P	۱۶ S	۱۷ Cl	۱۸ Ar
۴	۱۹ K	۲۰ Ca	۲۱ Sc	۲۲ Ti	۲۳ V	۲۴ Cr	۲۵ Mn	۲۶ Fe	۲۷ Co	۲۸ Ni	۲۹ Cu	۳۰ Zn	۳۱ Ga	۳۲ Ge	۳۳ As	۳۴ Se	۳۵ Br	۳۶ Kr
۵	۳۷ Rb	۳۸ Sr	۳۹ Y	۴۰ Zr	۴۱ Nb	۴۲ Mo	۴۳ Tc	۴۴ Ru	۴۵ Rh	۴۶ Pd	۴۷ Ag	۴۸ Cd	۴۹ In	۵۰ Sn	۵۱ Sb	۵۲ Te	۵۳ I	۵۴ Xe
۶	۵۵ Cs	۵۶ Ba	۵۷-۷۱ *	۷۲ Hf	۷۳ Ta	۷۴ W	۷۵ Re	۷۶ Os	۷۷ Ir	۷۸ Pt	۷۹ Au	۸۰ Hg	۸۱ Tl	۸۲ Pb	۸۳ Bi	۸۴ Po	۸۵ At	۸۶ Rn
۷	۸۷ Fr	۸۸ Ra	۸۹-۱۰۳ †	۱۰۴ Rf	۱۰۵ Db	۱۰۶ Sg	۱۰۷ Bh	۱۰۸ Hs	۱۰۹ Mt	۱۱۰ Ds	۱۱۱	۱۱۲	۱۱۳	۱۱۴	۱۱۵	۱۱۶	۱۱۷	۱۱۸

فلزهای واسطه داخلی

* رشتهٔ لانتانیدها	۵۷ La	۵۸ Ce	۵۹ Pr	۶۰ Nd	۶۱ Pm	۶۲ Sm	۶۳ Eu	۶۴ Gd	۶۵ Tb	۶۶ Dy	۶۷ Ho	۶۸ Er	۶۹ Tm	۷۰ Yb	۷۱ Lu
† رشتهٔ آکتینیدها	۸۹ Ac	۹۰ Th	۹۱ Pa	۹۲ U	۹۳ Np	۹۴ Pu	۹۵ Am	۹۶ Cm	۹۷ Bk	۹۸ Cf	۹۹ Es	۱۰۰ Fm	۱۰۱ Md	۱۰۲ No	۱۰۳ Lr

عنصرهای ۱۱۱ ، ۱۱۲ ، ۱۱۴ و ۱۱۶ کشف شده‌اند ولی تا سال ۲۰۰۳ هنوز نامگذاری نشده‌اند. شواهد کشف عنصرهای ۱۱۳ و ۱۱۵ گزارش شده‌اند. برای آخرین اطلاعات و جدیدترین عنصرها به www.webelements.com مراجعه کنید.

پیوست ح — برندگان جایزه نوبل در فیزیک

۱۹۰۱ ویلهم کونراد رونتگن
Wilhelm Konrad Röntgen (۱۹۲۳-۱۸۴۵) برای کشف پرتوهای X.

۱۹۰۲ هنریک آنتون لورنس
Hendrik Antoon Lorentz (۱۹۲۸-۱۸۵۳) و پیتر زیمان
Pieter Zeeman (۱۹۴۳-۱۸۶۵) به خاطر پژوهشهایشان در مورد اثر مغناطیس بر پدیده‌های تابشی.

۱۹۰۳ آنتونی هنری بکرل
Antoine Henri Becquerel (۱۹۰۸-۱۸۵۲) به خاطر کشف پرتوزایی خود به خودی.
پیرکوری
Pierre Curie (۱۹۰۶-۱۸۵۹) و ماری اسکلوسکاکوری
Marie Sklowdowska-Curie (۱۹۳۴-۱۸۶۷) به خاطر پژوهشهای مشترک خود در پدیده‌های تابشی که به وسیلهٔ بکرل کشف شده بود.

۱۹۰۴ لرد ریلی (جان ویلیام استوارت)
(John William Strutt) Loard Rayleigh (۱۹۱۹-۱۸۴۲) به خاطر بررسیهایش در مورد چگالی گازهای خیلی مهم و به خاطر کشف آرگون.

۱۹۰۵ فیلیپ ادوارد آنتون فون لنارد
Philipp Eduard Anton von Lenard (۱۹۴۷-۱۸۶۲) به خاطر کار در زمینهٔ پرتوهای کاتدی.

۱۹۰۶ جوزف جان تامسون
Joseph John Thomson (۱۹۴۰-۱۸۵۶) به خاطر بررسیهای نظری و تجربی در مورد رسانایی الکتریکی گازها.

۱۹۰۷ آلبرت ابراهام مایکلسون
Albert Abraham Michelson (۱۹۳۱-۱۸۵۲) به خاطر ابزارهای دقیق نوری و بررسیهای اندازهٔ شناختی انجام شده به کمک آنها.

۱۹۰۸ گابریل لیپمان
Gabriel Lippmann (۱۹۲۱-۱۸۴۵) به خاطر روش باز تولید رنگها از طریق عکاسی بر پایهٔ پدیده‌های تداخل.

۱۹۰۹ گوگلیلمو مارکونی
Guglielmo Marconi (۱۹۳۷-۱۸۴۷) و کارل فردیناند براون
Carl Ferdinand Braun (۱۹۱۸-۱۸۵۰) به خاطر کوششهایشان در گسترش تلگراف بدون سیم.

۱۹۱۰ یوهان دیدریک واندروالس
Johannes Diderik van der Waals (۱۹۳۲-۱۸۳۷) به خاطر کار روی معادلهٔ حرکت گازها و مایعات.

۱۹۱۱ ویلهم وین
Wilhelm Wien (۱۹۲۸-۱۸۶۴) به خاطر کشفهایش دربارهٔ قانونهای حاکم بر تابش گرمایی.

۱۹۱۲ نیلز گوستاف دالن
Nils Gustaf Dalen (۱۹۳۷-۱۸۶۹) به خاطر اختراع تنظیم کننده‌های خودکار برای استفاده از انباره‌های گازی برای روشن ساختن فانوسهای دریایی و شناورها.

۱۹۱۳ هایک کامرلینگ اونس
Heike Kamerling Onnes (۱۹۲۶-۱۸۵۳) به‌خاطر بررسیهایی دربارهٔ خواص مواد در دماهای پایین که افزون بر نتایج دیگر به تولید هلیوم مایع انجامید.

۱۹۱۴ ماکس فون لاوه
Max von Laue (۱۹۶۰-۱۸۷۹) به خاطر کشف پراش پرتوهای رونتگن به وسیلهٔ بلورها.

۱۹۱۵ ویلیام هنری براگ
William Henry Bragg (۱۹۴۲-۱۸۶۲) و ویلیام لورنس براگ William Lawrence Bragg (۱۹۷۱-۱۸۹۰) به خاطر خدماتشان در تحلیل ساختار بلوری به وسیلهٔ پرتوهای رونتگن.

۱۹۱۷ چارلز گلاور بارکلا
Charles Glover Barkla (۱۹۴۴-۱۸۷۷) به خاطر کشف پرتوهای x مشخصهٔ عنصرها.

۱۹۱۸ ماکس پلانک
Max Planck (۱۹۴۷-۱۸۵۸) به خاطر کشف کوانتوم انرژی.

۱۹۱۹ یوهانس اشتارک
Johannes Stark (۱۹۵۷-۱۸۷۴) به خاطر کشف پدیدهٔ دوپلر در پرتوهای کانالی و تجزیهٔ خطهای طیفی در میدانهای الکتریکی.

۱۹۲۰ شارل ادوارد گییوم
Charles-Edouard Guillaume (۱۹۳۸-۱۸۶۱) به خاطر خدمتی که با کشف ناهنجاریهای موجود در آلیاژهای فولاد نیکل به اندازه‌گیریهای دقیق در فیزیک کرده است.

۱۹۲۱ آلبرت اینشتین
Albert Einstein (۱۹۵۵-۱۸۷۹) به خاطر خدماتش به فیزیک نظری و به ویژه به‌خاطر کشف‌قانون اثر فوتوالکتریک

۱۹۲۲ نیلس بور

Niels Bohr (۱۹۶۲-۱۸۸۵) به خاطر بررسی ساختار اتمها و تابشی که از آنها سرچشمه می‌گیرد.

۱۹۲۳ رابرت اندروز میلیکان
Robert Andrews Millikan (۱۹۵۳-۱۸۶۸) به خاطر کار در زمینهٔ بار بنیادی الکتریسیته و اثر فوتوالکتریک.

۱۹۲۴ کارل مان گئورگ زیگبان
Karl Manne George Siegbahn (۱۹۷۹-۱۸۸۸) به خاطر کشف و پژوهش در زمینه طیف‌نمایی پرتو x .

۱۹۲۵ جیمز فرانک
James Franck (۱۹۶۴-۱۸۸۲) و گوستاو هرتز Gustav Hertz (۱۹۷۵-۱۸۸۷) به خاطر کشف قانونهای حاکم بر برخورد الکترون با اتم

۱۹۲۶ ژان باپتیست پرن
Jean Baptiste Perrin (۱۹۴۲-۱۸۷۰) به خاطر کار روی ساختار ناپیوستهٔ ماده و به ویژه به خاطر کشف تعادل ته‌نشینی.

۱۹۲۷ آرتور هالی کامپتون
Arthur Holly Compton (۱۹۶۲-۱۸۹۲) به خاطر کشف پدیدهٔ کامپتون. چارلز تامسن ریزویلسون
Charles Thomson Rees Wilson (۱۹۵۹-۱۸۷۹) به خاطر ابداع مرئی کردن مسیر ذره‌های باردار توسط چگالش بخار.

۱۹۲۸ اوئن ویلانز ریچاردسون
Owen Willans Richardson (۱۹۵۹-۱۸۷۹) به خاطر کار روی پدیدهٔ گرما یونی و به ویژه به خاطر کشف قانونی که به نام او نامیده شد.

۱۹۲۹ پرنس لویی ویکتور دوبروی
Prince Louis Victor de Braglie (۱۹۸۷-۱۸۹۲) به خاطر کشف طبیعت موجی الکترونها.

۱۹۳۰ چاندرا سکارا ونکاتا رامان
Sir Chandra sekhara Venkata Raman (۱۹۷۰-۱۸۸۸) به خاطر کار روی پراکندگی نور و کشف اثری که به نام او نامیده شد.

۱۹۳۲ ورنر هایزنبرگ
Werner Heisenberg (۱۹۷۶-۱۹۰۱) به خاطر ابداع مکانیک کوانتومی که کاربرد آن افزون بر چیزهای دیگر به کشف شکلهای آلوتروپی هیدروژن انجامید.

۱۹۳۳ اروین شرودینگر
Erwin Schrödinger (۱۹۶۱-۱۸۸۷) و پل آدرین موریس دیراک Paul Adrien Maurice Dirac (۱۹۸۴-۱۹۰۲) به خاطر کشف شکلهای تازه و خلاق نظریهٔ اتمی.

۱۹۳۵ جیمز چادویک
James Chadwick (۱۹۷۴-۱۸۹۱) به خاطر کشف نوترون.

۱۹۳۶ ویکتور فرانتس هس
Victor Franz Hess (۱۹۶۴-۱۸۸۳) به خاطر کشف تابش کیهانی.

۱۹۳۷ کلینتون جوزف داویسون
Clinton Joseph Davisson (۱۹۵۸-۱۸۸۱) و جورج پاگت تامسون George Paget Thomson (۱۹۷۵-۱۸۹۲) به خاطر کشف تجربی پراش الکترونها به وسیلهٔ بلورها.

۱۹۳۸ انریکو فرمی
Enrico Fermi (۱۹۵۴-۱۹۰۱) به خاطر اثبات وجود عناصر پرتوزای جدیدی که به وسیلهٔ پرتوافکنی نوترونی تولید می‌شود و نیز به خاطر کشف واکنشهای هسته‌ای حاصل از نوترونهای کند.

۱۹۳۹ ارنست اورلاندو لورنس
Ernest Orlando Lawrence (۱۹۵۸-۱۹۰۱) به خاطر اختراع و تکمیل سیکلوترون و نتایج حاصل از آن، به ویژه تولید عنصرهای پرتوزای مصنوعی.

۱۹۴۳ اتو اشترن
Otto Stern (۱۹۶۹-۱۸۸۸) به خاطر سهم او در توسعهٔ روش پرتو مولکولی و کشف گشتاور مغناطیسی پروتون.

۱۹۴۴ ایزیدور ایزاک رابی
Isidor Isaac Rabi (۱۹۸۸-۱۸۹۸) به خاطر ابداع روش تشدید برای ثبت خواص مغناطیسی هسته‌های اتمی.

۱۹۴۵ ولفگانگ پائولی
Wolfgang Pauli (۱۹۵۸-۱۹۰۰) به خاطر کشف اصل طرد (که اصل پائولی نیز نامیده می‌شود).

۱۹۴۶ پرسی ویلیامز بریجمن
Percy Williams Bridgman (۱۹۶۱-۱۸۸۲) به خاطر اختراع وسیله‌ای برای تولید فشارهای خیلی زیاد و کشفهایی که از این طریق در زمینهٔ فیزیک فشار بالا داشته است.

۱۹۴۷ ادوارد ویکتور اپلتون
Sir Edward Victor Appleton (۱۹۶۵-۱۸۹۲) به خاطر پژوهشهایش در فیزیک جو بالا، به ویژه به خاطر کشف لایه‌ای به نام اپلتون.

۱۹۴۸ پاتریک ماینارد استوارت بلاکت
Patrich Maynard Stuart Blackett (۱۹۷۴-۱۸۹۷) به خاطر تکمیل روش اتاق ابر ویلسون و کشفهایی که در فیزیک هسته‌ای و تابش کیهانی داشته است.

۱۹۴۹ هیدکی یوکاوا
HidekiYukawa(۱۹۸۱-۱۹۰۷) به خاطر پیش‌بینی وجود مزونها در نیروهای هسته‌ای بر پایهٔ کار نظری.

۱۹۵۰ سسیل فرانک پاول
Cecil Frank Powell (۱۹۶۹-۱۹۰۳) به خاطر بسط روش عکاسی مطالعهٔ فرایندهای هسته‌ای و کشفهای انجام شده توسط او در مورد مزونها با این روش.

۱۹۵۱ جان داگلاس کوک کرافت
Sir John Douglas Cockroft (۱۹۶۷-۱۸۹۷) و ارنست توماس سینتون والتون Ernest Thomas Sinton Walton (-۱۹۰۳) به خاطر پیشگامی در بررسی استحالهٔ هسته‌های اتمی به وسیلهٔ ذره‌های اتمی که به طور مصنوعی شتاب گرفته‌اند.

۱۹۵۲ فلیکس بلوخ
Felix Bloch (۱۹۸۳-۱۹۰۵) و ادوارد میلز پورسل Edward Mills Purcell (-۱۹۱۲) به خاطر طرح روشهای نو برای آزمایشهای دقیق مغناطیس هسته‌ای و کشفهای مربوط به آن.

۱۹۵۳ فریتس زرنیکه
Frits Zernike (۱۹۶۶-۱۸۸۸) به خاطر ارائهٔ روش تباین فاز، به ویژه به خاطر اختراع میکروسکوپ تباین فاز.

۱۹۵۴ ماکس بورن
Max Born (۱۹۷۰-۱۸۸۲) به خاطر پژوهش بنیادی در مکانیک کوانتومی، به ویژه به خاطر تعبیر آماری او از تابع موج.
والتر بوته
Walther Bothe (۱۹۵۷-۱۸۹۱) به خاطر روش تطابق و کشفهایی که به وسیلهٔ آن حاصل شد.

۱۹۵۵ ویلیز اوژن لمب
Willis Eugene Lamb (-۱۹۱۳) به خاطر کشفهایی دربارهٔ ساختار ریز طیف هیدروژن
پولی کارپ کوش
Polykarp Kusch (۱۹۹۳-۱۹۱۱) به خاطر تعیین دقیق گشتاور مغناطیسی الکترون.

۱۹۵۶ ویلیام شاکلی
William Shockley (۱۹۸۹-۱۹۰۰)، جان باردین John Bardeen (۱۹۹۱-۱۹۰۸) و والتز هاوزر براتین Walter Houser Brattain (۱۹۸۷-۱۹۰۲) به خاطر پژوهشهایشان دربارهٔ نیمرساناها و کشف اثر ترانزیستور.

۱۹۵۷ چن نینگ یانگ
Chen Ning Yang (-۱۹۲۲) و تسونگ دائو لی Tsung Dao Lee (-۱۹۲۶) به خاطر پژوهش مؤثر آنها در مورد قانونهای پاریته که به کشفهای مهمی در فیزیک ذره‌های بنیادی انجامیده است.

۱۹۵۸ پاول الکسی یویچ چرنکوف
Pavel Aleksejevičv Čerenko (-۱۹۰۴) ایل یا میخائیلویچ فرانک Il ja Michajlovc Frank (۱۹۹۰-۱۹۰۸) و ایگور ایوانویچ تام Igor Evgenevič Tamm (۱۹۷۱-۱۸۹۵) به خاطر کشف و تعبیر اثر چرنکوف.

۱۹۵۹ امیلیو جینو سگره
Emilio Gino Segre (۱۹۸۹-۱۹۰۵) و اون چمبرلین Owen Chamberlain (-۱۹۲۰) به خاطر کشف پادپروتون.

۱۹۶۰ دونالد آرتور گلاسر
Donald Arthur Glaser (-۱۹۲۶) به خاطر اختراع اتاقک حباب.

۱۹۶۱ روبرت هوفشتاتر
Robert Hofstadter (۱۹۹۰-۱۹۱۵) به خاطر مطالعات پیشگامانه دربارهٔ پراکندگی الکترون در هسته‌های اتمی و کشفهایی که به آن وسیله در مورد ساختار نوکلوئونها به عمل آورد.
رودلف لودویگ موسبائر
Rudolf Ludwig Mössbauer (-۱۹۲۹) به خاطر پژوهشهایش دربارهٔ جذب تشدیدی پرتوهای γ و کشف اثری در این مورد که به نام اوست.

۱۹۶۲ لف داویدوویچ لاندائو
Lev Davidsovic Landau (۱۹۶۸-۱۹۰۸) به خاطر نظریه‌های پیشگامانه در مورد ماده چگال، به ویژه هلیوم مایع.

۱۹۶۳ اوژن پی. ویگنر
Eugene P. Wigner (۱۹۹۵-۱۹۰۲) به خاطر سهم او در نظریهٔ هستهٔ اتم و ذره‌های بنیادی، به ویژه کشف و کاربرد اصول اساسی تقارن.
ماریا جو پرت مایر
Maria Goeppert Mayer (۱۹۷۲-۱۹۰۶) و جی. هانس دی. جنسن J. Hans D. Jensen (۱۹۷۳-۱۹۰۷) به خاطر کشفهایشان دربارهٔ ساختار پوسته‌ای هسته.

۱۹۶۴ چارلز اچ. تاونز
Charkes H. Townes (-۱۹۱۵). نیکلای جی. باسوف Nikolai G. Basov (-۱۹۲۲) و الکساندر ام. پروخوروف Alexander M.Prochorov (-۱۹۱۶) به خاطر کارهای اساسی در زمینهٔ الکترونیک کوانتومی که به ساخت نوسانگرها و تقویت کننده‌ها بر اساس میزر-لیزر انجامید.

۱۹۶۵ سن – ایتیرو تومو ناگا
Sin - itiro Tomonoga (۱۹۷۹-۱۹۰۶) جولیان شوینگر Julian Schwinger (۱۹۹۴-۱۹۱۸) و ریچارد فاینمن

Richard P. Feynman (۱۹۱۸-۱۹۸۸) به خاطر کارهای بنیادیشان در الکترودینامیک کوانتومی که پیامدهای مهمی برای فیزیک ذره‌های بنیادی داشت.

۱۹۶۶ آلفرد کاستلر

Alfred Kastler (۱۹۰۲-۱۹۸۴) به خاطر کشف و گسترش روشهای نوری برای مطالعهٔ تشدید هرتزی در اتمها.

۱۹۶۷ هانس البریخت بته

Hans Albrecht Beathe (۱۹۰۶-)

به خاطر سهم وی در نظریهٔ واکنشهای هسته‌ای به ویژه کشفهای او در مورد تولید انرژی در ستاره‌ها.

۱۹۶۸ لوویس دبلیو. آلوارز

Luis W.Alvarez (۱۹۱۱-۱۹۸۸) به خاطر سهم تعیین کننده وی در فیزیک ذره‌های بنیادی، به ویژه کشف شمار زیادی از حالتهای تشدیدی که از طریق گسترش فنون به کارگیری اتاقک حباب هیدروژن و تحلیل داده‌های آن امکان پذیر شد.

۱۹۶۹ مورای گلمان

Murray Gell - mann (۱۹۲۹-) به خاطر سهم وی در کشفهای مربوط به رده‌بندی ذره‌های بنیادی و برهم‌کنشهای آنها.

۱۹۷۰ هانس آلفن

Hannes Alfve'n (۱۹۰۸-۱۹۹۵) به خاطر کار بنیادی و کشفهای وی در مغناطو- هیدرودینامیک یا کاربردهای مفید آنها در بخشهای مختلف فیزیک پلاسما.

لویی نئل

Louis Ne'el (۱۹۰۴-) به خاطر کار بنیادی و کشفهای وی در پاد فرومغناطیس و فرومغناطیس که به کاربردهای مهمی در فیزیک حالت جامد انجامید.

۱۹۷۱ دنیس گابور

Dennis Gabor (۱۹۰۰-۱۹۷۹) به خاطر کشف اصول تمام نگاری.

۱۹۷۲ جان باردین

John Bardeen (۱۹۰۸-۱۹۹۱)،

لئون ان. کوپر

Leon N. Cooper (۱۹۳۰-)

جی. روبرت شریفر

J. Robert Schrieffer (۱۹۳۱-)به خاطر پرداختن به نظریه‌ای در مورد ابر رسانایی.

۱۹۷۳ لئو اساکی

Leo Esaki (۱۹۲۵-) به خاطر کشف تونل زنی در نیمرساناها.

ایوار جیاور

Ivar Giaever (۱۹۲۹-) به خاطر کشف تونل زنی در ابررسانها.

برایان دی. جوزفسون

Brian D. Josephson (۱۹۰۴-) به خاطر پیش‌بینی نظری خواص یک ابر جریان در یک سر تونلی.

۱۹۷۴ آنتونی هویش

Antony Hewish (۱۹۲۴-) به خاطر کشف تپ اخترها.

سرمارتین رایله

Sir Martin Ryleh (۱۹۱۸-۱۹۸۴) به خاطر کار پیشگامانه‌اش در اختر شناسی رادیویی.

۱۹۷۵ اگه بور

Aage Bohr (۱۹۲۲-)،

بن موتلسون

Ben Mottelson و

جیمز رین واتر

James Rainwater (۱۹۱۷-۱۹۸۶) به خاطر کشف ارتباط بین حرکت گروهی و حرکت ذره‌ای و گسترش نظریهٔ ساختار هسته‌های اتمی بر پایهٔ این ارتباط.

۱۹۷۶ بورتون ریشتر

Burton Richter (۱۹۳۱-) و

ساموئل چائوچونگ تینگ

Samuel Chao Chung Ting (۱۹۳۶-) به خاطر کشف (مستقل) یک ذرهٔ بنیادی مهم.

۱۹۷۷ فیلیپ وارن اندرسون

Philip Warren Anderson (۱۹۲۳-)،

نویل فرانسیس موت

Nevill Francis Mott (۱۹۰۵-)

جان هاسبروک وان‌ولک

John Hasbrouck Van Vleck (۱۸۹۹-۱۹۸۰) به خاطر پژوهشهای نظری بنیادی دربارهٔ ساختار الکترونی دستگاههای مغناطیسی و بی نظم.

۱۹۷۸ پتر ال. کاپیتزا

Peter L. Kapitza (۱۸۹۴-۱۹۸۴) به خاطر اختراعهای اساسی و کشفهای وی در فیزیک دماهای پایین.

آرنو آ. پنزیاس

Arno A. Penzias (۱۹۳۳-) و

روبرت وودرو ویلسون

Robert Woodrow Wilson (۱۹۳۶-) به خاطر کشف تابش زمینهٔ میکروموج کیهانی

۱۹۷۹ شلدون لی گلاشو

Sheldon Lee Glashow (۱۹۳۲-)

عبدالسلام

Abdus salam (۱۹۲۶-۱۹۹۶)

استون واینبرگ
Steven Weinberg (-۱۹۳۳) به خاطر مدل وحدت بخش از کنش نیروهای ضعیف و الکترومغناطیسی و به خاطر پیش‌بینی آنها از وجود جریانهای خنثی.

۱۹۸۰ جیمز دبلیو. کرانین
James W. Cronin (-۱۹۳۱) و
وال ال. فیچ Val L. Fitch (-۱۹۲۳) به خاطر کشف تناقض در اصول بنیادی تقارن در واپاشی مزونهای K خنثی.

۱۹۸۱نیکلاس بلومبرگن
Nicolaas Bloembergen (-۱۹۲۰) و
آرتور لئونارد شاولو
Arthur Leonard Schawlow (-۱۹۲۱) به خاطر سهم آنها در گسترش طیف نمایی لیزری.
کای ام. زیگبان
Kai M. Siegbahn (-۱۹۱۸) به خاطر سهم وی در طیف نمایی الکترونی با توان تفکیک بالا.

۱۹۸۲ کنت گدز ویلسون
Kenneth Geddes Wilson (-۱۹۳۶) به خاطر روش تحلیل پدیده‌های بحرانی ذاتی در تغییرات ماده بر اثر فشار و دما.

۱۹۸۳ سابرامانیان چاندراسکار
Subrehmanyan Chandrasekhar (۱۹۱۰-۱۹۹۵) به خاطر مطالعات نظری وی از ساختار و تحول ستارگان.
ویلیام آ. فأولر
William A. Fowler (۱۹۱۱-۱۹۹۵) به خاطر مطالعات وی دربارهٔ تشکیل عنصرهای شیمیایی در گیتی.

۱۹۸۴ کارلوراببیا
Carlo Rubbia (-۱۹۳۴)
سیمون فون درمیر
Simon van der Meer (-۱۹۲۵) به خاطر سهم تعیین کنندهٔ آنها در پروژه بزرگی که به کشف ذره‌های W و Z و عوامل بر هم کنش ضعیف انجامید.

۱۹۸۵ کلاس فون کلاسینگ
Klaus van Klitzing (-۱۹۴۳) به خاطر کشف مقاومت هال کوانتیده.

۱۹۸۶ ارنست روسکا
ErnestRuska(۱۹۰۶-۱۹۸۸)به خاطر اختراع میکروسکوپ الکترونی.
گرد بینیگ
Gerd Binning (-۱۹۴۷)
هانریش روهر
Heinrich Rohrer (-۱۹۳۳) به خاطر اختراع میکروسکوپ تونلی روبشی.

۱۹۸۷ کارل آلکس مولر
Karl Alex Müller (-۱۹۲۷) و
جی. جورج بدنورز
J. George Bednorz (-۱۹۵۰) به خاطر کشف دستهٔ تازه‌ای از ابررساناها.

۱۹۸۸ لئون ام. لدرمن
Leon M. Lederman (-۱۹۲۲)،
ملوین شوارتز Melvin Schwartz (-۱۹۲۳) و
جک اشتنبرگر
Jack Steinberger (-۱۹۲۱) به خاطر اولین بهره برداری از یک باریکهٔ نوترینو و کشف نوترینوی میونی.

۱۹۸۹ نورمن رامسی
Norman Ramsey (-۱۹۱۵)،
هانس دهملت
Hans Dehmelt (-۱۹۲۲) و
ولفگانگ پل
Wolfgang Paul (۱۹۱۳-۱۹۹۳) به خاطر کاری که به گسترش ساعتهای اتمی و گاهشماری دقیق انجامید.

۱۹۹۰ ژروم آی. فریدمن
Jerome I. Friedman (-۱۹۳۰)،
هنری دبلیو. کندال
Henry W. Kendall (-۱۹۲۰) و
ریچارد ای. تیلور
Richard E. Taulor (-۱۹۲۹) به خاطر اثبات اینکه پروتونها و نوترونها از کوارکها ساخته شده‌اند.

۱۹۹۱ پیر دو جنز
Pierre de Gennes (-۱۹۳۲) به خاطر مطالعات دربارهٔ پدیده‌های منظم در بلورهای مایع و بسپارها.

۱۹۹۲ جورج چارپاک
George Charpak (-۱۹۲۴) به خاطر اختراع آشکارسازهای الکترونیکی سریع در ذره‌های پر انرژی.

۱۹۹۳ جوزف اچ. تیلور
Joseph H. Taylor (-۱۹۴۱) و
راسل ای. هالز
Russel A. Hulse (-۱۹۵۰) به خاطر کشف و تفسیر اولین تپ اختر دو تایی.

۱۹۹۴ برترام ان. براکهاوس
Berttram N. Brockhouse (-۱۹۱۸) و
کلیفرد جی. شول
Clifford G. Shull (-۱۹۱۵) به خاطر گسترش روشهای پراکندگی نوترون.

۱۹۹۵ مارتین ال. پرل
Martin L. Perl (۱۹۲۷-) به خاطر کشف لپتون.
فریدریک راینس
Frederick Reines (۱۹۱۸-) به خاطر آشکار سازی نوترینو.

۱۹۹۶ دیوید ام. لی
David M.Lee (۱۹۳۱-)، داگلاس دی. اشروف
Douglas D. Osheroff (...-۱۹۴۵) و رابرت سی. ریچاردسون
Robert C.Richardson (۱۹۳۷-) به خاطر کشف ابرشارگی در هلیوم ۳.

۱۹۹۷ استیون جی
Steven Chu (۱۹۴۸-)، کلود کوهن – تانوجی
Claude Cohen-Tannoudji (۱۹۳۳-) و ویلیام دی. فیلیپس
William D.Phillips (۱۹۴۸-) به خاطر تکامل روشهای سرد کردن و تله انداختن اتمها با نور لیزر

۱۹۹۸ رابرت پی. لافلین
Robert B.Laughlin (۱۹۵۰-)، هورست ال. اشتورمر
Horst L.Stormer (۱۹۴۹-) و دانیل سی. تسو
Daniel C.Tsui (۱۹۳۹-) به خاطر کشف شکل جدیدی از شارهٔ کوانتومی

۱۹۹۹ جراردوس هوفت
Gerardust Hooft (۱۹۴۶-) و مارتینوس جی جی ولتمن
Martinus J.G.Veltman (۱۹۳۱-) به خاطر توصیف ساختار کوانتومی برهم کنشهای الکتروضعیف در فیزیک

۲۰۰۰ زورس آی. آلفروف
Zhores I.Alferof (۱۹۳۰-)،
هربرت کرومر
Herbert Kroemer (۱۹۲۸-) و جک اس. کیلبی
Jack S.Kilby (...-۱۹۲۳)
برای کارهای اساسی روی فناوری اطلاعات و ارتباطات، به ویژه به خاطر تکامل نیمرسانای چند ساختاری که در الکترونیک سرعت – بالا و نوری به کار می‌رود.

۲۰۰۱ اریک اِی. کورنل
Eric A.Cormell (۱۹۶۱-) و ولفگانگ کترل
Wolfgange Ketterle (۱۹۵۷-) و کارل ای. وایمن
Carl E.Wieman (۱۹۵۱-)
به خاطر موفقیت در چگالش بوز-اینشتین (در ۱۹۹۵) در گازهای اتمهای قلیایی رقیق، و برای بررسیهای اساسی اولیه در خواص چگالیده‌ها.

۲۰۰۲ ریموند دیویس، پسر
Raymond Davis, Jr (۱۹۱۴-)،
ماساتوشی کوشیبا
Masatoshi Koshiba (۱۹۲۶-) و
ریکاردو جیاکنی
Riccardo Giacconi (۱۹۳۱-)
به خاطر سهم پیشتاز آنها در اختر فیزیک، به ویژه برای آشکارسازی نوترینوهای کیهانی

۲۰۰۳ الکسی اِی. آبریکوزوف
Alexei A.Abrikosov (۱۹۲۸-)،
ویتالی ال. گینزبورگ
Vitaly L.Ginzburg (۱۹۱۶-) و
آنتونی جی. لگت
Anthony J.Leggett (۱۹۳۸-)
به خاطر سهم پیشتاز آنها در نظریهٔ ابررساناها و ابرشاره‌ها

۲۰۰۴ دیوید جی. گروس
David J.Geoss (۱۹۴۱-)،
اچ. دیوید پولیتزر
H.David Politzer (۱۹۴۹-) و
فرانک ویلچک
Frank Wilczek (۱۹۵۱-)
به خاطر کشف آزادی مجانبی در نظریهٔ برهم کنشهای قوی.

۲۰۰۵ روی جی گلابر
Roy J.Glauber (۱۹۲۵-)
جان ال هال
John L.Hall (۱۹۳۴-)
تئودور دبلیوهانش
Theodor W.Hansch (۱۹۴۱-)
برای کارهای اساسی روی نظریهٔ کوانتومی همدوسی نوری و توسعهٔ طیف نمایی دقیق با لیزر.

۲۰۰۶ جان سی. مَتر
John C. Matter (۱۹۴۶-)
جورج اف. اسموت
George F. Smoot (- ۱۹۴۵)
به خاطر کشف اینکه تابش زمینهٔ میکروموج کیهانی به شکل تابش جسم سیاه و ناهمسانگرد است.

۲۰۰۷ پیترگرونبرگ
Peter Grunberg (- ۱۹۳۹)
آلبرت فرت
Albert Fert (- ۱۹۳۸)
برای کشف مغناطیس مقاومت عظیم (GMR)

۲۰۰۸ یوشیرو نامبو
Yoichiro Nambu (- ۱۹۲۱)

برای کشف سازوکار تقارن شکستهٔ خود به خود در فیزیک زیر اتمی و

ماکوتور کوبایاشی
Makoto Kobayashi (۱۹۴۴ -) و

توشی‌هاید ماسکاوا
Toshihide Maskawa (۱۹۴۰ -)

برای کشف منشاء تقارن شکسته که وجود دست کم سه دسته از کوارک‌ها در طبیعت را پیش‌بینی می‌کند.

۲۰۰۹ چارلز. کی. کائو
Charles K. Kao (۱۹۳۳ -)

به خاطر دستاوردهای خلاقانه در مورد انتقال نور در تارها برای مخابرات نوری

ویلارد. اس. بویل
Willard S. Boyle (۱۹۲۴ -)

جورج. ای. اسمیت
George E. Smith (۱۹۳۰ -)

برای اختراع مدار نیمرسانای تصویر بردار- حسگر CCD.

فصل ۳۰

نکته‌های وارسی

۱- همگی یکسان، ۲- (الف) همگی یکسان (نیروی گرانشی وارد بر پنگوئن یکسان است)؛ (ب) $۰/۹۵\rho_۰$، $\rho_۰$، $۱/۱\rho_۰$ ۳- $۱۳ cm^۳/s$ به طرف بیرون، ۴- (الف) همگی یکسان؛ (ب) ۱، پس ۲ و ۳ یکسان، ۴ (پهن‌تر به معنای آهسته‌تر)؛ (پ) ۴، ۳، ۲، ۱ (پهن‌تر و پایین‌تر به معنای فشار بیشتر)

پرسشها

۱- (ب) سپس الف و ت یکسان (صفر)، سپس پ، ۳- (الف) به پایین حرکت می‌کند؛ (ب) به طرف پایین حرکت می‌کند، ۵- (الف) به پایین؛ (ب) به پایین؛ (پ) یکسان، ۷- B، C، A، ۹- (الف) ۱و۴؛ (ب) ۲؛ (پ)۳.

مسئله‌ها

۱- $۱/۱\times۱۰^۵$ Pa، ۳- $۲/۹\times۱۰^۴$ N، ۵- ۰/۰۷۴، ۷- (ب) ۲۶kN، ۹- $۱/۰۸\times۱۰^۳$ atm، ۱۱- $۷/۲\times۱۰^۵$ N، ۱۳- $-۲/۶\times۱۰^۴$ Pa، ۱۵- (الف) ۹۴torr؛ (ب) $۴/۱\times۱۰^۲$ torr؛ (پ) $۳/۱\times۱۰^۲$ torr، ۱۷- (الف) $۱/۰\times۱۰^۳$ torr؛ (ب) $۱/۷\times۱۰^۳$ torr، ۱۹- ۰/۶۳۵J، ۲۱- ۴۴km، ۲۳- $۴/۶۹\times۱۰^۵$ N، ۲۵- ۷۳۹/۲۶ torr، ۲۷- (الف) ۷/۹km؛ (ب) ۱۶km، ۲۹- ۸/۵۰ kg، ۳۱- (الف) $۲/۰۴\times۱۰^{-۲} m^۳$؛ (ب) ۱/۵۷kN، ۳۳- پنج، ۳۵- (الف) $۶/۷\times۱۰^۲ kg/m^۳$؛ (ب) $۷/۴\times۱۰^۲ kg/m^۳$، ۳۷- (الف) ۱/۲kg؛ (ب) $۱/۳\times۱۰^۳ kg/m^۳$، ۳۹. (الف) ۰/۱۰؛ (ب) ۰/۰۸۳، ۴۱- $۵۷/۳cm^۳$، ۴۳- $۰/۱۲۶m^۳$، ۴۵- (الف) $۱/۸۰ m^۳$؛ (ب) $۴/۷۵ m^۳$، ۴۷- (الف) $۶۳۷/۸cm^۳$؛ (ب) $۵/۱۰۲m^۳$؛ (پ) $۵/۱۰۲\times۱۰^۳$ kg، ۴۹- ۸/۱ m/s، ۵۱- (الف) ۳/۰ m/s؛ (ب) ۲/۸m/s، ۵۳- ۶۶W، ۵۵- (الف) ۲/۵ m/s؛ (ب) $۲/۶\times۱۰^۵$ Pa، ۵۷- (الف) ۳/۹ m/s؛ (ب) ۸۸kPa، ۵۹- (الف) $۱/۶\times۱۰^{-۳} m^۳/s$؛ (ب) ۰/۹۰m، ۶۱- $۱/۴\times۱۰^۵$ J، ۶۳- (الف) ۷۴N؛ (ب) $۱/۵\times۱۰^۲ m^۳$، ۶۵- (الف) ۳۵cm؛ (ب) ۳۰cm؛ (پ) ۲۰cm، ۶۷- (ب) $۲/۰\times۱۰^{-۲} m^۳/s$، ۶۹- (الف) $۰/۰۷۷۶m^۳/s$؛ (ب) ۶۹/۸kg/s، ۷۱- $۱/۱\times۱۰^۲$ m/s، ۷۳- ۴۴/۲g، ۷۵- $۴۵/۳cm^۳$، ۷۷- (الف) ۳/۲m/s؛ (ب) $۹/۲\times۱۰^۴$ Pa؛ (پ) ۱۰/۳m، ۷۹- $۵/۱۱\times۱۰^{-۷}$ kg، ۸۱- $۱/۰۷\times۱۰^۳$g، ۸۳- $۶/۰\times۱۰^۲ kg/m^۳$، ۸۵- $۱/۵g/cm^۳$.

فصل ۳۱

نکته‌های وارسی

۱.(x را برحسب t رسم کنید.) (الف) $-x_m$؛ (ب) $+x_m$، (پ) ۰، ۲- (الف) (F باید دارای شکل معادله ۱۵-۱۰ باشد)، ۳- (الف) ۵J؛ (ب) ۲J؛ (پ) ۵J، ۴- همگی یکسان (در معادلهٔ ۱۵-۲۹، m شامل I است)، ۵. ۱، ۲، ۳ (نسبت m/b مهم است، نه k)

پرسشها

۱- (الف) ۲؛ (ب) مثبت؛ (پ) بین صفر و $+x_m$، ۳- الف و ب، ۵- (الف) همگی یکسان؛ (ب) ۳، سپس ۱ و ۲ یکسان؛ (پ) ۱،۲،۳ (صفر)؛ (ت) ۱،۲،۳ (صفر)؛ (ث) ۲،۳،۱، ۷- (الف) بین D و E؛ (ب) بین $۳\pi/۲$ rad و ۲π rad، ۹- (الف) بزرگتر؛ (ب) یکسان؛ (پ) یکسان؛ (ت) بزرگتر؛ (ت) بزرگتر، ۱۱- ب (بی‌نهایت دور، نوسان نمی کند)، پ، الف.

مسئله‌ها

۱- $۳۷/۸ m/s^۲$، ۳- (الف) ۱/۰mm؛ (ب) ۰/۷۵m/s؛ (پ) $۵/۷\times۱۰^۲ m/s^۲$، ۵- (الف) ۰/۵۰s؛ (ب) ۲/۰Hz؛ (پ) ۱۸cm، ۷- (الف) ۰/۵۰۰s؛ (ب) ۲/۰۰Hz؛ (پ) ۱۲/۶rad/s؛ (ت) ۷۹/۰N/m؛ (ث) ۴/۴۰m/s؛ (ج) ۲۷/۶N، ۹- (الف) ۴۹۸Hz؛ (ب) بزرگتر، ۱۱- (الف) ۳/۰m، (ب) -۴۹m/s؛ (پ) $-۲/۷\times۱۰^۲ m/s^۲$؛ (ت) ۲۰rad؛ (ث) ۱/۵Hz؛ (ج) ۰/۶۷s، ۱۳- ۳۹/۶Hz؛ ۱۵- (الف) ۵/۵۸Hz؛ (ب) ۰/۳۲۵kg، (پ) ۰/۴۰۰ ۱۷- ۳/۱cm، ۱۹- (الف) $۰/۱۸A$؛ (ب) جهت یکسان، ۲۱- (الف) ۲۵cm؛ (ب) ۲/۲Hz، ۲۳. ۵۴Hz، ۲۵- (الف) ۰/۵۲۵m؛ (ب) ۰/۶۸۶s، ۲۷- ۳۷mJ، ۲۹- (الف) ۰/۷۵؛ (ب) ۰/۲۵؛ (پ) $۲^{-۰/۵}x_m$ ۳۱- (الف) ۲/۲۵Hz؛ (ب) ۱۲۵J؛ (پ) ۲۵۰J؛ (ت) ۸۶/۶cm، ۳۳- (الف) ۳/۱ms؛ (ب) ۴/۰m/s؛ (پ) ۰/۰۸۰J؛ (ت) ۸۰N؛ (ث) ۴۰N، ۳۵- (الف) ۱/۱m/s؛ (ب) ۳/۳cm، ۳۷- (الف) ۲/۲Hz؛ (ب) ۵۶cm/s؛ (پ) ۰/۱۰kg؛ (ت) ۲۰/۰cm، ۳۹- (الف) ۳۹/۵rad/s؛ (ب) ۳۴/۲rad/s؛ (پ) $۱۲۴ rad/s^۲$ ۴۱- (الف) ۱/۶۴s؛ (ب) مساوی، ۴۳- (الف) $۰/۲۰۵kg.m^۲$؛ (ب)

۴۷/۷cm ؛ (پ) ۱/۵۰s، ۴۵- ۰/۳۶۶s، ۴۷- ۸/۷۷s، ۴۹- (الف) ۰/۵۳m ؛ (ب) ۲/۱s، ۵۱- ۰/۰۶۵۳s، ۵۳- (الف) ۰/۸۴۵rad ؛ (ب) ۰/۰۶۰۲rad، ۵۵- (الف) ۲/۲۶s؛ (ب) افزایش می‌یابد؛ (پ) یکسان، ۵۷- (الف) ۱۴/۳s؛ (ب) ۵/۲۷، ۵۹- ۶/۰٪، ۶۱. (الف) $F_m/b\omega$؛ (ب) F_m/b ۶۳- ۵/۰cm، ۶۵- (الف) ۱/۲J؛ (ب) ۵۰، ۶۷- ۱/۵۳m، ۶۹- (الف) ۱۶/۶cm؛ (ب) ۱/۲۳٪، ۷۱- (الف) $۲/۸\times۱۰^{۳}$ rad/s؛ (ب) ۲/۱m/s؛ (پ) ۵/۷km/s^{۲}، ۷۳- (الف) ۰/۷۳۵kg.m^{۲}؛ (ب) ۰/۰۲۴۰N·m؛ (پ) ۰/۱۸۱rad/s، ۷۵. (الف) ۰/۳۵Hz؛ (ب) ۰/۳۹Hz؛ (پ) ۰ (بدون نوسان)، ۷۷- ۷/۹۰N/m؛ (ب) ۱/۱۹cm؛ (پ) ۲/۰۰Hz، ۷۹- ۱/۶kg، ۸۱- (الف) ۳/۵m؛ (ب) ۰/۷۵s، ۸۳- ۷/۲m/s، ۸۵- (الف) ۱/۲۳kN/m؛ (ب) ۷۶/۰N، ۸۷- (الف) ۱/۱Hz؛ (ب) ۵/۰cm، ۸۹- **(الف)** $۱/۳\times۱۰^{۲}$ N/m؛ (ب) ۰/۶۲s؛ (پ) ۱/۶Hz، (ت) ۵/۰cm؛ (ث) ۰/۵۱m/s، ۹۱- (الف) ۳/۲Hz؛ (ب) ۰/۲۶m؛ (پ) $x=(۰/۲۶m)\cos(۲۰t-\pi/۲)$، t برحسب ثانیه، ۹۳- ۰/۰۷۹kg·m^{۲}، ۹۵- (الف) ۰/۴۴s؛ (ب) ۰/۱۸m؛ ۹۷- (الف) ۲۴۵N/m؛ (ب) ۰/۲۸۴s، ۹۹- ۵۰cm، ۱۰۱- (الف) $۸/۱۱\times۱۰^{-۵}$ kg·m^{۲}؛ (ب) ۳/۱۴rad/s، ۱۰۳- ۱۴/۰°، ۱۰۵- (الف) ۰/۳۰m؛ (ب) ۰/۲۸s؛ (پ) $۱/۵\times۱۰^{۲}$ m/s^{۲} (ت) ۱۱J، ۱۰۷- (الف) ۰/۴۵s؛ (ب) ۰/۱۰m بالا، ۰/۲۰ زیر؛ (پ) ۰/۱۵m؛ (ت) ۲/۳J، ۱۰۹- ۷×۱۰^{۲} N/m، ۱۱۱- (الف) F/m؛ (ب) $۲F/mL$؛ (پ) ۰.

فصل ۳۲

نکته‌های وارسی

۱- ۲و الف، ۲ و ب، ۱ و پ (با فاز معادله ۳۲-۲ مقایسه کنید، سپس به معادله ۳۲-۵ مراجعه کنید) ۲- (الف) ۲، ۳، ۱ (معادله ۳۲-۱۲ را ببینید)؛ (ب) ۳، سپس ۱ و ۲ یکسان (دامنه dy/dt را پیدا کنید) ۳- (الف) یکسان (مستقل از f)؛ (ب) کاهش $(\lambda=v/f)$؛ (پ) افزایش؛ (ت) افزایش، ۴- ۰/۲۰ و ۰/۸ یکسان، سپس ۰/۶۰، ۰/۴۵، ۵- (الف) ۱؛ (ب) ۳؛ (پ) ۲، ۶- (الف) ۷۵Hz؛ (ب) ۵۲۵Hz.

پرسشها

۱- الف) به طرف بالا؛ ب) به طرف بالا؛ پ) به طرف پایین؛ ت) به طرف بالا؛ ث) به طرف پایین؛ ج) به طرف پایین؛ چ) به طرف بالا؛ ح) به طرف بالا، ۳- (الف) ۱، ۴، ۲، ۳؛ (ب) ۱، ۴، ۲، ۳، ۵- (الف) ۰، ۰/۲ طول موج، ۰/۵ طول موج (صفر)؛ (ب) $۴P_{avg1}$، ۷- میانی (نزدیک به ویرانگری کامل، ۹- پ، الف، ب، ۱۱- ت.

مسئله‌ها

۱- (الف) ۳/۴۹ m$^{-۱}$؛ (ب) ۳۱/۵m/s، ۳- (الف) ۰/۶۸۰s؛ (ب) ۱/۴۷Hz؛ (پ) ۲/۰۶m/s، ۵- ۱/۱ms، ۷- (الف) ۱۱/۷cm؛ (ب) πrad، ۹- (الف) ۶۴Hz؛ (ب) ۱/۳m؛ (پ) ۴/۰cm؛ (ت) ۵/۰m$^{-۱}$ (ث) $۴/۰\times۱۰^{۲}$ s$^{-۱}$؛ (ج) $\pi/۲$rad (ح) منفی، ۱۱- (الف) ۳/۰mm؛ (ب) ۱۶m$^{-۱}$؛ (پ) $۲/۴\times۱۰^{۲}$ s$^{-۱}$؛ (ت) منفی، ۱۳- (الف) منفی؛ (ب) ۴/۰cm؛ (پ) ۰/۳۱cm$^{-۱}$؛ (ت) ۰/۶۳s$^{-۱}$؛ (ث) πrad؛ (ج) منفی؛ (خ) ۲/۰cm/s؛ (ح) ۲/۵- cm/s، ۱۵- ۱۲۹m/s ۱۷- (الف) ۰/۱۲mm (ب) ۱۴۱ m$^{-۱}$؛ (پ) ۶۲۸s$^{-۱}$؛ (ت) مثبت، ۱۹- (الف) ۱۵m/s؛ (ب) ۰/۰۳۶N، ۲۱- (الف) ۵/۰cm؛ (ب) ۴۰cm؛ (پ) ۱۲m/s؛ (ت) ۰/۰۳۳۶s ؛ (ث) ۹/۴m/s؛ (ج) ۱۶m$^{-۱}$، (خ) $۱/۹\times۱۰^{۲}$ s$^{-۱}$؛ (ح) ۰/۹۳rad، (چ) مثبت، ۲۳- ۲/۶۳m، ۲۷- ۳/۲mm، ۲۹- ۰/۲۰m/s، ۳۱- $۱/۴۱y_m$، ۳۳- (الف) ۹/۰mm؛ (ب) ۱۶m$^{-۱}$؛ (پ) $۱/۱\times۱۰^{۳}$ s$^{-۱}$؛ (ت) ۲/۷rad؛ (ث) مثبت، ۳۵- ۵/۰cm، ۳۷- ۸۴°، ۳۹- (الف) ۳/۲۹mm؛ (ب) ۱/۵۵rad، (پ) ۱/۵۵rad، ۴۱- (الف) ۷/۹۱Hz؛ (ب) ۱۵/۸Hz ؛ (پ) ۲۳/۷Hz، ۴۳- (الف) ۸۲/۰m/s (ب) ۱۶/۸m؛ (پ) ۴/۸۸Hz ، ۴۵- (الف) ۱۴۴m/s؛ (ب) ۶۰/۰cm؛ (پ) ۲۴۱ Hz، ۴۷- (الف) ۱۰۵Hz؛ (ب) ۱۵۸m/s، ۴۹- (الف) ۲۶۰ Hz، ۵۱- (الف) ۰/۲۵cm؛ (ب) $۱/۲\times۱۰^{۲}$ cm/s؛ (پ) ۳/۰cm؛ (ت) صفر، ۵۳- (الف) ۰/۵۰ cm؛ (ب) ۳/۱m$^{-۱}$، (پ) $۳/۱\times۱۰^{۲}$ s$^{-۱}$؛ (ت) منفی؛ ۵۵- (الف) ۲/۰۰Hz؛ (ب) ۲/۰۰m؛ (پ) ۴/۰۰m/s؛ (ت) ۵۰/۰ cm؛ (ث) ۱۵۰ cm؛ (ج) ۲۵۰ cm؛ (چ) صفر؛ (ح) ۱۰۰ cm (خ) ۲۰۰ cm، ۵۷- ۰/۲۵m ۵۹- (الف) ۳۲۴Hz؛ (ب) هشت، ۶۱- (الف) $۰/۸۳y_۱$؛ (ب) ۳۷°، ۶۳- (الف) ۰/۳۱m؛ (ب) ۱/۶۴rad؛ (پ) ۲/۲mm، ۶۵- ۱/۲rad، ۶۷- (الف) ۳/۷۷m/s؛ (ب) ۱۲/۳N؛ (پ) صفر؛ (ت) ۴۶/۴W؛ (ث) صفر؛ (ج) صفر؛ (چ) ±۰/۵۰cm، ۶۹. (الف) $۲\pi y_m/\lambda$؛ (ب) خیر، ۷۱- (الف) ۱/۰۰cm؛ (ب) $۳/۴۶\times۱۰^{۳}$ s$^{-۱}$ ؛ (پ) ۱۰/۵m$^{-۱}$ ؛ (ت) مثبت، ۷۳. (الف) ۷۵Hz؛ (ب) ۱۳ms، ۷۵. (الف) ۲۴۰ cm؛ (ب) ۱۲۰ cm؛ (پ) ۸۰ cm، ۷۷- (الف)

۱۴۴m/s؛ (ب) ۳/۰۰m؛ (پ) ۱/۵۰m؛ (ت) ۴۸/۰Hz؛ (ث) ۹۶/۰Hz، **۷۹**. (الف) ۲/۰mm؛ (ب) ۹۵Hz؛ (پ) +۳۰m/s؛ (ت) ۳۱cm؛ (ث) ۱/۲m/s، **۸۱**- (الف) ۳۶N **۸۳**- (الف) ۳۰۰m/s (ب) خیر، **۸۵**- (الف) ۱/۳۳m/s؛ (ب) ۱/۸۸cm/s، (پ) ۱۶/۷m/s^2؛ (ت) ۲۳/۷m/s^2 **۸۷**- (الف) ۰/۱۶m؛ (ب) ۲/۴×۱۰^2 N؛ (پ) $y(x,t)=(۰/۱۶\,m)\sin[۱/۵۷m^{-1})x]\sin[۳۱/۴s^{-1})t]$، **۸۹**- (الف) $[k\Delta\ell(\ell+\Delta\ell)/m]^{۰/۵}$، **۹۱**- (الف) ۰/۵۲m؛ (ب) ۴۰m/s؛ (پ) ۰/۴۰m، **۹۳**- (پ) ۲/۰m/s؛ (ت) x-

فصل ۳۳

نکته‌های وارسی

۱- شروع به کاهش می‌کند (مثال: به طور ذهنی منحنی شکل ۳۳-۷ به طرف راست از نقطهٔ $x=$۴۲m می‌گذرد). **۲**- (الف) ۱ و ۳ یکسان، سپس ۳ (معادله‌ی ۳۲-۲۶ را ببینید)؛ (ب) ۳، سپس ۱ و ۲ یکسان (معادله‌ی ۳۳-۲۶ را ببینید)، **۳**- دوم (معادله‌های ۳۳-۳۹ و ۳۳- را ببینید)، **۴**- الف) بزرگ‌تر؛ ب) کمتر؛ پ) نمی‌توان گفت؛ ت) نمی‌توان گفت؛ ث) بزرگتر؛ ج) کمتر.

پرسشها

۱- C، سپس A و B یکسان، ۳- (الف) ۰/۰۲ طول موج (صفر)؛ (ب) ۴P_{avg1}، **۵**- ۱۵۰Hz و ۴۵۰Hz، **۷**- E، A، D، C، B، **۹**- ۱ و ۴ و ۳ و ۲

مسئله‌ها

۱- (الف) ۲/۶km؛ **(ب)** ۲/۰×۱۰^2 **۳**- (الف) ۷۹m؛ (ب) ۴۱m؛ (پ) ۸۹m، ۵- ۴۰/۷m، ۷- ۱/۹×۱۰^{3}km **۹**- (الف) ۷۶/۲μm؛ (ب) ۰/۳۳۳mm، ۱۱- ۰/۲۳ms **۱۳**- (الف) ۲/۳×۱۰^2 Hz؛ (ب) بزرگتر، **۱۵**- (الف) ۹۶۰Hz، **۱۷**. (الف) ۱۴؛ (ب) ۱۴، **۱۹**- (الف) ۳۴۳Hz؛ (ب) ۳؛ (پ) ۵؛ (ت) ۶۸۶Hz؛ (ث) ۲؛ (ج) ۳، **۲۱**- (الف) ۱۴۳Hz؛ (ب) ۳؛ (پ) ۵؛ (ت) ۲۸۶Hz؛ (ث) ۲؛ (ج) ۳، **۲۳**- (الف) صفر؛ (ب) کاملاً ویرانگر؛ (پ) (افزایش)؛ **(ت)** ۱۲۸m؛ (ث) ۶۳/۰m؛ (ج) ۴۱/۲m **۲۵** ۱۵/۰mW **۲۷**- ۳۶/۸nm، **۲۹**- (الف) ۱/۰×۱۰^3 (ب) ۳۲، **۳۱**- ۰/۷۶μm، **۳۳**- (ب) ۲μW، **۳۵**. (الف) ۵/۹۷×۱۰$^{-5}$W/m^2؛ (ب) ۴/۴۸nW، **۳۷**- (الف) ۰/۳۴nW؛ (ب) ۰/۶۸nW؛ (پ) ۱/۴nW، (ت) ۰/۸۸nW؛ (ث) صفر، **۳۹**- (الف) ۸۳۳Hz؛ (ب) ۰/۴۱۸m، **۴۱**- (الف) ۲؛ (ب) ۱، **۴۳**- (الف) ۴۰۵m/s؛ (ب) ۵۹۶N؛ (پ) ۴۴/۰cm؛ **(ت)** ۳۷/۳cm؛ **۴۵**- (الف) ۳؛ (ب) ۱۱۲۹ Hz؛ (پ) ۱۵۰۶Hz، **۴۷**- ۴۵/۳N، **۴۹**- ۱۲/۴m، **۵۱**- ۲/۲۵ms، **۵۳**- ۰/۰۲۰، **۵۵**- صفر **۵۷**- (الف) ۵۲۶Hz، **(ب)** ۵۵۵Hz، **۵۹**- ۱۵۵Hz؛ **۶۱**- (الف) ۱/۰۲۲kHz؛ (ب) ۱/۰۴۵kHz، **۶۳**- ۴۱kHz، **۶۵**- (الف) ۴۸۵/۸Hz؛ (ب) ۵۰۰/۰Hz؛ (پ) ۴۸۶/۲Hz (ت) ۵۰۰/۰Hz، **۶۷**- (الف) ۲/۰kHz؛ (ب) ۲/۰Hz؛ **۶۹**- (الف) ۴۲°؛ (ب) ۱۱s، **۷۱**- (الف) ۲/۱۰m؛ (ب) ۱/۴۷m، **۷۳**- (الف) ۲۱ nm؛ (ب) ۳۵ cm؛ (پ) ۲۴nm؛(ت) ۳۵cm، **۷۵**- ۰/۲۵، **۷۷**- (الف) ۹/۷×۱۰^{2}Hz؛ (ب) ۱/۰kHz؛ (پ) ۶۰ Hz، خیر، **۷۹**. (الف) ۳۹/۷μW/m^3؛ (ب) ۱۷۱ nm؛ (پ) ۰/۸۹۳ Pa، **۸۱**- (الف) ۱۰ W؛ (ب) ۰/۰۳۲W/m^2؛ (پ) ۹۹dB، **۸۳**- (الف) ۷/۷۰Hz؛ (ب) ۷/۷۰Hz، **۸۵**- (الف) ۵۹/۷، (ب) ۲/۸۱×۱۰$^{-4}$، **۸۷**- (الف) ۵/۲kHz؛ (ب) ۲، **۸۹**- ۲/۱ m، **۹۱**- ۱ cm، **۹۳**- (الف) ۳/۶×۱۰^2 m/s؛ (ب) ۱۵۰Hz، **۹۵**- (الف) صفر؛ (ب) ۰/۵۷۲m؛ (پ) ۱/۱۴m، **۹۷**- ۱۷۱ m، **۹۹**- (الف) ۱۱ ms؛ (ب) ۳/۸ m، **۱۰۱**. (الف) به طرف راست؛ (ب) ۰/۹۰m/s؛ (پ) کمتر، **۱۰۳**- (الف) ۵/۵×۱۰^2 m/s؛ **(ب)** ۱/۱×۱۰^3 m/s؛ (پ) ۱، **۱۰۵**- ۴۰۰Hz، **۱۰۷**. (الف) ۱۴؛ (ب) ۱۲، **۱۰۹**- **(ب)** ۰/۸ تا ۱/۶μs، **۱۱۱**- ۴/۸×۱۰^2 Hz

فصل ۳۴

نکته‌های وارسی

۱- $۰/۲d$، $۱/۸d$، $۲/۲d$، **۲**- (الف) واقعی؛ (ب) وارونه؛ (پ) یکسان، **۳**- (الف) e؛ (ب) مجازی، یکسان، **۴**- مجازی، یکسان مانند جسم، واگرا.

پرسشها

۱- (الف) a و c؛ (ب) سه برابر (پ) شما؛ **۳**- (الف) a؛ (ب) c، **۵**- d (بینهایت)؛ یکسان بودن a و b سپس c، **۷**- کوژ، **۹**. (الف) همگی ولی تغییر ۲؛ (ب) ۱، ۳، ۴: راست، وارونه؛ ۵، ۶: چپ، یکسان

مسئله‌ها

۱- ۴۰cm، **۳**- ۱/۵ m، **۵**- ۳۵۱ cm، **۷**- ۱۰/۵cm، **۹**- (الف) +۳۶cm، (ب) -۳۶cm، (پ) +۳/۰، (ت) V، (ث) NI، (ج) مخالف **۱۱**. (الف) +۲۴cm؛ (ب) +۳۶cm؛ (پ)

۲/۰−، (ت) R ؛ (ث) I ؛ (ج) یکسان، **۱۳**– (الف) ۱۶cm−، (ب) ۴/۴cm−؛ (پ) ۰/۴۴ cm+؛ (ت) V ؛ (ث) NI ؛ (ج) مخالف، **۱۵**– (الف) ۲۰cm−؛ (ب) ۴/۴cm−؛ (پ) ۰/۵۶+؛ (ت) V ؛ (ث) NI ؛ (ج) مخالف، **۱۷**. (ب) ۰/۵۶cm/s؛ (پ) ۱۱m/s؛ (ت) ۶/۷cm/s، **۱۹**. (ب) بعلاوه؛ (پ) ۴۰cm+؛ (ث) ۲۰cm−؛ (ج) ۲/۰+؛ (خ) V ؛ (ح) NI ؛ (چ) مخالف، **۲۱**– (الف) کوژ؛ (ب) ۲۰cm−؛ (ت) ۲۰cm+؛ (ج) ۰/۵۰+؛ (خ) V؛ (ح) NI؛ (چ) مخالف، **۲۳**– (الف) کاو؛ (پ) ۴۰cm+؛ (ث) ۶۰cm+؛ (ج) ۲/۰−، (خ) R؛ (ح) I ؛ (چ) یکسان، **۲۵**– (الف) کوژ؛ (پ) ۶۰/۰cm−؛ (ت) ۳۰cm+؛ (ج) ۰/۵۰+؛ (خ) V؛ (ح) NI ؛ (چ) مخالف، **۲۷**. (ب) ۲۰cm−؛ (پ) منها؛ (ت) ۵۰cm+؛ (ث) منها؛ (ج) ۰/۸۰+؛ (خ)V؛ (ح) NI؛ (چ) مخالف، **۲۹**– (الف) کوژ؛ (ب) منها؛ (پ) ۶۰cm−؛ (ت) ۱/۲m+؛ (ث) ۲۴cm−؛ (خ) V؛ (ح) NI؛ (چ) مخالف، **۳۱**– (الف) کاو؛ (ب) ۸/۶cm+؛ (پ) ۱۷cm+؛ (ث) ۱۲cm+؛ (ج) منها؛ (خ) R؛ (چ) یکسان، **۳۳**– (الف) ۲/۰۰؛ (ب) هیچ. **۳۵**. (پ) ۳۳cm−؛ (ث) V؛ (ج) یکسان، **۳۷**– (ت) ۲۶cm−؛ (ث) V؛ (ج) یکسان، **۳۹**– (پ) ۳۰cm+؛ (ث) V؛ (ج) یکسان، **۴۱**– (الف) ۴۵mm؛ (ب) ۹۰mm، **۴۳**– ۱/۸۶mm، **۴۵**– ۵/۰mm، **۴۷**– ۲۲cm، **۴۹**– (الف) ۴۰cm+؛ (ب) ∞، **۵۱**– (الف) ۴/۸cm−؛ (ب) ۰/۶۰+؛ (پ) V؛ (ت) NI؛ (ث) یکسان، **۵۳**– (الف) ۴۸cm−؛ (ب) ۴/۰+؛ (پ) V؛ (ت) NI؛ (ث) یکسان، **۵۵**– (الف) ۳۶cm+؛ (ب) ۰/۸۰−، (پ) R، (ت) I؛ (ث) مخالف **۵۷**– (الف) ۸/۶cm−؛ (ب) ۰/۳۹+؛ (پ)V؛ (ت) NI؛ (ث) یکسان، **۵۹**– (الف) ۳۰cm−؛ (ب) ۰/۸۶+؛ (پ) V؛ (ت) NI؛ (ث) یکسان، **۶۱**– (الف) ۵۵cm+؛ (ب) ۰/۷۴−؛ (پ) R؛ (ت) I؛ (ث) مخالف، **۶۳**– (الف) ۸۴cm+؛ (ب) ۱/۴−؛ (پ)R؛ (ت) I؛ (ث) مخالف، **۶۵**. (الف) ۱۸cm−؛ (ب) ۰/۷۶+؛ (پ) V؛ (ت) NI ؛ (ث) یکسان، **۶۷**– (الف) ۷/۵cm−؛ (ب) ۰/۷۵+؛ (پ) V؛ (ت) NI؛ (ث) یکسان، **۶۹**– (الف) D؛ (ب) ۵/۳cm−؛ (ت) ۴/۰cm−؛ (ج) V؛ (چ) NI؛ (ج) یکسان، **۷۱**– (الف) C؛ (ب) بعلاوه؛ (ت) ۱۳cm−؛ (ث) ۱/۷+، (ج) V ؛ (چ) NI؛ (ح) یکسان، **۷۳**. (الف) C؛ (ت) ۱۰cm−؛ (ث) ۲/۰+؛ (ج) V؛ (چ) NI؛ (ح) یکسان **۷۵**– (الف) C؛ (ب) ۸۰cm+؛ (ت) ۲۰cm−؛ (ج) V، (خ) NI؛ (ح) یکسان، **۷۷**– (الف) C؛ (ب) ۳/۳cm+ ؛ (ت) ۵/۰cm+ ؛ (ج) R ؛ (چ) I ؛ (ح) مخالف، **۷۹**– **(الف)** D ؛ (ب) منها؛ (ت) ۳/۳cm−؛ (ث) ۰/۶۷+؛ (ج) V؛ (چ) NI، **۸۱**– (الف) ۳/۱cm+؛ (ب) ۰/۳۱−؛ (پ) R ؛ (ت) I ؛ (ث) مخالف، **۸۳**– (الف) ۲۴cm+؛ (ب) ۶/۰+؛ (پ) R ؛ (ت) NI ؛ (ث) مخالف، **۸۵**– (الف) ۵/۵cm−؛ (ب) ۰/۱۲+؛ (پ) V؛ (ت) NI؛ (ث) یکسان؛ **۸۷**– (الف) ۴/۶cm−؛ (ب) ۰/۶۹+، (پ) V؛ (ت) NI؛ (ث) یکسان، **۸۹**– (الف) ۱۳/۰cm؛ (ب) ۵/۲۳cm؛ (پ) ۳/۲۵−؛ (ت) ۳/۱۳؛ (ث) ۱۰/۲−، **۹۱**– (الف) ۳/۵cm؛ (ب) ۲/۵، **۹۳**– (الف) ۲/۳۵cm؛ (ب) کاهش، **۹۵**– (الف) ۳/۰۰cm؛ (ب) ۲/۳۳cm، **۹۷**– (الف) ۶/۰mm؛ (ب) ۱/۶kW/m²، (پ) ۴/۰cm **۹۹**– (الف) ۲۰/cm،(ب) ۱۵cm **۱۰۱**– ۲/۲mm²، **۱۰۷**– (الف) ۴۰cm؛ (ب) ۲۰ cm؛ (پ) ۴۰cm−، (ت) ۴۰cm **۱۰۹**– (الف) ۳۶cm+؛ (ب) ۱/۲ cm؛ (پ) حقیقی؛ (ث) وارونه، **۱۱۱**– (الف) ۵۰cm−؛ (ب) ۵/۰؛ (پ) مجازی؛ (ت) وارونه، **۱۱۳**– (الف) ۸/۶ cm+؛ (ب) ۲/۶+؛ (پ) R، (ت) IN؛ (ث) مخالف، **۱۱۵**– (الف) ۷/۵cm+؛ (ب) ۰/۷۵−؛ (پ) R؛ (ت) I؛ (ث) مخالف، **۱۱۷**– (الف) ۲۴cm+؛ (ب) ۰/۵۸−؛ (پ) R ؛ (ت) I، (ث) مخالف **۱۱۹**– (الف) ۰/۶۰m؛ (ب) ۰/۲۰+؛ (پ) حقیقی؛ (ت) چپ؛ (ث) وارونه نمی‌شود، **۱۲۵**– (الف) ۸/۰cm؛ (ب) ۱۶cm؛ (پ) ۴۸cm ، **۱۲۷**– (الف) ۷/۷۹۹cm : α = ۰/۵۰۰rad؛ ۸/۵۴۴cm : α = ۰/۱۰۰rad؛ ۸/۵۷۱cm : α = ۰/۰۱۰۰rad؛ معادلهٔ آینه: ۸/۵۷۱cm؛ (ب) ۱۳/۵۶cm− : α = ۰/۵۰۰rad؛ ۱۲/۰۵cm− : α = ۰/۱۰۰rad؛ ۱۲/۰۰cm− : α = ۰/۰۱۰۰rad معادلهٔ آینه: ۱۲/۰۰cm−، **۱۲۹**– ۴۲cm، **۱۳۱**– (ب) P_n، **۱۳۳**– (الف) $(۰/۵)(۲-n)r/(n-۱)$؛ (ب) راست، **۱۳۵**– ۲/۶۷cm، **۱۳۷**– (الف) ۳/۳۳cm؛ (ب) چپ؛ (پ) مجازی؛ (ت) وارونه نمی‌شود.

فصل ۳۵

نکته‌های وارسی

۱– b (کمترین n)، c ،a، **۲**– (الف) بالا؛ (ب) روشنایی متوسط (اختلاف فاز ۲/۱ طول موج است)، **۳**– (الف) ۳، ۳λ؛ (ب) ۲/۵، ۲/۵λ، **۴**– a و d یکسان (دامنه موج برآیند $4E_0$ است)، سپس b و c یکسان (دامنه موج برایند $2E_0$ است)، **۵**– (الف) ۱ و ۴؛ (ب) ۱ و ۴.

پرسشها

۱- (الف) $2d$؛ (ب) (عدد فرد) $\lambda/2$؛ (پ) $\lambda/4$، ۳- (الف) قله؛ (ب) دره؛ ۵- (الف) کاهش ؛ (ب) کاهش؛ (پ) کاهش، ۷- (الف) میانه نزدیک به بیشینه؛ $m=2$ (ب) کمینه، $m=3$ (پ) میانه نزدیک به بیشینه، $m=2$؛ (ت) بیشینه، $m=1$، ۹- (الف) بیشینه ؛ (ب) کمینه؛ (پ) یک در میان، ۱۱- (الف) d , c

مسئله‌ها

۱- ۱/۵۶ ، ۳- $4/55\times10^7$ m/s ، ۵- (الف) ۳/۶۰ μm ؛ (ب) میانه نزدیکتر به سازندهٔ کامل، ۷- (الف) ۱۵۵ nm ؛ (ب) ۳۱۰ nm ، ۹- (الف) ۱/۷۰؛ (ب) ۱/۷۰؛ (پ) ۱/۳۰؛ (ت) همگی یکسان، ۱۱. (الف) ۱/۵۵μm؛ (ب) ۴/۶۵μm؛ ۱۳- (الف) ۰/۸۳۳؛ (ب) میانه نزدیکتر به سازندهٔ کامل، ۱۵- ۱۶، ۱۷- ۶۴۸nm ، ۱۹- ۲/۲۵mm ، ۲۱- ۰ ، ۲۳- ۷/۸۸ μm، ۲۵- ۷۲μm، ۲۷- ۶/۶۴ μm ، ۲۹- ۲/۶۵ ، ۳۱- $(17/1\,\mu V/m)\sin[(2/0\times10^{14}\ rad/s)t]$، ۳۳- $27\sin(\omega t+8/5^\circ)$، ۳۵- ۷۰/۰ nm، ۳۷- (الف) ۰/۱۱۷μm؛ (ب) ۰/۳۵۲μm ، ۳۹- ۱۲۰ nm، ۴۱- ۵۰۹ nm ، ۴۳- ۴۷۸nm، ۴۵- ۵۶۰ nm، ۴۷- ۴۰۹ nm، ۴۹- ۱۶۱ nm، ۵۱- ۲۷۳ nm، ۵۳- (الف) ۵۵۲ nm؛ (ب) ۴۴۲nm، ۵۵- ۳۳۸nm، ۵۷- ۳۲۹nm، ۵۹- ۲۴۸nm، ۶۱- ۳۳۹nm، ۶۳- ۵۲۸nm، ۶۵- ۴۵۵nm، ۶۷- ۶۰۸nm، ۶۹- ۱/۸۹μm، ۷۱- ۱۴۰، ۷۳- °۰/۰۱۲، ۷۵- $[(m+\frac{1}{2})\lambda R]^{0/5}$، به ازای $m=0,1,2,\ldots$ ، ۷۷- ۱/۰۰m، ۷۹- ۵۸۸nm، ۸۱- ۱/۰۰۰۳۰، ۸۳- (الف) °۲۲؛ (ب) شکست θ را کاهش می‌دهد، ۸۵- (الف) ۵۰/۰ nm؛ (ب) ۳۶/۲nm، ۸۷- $x=(D/2a)(m+0/5)\lambda$، به ازای $m=0,1,2,\ldots$، ۸۹- °۰/۲۳، ۹۱- ۴۵۰ nm، ۹۳- (الف) ۱/۷۵μm؛ (ب) ۴/۸mm، ۹۵- ۳۳μm، ۹۷- (الف) ۱۵۰۰nm؛ (ب) ۲۲۵۰nm؛ (پ) ۰/۸۰، ۹۹- ۶۰۰ nm، ۱۰۱- (الف) ۸۸ درصد؛ (ب) ۹۴ درصد، ۱۰۳- $I_m\cos^2(2\pi x/\lambda)$، ۱۰۵- ۸/۰μm، ۱۰۷- (الف) ۱/۸۰μm؛ (ب) ۹، ۱۰۹- ۵۱/۱ ns ، ۱۱۱- (الف) ۱/۶rad؛ (ب) ۰/۷۹rad ، ۱۱۳- (الف) تاریک؛ (ب) تاریک؛ (پ) ۴ ، ۱۱۵- (الف) ۱ ؛ (ب) ۴/۰fs؛ (پ) ۷/۵ ، ۱۱۷- (الف) °۴۸/۶ ؛ (ب) دور؛ (پ) ۱/۴۹m ، ۱۱۹- ۴۲/۰ps ؛ (ب) ۴۲/۳ps؛ (پ) ۴۳/۲ps؛ (ت) ۴۱/۸ps؛ (ث) ۴، ۱۲۱- $I_0[1+8\cos^2(\phi/2)]$، با $\phi=(2\pi d/\lambda)\sin\theta$

فصل ۳۶

نکته‌های وارسی

۱- (الف) باز می‌شود؛ (ب) باز می‌شود، ۲- (الف) طرف دوم بیشینه؛ (ب) ۲/۵ ، ۳- (الف) قرمز، (ب) بنفش، ۴- کم می‌شود، ۵- (الف) چپ؛ (ب) کمتر

پرسشها

۱- (الف) A، B، C ؛ (ب) A، B، C؛ ۳- (الف) ۱ و ۳ یکسان، سپس ۲ و ۴ یکسان؛ (ب) ۱ و ۲ یکسان، سپس ۳و ۴ یکسان، ۵- (الف) کمینه $m=5$؛ (ب) (تقریباً) بیشینه بین کمینه‌های $m=4$ و $m=5$ ، ۷- (الف) کاهش؛ (ب) یکسان؛ (پ) در مکان خود می‌ماند، ۹- (الف) بزرگتر؛ (ب) قرمز، ۱۱- (الف) A ؛ (ب) چپ؛ (پ) چپ؛ (ت) راست

مسئله‌ها

۱- (الف) ۷۰۰nm؛ (ب) ۴ ؛ (پ) ۶ ، ۳- ۶۰/۴ μm، ۵- **(الف)** ۷۰cm؛ **(ب)** ۱/۰mm، ۷- (الف) ۲/۵mm؛ (ب) $2/2\times10^{-4}$ rad، ۹- ۱/۷۷mm، ۱۱- (الف) °۰/۱۸؛ (ب) ۰/۴۶rad؛ (پ) ۰/۹۳، ۱۳- °۱۶۰، ۱۵- (ب) ۰ ؛ (پ) ۰/۵۰۰- ؛ (ت) ۴/۴۹۳rad ؛ (ث) ۰/۹۳۰ ؛ (ج) ۷/۷۲۵rad؛ (چ) ۱/۹۸، ۱۷- (ت) °۵۲/۵؛ (ث) °۱۰/۱؛ (ج) °۵/۰۶، ۱۹- $1/6\times10^3$ km ، ۲۱- (الف) $1/3\times10^{-4}$ rad؛ (ب) ۱۰km، ۲۳- ۵۰m، ۲۵- (الف) $1/1\times10^4$ km؛ (ب) ۱۱km، ۲۷- (الف) ۱۹cm؛ (ب) بزرگتر، ۲۹- (الف) °۰/۳۴۶؛ (ب) °۰/۹۷، ۳۱- (الف) ۱۷/۱m؛ (ب) $1/37\times10^{-10}$، ۳۳- (الف) $8/8\times10^{-7}$ rad؛ (ب) $8/4\times10^7$ km؛ (پ) ۰/۰۲۵mm، ۳۵- ۳، ۳۷- ۵ ، ۳۹- (الف) ۹ ؛ (ب) ۰/۲۵۵، ۴۱- (الف) ۵/۰ μm؛ (ب) ۲۰ μm، ۴۳- (الف) $7/43\times10^{-3}$؛ (ب) بین کمینه $m=6$ (هفتم) و بیشینه $m=7$ هفتمین بیشینهٔ کناری؛ (پ) بین کمینه $m=3$ (سوم) و بیشینه $m=4$ (چهارم) ، ۴۵- ۳ ، ۴۷- (الف) °۶۲/۱؛ (ب) °۴۵/۰؛ (پ) °۳۲/۰، ۴۹- (الف) °۲/۱؛ (ب) °۲۱؛ (پ) ۱۱ ، ۵۱- (الف) ۶/۰ μm؛ (ب) ۱/۵ μm؛ (پ) ۹ ؛ (ت) ۷؛ (ث) ۶ ، ۵۳- $1/09\times10^3$ خط/mm، ۵۵- (الف) ۴۷۰nm ؛ (ب) ۵۶۰nm، ۵۷- ۰/۱۵nm ، ۵۹- (الف) ۰/۰۳۲°/nm ؛ (ب) $4/0\times10^4$؛ (پ) ۰/۰۷۶°/nm؛ (ت) $8/0\times10^4$؛ (ث) ۰/۲۴°/nm؛ (ج) $1/2\times10^5$ ، ۶۱- $3/65\times10^3$ ، ۶۳- **(الف)** ۱۰ μm؛ (ب) ۳/۳mm ، ۶۵-

(الف) ۲۵pm (ب) ۳۸pm ، ۶۷- ۰/۲۶nm ، ۶۹- (الف) ۰/۱۷nm؛ (ب) ۰/۱۳nm ، ۷۱- (الف) ۰/۷۰۷۱a_0؛ (ب) ۰/۴۴۷۲a_0؛ (پ) ۰/۳۱۶۲a_0؛ (ت) ۰/۲۷۷۴a_0؛ (ث) ۰/۲۴۲۵a_0 ، ۷۳- (الف) °۱۵/۳۰ (ب) °۳۰/۶۰nm ؛ (پ) °۳/۱؛ (ت) °۳۷/۸، ۷۵- ۴/۷cm ، ۷۷- (الف) ۶۲۵ nm ؛ (ب) ۵۰۰nm؛ (پ) ۴۱۶ nm، ۷۹- ۳/۰mm ، ۸۱- (الف) ۱۳؛ (ب) ۶ ، ۸۳- ۵۹/۵pm، ۸۵- ۴/۹km ، ۸۷- ۱/۳۶$\times ۱۰^{۴}$ ، ۸۹- ۳۶ cm ، ۹۷- ۲ ، ۹۹- (الف) چهارم؛ (ب) هفتم ، ۱۰۳- (الف) ۲/۴μm؛ (ب) ۰/۸۰μm (پ) ۲ ، ۱۰۷- ۹.

فصل ۳۷

نکته‌های وارسی

۱- (الف) یکسان (اصل موضوع سرعت نور)؛ (ب) خیر (شروع و پایان پرواز به لحاظ مکانی جدا شده‌اند)؛ (پ) خیر (چون اندازه‌گیری او یک ویژه زمان نیست)، ۲- (الف) معادلهٔ ۲؛ (ب) ۰/۹۰c؛ (پ) ۲۵ns؛ (ت) -۷/۰m، ۳- (الف) راست؛ (ب) بیشتر، ۴- (الف) مساوی؛ (ب) کمتر

پرسشها

۱- (الف) C'_1؛ (ب) C'_1 ۳- (الف) ۴s؛ (ب) ۳s؛ (پ) ۵s؛ (ت) ۴s؛ (ث) ۱۰s ، ۵- c ؛ ۷- b ، ۹- (الف) ۳ ، ۱ و ۲ یکسان، سپس ۴؛ (ب) ۴ ، ۱ و ۲ یکسان، سپس ۳؛ (پ) ۱، ۴، ۲، ۳، ۱۱- (الف) ۳ و ۴ یکسان، و ۶ ، سپس ۱ و ۲ یکسان، و ۵؛ (ب) ۱، سپس ۲ و ۳ یکسان، سپس ۴، سپس ۵ و ۶ یکسان؛ (پ) ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ ؛ (ت) ۲ و ۴؛ (ث) ۱، ۲، ۵

مسئله‌ها

۱- ۰/۹۹۰۵۰ ، ۳- ۰/۴۴۶ps ، ۵- ۲۶۸$\times ۱۰^{۳}$ y ، ۷- (الف) ۰/۹۹۹۹۹۹۵۰ ، ۹- ۱/۳۲m ، ۱۱- (الف) ۸۷/۴m؛ (ب) ۳۹۴ns ، ۱۳- (الف) ۰/۹۹۹۹۹۹۱۵؛ (ب) ۳۰ly، ۱۵- (الف) ۲۶/۲۶y ؛ (ب) ۵۲/۲۶y؛ (پ) ۳/۷۰۵y ، ۱۷- (الف) ۲۵/۸μs ؛ (ب) جرقهٔ کوچک ، ۱۹- (الف) ۱۳۸km ؛ (ب) -۳۷۴μs ، ۲۱- (الف) ۱/۲۵؛ (ب) ۰/۸۰۰μs ، ۲۳- (الف) ۰/۴۸۰؛ (ب) منفی؛ (پ) جرقهٔ بزرگ؛ (ت) ۴/۳۹μs ، ۲۵- (الف) $\gamma[۱/۰۰\mu s-\beta(۴۰۰m)/(۲/۹۹۸\times ۱۰^{۸} m/s)]$ ؛ (ت) ۰/۷۵۰؛ (ث) $۰<\beta<۰/۷۵۰$؛ (ج) $۰/۷۵۰<\beta<۱$ ؛ (چ) خیر، ۲۷- (الف) ۰/۳۵؛ (ب) ۰/۶۲ ، ۲۹- ۰/۸۱c ، ۳۱- (الف) ۱/۲۵y؛ (ب) ۱/۶۰y؛ (پ) ۴/۰۰y ، ۳۳- (الف) ۱/۲μs ، ۳۵- ۰/۱۳c ، ۳۷- ۲۲/۹MHz ، ۳۹- (الف) ۵۵۰nm؛ (ب) زرد ، ۴۱- (الف) ۱/۰keV؛ (ب) ۱/۱MeV ، ۴۳- (الف) ۱۹۶/۶۹۵ ؛ (ب) ۰/۰۹۹۹۹۸۷، ۴۵- ۲/۸۳mc ، ۴۷- (الف) ۰/۲۲۲cm ؛ (ب) ۷۰۱ps؛ (پ) ۷/۴۰ps، ۴۹- (الف) ۰/۷۰۷ ؛ (ب) ۱/۴۱؛ (پ) ۰/۴۱۴ ، ۵۱- ۱۸smu/y ، ۵۳- ۱/۰۱$\times ۱۰^{۷}$ km ، ۵۵- (الف) $\gamma(۲\pi m/|q|B)$ ؛ (ب) خیر؛ (پ) ۴/۸۵mm؛ (ت) ۱۵/۹mm؛ (ث) ۱۶/۳ps؛ (ج) ۰/۳۳۴ns، ۵۷- ۱۱۰km ، ۵۹- (الف) ۲/۰۸MeV؛ (ب) -۱/۲۱MeV ، ۶۱- (الف) $vt\sin\theta$؛ (ب) $t[۱-(v/c)\cos\theta]$؛ (پ) ۳/۲۴c ، ۶۳- (ت) ۰/۸۰۱ ، ۶۵- (الف) ۱/۹۳m؛ (ب) ۶/۰۰m ؛ (پ) ۱۳/۶ns؛ (ت) ۱۳/۶ns؛ (ث) ۰/۳۷۹m؛ (ج) ۳۰/۵m؛ (چ) -۱۰۱ns؛ (ح) خیر؛ (خ) ۲؛ (ر) هردو؛ (ذ) خیر ، ۶۹- (ب) +۰/۴۴c ، ۷۱- ۸/۷$\times ۱۰^{-۳}$ ly ، ۷۳- ۲/۴۶MeV/c ، ۷۵- ۱۸۹MeV ، ۷۷- (الف) ۵/۴$\times ۱۰^{۴}$ km/h ؛ (ب) ۶/۳$\times ۱۰^{-۱۰}$، ۷۹- ۰/۲۷c ، ۸۱- (الف) ۵/۷۱ GeV؛ (ب) ۶/۶۵GeV؛ (پ) ۶/۵۸GeV/c؛ (ت) ۳/۱۱MeV؛ (ث) ۳/۶۲MeV ؛ (ج) ۳/۵۹MeV/c ، ۸۳- (الف) ۲۵۶kV ؛ (ب) ۰/۷۴۵c، ۸۵- ۷ ، ۸۷- ۰/۹۵c

فصل ۳۸

نکته‌های وارسی

۱- b ، a ، d و c ، ۲- (الف) لیتیوم، سدیم، پتاسیم، سزیوم؛ (ب) همگی یکسان، ۳- (الف) یکسان؛ (ب)- (ت) پرتوهای x ، ۴- (الف) پروتون؛ (ب) یکسان؛ (پ) پروتون ، ۵- یکسان

پرسشها

۱- پتاسیم ، ۳- فقط e ، ۵- (الف) بیشتر؛ (ب) کمتر ، ۷- (الف) با ضریب $(۱/۲)^{۰/۵}$ کاهش می‌یابد؛ (ب) با ضریب ۱/۲ کاهش می‌یابد ، ۹- هیچ یک ، ۱۱- الکترون، نوترون، ذرهٔ آلفا ، ۱۳- همگی یکسان ، ۱۵- دامنه موج بازتابیده کمتر از موج تابیده است.

مسئله‌ها

۱- ۱/۰$\times ۱۰^{۴۵}$ نوترون/s ، ۳- ۲/۰۴۷eV ، ۵- (الف) ۲/۱μm؛ (ب) فروسرخ ، ۷- (الف) فروسرخ؛ (ب) ۱/۴$\times ۱۰^{۲۱}$ فوتون/s ، ۹- ۴/۷$\times ۱۰^{۲۶}$ فوتون ، ۱۱- (الف) ۲/۹۶$\times ۱۰^{۲۰}$ فوتون/s ؛ (ب) ۴/۸۶$\times ۱۰^{۷}$ m؛ (پ) ۵/۸۹$\times ۱۰^{۱۸}$ فوتون/m²·s ، ۱۳- ۱/۱$\times ۱۰^{-۱۰}$ W ، ۱۵-

۶۷۶km/s ، ۱۷- ۱۷۰nm ، ۱۹- (الف) ۳۸۲nm؛ (ب) ۱/۸۲eV ، ۲۱- (الف) ۲/۰۰eV؛ (ب) ۰؛ (پ) ۲/۰۰V؛ (ت) ۲۹۵nm ، ۲۳- (الف) ۱/۳V؛ (ب) $۶/۸\times۱۰^{۲}$ km/s ، ۲۵- (الف) ۳/۱keV؛ (ب) ۱۴keV ، ۲۷- (الف) $۸/۵۷\times۱۰^{۱۸}$ Hz؛ (ب) $۳/۵۵\times۱۰^{۴}$ eV؛ (پ) $۳۵/۴keV/c$ ، ۲۹- (الف) ۲/۷۳pm؛ (ب) ۶/۰۵pm ، ۳۱- (الف) ٪ $-۸/۱\times۱۰^{-۹۰}$؛ (ب) ٪ $-۴/۹\times۱۰^{-۴۰}$؛ (پ) ٪۸/۹-؛ (ت) ٪۶۶- ، ۳۳- (الف) ۲/۴۳pm ؛ (ب) ۱/۳۲fm؛ (پ) ۰/۵۱۱MeV؛ (ت) ۹۳۹MeV، ۳۵- (الف) ۲/۴۳pm؛ (ب) $۴/۱۱\times۱۰^{-۶}$ ؛ (پ) $-۸/۶۷\times۱۰^{-۶}$ eV؛ (ت) ۲/۴۳pm؛ (ث) $۹/۷۸\times۱۰^{-۲}$؛ (ج) ۴/۴۵keV- ، ۳۷- ٪۳۰۰ ، ۳۹- (الف) ۴۱/۸keV ؛ (ب) ۸/۲keV، ۴۱- °۴۴ ، ۴۳- ۷/۷۵pm ، ۴۵- (الف) $۱/۲۴\mu m$؛ (ب) ۱/۲۲nm ؛ (پ) ۱/۲۴fm؛ (ت) ۱/۲۴fm ، ۴۷- (الف) $۱/۹\times۱۰^{-۲۱}$ kg·m/s ؛ (ب) ۳۴۶fm، ۴۹- $۴/۳\mu eV$ ، ۵۱- نوترون ، ۵۳- (الف) ۱۵keV؛ (ب) ۱۲۰keV ، ۵۵- (الف) $۳/۹۶\times۱۰^{۶}$ m/s؛ (ب) ۸۱/۷kV ، ۶۳- $۲/۱\times۱۰^{-۲۴}$ kg·m/s ، ۶۷- (الف) ٪۲۰-؛ (ب) ٪۱۰-؛ (پ) ٪۱۵+ ، ۶۹- (الف) $۹/۰۲\times۱۰^{-۶}$؛ (ب) ۳/۰MeV؛ (پ) ۳/۰MeV (ت) $۷/۳۳\times۱۰^{-۸}$ ؛ (ث) ۳/۰MeV ؛ (ج) ۳/۰MeV، ۷۳- (الف) ۷۳pm؛ (ب) ۳/۴nm؛ (پ) بلی، میانگین طول موج دوبروی آنها کمتر از میانگین فاصلهٔ آنهاست، ۷۵- $۵/۹\mu eV$ ، ۷۷- $۱/۷\times۱۰^{-۳۵}$ m ، ۷۹- ۰/۱۹m

فصل ۳۹

نکته‌های وارسی

۱- b ، a ، c ، ۲- (الف) همگی یکسان؛ (ب) a ، b ، c ، ۳- a ، b، c ، d ، ۴- $E_{1,1}$ (نه n_x ، نه n_y صفر نمی‌تواند باشد) ، ۵- (الف) ۵ ؛ (ب) ۷

پرسشها

۱- (الف) ۱۸؛ (ب) ۱۷ ، ۳- a ، c ، b ، ۵- c ، ۷- برابر ، ۹- b ، c و d ، ۱۱- $n=۱$ ، $n=۲$ ، $n=۳$ ، ۱۳- (الف) کاهش؛ (ب) افزایش، ۱۵- (الف) $n=۳$؛ (ب) $n=۱$؛ (پ) $n=۵$

مسئله‌ها

۱- ۰/۶۵eV ، ۳- ۰/۸۵nm ، ۵- ۱/۹GeV ، ۷- ۱/۴۱ ، ۹- (الف) ۱۳؛ (ب) ۱۲ ، ۱۱- (الف) ۷۲/۲eV؛ (ب) ۱۳/۷nm؛ (پ) ۱۷/۲nm؛ (ت) ۶۸/۷nm؛ (ث) ۴۱/۲nm؛ (چ) ۶۸/۷nm؛ (ح) ۲۵/۸nm ، ۱۳- (الف) ۰/۰۵۰؛ (ب) ۰/۱۰؛ (پ) ۰/۰۰۹۵ ، ۱۵- (الف) ۰/۰۲۰ ؛ (ب) ۲۰، ۱۷- ۵۶eV ، ۲۱- ۱۰۹eV ، ۲۳- ۳/۲۱eV ، ۲۵- (الف) ۸؛ (ب) ۰/۷۵؛ (پ) ۱/۰۰ ؛ (ت) ۱/۲۵؛ (ث) ۳/۷۵؛ (ج) ۳/۰۰؛ (چ) ۲/۲۵، ۲۷- (الف) ۷ ؛ (ب) ۱/۰۰؛ (پ) ۲/۰۰؛ (ت) ۳/۰۰؛ (ث) ۹/۰۰؛ (ج) ۸/۰۰؛ (چ) ۶/۰۰، ۲۹- $۱/۴\times۱۰^{-۳}$ ، ۳۱- (الف) $۲۹۱\ nm^{-۳}$ ؛ (ب) $۱۰/۲nm^{-۱}$، ۳۵- (الف) ۱۲/۱eV ؛ (ب) $۶/۴۵\times۱۰^{-۲۷}$ kg·m/s؛ (پ) ۱۰۲nm، ۳۷- ۴/۰ ، ۳۹- (الف) ۱۳/۶eV؛ (ب) ۳/۴۰eV ، ۴۱- ۰/۶۸ ، ۴۵- (الف) ۱۳/۶eV؛ (ب) ۲۷/۲eV-، ۴۹- (الف) $(r^{۴}/۸a^{۵})[\exp(-r/a)]\cos^{۲}\theta$ ؛ (ب) $(r^{۴}/۱۶a^{۵})[\exp(-r/a)]\sin^{۲}\theta$ ، ۵۱- (الف) ۰/۰۰۳۷ ؛ (ب) ۰/۰۰۵۴، ۵۳- $۴/۳\times۱۰^{۳}$ ، ۵۷- (ب) $(۲\pi/h)[۲m(U_۰-E)]^{۰/۵}$ ، ۵۹- (الف) n ؛ (ب) $۲\ell+۱$؛ (پ) $n^{۲}$ ، ۶۳- (ب) ۲/۵- متر

فصل ۴۰

نکته‌های وارسی

۱- ۷ ، ۲- (الف) کاهش؛ (ب)- (ث) یکسان می‌ماند ، ۳- A ، C ، B

پرسشها

۱- ۲، ۱- ، ۰ و ۱ ، ۳- همان تعداد (۱۰) ، ۵- (الف) ۲؛ (ب) ۸ ؛ (پ) ۵ ؛ (ت) ۵۰ ، ۷- همه درست، ۹- (الف) n ؛ (ب) n,ℓ ، ۱۱- علاوه بر انرژی کوانتیده، اتم هلیوم انرژی جنبشی دارد؛ انرژی کل آن برابر ۲۰/۶۶eV است، ۱۳- (الف) ۲؛ (ب) ۳

مسئله‌ها

۱- (الف) ۴؛ (ب) ۵؛ (پ) ۲، ۳- (الف) ۳؛ (ب) ۳ ، ۵- (الف) $۳/۶۵\times۱۰^{-۳۴}$ J·s؛ (ب) $۳/۱۶\times۱۰^{-۳۴}$ J·s ، ۷- °۲۴/۱ ، ۱۱- (الف) ۳/۴۶؛ (ب) ۳/۴۶؛ (پ) ۳؛ (ت) ۳؛ (ث) ۳-؛ (ج) °۳۰/۰؛ (چ) °۵۴/۷؛ (ح) °۱۵۰ ، ۱۳- (الف) °۵۴/۷؛ (ب) °۱۲۵، ۱۵- $۷۲ km/s^{۲}$ ، ۱۷- ۵/۳۵cm ، ۱۹- ۱۹mT ، ۲۱- ۴۴ ، ۲۳- (الف) ۵۱ ؛ (ب) ۵۳ ؛ (پ) ۵۶ ، ۲۵- ۴۲ ، ۲۷- g ، ۲۹- (الف) p ۴؛ (ب) ۴؛ (پ) p ۴ ؛ (ت) ۵؛ (ث)

p ۴؛ (ج) ۶ ، ۳۱- (الف) $(۲,۰,۰,+\frac{۱}{۲}),(۲,۰,۰,-\frac{۱}{۲})$؛ (ب) $(۲,۱,۱,+\frac{۱}{۲})$, $(۲,۱,۱,-\frac{۱}{۲})$, $(۲,۱,۰,+\frac{۱}{۲})$, $(۲,۱,۰,-\frac{۱}{۲})$, $(۲,۱,-۱,+\frac{۱}{۲})$ ، $(۲,۱,-۱,-\frac{۱}{۲})$ ، ۳۳- ۱۲/۴kV ، ۳۵- (الف) ۴۹/۶pm ؛ (ب) ۹۹/۲pm، ۳۷- (الف) ۳۵/۴kV ؛ (ب) ۵۶/۵pm؛ (پ) ۴۹/۶pm، ۴۱- ۰/۵۶۳ ، ۴۳- ۸۰/۳pm ، ۴۵- (الف) ۶۹/۵kV ؛ (ب) ۱۷/۸pm؛ (پ) ۲۱/۳pm؛ (ت) ۱۸/۵pm ، ۴۷- (الف) ۳/۶۰mm؛ (ب) $۵/۲۴\times۱۰^{۱۷}$ ، ۴۹- $۹/۰\times۱۰^{-۷}$ ، ۵۱- $۷/۳\times۱۰^{۱۵}\ s^{-۱}$ ، ۵۳- ۲×۱۰^{۷} ، ۵۵- $۲/۰\times۱۰^{-۱۶}\ s^{-۱}$ ، ۵۷- ۳/۰eV ، ۵۹- (الف) $۳/۰۳\times۱۰^{۵}$ ؛ (ب) ۱/۴۳GHz؛ (ت) $۳/۳۱\times۱۰^{-۶}$، ۶۱- (الف) ۰؛ (ب) ۶۸ J ، ۶۳- (الف) ۲/۱۳meV؛ (ب) ۱۸ T ، ۶۵- (الف) خیر؛ (ب) ۱۴۰nm ، ۶۷- ۱۸۶ ، ۷۱- (الف) ۶/۰ ؛ (ب) $۳/۲\times۱۰^{۶}$ y ، ۷۳- آرگون ، ۷۷- $n>۳$ ؛ $\ell=۳$؛ $m_\ell=+۳,+۲,+۱,۰,-۱,-۲,-۳$ ؛ $m_s=\pm\frac{۱}{۲}$

فصل ۴۱

نکته‌های وارسی

۱- (الف) بزرگتر؛ (ب) یکسان ، ۲- a و b و c

پرسشها

۱- زیر ، ۳- افزایش ، ۵- ۸ ، ۷- خیلی کمتر، ۹- b ، c و d (مورد اخیر به دلیل انبساط گرمایی)، ۱۱- b و d

مسئله‌ها

۱- (الف) ۰ ؛ (ب) ۰/۰۹۵۵ ، ۳- (ب) $۶/۸۱\times۱۰^{۲۷}\ m^{-۳}eV^{-۳/۲}$؛ (پ) $۱/۵۲\times۱۰^{۲۸}\ m^{-۳}eV^{-۱}$ ، ۵- $۸/۴۹\times۱۰^{۲۸}\ m^{-۳}$ ، ۹- (الف) ۶/۸۱ eV؛ (ب) $۱/۷۷\times۱۰^{۲۸}\ m^{-۳}eV^{-۱}$ ؛ (پ) $۱/۵۹\times۱۰^{۲۸}\ m^{-۳}eV^{-۱}$، ۱۱- (الف) $۲/۵۰\times۱۰^{۳}$ K؛ (ب) $۵/۳۰\times۱۰^{۳}$ K ، ۱۳- (الف) ۱/۰؛ (ب) ۰/۹۹؛ (پ) ۰/۵۰؛ (ت) ۰/۰۱۴ ؛ (ث) $۲/۴\times۱۰^{-۱۷}$؛ (ج) $۷/۰\times۱۰^{۲}$ K، ۱۵- (الف) $۱/۳۶\times۱۰^{۲۸}\ m^{-۳}eV^{-۱}$؛ (ب) $۱/۶۸\times۱۰^{۲۸}\ m^{-۳}eV^{-۱}$ ؛ (پ) $۹/۰۱\times۱۰^{۲۷}\ m^{-۳}eV^{-۱}$؛ (ت) $۹/۵۶\times۱۰^{۲۶}\ m^{-۳}eV^{-۱}$؛ (ث) $۱/۷۱\times۱۰^{۱۸}\ m^{-۳}eV^{-۱}$ ، ۱۷- (الف) $۵/۸۶\times۱۰^{۲۸}\ m^{-۳}$؛ (ب) ۵/۴۹eV؛ (پ) $۱/۳۹\times۱۰^{۳}$ km/s؛ (ت) ۰/۵۲۲nm ، ۱۹- ۳ ، ۲۳- ۵۷/۱ kJ ، ۲۵- (الف) $۱/۳۱\times۱۰^{۲۹}$ m؛ (ب) ۹/۴۳eV (پ) $۱/۸۲\times۱۰^{۳}$ km/s؛ (ت) ۰/۴۰nm، ۲۷- (الف) ۰/۰۰۵۵؛ (ب) ۰/۰۱۸ ، ۲۹- (الف) ۱۹/۷kJ؛ (ب) ۱۹۷ s ، ۳۱- (الف) ۲۲۶nm؛ (ب) فرابنفش ، ۳۳- (الف) $۱/۵\times۱۰^{-۶}$؛ (ب) $۱/۵\times۱۰^{-۶}$ ، ۳۵- (الف) $۴/۴۹\times۱۰^{-۱۰}$؛ (ب) ۰/۰۱۴۰؛ (پ) ۰/۸۲۴ ، ۳۷- ۰/۲۲μg ، ۳۹- $۶/۰\times۱۰^{۵}$ ، ۴۱- ۴/۲۰eV ، ۴۳- ۱۳μm ، ۴۵- (الف) $۱۰۹/۵^\circ$؛ (ب) ۲۳۸pm ، ۴۷- (ب) $۱/۸\times۱۰^{۲۸}\ m^{-۳}eV^{-۱}$ ، ۵۱- $۳/۴۹\times۱۰^{۳}$ atm

فصل ۴۲

نکته‌های وارسی

۱- ^{۹۰}As و ^{۱۵۸}Nd ، ۲- اندکی بیش از ۷۵ Bq (زمان طی شده اندکی پیش از سه نیمه عمر است)، ۳- ^{۲۰۶}Pb

پرسشها

۱- (الف) کمتر؛ (ب) بیشتر ، ۳- ^{۲۴۰}U ، ۵- (الف) ^{۱۹۶}Pt؛ (ب) خیر ، ۷- بلی ، ۹- بلی ، ۱۱- بدون اثر ، ۱۳- d ، ۱۵- (الف) همه غیر از ^{۱۹۸}Au ؛ (ب) ^{۱۳۲}Sn و ^{۲۰۸}Pb

مسئله‌ها

۱- $۱/۳\times۱۰^{-۱۳}$ m ، ۳- (الف) ۰/۳۹۰MeV؛ (ب) ۴/۶۱MeV ، ۵- ۴۶/۶fm ، ۷- (الف) ۶ ؛ (ب) ۸ ، ۹- ۱۳km ، ۱۱- (الف) $۲/۳\times۱۰^{۱۷}\ kg/m^{۳}$؛ (ب) $۲/۳\times۱۰^{۱۷}\ kg/m^{۳}$ ؛ (ت) $۱/۰\times۱۰^{۲۵}\ C/m^{۲}$؛ (ث) $۸/۸\times۱۰^{۲۴}\ C/m^{۳}$، ۱۳- (الف) ۶/۲fm؛ (ب) بلی ، ۱۵- (الف) ۹/۳۰۳٪؛ (ب) ۱۱/۷۱٪ ، ۱۹- (ب) ۷/۹۲ MeV/نوکلئون ، ۲۳- ۱/۰۰۸۷u ، ۲۵- (الف) $۷/۵\times۱۰^{۱۶}\ s^{-۱}$؛ (ب) $۴/۹\times۱۰^{۱۶}\ s^{-۱}$ ، ۲۷- (الف) ۶۴/۲h؛ (ب) ۰/۱۲۵؛ (پ) ۰/۰۷۴۹ ، ۲۹- (الف) ۰/۲۵۰؛ (ب) ۰/۱۲۵ ، ۳۱- $۵/۳\times۱۰^{۲۲}$ ، ۳۳- $۹/۰\times۱۰^{۸}$ Bq ، ۳۵- (الف) $۲/۰\times۱۰^{۲۰}$؛ (ب) $۲/۸\times۱۰^{۹}\ s^{-۱}$ ، ۳۷- (الف) $۳/۲\times۱۰^{۱۲}$ Bq؛ (ب) ۸۶Ci ، ۳۹- $۱/۱۲\times۱۰^{۱۱}$ y ، ۴۱- ۲۶۵mg، ۴۵- (الف) $۸/۸۸\times۱۰^{۱۰}\ s^{-۱}$؛ (ب) $۱/۱۹\times۱۰^{۱۵}$؛ (پ) ۰/۱۱۱μg ، ۴۷- ۱×۱۰^{۱۳} atoms ، ۴۹- (الف) $۱/۲\times۱۰^{-۱۷}$؛ (ب) ۰ ، ۵۱- ۴/۲۶۹MeV ، ۵۳- ۰/۷۸۳MeV ، ۵۵- ۱/۲۱ MeV ، ۵۷- (ب) ۰/۹۶۱MeV ، ۵۹- ۷۸/۳eV ، ۶۱- (الف) $۱/۰۶\times۱۰^{۱۹}$ ؛ (ب) $۰/۶۲۴\times۱۰^{۱۹}$؛ (پ) $۱/۶۸\times۱۰^{۱۹}$؛ (ت) $۲/۹۷\times۱۰^{۹}$ y، ۶۳- ۱/۷mg ، ۶۵- ۲/۵۰mSv ، ۶۷- ۱/۰۲mg ، ۶۹- (الف) $۶/۳\times۱۰^{۱۸}$؛ (ب) $۲/۵\times۱۰^{۱۱}$؛ (پ) ۰/۲۰J؛ (ت) ۲/۳mGy؛ (ث) ۳۰mSv ، ۷۱- (الف) ۶/۶MeV ؛ (ب)

خیر، **۷۳-** (الف) ۲۵/۴MeV؛ (ب) ۱۲/۸ MeV؛ (پ) ۲۵/۰MeV، **۷۵-** ۷۳۰cm^{۲} ، **۷۷-** (الف) ۵۹/۵d؛ (ب) ۱/۱۸ ، **۷۹-** ^{۲۲۵}Ac ، **۸۱-** ۱۳mJ ، **۸۳-** ۳۰MeV ، **۸۵-** ۳/۲×۱۰^{۴} y ، **۸۷-** ^{۷}Li ، **۹۳-** (الف) ۱۱/۹۰۶۸۳u؛ (ب) ۲۳۶/۲۰۲۵u ، **۹۵-** ۲۷ ، **۹۷-** ۶۰۰keV

فصل ۴۳

نکته‌های وارسی

۱- c و d ، **۲-** (الف) خیر؛ (ب)بلی؛ (پ) خیر، **۳-** e

پرسشها

۱- ^{۱۴۰}I, ^{۱۰۵}Mo, ^{۱۵۲}Nd, ^{۱۱۵}In , ^{۱۱۵}Pd ، **۳-** افزایش، **۵-** (الف) ۱۰۱؛ (ب) ۴۲، **۷-** ^{۲۳۹}Np ، **۹-** هنوز برابر با ۱ ، **۱۱-** کمتر

مسئله‌ها

۱- ۲۳/۰MeV- ، **۳-** ۳/۱×۱۰^{۱۰} s$^{-۱}$ ، **۵-** (الف) ۲/۶×۱۰^{۲۴}؛ (ب) ۸/۲×۱۰^{۱۳} J؛ (پ) ۲/۶×۱۰^{۴} y ، **۷-** (الف) ۱۶day$^{-۱}$؛ (ب) ۴/۳×۱۰^{۸} ، **۹-** ۴/۸MeV ، **۱۱-** ۱/۳×۱۰^{۳} kg ، **۱۳-** (الف) ^{۱۵۳}Nd؛ (ب) ۱۱۰MeV؛ (پ) ۶۰MeV؛ (ت) ۱/۶×۱۰^{۷} m/s؛ (ث) ۸/۷×۱۰^{۶} m/s ، **۱۵-** (الف) ۸۴kg؛ (ب) ۱/۷×۱۰^{۲۵} ؛ (پ) ۱/۳×۱۰^{۲۵}، **۱۷-** (الف) ۲۵۱MeV؛ (ب) انرژی شکافت نوعی ۲۰۰MeV است، **۱۹-** ۵۵۷W ، **۲۳-** (ب) ۱/۰ ؛ (پ) ۰/۸۹؛ (ت) ۰/۲۸؛ (ث) ۰/۰۱۹؛ (ج) ۸ ، **۲۵-** ۰/۹۹۹۳۸ ، **۲۷-** (الف) ۷۵kW ؛ (ب) ۵/۸×۱۰^{۳} kg، **۲۹-** ۱/۷×۱۰^{۹} y ، **۳۱-** ۱۷۰keV ، **۳۳-** ۱/۴۱ MeV ، **۳۵-** (الف) ۴/۳×۱۰^{۹} kg/s ؛ (ب) ۳/۱×۱۰$^{-۴}$، **۳۹-** ۱۰$^{-۱۲}$ m ، **۴۱-** (الف) ۱/۸×۱۰^{۳۸} s$^{-۱}$؛ (ب) ۸/۲×۱۰^{۲۸} s$^{-۱}$ ، **۴۳-** (الف) ۴/۱ eV/atom؛ (ب) ۹/۰MJ/kg؛ (پ) ۱/۵×۱۰^{۳} y ، **۴۵-** ۱/۶×۱۰^{۸} y ، **۴۷-** (الف) ۲۴/۹MeV؛ (ب) ۸/۶۵ مگاتن TNT ، **۴۹-** ۱۴/۴ kW ، **۵۱-** (الف) ۳/۱×۱۰^{۳۱} پروتون/m^{۳}؛ (ب) ۱/۲×۱۰^{۶}، **۵۳-** ^{۲۳۸}U+n→^{۲۳۹}U→^{۲۳۹}Np+e+ν و ^{۲۳۹}Np→^{۲۳۹}Pu+e+ν

فصل ۴۴

نکته‌های وارسی

۱- (الف) خانوادهٔ موئون؛ (ب) یک ذره؛ (پ) $L_\mu=+۱$، **۲-** b و e ، **۳-** c

پرسشها

۱- (الف) ۱؛ (ب) به طور مثبت باردار می‌شود، **۳-** d ، **۵-** b ، c ، d ، **۷-** a ، b ، c ، d ، **۹-** (الف) لپتون؛ (ب) پاد ذره؛ (پ) فرمیون؛ (ت) بلی، **۱۱-** c

مسئله‌ها

۱- ۲/۴pm ، **۳-** ۲/۴×۱۰$^{-۴۳}$ ، **۵-** $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}$ ، **۷-** ۲/۷ cm/s ، **۹-** ۷۶۹ MeV ، **۱۱-** (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای، L_e ؛ (ب) بار، L_μ؛ (پ) انرژی، L_μ ، **۱۳-** (الف) بلی؛ (ب)- (ت) خیر، **۱۵-** (الف) ۰؛ (ب) ۱-؛ (پ) ۰ ، **۱۷-** (الف) انرژی؛ (ب) شگفتی؛ (پ) بار، **۲۱-** (الف) K$^{+۴}$؛ (ب) $\bar{n}$؛ (پ) K$^{\circ}$، **۲۳-** (الف) Ξ°؛ (ب) Σ^-، **۲۵-** $s\bar{d}$ ، **۲۷-** (الف) $\overline{u}\overline{u}d$؛ (ب) $\overline{u}\overline{d}\overline{d}$ ، **۲۹-** (الف) ممکن نیست؛ (ب) uuu ، **۳۱-** ۶۶۸nm ، **۳۳-** ۱/۴×۱۰^{۱۰} ly ، **۳۵-** ۲/۷۷×۱۰^{۸} ly ، **۳۷-** (ب) ۰/۹۳۴؛ (ب) ۱/۲۸×۱۰^{۱۰} ly ، **۳۹-** (الف) ۰/۲۶meV؛ (ب) ۴/۸ mm ، **۴۱-** (الف) ۱۲۱ m/s؛ (ب) ۰/۰۰۴۰۶؛ (پ) ۲۴۸ y ، **۴۳-** (الف) ۲/۶ K؛ (ب) ۹۷۶nm، **۴۷-** ۱/۰۸×۱۰^{۴۲} J ، **۴۹-** (الف) ۰/۷۸۵c؛ (ب) ۰/۹۹۳c؛ (پ) C۲ ؛ (ت) C۱ ؛ (ث) ۵۱ ns ؛ (ج) ۴۰ns، **۵۱-** (پ) $r\alpha/c+(r\alpha/c)^{۲}+(r\alpha/c)^{۳}+\cdots$ ؛ (ت) $r\alpha/c$؛ (ث) $\alpha=H$ ؛ (ج) ۶/۵×۱۰^{۸} ly؛ (چ) ۶/۹×۱۰^{۸} y؛ (ح) ۶/۵×۱۰^{۸} y؛ (خ) ۶/۹×۱۰^{۸} ly ؛ (د) ۱/۰×۱۰^{۹} ly ؛ (ذ) ۱/۱×۱۰^{۹} y ؛ (ر) ۳/۹×۱۰^{۸} ly

واژه‌نامه

ابیراهی رنگی	Chromatic aberration
اتساع زمان	Time dilation
احتمال اشغال شدن	Occupancy probalility
اختروش	Quasar
اشغال شدهٔ جزئی	Partially occupied
آشکارساز	Detector
اصل انحصار	Confinement principle
اصل طرد	Exclusion principle
اصل موضوع	Postulate
اصل همخوانی	Correspondence principle
اصل هویگنس	Huygens' principle
آلاییدن	Doping
الکترون آزاد	Free-electron
الکترون به تله افتاده	Trapped electron
الکترون رسانش	Conduction electron
الکترون ظرفیت	Valence electron
آمار	Statistics
انتشار	Propagation
انتقال به آبی	Blue shift
انتقال به سرخ	Red shift
اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی	Spin angular momentum
انرژی بستگی	Binding energy
انرژی نقطهٔ صفر	Zero point energy
انقباض طول	Length contraction
آونگ پیچشی	Torsion pendulum
آونگ ساده	Simple pendulum
آینهٔ تخت	Plane mirror
آینهٔ کاو	Concave mirror
آینهٔ کروی	Spherical mirror
آینهٔ کوژ	Convex mirror
باریکه شکاف	Beam splitter
بازتاب	Reflection
بایاس مستقیم	Forward-bias
بایاس معکوس	Back-bias
بخشنده	Donor
برهم نهی	Superposition
بزرگنمایی	Magnification
بزرگنمایی خطی	Lateral magnification
بزرگنمایی زاویه‌ای	Angular magnification
بسامد زاویه‌ای	Angular frequency
بسامد	Frequency
بهنجارش	Normalization
پاد ذره	Antiparticle
پاشندگی	Dispersion
پتانسیل توقف	Stopping potential
پذیرنده	Acceptor
پراش	Diffraction
پراشیده	Difftacted
پرتو	Ray
پرتوزا	Radioactive
پرتوهای x	X rays
پرش کوانتومی	Quantum jump
پوش	Envelope
پیوندگاه	Junction
تابش زمینه	Background radiation
تابع موج	Wave function
تابع کار	Work function
تار نوری	Optical fiber
تبدیل	Transformation
تداخل	Interference
تداخل سازنده	Constructive interference
تداخل سنج	Interferometer
تداخل ویرانگر	Destructive interference
تراز صوتی	Sound level
ترازهای انرژی	Energy levels
تشدید مغناطیسی	Magnetic resonance
تشدید	Resonance
تصویر حقیقی	Real image
تصویر مجازی	Virtual image
تصویر	Image
تصویرهای متغیر نوری	Optically variable graphics (OVG)
تفکیک پذیری	Resolvability
تلسکوپ شکستی	Refracting telescope
تمام نگار	Hologram
تمام نگاری	Holography
تندی موج	Wave speed

تهی جا	Vacancy
توان تفکیک	Resolving power
توان متوسط	Average power
توری	Grating
تونل زنی	Tunneling
تکفام	Monochromatic
ثابت پیچش	Torsion constant
ثابت فاز	Phase constant
جابه‌جایی	Displacement
جبهۀ موج	Wavefront
جدول تناوبی	Periodic table
جذب	Absorption
جریان پخشی	Diffusion current
جریان سوقی	Drift current
جمعیت معکوس	Population inversion
جهتمند	Directional
جوشکاری	Welding
چارچوب مرجع لخت	inertial reference frame
چاه متناهی	Finite well
چشمۀ نقطه‌ای	Point source
چگالی احتمال	Probability density
چگالی حالتها	Density of states
چگالی خطی	Linear density
حالت برانگیخته	Excited state
حالت زمینه	Ground state
حاملهای اقلیت	Minority carrier
حاملهای اکثریت	Majority carrier
حرکت تناوبی	Periodic motion
حرکت هماهنگ ساده	Simple harmonic motion
حصار کوانتومی	Quantum corral
حفره	Hole
حلقه‌های نیوتون	Newton’s ringes
خطهای جذبی	Absorption lines
خطهای گسیلی	Emission lines
دو شکاف	Double-slit
دورۀ تناوب	Period
ذرۀ آزاد	Free particle
راه هشتگانه	Eightfold way
راکتور آب – تحت فشار	Pressurized – water reactor
راکتور هسته‌ای	Nuclear reactor

رنگین کمان	Rainbow
رویداد	Event
ریسمان	String
زنش	Beat
زیر لایه	Subshell
سد	Barrier
سراب	Mirage
سیاره	Planet
شبکه	Lattice
شرط مرزی	Boundary condition
شگفتی	Strangeness
شکاف	Slit
شکافت هسته‌ای	Nuclear fission
شکست	Refraction
شکم	Antinode
شیء گسترده	Extended object
ضریب شکست	Index of refraction
طعم	Flavor
طول موج	Wavelength
طول موج قطع	Cutoff wavelength
طیف نما	Spectroscope
طیف– بیناب	Spectrum
عالم	Universe
عایق	Insulator
عدد اتمی	Atomic number
عدد جادویی	Magic number
عدد جرمی	Mass number
عدد موج زاویه‌ای	Angular wave number
عدد هماهنگ	Harmonic number
عدسی نازک	Thin lens
عدسی همگرا	Converging lens
عدسی واگرا	Diverging lens
عمرسنجی	Dating
عمر میانگین	Mean life
فازنما	Phasor
فرا آلاییدن	Overdoping
فرا اورانیومی	Transuranic
فرا صوتی	Supersonic
فروپاشی	Disintegration
فریز	Fringe

فریز تاریک	Dark fringe
فریز روشن	Bright fringe
فعالیت	Activity
فوتو الکترون	Photoelectron
فوتون مجازی	Virtual photon
فیزیک هسته‌ای	Nuclear physics
فیزیک کوانتومی	Quantum physics
گاف	Gap
گرما هسته‌ای	Thermonuclear
گره	Node
گسیل	Emission
گسیل القایی	Stimulated emission
گسیل خود به خود	Spontaneous emission
گشتاور دو قطبی مغناطیسی مؤثر	Effective magnetic dipole moment
لایه	Shell
لایهٔ نازک	Thin film
لکهٔ روشن فرنل	Fresnel bright spot
مادهٔ تاریک	Dark matter
محصورکردن لختی	Inertial confinement
مخروط ماخ	Mach cone
مد نوسانی	Oscillation mode
مدل جمعی	Collective model
مدل ذره – مستقل	Indipendent particle model
مدل مرکب	Combined model
مدول کپه‌ای	Bulk modulus
مرتبه	Order
معیار ریلی	Rayleigh's criterion
مقاومت ویژه	Resistivity
منطقه	Zone
مهبانگ	Big bang
موازی ساز	Collimator
موج احتمال	Probability wave
موج برایند	Resultant wave
موج صوتی	Sound wave
موج ضربه‌ای	Shock wave
موج فرودی	Incident wave
موجهای ایستاده	Standing waves
موجهای پیشرونده	Travelling waves
موجهای طولی	Longitudinal waves
موجهای عرضی	Transverse waves
موجهای ماده	Matter waves
موجک	Ripple
میدان دید	Field of view
میله‌های سوخت	Fuel rods
میکروسکوپ تونل زنی روبشی	Scanning tunneling microscope (STM)
ناظر	Observer
نانو بلورک	Nanocrystallite
ناهمدوس	Incoherent
نسبیت	Relativity
نشت	Leakage
نظریهٔ نسبیت خاص	Special theory of relativity
نظریهٔ کوانتومی	Quantum theory
نقش پراش	Diffraction pattern
نقش تداخلی	Inteference pattern
نقشه برداری	Surveying
نقشهٔ نوکلیدی	Nuclidic chart
نقطه‌های کوانتومی	Quantum dots
نقطهٔ کانونی	Focal point
نوار رسانش	Conduction band
نوار ظرفیت	Valence band
نوترون سریع	Fast neutron
نوترون گرمایی	Thermal neutron
نوسان	Oscillation
نوکلئون (هستک)	Nucleon
نیروگاه هسته‌ای	Nuclear plant
نیروهای کولنی	Coulomb farces
نیروی الکتروضعیف	Electroweak force
نیروی قوی	Strong force
نیروی میرایی	Damping force
نیروی هسته‌ای	Nuclear force
نیم – عمر	Half-life
نیم پهنا	Half-width
نیمرسانا	Semiconductor
هزارتو	Maze
هسته	Nucleus
هماهنگ	Harmonic
همجوشی	Fusion
همدوس	Coherent

همدوسی	Coherence
همزمانی	Simultaneity
واپاشی	Decay
واپاشی آلفا	Alpha decay
واپاشی بتا	Beta decay
واکنش زنجیره‌ای	Chain reaction
ویژه بسامد	Proper frequency
ویژه زمان	Proper time
ویژه طول	Proper length
کاملاً اشغال شده	Fully occupied
کانون	Focus
کندساز	Moderator
کهکشان	Galaxy
کوارک افسون	Charm quark
کوارک بالا	Up quark
کوارک پایین	Down quark
کوارک ته	Bottom quark
کوارک شگفت	Strange quark
کوانتومها	Quanta
یاختهٔ یکه	Unit cell

نمایه